Г. Г. САЮСАРЕВ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г. Г. СЛЮСАРЕВ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Издание второе,
дополненное и переработанное

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МАШИНОСТРОЕНИЕ“
ЛЕНИНГРАД 1969

УДК 53 087.352.001.1 24

Методы расчета оптических систем. Изд. 2-е, доп. и перераб. Слюсарев Г. Г., изд-во «Машиностроение», 1969, 672 стр. Табл. 57. Илл. 201. Библ. 69 назв.

За 30 лет, прошедших со времени выхода первого издания, в прикладной (вычислительной) оптике произошли большие изменения: появились новые области применения оптических систем, новая методика расчета, на которую повлияло появление электронно-вычислительных машин, в практику вошел ряд новых систем, усовершенствовалась методика оценки качества изображения, понятие разрешающей способности получило дальнейшее развитие. Все это вызвало полную переработку книги.

Во втором издании заново написаны главы, посвященные методике автоматического расчета систем, основам расчета допусков в оптических системах, оценке качества изображения, влиянию изменения температуры на изображение, полностью переработаны сведения по расчету хода лучей, аберрациям третьего порядка, предварительному расчету конструкций систем, общей методике расчета систем.

Книга предназначена для инженерно-технических работников — вычислителей и конструкторов оптических систем и широкого круга инженерных работников оптической промышленности.

Made with ScanKromsator

Рецензент д-р физ.-матем. наук проф. *Д. Ю. Гальперн*

3—13—6
84—69

ПРЕДИСЛОВИЕ

За тридцать лет со времени выхода первого издания монографии «Методы расчета оптических систем» произошли большие изменения в прикладной (вычислительной) оптике. Значительно расширилась спектральная область применения оптических систем, для чего понадобились не только новые материалы, но даже и новая методика расчета, например для рентгеновского диапазона. Требования к апертурным углам ряда оптических систем типа коллективов и конденсоров достигли пределов возможного —90°, а вместе с тем система не должна содержать более одной-двух линз.

Применение асферических поверхностей уже не является таким редким явлением, каким оно было 30 лет назад, и теория оптических систем с асферическими поверхностями получила заметное развитие; особенно пришлось усовершенствовать методику практических расчетов таких систем.

Но главным событием последних лет оказалось создание быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ), от которых помимо значительного сокращения времени на расчет хода лучей (что привело к возможности не считаться с числом лучей и вычислять на бумаге важнейшие характеристики качества изображения, даваемого оптическими системами) можно было ожидать полной автоматизации расчетов. Однако опыт работы с такими машинами показал, что эти надежды пока преждевременны. Лишь глубокое знание аберрационных свойств оптических систем позволяет направить работу электронных вычислительных машин таким образом, чтобы в малые сроки добиться нужных результатов. Появление машин не умалило значения теории аберраций; наоборот, оно привело к необходимости углубления этой теории в некоторых направлениях, например в области аберраций и исследования свойств систем с асферическими поверхностями. Электронные вычислительные машины значительно ускорили расчеты таких простых систем, как объективы зрительных труб, и в этой области достигнута почти полная автоматизация. Расчеты сложных оптических систем, как, например, объективов с переменным фокусным расстоянием, нашедших в последнее время широкое применение в области фотографии, кинематографии и телевидения,

из-за непомерного количества вычислений неосуществимы без помощи этих машин.

Необходимость использования оптических приборов за пределами нижних слоев атмосферы поставила перед оптической промышленностью новые задачи, в том числе разработку новых групп оптических систем, работающих в условиях значительных изменений температуры. В последние годы советскими и зарубежными авторами создана теория расчета оптических систем, не расстраивающихся при изменении температуры.

В связи с увеличением светосилы оптических систем и повышением требований к разрешающей способности последних потребовались более совершенные приемы оценки качества изображения, даваемого этими системами; сложность расчетов, необходимых для этой оценки, уже не страшна после появления ЭВМ. Пришлось более подробно изучить вопросы влияния децентрировки и других ошибок изготовления, а также дефектов материалов на качество изображения.

Во 2-е издание книги введены новые главы: влияние температуры на положение изображения и на аберрации оптических систем, расчет допусков в оптических системах, в том числе и допусков на децентрировку; глава об оценке качества изображения; о системах, содержащих асферические поверхности, в том числе поверхности с двойной кривизной, из которых составляются анаморфоты. Большое место уделено главе, трактующей о применении ЭВМ к расчету оптических систем и об автоматизации этих расчетов.

Хотя некоторые главы, в том числе I, II и III, по названию совпадают с соответствующими главами 1-го издания, они подверглись коренной переработке. Исправлены замеченные опечатки, добавлены формулы и графики, оказавшиеся полезными на практике, в частности ряд формул для вычисления волновых аберраций на основании продольных и поперечных; значительно сокращены разделы, относящиеся к мало применяемой в настоящее время методике тригонометрического расчета хода лучей, а также некоторые другие, необходимость которых не подтвердилась практикой.

Гл. VII написана канд. техн. наук А. П. Грамматиным, п. 13 гл. VIII составлен д-ром техн. наук Г. В. Погаревым.

Большую помощь при собирании и обработке материала оказали Г. Г. Костина и А. И. Слюсарева. Автор выражает им, а также всем сотрудникам отдела, помогавшим ему советами и замечаниями, глубокую благодарность.

ГЛАВА I

РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИЗ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Расчет оптических систем во всех мыслимых случаях состоит из двух этапов. На первом этапе тем или иным способом ищут приближенное решение, используя чаще всего теорию аберраций третьего порядка, а на втором этапе путем постепенных улучшений, достигаемых на основании контрольных расчетов хода большого числа лучей через первоначальный и слегка измененные варианты системы, добиваются окончательного решения, отвечающего всем поставленным условиям. Поэтому расчет хода лучей через исследуемую систему занимает, как правило, от 50 до 90% всей работы. Чем система сложнее, чем больше ее апертурные и полевые углы, тем больше времени тратится на ее корректировку.

Одним из основных вопросов методики расчета является разработка такого способа расчета хода лучей, который, будучи быстрым и удобным, позволил бы по виду промежуточных величин судить о роли тех или других поверхностей в образовании аберраций и т. д.

До 50-х годов нашего столетия методика расчета хода лучей через оптические системы, так же как и общая методика большинства точных вычислений (требующих 5—7-значных чисел), основывалась на использовании таблиц логарифмов; для расчетов применялись формулы, удобные для логарифмирования.

Подробно описанная в первом издании этой книги, а также в большом количестве отечественных и зарубежных источников методика тригонометрического расчета, широко применявшаяся начиная со времен Пецваля (середина XIX в.), впервые начавшего рассчитывать оптические системы на бумаге, во второй половине XX в. (после появления ЭВМ) стала сходить на нет.

Малопригодность для ЭВМ существующих схем расчетов хода лучей объясняют следующие причины: 1) обилие переходов от углов к синусам и тангенсам и обратно, требующих большого числа операций на ЭВМ; 2) зависимость точности результатов от величины радиусов поверхностей, которые, как правило, принимают самые различные значения; 3) необходимость специальных формул для случая плоских и близких к плоским поверхностей; 4) значительное усложнение схемы расчета при наличии асферических поверхностей. В свя с этим было разработано несколько приемов

расчета, свободных от этих недостатков. Среди них следует отметить прием Федера, который будет описан подробно несколько ниже. Принимая во внимание, что еще не все предприятия, занимающиеся оптическими расчетами, имеют в своем распоряжении ЭВМ, приведем формулы, получившие распространение во времена Пецваля, опуская всю теорию погрешностей, присущих им, так как она подробно изложена в первом издании этой книги (гл. I) и в настоящее время не представляет практического интереса.

Рассмотрим сначала системы, состоящие из сферических поверхностей.

2. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧА В МЕРИДИОНАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Обозначения и знаки

В 1955 г. был выпущен Государственный стандарт обозначения основных величин, встречающихся в геометрической оптике. В этом стандарте приняты обозначения, применяемые в отечественных вычислительных отделах, в основном совпадающие с обозначениями немецких и русских авторов.

Рис. I.1

Пусть OO_1 (рис. I.1) — оптическая ось системы; MS — луч, падающий на сферическую поверхность AM; M, S — точки пересечения луча с поверхностью и с осью; C — центр кривизны поверхности AM; A — вершина поверхности; MS' — луч, преломленный поверхностью AM. Введем следующие обозначения: отрезок AS обозначим через s; радиус кривизны $AC = MC$ — через r; показатель преломления среды, в которой находится падающий луч, — через n; угол луча с осью $\angle MSA$ — через u; угол нормали с осью $\angle MCO$ — через φ; угол луча с нормалью $\angle SMC$ — через i; соответствующие величины после преломления обозначаются теми же буквами, но со штрихами (s', n', u', i').

Большое значение имеют *правила знаков*. Условимся чертить все схемы таким образом, чтобы лучи света распространялись слева направо, и будем считать положительным это направление распространения света. За начало отрезков AC и AS примем вершину A; таким образом, s и r положительны, когда S и C лежат вправо от A. Углы u и u' будем считать положительными, если для совмещения луча с положительным направлением оптической оси OO_1 луч нужно вращать против часовой стрелки; углы i и i' положительны, если луч нужно поворачивать против часовой

стрелки для совмещения с нормалью MC, причем за начало нормали принимаем точку M.

В случае, показанном на рис. I.1, все отрезки и углы положительны. Следует заметить, что правило знаков для углов i и i' отличается от принятого в книгах Рора [1], Чапского и Эппенштейна [2] и др.

Формулы

Положение луча определяется двумя координатами — s и u. Предположив s и u известными, вычислим координаты s' и u' преломленного луча.

Треугольник MSC дает

$$\sin i = \frac{SC}{MC} \sin u = \frac{r-s}{r} \sin u. \qquad (I.1)$$

Из закона преломления получаем

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i. \qquad (I.2)$$

Рис. I.2

Угол u' (после преломления) отличается от u на величину отклонения $i'-i$:

$$u' = u + i' - i. \qquad (I.3)$$

Треугольник $MS'C$ дает

$$r - s' = \frac{r \sin i'}{\sin u'}. \qquad (I.4)$$

Четыре приведенные формулы решают задачу для случая одной преломляющей поверхности, так как они дают s' и u' по известным s и u.

Для определения хода луча через всю оптическую систему необходимо иметь еще формулы для перехода от одной поверхности, например κ-й, на $(\kappa + 1)$-ю.

Пусть (рис. I.2) $M_\kappa S'_\kappa$ — луч, падающий на $(\kappa + 1)$-ю поверхность $O_{\kappa+1}M_{\kappa+1}$ после преломления через κ-ю поверхность $O_\kappa M_\kappa$. Из чертежа имеем

$$s_{\kappa+1} = s'_\kappa - d_\kappa; \qquad (I.5)$$

$$u_{\kappa+1} = u'_\kappa, \qquad (I.6)$$

где d_κ — расстояние между вершинами поверхностей с номерами κ и $\kappa + 1$. Кроме того,

$$n_{\kappa+1} = n'_\kappa. \qquad (I.7)$$

Уравнения (I.5)—(I.7) решают вопрос о переходе от одной поверхности к другой. Удобно для вычисления ввести вспомогательную величину $A_\kappa = r_{\kappa+1} - r_\kappa + d_\kappa$ — расстояние между двумя последовательными центрами поверхностей κ и $\kappa + 1$ (на рис. I.2 $A_\kappa = C_\kappa C_{\kappa+1}$); тогда величина $r_{\kappa+1} - s_{\kappa+1}$ выражается через величины $r_\kappa - s'_\kappa$ и A_κ согласно формуле

$$r_{\kappa+1} - s_{\kappa+1} = r_\kappa - s'_\kappa + A_\kappa. \qquad (I.5^*)$$

Формула (I.5*) заменяет формулу (I.5), сокращая несколько схему вычислений.

Параксиальные лучи

Основные формулы. Если луч проходит через всю оптическую систему на бесконечно малых расстояниях от оптической оси, то он называется *параксиальным* (нулевым или осевым). Так как углы, которые параксиальный луч образует с осью и с нормалями, также бесконечно малы, то для расчета хода параксиального луча через систему можно использовать формулы (I.1)—(I.4), заменяя синусы весьма малыми углами:

$$i = \frac{r - s}{r} u; \qquad (I.1^*)$$

$$i' = \frac{n}{n'} i; \qquad (I.2^*)$$

$$u' = u + i' - i; \qquad (I.3^*)$$

$$r - s' = r \frac{i'}{u'}. \qquad (I.4^*)$$

Формулы перехода от поверхности κ к поверхности $\kappa+1$ те же, что и для обыкновенного луча, т. е. (I.5) и (I.6).

Ясно, что результат вычислений — величина s' — не изменяется, если все углы увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, т. е. результат не зависит от выбора единицы углов; поэтому параксиальный угол u_1 может быть взят произвольным. Вычисления удобно вести по той же схеме, как и вычисления для луча, образующего конечные углы с осью, с помощью тех же таблиц логарифмов; в обоих случаях встречаются общие величины, как, например, логарифмы радиусов кривизны, отношения показателей преломления, величины A_κ. Однако, когда нужно вычислить только значения s и s' для параксиальных лучей, лучше применять другие формулы, в особенности если пользоваться арифмометром. Эти формулы получаются из основной формулы преломления через поверхность с радиусом кривизны r

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}.$$

Умножая обе части на h (расстояние $\overline{MH}$ на рис. I.1) и обозначая отношения $\frac{h}{s} = u$, $\frac{h}{s'} = u'$ [«параксиальные углы», аналогичные тем, какие встречались в формулах (I.1*) —(I.4*)], получаем

$$n'u' - nu = \frac{h(n' - n)}{r}$$

или, вводя значки, указывающие номер поверхности преломления,

$$n_{\kappa+1}u_{\kappa+1} - n_\kappa u_\kappa = \frac{h_\kappa}{r_\kappa}(n_{\kappa+1} - n_\kappa). \qquad (I.8)$$

Рис. I.3

Для перехода от высоты на поверхности κ к высоте на поверхности с номером $\kappa+1$ рассмотрим рис. I.3, где начерчены две последовательные поверхности $A_\kappa M_\kappa$ и $A_{\kappa+1}M_{\kappa+1}$, разделенные промежутком $A_\kappa A_{\kappa+1} = d_\kappa$. Луч BCD после преломления через поверхность $A_\kappa M_\kappa$ падает на поверхность $A_{\kappa+1}M_{\kappa+1}$, образуя с осью угол $u_{\kappa+1}$. Из рис. I.3 видно, что

$$h_{\kappa+1} = h_\kappa - d_\kappa u_{\kappa+1}. \qquad (I.9)$$

Формулы (I.8) и (I.9) позволяют вести расчет хода луча через всю систему. Величины $s_{\kappa+1}$ и s'_κ определяются соотношениями

$$s_{\kappa+1} = \frac{h_{\kappa+1}}{u_{\kappa+1}};$$

$$s'_\kappa = \frac{h_\kappa}{u_{\kappa+1}},$$

легко получаемыми из чертежа.

Для практических вычислений удобнее ввести вместо переменных u переменные nu; обозначив их буквой v, имеем

$$v_{\kappa+1} - v_\kappa = \frac{h_\kappa}{r_\kappa}(n_{\kappa+1} - n_\kappa);$$

$$h_{\kappa+1} = h_\kappa - \frac{d_\kappa}{n_{\kappa+1}} v_{\kappa+1}.$$

Формулы для расчета хода параксиального луча через систему бесконечно тонких соприкасающихся линз. Во многих случаях при предварительных расчетах хода луча в сложных системах можно принять для упрощения, что отдельные части системы являются сложными линзами, состоящими из нескольких бесконечно тонких соприкасающихся простых линз. Обозначим оптическую силу одной из таких сложных линз с номером i буквой φ; из теории идеальных оптических систем известно, что

$$\varphi_i = \sum \frac{n_{\kappa+1} - n_\kappa}{r_\kappa},$$

где суммирование распространяется на все поверхности линзы i. Для всех линз группы i высоты h пересечения луча со всеми поверхностями компонента равны одной и той же величине h_i. Применяя формулу (I.8) последовательно ко всем поверхностям компонента и складывая все полученные уравнения, получаем

$$\alpha_i' - \alpha_i = h_i \varphi_i;$$

$$h_{i+1} = h_i - d_i \alpha_i',$$

где α_i и α_i' — углы с осью параксиального луча до и после преломления через линзу i; d_i — расстояние между компонентом i и компонентом $i+1$.

Применяя последовательно эти формулы ко всем линзам системы, можно рассчитать ход параксиального луча через систему бесконечно тонких линз.

Как известно, эти же формулы могут применяться для системы линз конечной толщины, но в этом случае нужно понимать под h_i высоты пересечения луча с главными плоскостями линзы. Кроме того, оптическая сила φ_i системы линз конечной толщины должна быть получена точным расчетом хода параксиального луча, падающего на нее параллельно оптической оси.

Соотношения, связывающие координаты двух параксиальных лучей. Если рассчитан ход одного произвольного параксиального луча через оптическую систему, то координаты любого другого параксиального луча связаны с координатами первого формулой

$$Q_{\kappa x} - Q_{\kappa s} = \frac{h_{\kappa-1} y_{\kappa-1}}{h_\kappa y_\kappa} (Q_{\kappa-1,\,x} - Q_{\kappa-1,\,s}), \qquad (I.10)$$

где $Q_{\kappa x}$ и $Q_{\kappa s}$ — нулевые инварианты первого и второго лучей для κ-й поверхности, т. е. выражения следующего вида:

$$Q_{\kappa s} = n_\kappa \left(\frac{1}{r_\kappa} - \frac{1}{s_\kappa} \right) = n_{\kappa+1} \left(\frac{1}{r_\kappa} - \frac{1}{s_\kappa'} \right);$$

$$Q_{\kappa x} = n_\kappa \left(\frac{1}{r_\kappa} - \frac{1}{x_\kappa} \right) = n_{\kappa+1} \left(\frac{1}{r_\kappa} - \frac{1}{x_\kappa'} \right);$$

s и x — расстояния от вершины поверхности κ до точек пересечения с осью первого и второго параксиальных лучей; h и y — высоты пересечения с поверхностью κ первого и второго лучей. Величины y_κ могут быть последовательно исключены из формулы (I.10) при помощи формулы

$$\frac{y_\kappa}{y_1} = \frac{h_\kappa}{h_1} + h_1 h_\kappa (Q_{1\nu} - Q_{1s}) \sum_{\nu=2}^{\nu=\kappa} \frac{d_{\nu-1}}{n_\nu h_\nu h_{\nu-1}}. \qquad (I.11)$$

Вывод этих двух формул, принадлежащих Зейделю, можно найти в книгах Рора [1] и Чапского и Эппенштейна [2]; он будет дан в гл. II (см. стр. 93—96). Формулы (I.10) и (I.11) вследствие своей сложности не применяются непосредственно для расчета хода лучей, но они имеют большое значение в некоторых преобразованиях выражений аберраций третьего порядка; в системах, состоящих из конечного числа бесконечно тонких групп линз (впоследствии мы их будем называть компонентами), эти формулы значительно упрощаются и могут быть полезными.

Рис. I.4

Определение кардинальных точек оптической системы по координатам двух произвольных параксиальных лучей. Наиболее простой способ определения положения кардинальных точек (главных точек и фокусов) состоит в расчете хода двух параксиальных лучей, входящих в систему параллельно оси: одного в положительном направлении, т. е. слева направо (прямой ход), другого — в противоположном направлении, т. е. справа налево (обратный ход). Расстояния $s'_{F'}$ и $\overleftarrow{s}_F$ (рис. I.4) между вершинами O и O' системы и точками пересечения луча с осью в прямом ($s'_{F'}$) и в обратном ($\overleftarrow{s}_F$) ходе дают положение фокусов (заднего и переднего), отношения же $\frac{h_1}{u'_p} = f'$ и $\frac{\overleftarrow{h}_1}{\overleftarrow{u}'_p} = f$ дают величины фокусных расстояний (заднего и переднего). Положения главных точек относительно последней (для задней точки) и первой (для передней главной точки) поверхностей определяются отрезками t' и t. Величины t' и t считаются положительными, если главная точка лежит вправо от соответственной вершины. Например, на рис. I.4

$t > 0$, а $t' < 0$:

$$t' = s'_{F'} - f';$$

$$t = -f + \overleftarrow{s}_F.$$

При расчете луча в обратном ходе принимаем

$$\overleftarrow{r}_1 = -r_p;\ \overleftarrow{r}_2 = -r_{p-1};\ldots$$

$$\overleftarrow{n}_1 = n_{p+1};\ \overleftarrow{n}_2 = n_p;\ \ldots$$

$$\overleftarrow{d}_1 = d_{p-1};\ \overleftarrow{d}_2 = d_{p-2};\ \ldots$$

Вместо двух указанных специально выбранных лучей для определения положения кардинальных точек можно воспользоваться

Рис. I.5

расчетом хода двух *произвольных* параксиальных лучей; зная начальные координаты s_1 и u_1, $\bar{s}_1$, $\bar{u}_1$ и конечные координаты s'_p и u'_p, $\bar{s}'_p$ и $\bar{u}'_p$ этих лучей, можно получить требуемые величины f, f', t и t'.

Обозначим через S и S' (рис. I.5) точки пересечения с осью первого из этих параксиальных лучей до и после преломления. Пусть $HS = -\xi_1$ и $H'S' = \xi'_p$ — расстояния от главных плоскостей до точек S и S'. Соответственные величины для точек пересечения с осью второго луча обозначим $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}'_p$. Два основных уравнения гауссовой оптики дают для первого луча

$$\frac{f}{\xi_1} + \frac{f'}{\xi'_p} = 1; \qquad \frac{\xi'_p}{\xi_1} = \frac{u_1}{u'_p};$$

для второго

$$\frac{f}{\bar{\xi}_1} + \frac{f'}{\bar{\xi}'_p} = 1; \qquad \frac{\bar{\xi}'_p}{\bar{\xi}_1} = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}'_p}.$$

Из этой системы уравнений получаем

$$\frac{u_p'}{u_1} f' + f = \xi_1.$$

Обозначим через s_1 и s_p' расстояния от вершин до точек S и S' и через $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_p'$ соответственные величины для второго луча.

Из рис. I.5 видно, что $\xi_1 = s_1 - t$, $\xi_p' = s_p' - t'$.

Следовательно,

$$\frac{u_p'}{u_1} f' + f = s_1 - t.$$

Для второго луча

$$\frac{\bar{u}_p'}{\bar{u}_1} f' + f = \bar{s}_1 - t.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$f' \left(\frac{\bar{u}_p'}{\bar{u}_1} - \frac{u_p'}{u_1} \right) = \bar{s}_1 - s_1,$$

откуда находим

$$f' = \frac{\bar{s}_1 - s_1}{\frac{\bar{u}_p'}{\bar{u}_1} - \frac{u_p'}{u_1}}; \qquad f = \frac{\bar{s}_p' - s_p'}{\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_p'} - \frac{u_1}{u_p'}}. \tag{I.12}$$

Зная f и f', легко определить t и t':

$$\left.\begin{aligned} t &= s_1 - \frac{u_p' f' + u_1 f}{u_1} = - \frac{\bar{u}_p' f' + \bar{u}_1 f}{\bar{u}_1} + \bar{s}_1; \\ t' &= s_p' - \frac{u_p' f' + u_1 f}{u_p'} = \bar{s}_p' - \frac{\bar{u}_p' f' + \bar{u}_1 f}{\bar{u}_p'}. \end{aligned}\right\} \tag{I.13}$$

Для контроля вычислений фокусных расстояний может служить формула

$$n_1 f' + n_p' f = 0, \tag{I.14}$$

Формулы (I.13), выражающие t и t' двумя различными способами, иного контроля не требуют.

Расчет хода лучей по Смиту

Т. Смит [3] предложил метод расчета, не требующий применения тригонометрических таблиц и пригодный для вычислений на арифмометре. Положение луча определяется синусом угла u и длиной p перпендикуляра OH, опущенного на луч MS (рис. I.6). Определим величину p в зависимости от углов u и i.

Длина отрезка $\overline{OM}$ равна $2r\sin\frac{\varphi}{2}$. Из треугольника OMH получаем $p = \overline{MO}\cos\angle MOH$; так как $\angle MOH = u - \frac{\varphi}{2}$, то $p = \overline{MO}\cos\left(u - \frac{\varphi}{2}\right) = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(u - \frac{\varphi}{2}\right)$. Но $\varphi = u - i$, поэтому $u - \frac{\varphi}{2} = \frac{u+i}{2}$.

Следовательно,

$$p = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{u+i}{2}; \tag{I.15}$$

аналогично

$$p' = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{u'+i'}{2}. \tag{I.16}$$

Разность $p' - p = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{u'+i'}{2} - \cos\frac{u+i}{2}\right)$. Но

$$\cos\frac{u'+i'}{2} - \cos\frac{u+i}{2} = -2\sin\frac{u+u'+i+i'}{4}\sin\frac{u'-u+i'-i}{4}.$$

Рис. I.6

Ввиду того, что $u' - u = i' - i$ и $u + i' = u' + i$,

$$\cos\frac{u'+i'}{2} - \cos\frac{u+i}{2} = -2\sin\frac{u+i'}{2}\sin\frac{i'-i}{2}.$$

Следовательно,

$$p' - p = -4r\sin\frac{\varphi}{2}\sin\times\frac{u+i'}{2}\sin\frac{i'-i}{2}. \tag{I.17}$$

Вводя в правую часть последней формулы выражение для p из формулы (I.15), получаем

$$p' - p = -2p\frac{\sin\frac{u+i'}{2}\sin\frac{i'-i}{2}}{\cos\frac{u+i}{2}}. \tag{I.18}$$

Все дальнейшие преобразования имеют целью освободиться от комбинаций углов $u + i'$, $i' - i$, $u + i$ и т. д. и оставить только величины $\sin i$, $\sin i'$, $\sin u$ и $\sin u'$, что позволит обойтись без тригонометрических таблиц.

Замечая, что

$$\sin\frac{i'-i}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin i' - \sin i}{\cos\frac{i+i'}{2}},$$

$$\sin\frac{u+i'}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin u + \sin i'}{\cos\frac{u-i'}{2}},$$

и подставляя эти выражения в формулу для $p'-p$, имеем

$$p'-p=-p\frac{(\sin i'-\sin i)(\sin u+\sin i')}{2\cos\frac{i+i'}{2}\cos\frac{u-i'}{2}\cos\frac{u+i}{2}}. \qquad (I.19)$$

Преобразуем теперь знаменатель, преследуя указанную выше цель.

В курсах тригонометрии выводится соотношение

$$4\cos a\cos b\cos c=\cos(a+b-c)+\cos(a-b+c)+$$
$$+\cos(-a+b+c)+\cos(a+b+c).$$

Применяя его для выражения, стоящего в знаменателе, получаем

$$4\cos\frac{i+i'}{2}\cos\frac{u-i'}{2}\cos\frac{u+i}{2}=1+\cos(i+i')+$$
$$+\cos(u-i')+\cos(u+i).$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\sin i'-\sin i+\sin u;\\ \tau&=\cos i'+\cos i+\cos u\end{aligned}\right\} \qquad (I.20)$$

и составляя выражение $\sigma^2+\tau^2-1$, имеем

$$\tau^2+\sigma^2-1=2[1+\cos(i+i')+\cos(u+i)+\cos(u-i')]. \qquad (I.21)$$

Таким образом, знаменатель формулы (I.19) для $p'-p$ принимает вид $^1/_4(\tau^2+\sigma^2-1)$ и окончательно

$$p'-p=-4p\frac{(\sin i'-\sin i)(\sin u+\sin i')}{\tau^2+\sigma^2-1}. \qquad (I.22)$$

Последняя формула позволяет переходить от p к p'.

Отметим, что величина $p'-p$ всегда мала, порядка продольных аберраций луча. Ее можно вычислять с точностью на два порядка меньшей, чем остальные величины ($\sin u$, $\sin u'$, $\sin i$, $\sin i'$).

Между величинами p и s существует зависимость

$$p=s\sin u.$$

Величины p и $\sin i$ связаны соотношением $\sin i=\sin u-\frac{p}{r}$, которое получается из основной формулы расчета

$$\sin i=\frac{r-s}{r}\sin u=\sin u-\frac{s\sin u}{r}=\sin u-\frac{p}{r}.$$

Переход к $\sin u'$ происходит с помощью аналогичной формулы

$$\sin u'=\frac{p'}{r}+\sin i'=\sin i'+\frac{p}{r}+\frac{p'-p}{r}.$$

Последнюю формулу можно написать и так:

$$\sin u' = \sin u + \sin i' - \sin i + \frac{p' - p}{r}$$

или

$$\sin u' = \sigma + \frac{p' - p}{r}.$$

Переход от поверхности с номером κ к поверхности с номером $\kappa + 1$ выполняется согласно формуле, вытекающей из рис. I.7:

Рис. I.7

$$p_{\kappa+1} = p'_\kappa - d_\kappa \sin u'_\kappa.$$

Таким образом, для расчета хода луча имеем последовательность формул:

для первой поверхности

$$p_1 = s_1 \sin u_1;$$

для любой поверхности

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ \sin i = \sin u - \frac{p}{r};\\
&2.\ \sin i' = \frac{n}{n'} \sin i;\\
&3.\ \sigma = \sin u + \sin i' - \sin i;\\
&4.\ \tau = \cos u + \cos i' + \cos i;\\
&5.\ p' - p = -4p\,\frac{(\sin i' - \sin i)(\sin u + \sin i')}{\tau^2 + \sigma^2 - 1};\\
&6.\ \sin u' = \sigma + \frac{p' - p}{r};
\end{aligned}\right\} \qquad (I.23)$$

для перехода

$$7.\ p_{\kappa+1} = p'_\kappa - d_\kappa \sin u'_\kappa. \qquad (I.24)$$

Для удобства вычислений необходимо иметь таблицу значений косинусов по данным синусам. Точность в 0,0001 является вполне достаточной при шестизначных вычислениях.

Преимущества формул Смита по сравнению с обычными, приведенными выше, следующие.

1. Эти формулы приспособлены для вычислений с помощью счетных машин.

2. Они не требуют применения таблиц, за исключением четырехзначной таблицы перехода от синусов к косинусам.

3. Наиболее ответственная часть вычислений, а именно переход от p к p', требует в большинстве случаев не более четырехзначной точности.

4. Величина $p'—p$ пропорциональна поперечной аберрации луча на той поверхности, для которой она вычисляется. Это позво-

ляет определить, на каких поверхностях возникают аберрации оптической системы, выяснить их причины и принять меры к их устранению.

5. Вычисления, производимые по формулам Смита, в отличие от вычислений по обычным тригонометрическим формулам не теряют точности при больших радиусах кривизны. Они пригодны и для того предельного случая, когда радиус поверхности делается бесконечным, т. е. поверхность становится плоской, и это свойство формул делает их пригодными для расчета с помощью автоматических машин, так как в данном случае весьма нежелательна необходимость перехода с одних формул на другие при переходе к плоским (или близким к плоским) поверхностям.

Главным недостатком формул Смита является их громоздкость, удлиняющая процесс вычисления. Кроме того, могут встретиться такие случаи, когда четырехзначная точность при вычислении разности $p'-p$ недостаточна. Это происходит тогда, когда углы i и i' имеют противоположные знаки (отражение) или $\sin u + \sin i'$ принимает большое абсолютное значение, что может случиться в системах с большими углами поля зрения или значительными апертурами. В оптических системах, содержащих отражающие поверхности, применение формул Смита требует особых предосторожностей, в частности увеличения числа знаков до пяти или шести при вычислении разности $p'-p$. Тогда четырехзначные таблицы для вычисления косинуса по известному значению синуса должны быть заменены таблицами, содержащими большее число знаков, а может быть, выгодно обойтись без таблиц и вычислить косинус по формуле $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

3. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Расчет хода лучей в пространстве с помощью формул аналитической геометрии

Рассмотрим формулы, позволяющие решать задачи, связанные с расчетом хода лучей через оптическую систему более общего типа, чем рассматриваемые до сих пор.

Решим сначала такую задачу. Предположим, что известны направление падающего луча, направление нормали и показатели преломления двух сред, ограничивающих преломляющую поверхность. Определим направление преломленного луча.

Рассмотрим сферический треугольник XNU (рис. I.8), в котором x — точка, соответствующая направлению оси x; N — точка, соответствующая направлению нормали; U и U' — точки, соответствующие направлениям падающего и преломленного лучей.

Обозначим через α, β и γ косинусы углов, образуемых направлением U с осями Ox, Oy, Oz; через α', β' и γ' — направляющие косинусы углов, образуемых направлением U' (преломленным

лучом); через λ, μ и ν — направляющие косинусы нормали к преломляющей поверхности в точке пересечения луча с поверхностью; через N_x — угол между нормалью и осью X.

В сферическом треугольнике XNU имеем

$$\alpha = \lambda \cos i + \sin i \sin N_x \cos \angle XNU;$$

$$\alpha' = \lambda \cos i' + \sin i' \sin N_x \cos \angle XNU.$$

Умножая первое уравнение на $-n$, второе на n' и складывая, получаем

$$n'\alpha' - n\alpha = (n' \cos i' - n \cos i)\lambda. \qquad (I.25)$$

Положим для краткости $n' \cos i' - n \cos i = \Delta$; тогда $n'\alpha' - n\alpha = \lambda\Delta$.

Рис. I.8

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} n'\beta' - n\beta &= \mu\Delta; \\ n'\gamma' - n\gamma &= \nu\Delta. \end{aligned}\right\} \qquad (I.25^*)$$

Последовательность вычислений такова:

1) вычисляется i по формуле

$$\cos i = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu; \qquad (I.26)$$

2) вычисляется i' по формуле

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i; \qquad (I.27)$$

3) вычисляется Δ по формуле

$$\Delta = n' \cos i' - n \cos i; \qquad (I.28)$$

4) вычисляются α', β' и γ' по формулам

$$\left.\begin{aligned} n'\alpha' &= n\alpha + \lambda\Delta; \\ n'\beta' &= n\beta + \mu\Delta; \\ n'\gamma' &= n\gamma + \nu\Delta. \end{aligned}\right\} \qquad (I.29)$$

Напоминаем, что положительное направление нормали совпадает с положительным направлением распространения света. Формулы (I.29) для луча, лежащего в меридиональной плоскости, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} n' \sin u' - n \sin u &= \frac{h}{r}\Delta; \\ n' \cos u' - n \cos u &= \Delta \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (I.29^*)$$

Последняя группа формул решает поставленную задачу. Она имеет простое геометрическое толкование.

Пусть L — единичный вектор, изображающий падающий луч, проекции которого на оси суть α, β, γ; L' — вектор, изображающий преломленный луч, с проекциями α', β', γ'; N — вектор нормали с проекциями λ, μ, ν.

Группа формул (I.29) может быть заменена одной векториальной формулой

$$n'\vec{A}' = n\vec{A} + \Delta\vec{N}. \qquad (I.30)$$

Направление вектора N совпадает с направлением распространения света.

Эта формула удобна в тех случаях, когда направление векторов N, A и A' не зависит от положения лучей, например при вычислении хода лучей через призмы или системы призм. Заметим, что в случае отражения лучей нужно считать $n' = -n$ и учесть изменение направления распространения света.

Тогда уравнение (I.30) принимает вид

$$A' = A - 2N\cos i. \qquad (I.31)$$

Положительным направлением вектора N считается то, которое совпадает с направлением распространения *отраженного* света.

Приведем одно преобразование выражения $\Delta = n'\cos i' - n\cos i$, которое может быть полезно в некоторых случаях.

Возведем в квадрат все уравнения (I.29) и сложим. Ввиду ортогональности осей имеем

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1;$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Кроме того,

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos(i' - i).$$

Принимая во внимание последние соотношения, получаем

$$n'^2 - 2nn'\cos(i' - i) + n^2 = \Delta^2. \qquad (I.32)$$

Формула (I.30) является основной для метода расчета хода косого луча через систему сферических, а также несферических поверхностей, предложенного И. В. Лебедевым [4].

Пусть α_κ, β_κ, γ_κ и $\alpha_{\kappa+1}$, $\beta_{\kappa+1}$, $\gamma_{\kappa+1}$ — направляющие косинусы падающего и преломленного лучей; обозначим через x_κ, y_κ, z_κ координаты точки пересечения луча с поверхностью κ, отнесенные к центру кривизны; пусть r_κ — радиус кривизны κ-й поверхности.

Угол падения i определяется из уравнения

$$\cos i = \alpha_{\kappa+1}\frac{x_\kappa}{r_\kappa} + \beta_{\kappa+1}\frac{y_\kappa}{r_\kappa} + \gamma_{\kappa+1}\frac{z_\kappa}{r_\kappa} = \frac{\alpha_{\kappa+1}x_\kappa + \beta_{\kappa+1}y_\kappa + \gamma_{\kappa+1}z_\kappa}{r_\kappa}. \qquad (I.33)$$

Преобразуем выражение $\Delta = n' \cos i' - n \cos i$.

Ввиду того, что

$$\cos i' = \sqrt{1 - \sin^2 i'} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 i} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2}(1 - \cos^2 i)};$$

$$n' \cos i' = \sqrt{n'^2 - n^2 + n^2 \cos^2 i},$$

получаем

$$\Delta = \sqrt{n'^2 - n^2 + n^2 \cos^2 i} - n \cos i. \qquad (I.32^*)$$

Зная Δ, можно определить $\alpha_{\kappa+1}$, $\beta_{\kappa+1}$, $\gamma_{\kappa+1}$ по формуле (I.29):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\kappa+1} &= \frac{n_\kappa}{n_{\kappa+1}} \alpha_\kappa + \frac{\Delta}{n_{\kappa+1}} \frac{x_\kappa}{r_\kappa}; \\ \beta_{\kappa+1} &= \frac{n_\kappa}{n_{\kappa+1}} \beta_\kappa + \frac{\Delta}{n_{\kappa+1}} \frac{y_\kappa}{r_\kappa}; \\ \gamma_{\kappa+1} &= \frac{n_\kappa}{n_{\kappa+1}} \gamma_\kappa + \frac{\Delta}{n_{\kappa+1}} \frac{z_\kappa}{r_\kappa}. \end{aligned}\right\} \qquad (I.34)$$

Теперь известны положение и направление преломленного луча, поскольку известны координаты x_κ, y_κ, z_κ точки луча и его направляющие косинусы. Остается осуществить переход к следующей преломляющей поверхности; он производится следующим образом.

Пишем уравнение преломленного луча

$$\frac{X - x_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}} = \frac{Y - y_\kappa}{\beta_{\kappa+1}} = \frac{Z - z_\kappa}{\gamma_{\kappa+1}} = t, \qquad (I.35)$$

где t — величина, зависящая от положения рассматриваемой точки на прямой. Ищем точку пересечения этого луча с поверхностью $\kappa + 1$, радиус кривизны которой равен $r_{\kappa+1}$. Пусть $A_\kappa = r_{\kappa+1} - r_\kappa + d_\kappa$ — расстояние между центрами C_κ и $C_{\kappa+1}$ обеих поверхностей.

Обозначим через $x_{\kappa+1}$, $y_{\kappa+1}$, $z_{\kappa+1}$ координаты точки пересечения луча с поверхностью $\kappa + 1$, отнесенные к новому центру кривизны. Переход от старой системы координат к новой осуществляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} X_\kappa &= X_{\kappa+1} + A_\kappa; \\ Y_\kappa &= Y_{\kappa+1}; \\ Z_\kappa &= Z_{\kappa+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (I.36)$$

Уравнение сферы с номером $\kappa + 1$ в новых координатах имеет вид

$$X_{\kappa+1}^2 + Y_{\kappa+1}^2 + Z_{\kappa+1}^2 = r_{\kappa+1}^2.$$

Уравнение луча может быть переписано в виде

$$X_\kappa = x_\kappa + \alpha_{\kappa+1} t; \quad Y_\kappa = y_\kappa + \beta_{\kappa+1} t; \quad Z_\kappa = z_\kappa + \gamma_{\kappa+1} t.$$

Подставляя эти значения для X_κ, Y_κ и Z_κ в предыдущее уравнение и принимая во внимание переход от новой системы к старой, получаем

$$(x_\kappa - A_\kappa + \alpha_{\kappa+1}t)^2 + (y_\kappa + \beta_{\kappa+1}t)^2 + (z_\kappa + \gamma_{\kappa+1}t)^2 = r_{\kappa+1}^2.$$

Произведя возведение в квадрат соответствующих величин и помня, что

$$\alpha_{\kappa+1}^2 + \beta_{\kappa+1}^2 + \gamma_{\kappa+1}^2 = 1;$$

$$\alpha_{\kappa+1}x_\kappa + \beta_{\kappa+1}y_\kappa + \gamma_{\kappa+1}z_\kappa = r_{\kappa+1}\cos i'_\kappa,$$

получаем для определения значения t_κ, соответствующего точке пересечения луча с поверхностью $\kappa + 1$, уравнение

$$t_\kappa^2 + 2t_\kappa(r_{\kappa+1}\cos i' - A_\kappa\alpha_{\kappa+1}) + r_\kappa^2 - r_{\kappa+1}^2 - 2A_\kappa x_\kappa + A_\kappa^2 = 0. \quad (I.37)$$

Решив это уравнение относительно t_κ, выбираем то значение корня, которое соответствует первой точке пересечения луча со сферой.

Определив t_κ, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_{\kappa+1} &= x_\kappa + \alpha_{\kappa+1}t_\kappa - A_\kappa; \\ y_{\kappa+1} &= y_\kappa + \beta_{\kappa+1}t_\kappa; \\ z_{\kappa+1} &= z_\kappa + \gamma_{\kappa+1}t_\kappa. \end{aligned}\right\} \quad (I.38)$$

Как легко видеть, t_κ представляет собой «косую толщину» $\tilde{d}_\kappa$, т. е. расстояние между поверхностями κ и $(\kappa + 1)$, отсчитываемое вдоль луча.

Зная координаты $x_{\kappa+1}$, $y_{\kappa+1}$, $z_{\kappa+1}$ точки пересечения луча с поверхностью $\kappa + 1$ и направляющие косинусы падающего луча $\alpha_{\kappa+1}$, $\beta_{\kappa+1}$ и $\gamma_{\kappa+1}$, можно по приведенным выше формулам продолжать расчет хода луча через вторую поверхность. Подробности вычисления и схему см. в статье И. В. Лебедева [4].

Вычисления выполняются на арифмометре и не требуют применения тригонометрических величин; кроме того, метод может быть обобщен на случай несферических поверхностей, как это указано в статье [4].

К достоинствам аналитического метода можно отнести следующие:

1) отпадение надобности в таблицах;

2) незначительное количество случаев потери точности (к таким относится случай больших радиусов, при которых определение величины t становится неточным, так как в коэффициентах уравнения, определяющего t, появляются разности больших и близких величин);

3) выполнение вычислений по однотипным формулам, что облегчает процесс вычисления и уменьшает возможности ошибок;

4) наличие контрольных формул, например

$$\alpha_к^2 + \beta_к^2 + \gamma_к^2 = 1.$$

К недостаткам этого метода следует отнести:

1) полное отсутствие углов в схеме, из-за чего трудно по вычислениям хода луча определить те места в системе, в которых появляются аберрации высших порядков;

2) слишком большое различие между аналитической схемой и обычной тригонометрической, вследствие чего сравнение хода лучей в обоих случаях с первого взгляда невозможно.

Впрочем, за отсутствием опыта по применению аналитического метода невозможно дать о нем достаточно обоснованный отзыв; было бы полезно в одном из вновь организуемых вычислительных отделов подвергнуть этот метод подробному исследованию.

Расчет косого луча через отражающую поверхность второго порядка

Предположим, что в оптической системе одна отражающая поверхность имеет форму гиперболоида или эллипсоида с эксцентриситетом e.

Пусть α, β и γ — направляющие косинусы падающего луча. Они равны:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos\delta\cos\varepsilon; \\ \beta &= -\cos\delta\sin\varepsilon; \\ \gamma &= \sin\delta, \end{aligned}\right\} \qquad (I.39)$$

где сферические координаты δ и ε известны из расчета косого луча, доведенного до несферической поверхности.

Пишем уравнение этого луча в виде

$$\left.\begin{aligned} X &= s+\alpha t; \\ Y &= l+\beta t; \\ Z &= \gamma t, \end{aligned}\right\} \qquad (I.40)$$

где t — расстояние по лучу от точки M пересечения луча с несферической поверхностью до точки B пересечения луча с меридиональной плоскостью; s — абсцисса точки B относительно вершины отражающей поверхности.

Уравнение поверхности второго порядка, отнесенное к вершине, имеет вид

$$f(X, Y, Z) = (e^2-1)X^2 + 2rX - Y^2 - Z^2 = 0. \qquad (I.41)$$

Помня, что направляющие косинусы нормали λ, μ, ν пропорциональны частным производным $\frac{\partial f}{\partial X}$, $\frac{\partial f}{\partial Y}$, $\frac{\partial f}{\partial Z}$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{R}[r + (e^2 - 1)X]; \\ \mu &= -\frac{Y}{R}; \\ \nu &= -\frac{Z}{R}, \end{aligned}\right\} \tag{I.42}$$

где $R = \sqrt{r^2 + 2re^2X + e^2(e^2 - 1)X^2}$.

Подставляя выражения для X, Y и Z в уравнение поверхности второго порядка, получаем для t уравнение второй степени

$$(\alpha^2e^2 - 1)t^2 + 2t[r\alpha + s\alpha(e^2 - 1) - l\beta] + 2rs + \\ + (e^2 - 1)s^2 - l^2 = 0. \tag{I.43}$$

Полагаем для краткости

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha^2e^2 - 1; \\ B &= r\alpha + s\alpha(e^2 - 1) - l\beta; \\ C &= 2rs + (e^2 - 1)s^2 - l^2; \end{aligned}\right\} \tag{I.44}$$

Если $\frac{AC}{B^2} > 0$, полагаем $\frac{AC}{B^2} = \sin^2 T$, откуда

$$t = -\frac{2B}{A}\sin^2\frac{T}{2}.$$

Если $\frac{AC}{B^2} < 0$, полагаем $-\frac{AC}{B^2} = \operatorname{tg}^2 T$, откуда

$$t = \frac{2B}{A}\sin^2\frac{T}{2}\sec T.$$

Зная t, можно вычислить X, Y и Z по формулам (I.40) и, подставив в формулы (I.42), получить λ, μ и ν.

Угол луча с нормалью i вычисляется по формуле

$$\cos i = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu. \tag{I.45}$$

Направляющие косинусы α', β' и γ' вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 2\lambda\cos i; \\ \beta' &= \beta - 2\mu\cos i; \\ \gamma' &= \gamma - 2\nu\cos i. \end{aligned}\right\} \tag{I.46}$$

Координаты луча, падающего на поверхность, следующую после асферической, определяются из выражений

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varepsilon &= -\frac{\beta'}{\alpha'}; \quad l = Y - \frac{\beta'}{\gamma'}Z; \\ \sin\delta &= \gamma'; \quad s' = X - \frac{\alpha'}{\gamma'}Z, \end{aligned}\right\} \tag{I.47}$$

после вычисления которых можно продолжать расчет хода луча через следующие за поверхностью второго порядка сферические поверхности по обычным формулам.

Формулы Федера

Для расчетов с помощью электронно-вычислительных машин очень удобны формулы, предложенные Федером [5].

Луч в схеме Федера определяется с помощью следующих векторов (рис. I.9):

$Q\ (X;\ Y;\ Z)$ — единичный вектор вдоль луча до преломления;

$Q_1\ (X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ — то же после преломления;

$T\ (x;\ y;\ z)$ — вектор, соединяющий вершину поверхности *1* с точкой пересечения луча с этой поверхностью;

$T_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ — то же для поверхности *2*.

Расчет хода луча через сферическую поверхность. Приводим формулы Федера для случая сферических поверхностей.

Рис. I.9

Обозначим через $c_1 = \frac{1}{r_1}$; $c_2 = \frac{1}{r_2}$ кривизны сферических поверхностей *1* и *2*; через B — пересечение падающего луча с перпендикуляром M к нему, опущенным из точки O_2; через A_1 и A_2 — точки пересечения луча с поверхностями *1* и *2*; через L — расстояние A_1A_2 (рис. I.9).

Отрезок $l = \overline{A_1B}$ определяется формулой

$$l = dX - (xX + yY + zZ).$$

Проекция M_x на оптическую ось перпендикуляра M определяется по формуле

$$M_x = x + lX - d.$$

Длина отрезка M определяется следующим образом:

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = (x + lX - d)^2 + (y + lY)^2 + (z + lZ)^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + l^2 + 2l(xX + yY + zZ - dX) - 2dx + d^2 =$$

$$= d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + l^2 - 2l^2 - 2dx.$$

Окончательно

$$M^2 = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 - 2dx + d^2.$$

Определим точку пересечения луча с поверхностью *2*. Уравнение ее, отнесенное к вершине O_2, следующее:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2r_2x_1 = 0.$$

Уравнение луча

$$\frac{x_1 - M_x}{X} = \frac{y_1 - M_y}{Y} = \frac{z_1 - M_z}{Z} = t,$$

откуда

$$x_1 = M_x + tX; \quad y_1 = M_y + tY; \quad z_1 = M_z + tZ.$$

Подставляя эти выражения для x_1, y_1 и z_1 в уравнение сферы и помня, что

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0,$$

получаем

$$t^2 - 2r_2tX + M^2 - 2r_2M_x = 0;$$

$$t = r_2X - \sqrt{r_2^2X^2 - M^2 + 2r_2M_x}$$

(знак + относится ко второму пересечению с поверхностью *2* и обычно не представляет интереса).

Вычислим косинус угла падения i:

$$-\cos i = \frac{x_1 - r_2}{r_2} X + \frac{y_1}{r_2} Y + \frac{z_1}{r_2} Z =$$

$$= \frac{(M_x + tX)X + (M_y + tY)Y + (M_z + tZ)Z}{r_2} - X =$$

$$= \frac{M_xX + M_yY + M_zZ + t}{r_2} - X = \frac{t}{r_2} - X =$$

$$= -\sqrt{X^2 - \frac{M^2}{r_2^2} + \frac{2M_x}{r_2}}.$$

Вычислим величину

$$L = l + t = l + r_2X - \sqrt{r_2^2X^2 - M^2 + 2r_2M_x} =$$

$$= l + \left(r_2X - \sqrt{r_2^2X^2 - M^2 + 2r_2M_x}\right) \frac{r_2X + \sqrt{r_2^2X^2 - M^2 + 2r_2M_x}}{r_2X + \sqrt{r_2^2X^2 - M^2 + 2r_2M_x}} =$$

$$= l + \frac{M^2 - 2r_2M_x}{r_2X + \sqrt{r_2^2X^2 - M^2 + 2r_2M_x}} =$$

$$= l + \frac{c_2M^2 - 2M_x}{X + \sqrt{X^2 - c_2^2M^2 + 2c_2M_x}} = l + \frac{c_2M^2 - 2M_x}{X + \cos i},$$

где $c_2 = \frac{1}{r_2}$.

Зная L, легко получить x_1, y_1 и z_1:

$$x_1 = x + Lx - d;$$

$$y_1 = y + LY;$$

$$z_1 = z + LZ.$$

Остается вычислить направляющие косинусы преломленного луча X_1; Y_1; Z_1. Угол i_1' определяется по его косинусу:

$$\cos i_1' = \left[1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 (1 - \cos^2 i_1)\right]^{1/2}.$$

Косинусы преломленных лучей связаны с косинусами падающих лучей системой формул (см. стр. 44 в книге [6] или стр. 18 этой главы).

$$n'X_1 = nX + (n' \cos i' - n \cos i) \cos (NX);$$

$$n'Y_1 = nY + (n' \cos i' - n \cos i) \cos (NY);$$

$$n'Z_1 = nZ + (n' \cos i' - n \cos i) \cos (NZ),$$

где N — направление нормали в точке преломления.
Но

$$\cos (NX) = \frac{r_2 - x_1}{r_2} = 1 - c_2 x_1; \quad \cos (NY) = -\frac{y_1}{r_2} = -c_2 y_1;$$

$$\cos (NZ) = -\frac{z_1}{r_2} = -c_2 z_1,$$

где $c_2 = \frac{1}{r_2}$.

Обозначая через g выражение $\cos i_1' - \frac{n}{n'} \cos i_1$, получаем

$$X_1 = \frac{n}{n'} X + g(1 - c_2 x_1);$$

$$Y_1 = \frac{n}{n'} Y - g c_2 y_1;$$

$$Z_1 = \frac{n}{n'} Z - g c_2 z_1.$$

Составим сводку необходимых для вычислений формул Федера для сферических поверхностей:

1. $l = dX - (xX + yY + zZ)$;
2. $M_x = x + lX - d$;
3. $M^2 = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 - 2dx + d^2$;
4. $\cos i = \sqrt{X^2 - \frac{M^2}{r_2^2} + \frac{2M_x}{r_2}}$;

5. $L = l + \frac{c_2 M^2 - 2M_x}{X + \cos i}$;

6. $x_1 = x + LX - d$;

7. $y_1 = y + LY$;

8. $z_1 = z + LZ$;

9. $\cos i_1' = \left[1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 (1 - \cos^2 i_1)\right]^{1/2}$;

10. $g = \cos i_1' - \frac{n}{n'} \cos i_1$;

11. $X_1 = \frac{n}{n'} X + g(1 - c_2 x_1)$;

12. $Y_1 = \frac{n}{n'} Y - g c_2 y_1$;

13. $Z_1 = \frac{n}{n'} Z - g c_2 z_1$.

Преимущества формул Федера по сравнению с приведенными в первом издании этой книги формулами Кербера для косых лучей заключаются в следующем:

1) полное отсутствие тригонометрических функций;

2) минимальное число квадратных корней (один на поверхность);

3) отсутствие переменных, обращающихся в бесконечность (такими величинами являются, например, s и s' в формулах расчета хода лучей, приведенных в начале этой главы). Величина L может, правда, обратиться в бесконечность, если $X + \cos i = 0$, но в этом случае луч касается преломляющей поверхности и не участвует в образовании изображения;

4) отсутствие формул, приводящих к потере точности.

В частности, случай больших радиусов, который при обычной схеме приводит к потере точности и вызывает необходимость применения новых схем (что для работы с помощью электронной машины является нежелательным), здесь не вызывает никаких затруднений; плоские поверхности не требуют применения специальной схемы.

Расчет хода луча через поверхность второго порядка. Формулы Федера могут быть распространены на случай поверхностей второго порядка.

Предположим, что поверхность $O_2 A_2$ является поверхностью второго порядка. Ее уравнение, отнесенное к вершине O_2, имеет вид

$$F(x_1 y_1 z_1) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2rx_1 - e^2 x_1^2 = 0.$$

Уравнение луча сохраняет прежний вид:

$$x_1 = M_x + tX; \quad y_1 = M_y + tY; \quad z_1 = M_z + tZ.$$

Величина t определяется формулой

$$t = \frac{rX + e^2MX - \sqrt{(rX + e^2MX)^2 - (1 - e^2)\,M^2 - 2rM_x - e^2M_x}}{1 - e^2X^2}.$$

Умножая и деля на сопряженную величину, получаем для t

$$t = \frac{cM^2 - ce^2M_x^2 - 2M_x}{X\,(ce^2M_x + 1) + Q},$$

где $c = \frac{1}{r}$; $\quad Q = \sqrt{X^2 + c^2e^2M_x^2 + 2cM_x - c^2M^2\,(1 - e^2X^2)}$.

Величина L определяется из уравнения

$$L = l + t.$$

Отсюда следуют выражения для x_1; y_1; z_1:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + LX - d; \\ y_1 &= y + LY; \\ z_1 &= z + LZ. \end{aligned}\right\} \qquad (I.48)$$

Определяем $\cos i = X\lambda + Y\mu + Z\nu$, где λ, μ, ν — направляющие косинусы нормали. Если положительное направление нормали совпадает с направлением света, имеем

$$\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{rD}; \quad \mu = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{rD}; \quad \nu = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{rD},$$

где

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial x} = kx - r; \quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial y} = y; \quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial z} = z; \quad k = 1 - e^2;$$

$$D = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + c^2e^2\,(y_1^2 + z_1^2)}.$$

Тогда

$$\cos i = \frac{kx_1 - r}{rD}\,X + \frac{y_1}{rD}\,Y + \frac{z_1}{rD}\,Z.$$

После подстановки величин x_1; y_1; z_1 из формул (I.48) и подстановки выражения для t получаем

$$\cos i = \frac{Q}{D}.$$

Формулу для $\cos i'$ получаем по-прежнему:

$$\cos i' = \left[1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 (1 - \cos^2 i)\right]^{1/2}.$$

Положим

$$g = \cos i' - \frac{n}{n'}\cos i,$$

после чего выражения для X_1; Y_1; Z_1 принимают вид

$$X_1 = \frac{n}{n'} X - g \frac{ckx_1 - 1}{D};$$

$$Y_1 = \frac{n}{n'} Y - g \frac{cy_1}{D};$$

$$Z_1 = \frac{n}{n'} Z - g \frac{cz_1}{D}.$$

По-прежнему можно пользоваться для контроля формулами

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1;$$

$$(ckx_1 - 1)^2 + (cy_1)^2 + (cz_1)^2 = D^2.$$

Составим сводку необходимых для вычислений формул Федера для поверхностей второго порядка:

1. $l = (d - x) X - yY - zZ;$
2. $M_x = x + lX - d;$
3. $M^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2 - l^2;$
4. $Q = \sqrt{X^2 + c^2e^2M_x^2 + 2cM_x - c^2M^2(1 - e^2X^2)};$
5. $L = l + \dfrac{cM^2 - ce^2M_x^2 - 2M_x}{X(ce^2M_x + 1) + Q};$
6. $x_1 = x - d + LX;$
7. $y_1 = y + LY;$
8. $z_1 = z + LZ;$
9. $D = \sqrt{1 + c^2e^2(y_1^2 + z_1^2)};$
10. $\cos i = \dfrac{Q}{D};$
11. $\cos i' = \left[1 - \left(\dfrac{n}{n'}\right)^2 (1 - \cos^2 i)\right]^{1/2};$
12. $g = \cos i' - \dfrac{n}{n'} \cos i;$
13. $X_1 = \dfrac{n}{n'} X - g \dfrac{ckx_1 - 1}{D};$
14. $Y_1 = \dfrac{n}{n'} Y - g \dfrac{cy_1}{D};$
15. $Z_1 = \dfrac{n}{n'} Z - g \dfrac{cz_1}{D}.$

4. БЕСКОНЕЧНО ТОНКИЕ АСТИГМАТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ

Определения

Рассмотрим бесконечно тонкий пучок лучей, ограничиваемый поверхностью конуса с вершиной в точке O. Этот так называемый элементарный гомоцентрический пучок после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим; по выходе из системы пучок имеет особое «астигматическое» строение. Все лучи пучка стягиваются в две линии (фокальные линии) бесконечно малой длины, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях[1].

Рис. I.10

В пределе две фокальные линии обращаются в точки и называются *фокусами* пучка.

Предположим, как всегда, что оптическая система имеет ось симметрии. Если центральный луч элементарного пучка (его принято называть *главным лучом*) находится в меридиональной плоскости, то из теории астигматических пучков известно, что одна из фокальных линий, а именно та, которая образуется сагиттальными лучами, т. е. лучами, лежащими в плоскости, перпендикулярной меридиональной, лежит в этой последней плоскости; ее пересечение с главным лучом называется *сагиттальным фокусом*. Вторая фокальная линия, образуемая меридиональными лучами, т. е. лучами, лежащими в меридиональной плоскости, перпендикулярна последней; точка пересечения ее с главным лучом называется *меридиональным фокусом*.

Положение сагиттального фокуса вычисляется согласно данному определению, которое можно сформулировать несколько иначе. Рассмотрим точку пересечения двух лучей, исходящих из вершины пучка O и симметрично расположенных относительно меридиональной плоскости. Когда эти два луча беспредельно приближаются друг к другу, точка пересечения стремится к некоторому предельному положению: это — положение сагиттального фокуса, сопряженного с точкой O. Отсюда вытекает возможность определять координаты этого фокуса в случае одной преломляющей поверхности.

Пусть M_0MO — главный луч падающего сагиттального пучка M_1OM_2; C — центр преломляющей поверхности; COO' — прямая, соединяющая центр с вершиной O пучка (рис. I.10).

[1] Более подробное изложение см. в курсах геометрической оптики.

Пучок M_1OM_2 получен вращением главного луча (в ту и в другую сторону) вокруг оси CO на бесконечно малый угол. Рассмотрим пучок после его преломления через поверхность SM. Главный луч занимает положение MO', крайние лучи пучка — положение M_1O' и M_2O'; эти лучи должны пересекаться в точке пересечения O' главного луча с прямой CO, так как преломленный пучок, в свою очередь, получается в результате вращения преломленного главного луча MO' вокруг оси CO. Таким образом, фокус бесконечно тонкого сагиттального пучка находится в точке пересечения главного луча с прямой, соединяющей центр преломляющей поверхности с вершиной пучка.

Если поверхность SM несферическая, но симметричная относительно оси SC, то вместо центра кривизны C нужно брать точку пересечения нормали к точке M с оптической осью.

Фокус меридионального пучка определяется также в результате перехода к пределу. Рассмотрим два луча, исходящих из вершины пучка O и лежащих в меридиональной плоскости. После преломления эти два луча пересекаются в некоторой точке O', положение которой зависит от угла, образованного двумя лучами в точке O. Когда этот угол беспредельно уменьшается, точка O' стремится к некоторому положению, которое является положением меридионального фокуса.

Формулы Аббе—Юнга для определения положения астигматических фокусов

Случай одной преломляющей поверхности. По Аббе положение фокусов, как сагиттального, так и меридионального, бесконечно тонких пучков, а также и положение источника света (вершины пучка) определяются их расстояниями от точки пересечения главного луча с поверхностью.

Рис. I.11

Пусть SA (рис. I.11) — сечение поверхности меридиональной плоскостью; AB — главный луч; M — вершина падающего пучка; $A'B'$ — луч, образующий с главным лучом угол du и проходящий через точку M; CB — перпендикуляр, опущенный из центра C на луч AB; длину CB обозначим буквой q, а расстояние BB' — приращение величины q — через dq. При дальнейших выводах будем считать величины du, dq и остальные приращения

бесконечно малыми величинами первого порядка; их квадратами и взаимными произведениями будем пренебрегать. Дифференциал дуги AA' между двумя лучами AB и $A'B'$ равен $rd\varphi$, где φ — угол нормали с осью. Опуская из точки A перпендикуляр AH на луч $A'B'$, в бесконечно малом прямоугольном треугольнике AHA' имеем $\overline{AH} = \overline{AA'} \cos i$, так как угол между касательной к кругу SA в точке A и перпендикуляром к лучу $A'B'$ равен углу i.

Обозначим через t_m расстояние AM по лучу от поверхности до вершины M пучка. Подобие треугольников MAH и MBB' дает

$$\frac{AH}{AM} = \frac{BB'}{BM} = \frac{BB'}{AB - AM}$$

или

$$\frac{r\,d\varphi \cos i}{t_m} = \frac{dq}{r \cos i - t_m}. \tag{I.49}$$

Но $q = r \sin i$ и $dq = r \cos i di$,
и формула (I.49) принимает вид

$$\frac{r\,d\varphi \cos i}{t_m} = \frac{r \cos i\, di}{r \cos i - t_m}. \tag{I.50}$$

Точно такую же формулу можно написать для преломленных лучей:

$$\frac{r\,d\varphi \cos i'}{t'_m} = \frac{r \cos i'\, di'}{r \cos i' - t'_m}, \tag{I.50*}$$

где t'_m — расстояние фокуса меридионального пучка преломленных лучей от поверхности; i' — угол преломления.

Дифференцируя равенство $n \sin i = n' \sin i'$, выражающее закон преломления, получаем

$$n \cos i\, di = n' \cos i'\, di'. \tag{I.51}$$

Деля уравнение (I.50*) на (I.50) и принимая во внимание (I.51), получаем после простых преобразований формулу Аббе для бесконечно тонкого меридионального пучка, а именно:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'_m} - \frac{n \cos^2 i}{t_m} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \tag{I.52}$$

Формула (I.52) связывает величины t_m и t'_m через углы преломления i и i'.

Для сагиттального пучка соотношения между расстоянием t_s от точки пересечения A главного луча с преломляющей поверхностью до вершины M пучка и расстоянием t'_s от той же точки A до фокуса M' бесконечно тонкого сагиттального пучка после преломления могут быть получены следующим образом.

Пусть (рис. I.12) AS — падающий луч; AS' — преломленный луч; M и M' — сагиттальные фокусы до и после преломления; угол ACO' обозначим буквой ψ. Как было доказано, точки M, M' и центр C преломляющей сферы находятся на одной прямой.

Из треугольника AMC имеем

$$\frac{\sin i}{\sin \psi} = \frac{\overline{MC}}{\overline{AM}}.$$

Аналогично из треугольника $AM'C$ находим

$$\frac{\sin i'}{\sin \psi} = \frac{\overline{M'C}}{\overline{AM'}}.$$

Умножая первое уравнение на $n \sin \psi$ и второе на $n' \sin \psi$ и принимая во внимание закон преломления, получаем формулу

$$n \frac{\overline{MC}}{\overline{AM}} = n' \frac{\overline{M'C}}{\overline{AM'}}$$

или

$$n \frac{\overline{MC}}{t_s} = n' \frac{\overline{M'C}}{t'_s}. \quad (I.53)$$

С другой стороны, проектируя MC и $M'C$ на радиус AC, получаем

$$\left.\begin{aligned} \overline{MC} \cos \psi &= r - t_s \cos i; \\ \overline{M'C} \cos \psi &= r - t'_s \cos i'. \end{aligned}\right\} \quad (I.54)$$

Рис. I.12

Подставляя в уравнение (I.53) значения $\overline{MC}$ и $\overline{M'C}$ из (I.54) и деля на $\cos \psi$, получаем после простого преобразования формулу Аббе для бесконечно тонкого сагиттального пучка

$$\frac{n'}{t'_s} - \frac{n}{t_s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \quad (I.55)$$

Формулы (I.52) и (I.55) решают поставленную задачу в случае одной преломляющей поверхности. Когда преломляющая поверхность плоская, формулы (I.52) и (I.55) принимают особенно простой вид, а именно:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'_m} - \frac{n \cos^2 i}{t_m} = 0; \quad (I.52^*)$$

$$\frac{n'}{t'_s} - \frac{n}{t_s} = 0. \quad (I.55^*)$$

Случай нескольких центрированных поверхностей. Фокусы сагиттального и меридионального пучков, полученные после

преломления через одну поверхность, являются вершинами пучков, падающих на следующую поверхность. Поэтому задача нахождения положения астигматических фокусов после преломления через оптическую систему решается повторным применением формул (I.52) для меридионального и (I.55) для сагиттального пучков. Обозначим по-прежнему через κ номер преломляющей поверхности. Формулы (I.52) и (I.55) с добавлением значка κ у величин n, i, t_m, t_s, r, n', i', t'_m и t'_s дают положение фокуса преломленного пучка по известному положению фокуса падающего пучка. К ним нужно еще присоединить формулу перехода от поверхности с номером κ к поверхности с номером $\kappa+1$. Пусть (рис. I.13) точка $M'_\kappa = M_{\kappa+1}$ представляет фокус сагиттального (или меридионального) пучка, преломленного через поверхность с номером κ; тогда, очевидно,

Рис. I.13

$$t_{\kappa+1} = \overline{B_{\kappa+1}M'_\kappa} = \overline{B_\kappa M'_\kappa} - \overline{B_\kappa B_{\kappa+1}} = t'_\kappa - \bar{d}_\kappa,$$

где $\bar{d}_\kappa$ — так называемая косая толщина между поверхностями κ и $\kappa+1$ (расстояние по главному лучу между точками пересечения луча с поверхностями κ и $\kappa+1$). Обозначим высоты пересечения поверхностей κ и $\kappa+1$ с главным лучом $\overline{H_\kappa B_\kappa}$ и $\overline{H_{\kappa+1}B_{\kappa+1}}$ через h_κ и $h_{\kappa+1}$ и соответствующие им стрелки $\overline{A_\kappa H_\kappa}$ и $\overline{A_{\kappa+1}H_{\kappa+1}}$ — через a_κ и $a_{\kappa+1}$.

Величина $\bar{d}_\kappa$ может быть получена по формуле

$$\bar{d}_\kappa = (h_\kappa - h_{\kappa+1}) \operatorname{cosec} u_{\kappa+1}, \tag{I.56}$$

где

$$h_\kappa = r_\kappa \sin \varphi_\kappa = r_\kappa \sin (u'_\kappa - i'_\kappa) = r_\kappa \sin (u_\kappa - i_\kappa).$$

Для малых углов $u_{\kappa+1}$ лучше пользоваться формулой

$$\bar{d}_\kappa = d_\kappa + a_\kappa - a_{\kappa+1},$$

где

$$a_\kappa = 2r_\kappa \sin^2 \frac{\varphi_\kappa}{2}.$$

Формулы Аббе не очень удобны для вычислений при помощи логарифмических таблиц, так как формулы (I.52) и (I.55) мало пригодны для приведения их к логарифмическому виду, и при помощи арифмометра, так как число умножений и делений велико. Однако при вычислениях с помощью ЭВМ формулы Аббе доста-

точно удобны; их преимущество заключается в том, что они пригодны и для несферических поверхностей. В последнем случае для меридиональных пучков следует вместо $r_к$ писать $r_{mк}$ (радиус кривизны меридионального сечения преломляющей или отражающей поверхности), а для сагиттальных — $r_{кs}$ (радиус кривизны сагиттального сечения этой же поверхности).

Для плоскопараллельной пластинки с толщиной d и показателем преломления n формулы Аббе приводят к особенно простым вычислениям. Пусть (рис. I.14) на пластинку падает луч, образующий с осью угол u_1 и абсцисса точки-фокуса M_1 (сагиттального или меридионального) относительно первой поверхности призмы равна x_1. Найдем x_2' — абсциссу соответствующего фокуса M_2' после преломления через пластинку.

Рис. I.14

Замечая, что $u_1 = i_1$, $u_2 = i_1' = i_2$, $u_3 = u_1$, $\bar{d}_2 = d \sec u_2$, $t_1 = x_1 \sec u_1$, $t_2 = x_2' \sec u_1$, и применяя последовательно формулы (I.52), (I.55) и (I.55*), получаем

$$\left.\begin{aligned} x_{2s}' &= x_{1s} - \frac{d}{n}\frac{\cos u_1}{\cos u_2}; \\ x_{2m}' &= x_{1m} - \frac{d}{n}\frac{\cos^3 u_1}{\cos^3 u_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (I.57)$$

Преломление через плоскопараллельную пластинку вызывает смещение фокусов в направлении оси на величину $\Delta = x_2' - x_1 + d$. Подставляя вместо x_2' только что найденные значения, находим для смещения Δ_s сагиттального фокуса

$$\Delta_s = d\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos u_1}{\cos u_2}\right);$$

для смещения Δ_m меридионального фокуса

$$\Delta_m = d\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos^3 u_1}{\cos^3 u_2}\right). \qquad (I.58)$$

Пластинка вызывает, кроме того, смещение Δy фокусов в направлении, перпендикулярном к оси. Обозначим через y_1 и y_2' ординаты фокусов M_1 и M_2' до и после преломления. Замечая, что

$y_1 = \overline{O_1A_1} - x_1 \operatorname{tg} u_1$, а $y_2' = \overline{O_2A_2} - x_2' \operatorname{tg} u_1$, получаем

$$y_2' - y_1 = \Delta y = \overline{O_2A_2} - \overline{O_1A_1} - (x_2' - x_1) \operatorname{tg} u_1 =$$
$$= -d \operatorname{tg} u_2 - (x_2' - x_1) \operatorname{tg} u_1.$$

Для смещения сагиттального фокуса находим

$$\Delta y_s = y_2' - y_1 = -d \operatorname{tg} u_2 + \frac{d}{n} \frac{\cos u_1}{\cos u_2} \operatorname{tg} u_1 =$$
$$= \frac{d}{n} \frac{\sin u_1}{\cos u_2} - d \operatorname{tg} u_2 = 0,$$

так как

$$\sin u_1 = n \sin u_2;$$

для смещения меридионального фокуса получаем

$$\Delta y_m = y_2' - y_1 = -d \operatorname{tg} u_2 + \frac{d}{n} \frac{\cos^3 u_1}{\cos^3 u_2} \operatorname{tg} u_1 =$$
$$= d \operatorname{tg} u_2 \left(\frac{\cos^2 u_1}{\cos^2 u_2} - 1 \right).$$

Окончательно

$$\Delta y_s = 0; \quad \Delta y_m = d \operatorname{tg} u_2 \left(\frac{\cos^2 u_1}{\cos^2 u_2} - 1 \right) =$$
$$= -d (n^2 - 1) \frac{\sin^2 u_1}{n^2 - \sin^2 u_1} \operatorname{tg} u_2 = -d (n^2 - 1) \frac{\sin^3 u_1}{\sqrt{(n^2 - \sin^2 u_1)^3}}. \tag{I.59}$$

Как осевые, так и поперечные смещения фокусов плоскопараллельной пластинкой не зависят от x_1, т. е. от положения пластинки, а зависят только от ее толщины, показателя преломления и наклона главного луча к передней грани.

5. РАЗНОСТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Разностные формулы для сферической аберрации

Кербер вывел две формулы, позволяющие получить сферическую аберрацию и отклонение от закона синусов оптической системы, не прибегая к обычному способу, который заключается в вычислении хода луча с большим числом знаков по основным формулам (I.1)—(I.5) с последующим вычитанием координат параксиального луча, рассчитанного с такой же точностью, как первый луч. Вместо этого результат получается сложением сравнительно малых величин, по существу являющихся аберрациями луча для каждой поверхности системы.

Основные формулы (I.1)—(I.4) приводят к следующему выражению:

$$r - s' = (r - s)\frac{n}{n'}\frac{\sin u}{\sin u'}, \tag{I.60}$$

причем [см. формулу (I.3)]

$$u' = u + i' - i.$$

Введем величину D, определив ее из уравнения

$$\sin u' = \sin u + \sin i' - \sin i + D. \tag{I.61}$$

Разложив в этом уравнении синусы всех углов в ряды и приняв во внимание (I.3), убеждаемся, что D — величина третьего порядка малости относительно углов u', u, i и i'.

Замечая, что

$$\sin i' - \sin i = \left(\frac{n}{n'} - 1\right)\sin i = \left(\frac{n}{n'} - 1\right)\frac{r - s}{r}\sin u,$$

получаем из (I.61)

$$\sin u' = \sin u + \left(\frac{n}{n'} - 1\right)\frac{r - s}{r}\sin u + D.$$

Из формулы (I.60) находим $\frac{1}{(r - s')}$ и заменяем $\sin u'$ только что полученным выражением; это дает

$$\frac{1}{r - s'} - \frac{n'}{n}\frac{1}{r - s} = -\frac{n' - n}{nr} + \frac{1}{r - s}\frac{n'}{n}\frac{D}{\sin u}. \tag{I.62}$$

Перепишем эту формулу для параксиальных лучей, обозначая через s_0 и s_0' расстояния от вершины поверхности до точек пересечения луча с осью до и после преломления, получаем

$$\frac{1}{r - s_0'} - \frac{n'}{n}\frac{1}{r - s_0} = -\frac{n' - n}{nr}, \tag{I.63}$$

так как отношение $\frac{D}{\sin u}$ при беспредельном уменьшении u в силу сделанного замечания относительно величины D стремится к нулю.

Вычитая (I.63) из (I.62), получаем

$$\frac{\delta s'}{n'(r - s_0')(r - s')} = \frac{1}{n}\frac{\delta s}{(r - s_0)(r - s)} + \frac{1}{r - s}\frac{1}{n}\frac{D}{\sin u},$$

где

$$\delta s' = s' - s_0' \text{ и } \delta s = s - s_0.$$

Обозначим углы, образуемые параксиальным лучом с осью системы до и после преломления, буквами α и α'; на основании

уравнения (I.60) можно написать

$$(r - s')\, n' \sin u' = (r - s)\, n \sin u;$$

$$(r - s_0')\, n'\alpha' = (r - s_0)\, n\alpha.$$

Перемножив соответственные части последних трех уравнений, получим

$$n'\alpha' \sin u' \delta s' - n\alpha \sin u \delta s = n\alpha (r \quad s_0) D. \qquad (I.64)$$

Правую часть можно видоизменить следующим образом:

$$n\alpha (r - s_0) D = n \frac{h}{s_0} (r - s_0) D = nrh \left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{r} \right) D = nri_0 D,$$

где i_0 — угол, образуемый параксиальным лучом с нормалью. Тогда уравнение (I.64) принимает вид

$$n'\alpha' \sin u' \delta s' - n\alpha \sin u\, \delta s = nri_0 D. \qquad (I.65)$$

Если написать уравнение (I.65) для всех p поверхностей системы и просуммировать все уравнения, то в левой части остаются только два члена:

$$n_p'\alpha_p' \sin u_p' \delta s_p' - n_1\alpha_1 \sin u_1 \delta s_1 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} r_\kappa n_\kappa i_{0\kappa} D_\kappa.$$

Преобразуем теперь величину D к удобному для вычисления виду:

$$D = \sin u' - \sin u - \sin i' + \sin i;$$

$$\sin u' - \sin u = 2 \sin \frac{u' - u}{2} \cos \frac{u' + u}{2};$$

$$\sin i' - \sin i = 2 \sin \frac{i' - i}{2} \cos \frac{i' + i}{2}.$$

Но

$$u' - u = i' - i,$$

поэтому

$$D = 2 \sin \frac{i' - i}{2} \left(\cos \frac{u' + u}{2} - \cos \frac{i' + i}{2} \right) =$$

$$= -4 \sin \frac{i' - i}{2} \sin \frac{i' + i - (u' + u)}{4} \sin \frac{u' + u + i' + i}{4} =$$

$$= -4 \sin \frac{i' - i}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{u + i'}{2}. \qquad (I.66)$$

Окончательно

$$-n_p'\alpha_p' \sin u_p' \delta s_p' = 4 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} r_\kappa n_\kappa i_{0\kappa} \sin \frac{i_\kappa' - i_\kappa}{2} \sin \frac{\varphi_\kappa}{2} \sin \frac{u_\kappa + i_\kappa'}{2}. \qquad (I.67)$$

Величина δs_1 принята равной нулю, что практически всегда имеет место.

Иногда удобнее заменить произведение $n_\kappa i_{0\kappa}$ более симметричным выражением согласно уравнению

$$n_\kappa i_{0\kappa} = \frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{\frac{1}{n_{\kappa+1}} - \frac{1}{n_\kappa}},$$

которое может быть выведено следующим образом:

$$\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa = i'_{0\kappa} - i_{0\kappa} = \frac{n_\kappa}{n_{\kappa+1}} i_{0\kappa} - i_{0\kappa} = -\frac{n_{\kappa+1} - n_\kappa}{n_{\kappa+1}} i_{0\kappa}.$$

Отсюда

$$n_\kappa i_{0\kappa} = -\frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{n_{\kappa+1} - n_\kappa} n_\kappa n_{\kappa+1} = \frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{\frac{1}{n_{\kappa+1}} - \frac{1}{n_\kappa}}. \qquad (I.68)$$

Введем для краткости символ Аббе

$$\Delta f = f' - f,$$

где f — некоторая функция величин, относящихся к падающему лучу; f' — та же функция координат преломленного луча. Например,

$$\alpha' - \alpha = \Delta\alpha;$$

$$\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} = \Delta \frac{1}{n}.$$

Теперь можно переписать формулу (I.67) в виде

$$\delta s'_p = \frac{-4}{n'_p \alpha'_p \sin u'_p} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} r_\kappa \frac{\Delta\alpha_\kappa}{\Delta \frac{1}{n_\kappa}} \sin\frac{i'_\kappa - i_\kappa}{2} \sin\frac{\varphi_\kappa}{2} \sin\frac{u_\kappa + i'_\kappa}{2}. \qquad (I.69)$$

Если одна из поверхностей с номером c — плоская, то соответствующий член суммы принимает вид $\infty \times 0$. Неопределенность легко раскрыть, так как произведение $r_\kappa \sin\frac{\varphi_\kappa}{2}$ стремится к $\frac{h_\kappa}{2}$, поэтому слагаемое для поверхности c принимает более простой вид

$$\frac{1}{2} h_c \frac{\Delta\alpha_c}{\Delta \frac{1}{n_c}} \sin\frac{u'_c - u_c}{2} \sin\frac{u_c + u'_c}{2}. \qquad (I.70)$$

Кербером выведена подобная же формула, дающая отступление от закона синусов, т. е. величину, позволяющую определить кому системы для точек, лежащих достаточно близко от оси (см. стр. 112).

Пусть угловое увеличение системы равно $\frac{\alpha_p'}{\alpha_1}$. Обозначим знаком $\delta\left(\sin u_\kappa'\right)$ следующее выражение:

$$\delta\left(\sin u_\kappa'\right) = \sin u_p' - \frac{\alpha_p'}{\alpha_1}\sin u_1.$$

Формула Кербера для отступления от закона синусов имеет вид

$$\frac{\delta\left(\sin u_p'\right)}{\sin u_1} = \frac{s_1}{s_{0p}'}\left(\frac{\delta l_p'}{l_1} + \frac{h_p}{h_1}\frac{\delta s_p'}{s_p'} - \frac{\delta l_p'}{l_1}\frac{\delta s_p'}{s_p'}\right), \qquad (I.71)$$

причем

$$\delta l_p' = -\frac{h_p}{h_1}\left(\sum_1^p \frac{h_1}{h_\kappa} r_\kappa D_\kappa + \sum_1^{p-1} \frac{h_1}{h_\kappa} d_\kappa \frac{\delta s_\kappa' \sin u_\kappa'}{s_{0\kappa}' - d_\kappa}\right), \qquad (I.71^*)$$

где $l = s\sin u$ — длина перпендикуляра, опущенного из вершины поверхности на луч; таким образом, $l_1 = s_1 \sin u_1$; h_κ — высота падения параксиального луча на κ-ю поверхность системы; d_κ — расстояние между поверхностями с номерами κ и $\kappa + 1$; D_κ — величина, определяемая формулой (I.66).

Вывод формул (I.71) и (I.71*), практически мало применяемых вследствие их сложности, приведен в книге Рора [1] на стр. 305—307.

При вычислениях надо обратить внимание на то, что в формуле (I.71*) под вторым знаком суммы происходит двойное суммирование, так как величина $\delta s_\kappa'$ сама получается согласно формуле (I.69) в результате суммирования по первым κ поверхностям.

Разностные формулы для внеосевых пучков

Г. Д. Рабиновичем [7] предложена очень простая и удобная формула для вычисления отступления от отношения синусов. Дальше (гл. II) будет показано, что важной для оценки комы оптической системы является величина $\eta = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta s'}{x' - s'}$, где V — поперечное увеличение системы. Величина η может быть получена в виде суммарной формулы

$$\eta = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta s'}{x' - s'} = \frac{1}{n'\beta'(x' - s')\sin u'} \sum_1^\kappa r_\nu \frac{\Delta\beta_\nu}{\Delta\frac{1}{n_\nu}} D_\nu. \qquad (I.72)$$

Развернутое выражение для D дано формулой (I.66). Вывод этой формулы основан на формуле (I.64). В выводе формулы (I.64)

не делается предположения, что действительный и параксиальный лучи исходят из одной и той же точки на оси системы. Заменяем первый параксиальный луч вторым с величинами β и x, а действительный луч оставляем прежним, исходящим из центра предмета. Соотношение (I.64) принимает вид

$$n'\beta' \sin u' (\bar{s}' - x') - n_1\beta_1 \sin u_1 (\bar{s}_1 - x_1) = \sum_1^{\kappa} r_\nu \frac{\Delta\beta_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}} D_\nu,$$

где $\bar{s}$ и $\bar{s}'$ — координаты точек пересечения действительного луча с осью до и после преломления.

Имеем $\bar{s}_1 = s_1$; $\bar{s}' = s' + \Delta s'$; следовательно,

$$n'\beta' \sin u' (\bar{s}' - x') - n_1\beta_1 \sin u_1 (\bar{s}_1 - x_1) =$$

$$= n'\beta' \sin u' (s' - x') \left[\frac{s' + \Delta x' - x'}{s' - x'} - \frac{\beta_1 (s_1 - x_1)}{\beta' (s' - x')} \frac{n_1 \sin u_1}{n' \sin u'}\right]. \quad (I.73)$$

Но так как

$$n_1\alpha_1\beta_1 (x_1 - s_1) = n'\alpha'\beta' (x' - s') = +J,$$

где J — инвариант Лагранжа—Гельмгольца, то

$$\frac{\beta_1 (s_1 - x_1)}{\beta' (s' - x')} = \frac{n'\alpha'}{n_1\alpha_1} = \frac{1}{V};$$

с другой стороны, по определению

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n' \sin u'} = V + \Delta V.$$

Подставляя два последних равенства в уравнение (I.69) и используя выражение для η, получаем

$$n'\beta' \sin u' (\bar{s}' - x') - n_1\beta_1 \sin u_1 (\bar{s}_1 - x_1) =$$

$$= n'\beta' \sin u' (s' - x') \left(1 + \frac{\Delta s'}{s' - x'} - \frac{V + \Delta V}{V}\right) =$$

$$= -n'\beta' \sin u' (s' - x') \eta.$$

Из этой формулы легко получить окончательную формулу (I.72). Г. Д. Рабиновичем [7] выведена еще одна формула, которая может быть полезна при расчете аберраций наклонных лучей в меридиональной плоскости, а именно:

$$\Delta l' = l' - l_1 V = -l_1 V \frac{\cos u' - \cos u_1}{\cos u'} + \frac{1}{n'\alpha' \cos u'} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} r_\nu \frac{\Delta\alpha_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}} D_\nu, \quad (I.74)$$

где D — рассмотренная раньше величина, представляющая собой выражение $D = \sin u' - \sin u - \sin i' + \sin i$.

Углы u, u', i, i' относятся к рассматриваемому лучу.

Этой формуле можно еще придать вид

$$\Delta l' = \frac{1}{n'\alpha' \cos u'} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[r_\nu \frac{\Delta\alpha_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}} D_\nu - n_1\alpha_1 l_1 (\cos u_{\nu+1} - \cos u_\nu) \right], \tag{I.74*}$$

или

$$\Delta l' = \frac{1}{n'\alpha' \cos u'} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left(r_\nu \frac{\Delta\alpha_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}} D_\nu + 2n_1\alpha_1 l_1 \sin \frac{i'_\nu - i_\nu}{2} \sin \frac{u_\nu + u'_\nu}{2} \right).$$

Если $s_1 = \infty$, формула (I.74*) принимает вид

$$\Delta l' = l' + f' \operatorname{tg} w_1 = \frac{1}{n'\alpha' \cos u'} \sum r_\nu \frac{\Delta\alpha_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}} D_\nu -$$

$$- \frac{f' \operatorname{tg} w_1}{\cos u'} \sum (\cos u' - \cos u).$$

В последних формулах отдельные слагаемые характеризуют влияние каждой поверхности.

Разностные формулы Кербера—Рабиновича целесообразно применять при расчете очень длиннофокусных объективов, например объективов астрономических труб, когда основной тригонометрический расчет хода лучей необходимо выполнять при помощи семизначных таблиц логарифмов. Дифференциальные формулы позволяют получить ту же точность в величине аберраций при использовании пятизначных таблиц логарифмов как при расчете хода луча, так и при вычислении самих аберраций по формулам (I.67), (I.71) или (I.72). Особого выигрыша во времени эти формулы, однако, не дают, так как необходимо сначала рассчитать ход луча с пятизначными таблицами, а затем произвести все вычисления по формулам (I.69), (I.71) и (I.72). Ценность дифференциальных формул заключается в том, что они дают возможность определить отдельно влияние каждой поверхности на аберрации.

В настоящее время дифференциальные формулы применяются мало, так как при точности выполняемых на современнных ЭВМ вычислений нет нужды в специальных приемах. Тем не менее приведенные выше дифференциальные формулы представляют теоретический интерес: они, например, позволяют оценить влияние аберраций высших порядков и их распределение по поверхностям, и решить ряд других задач.

Разностные формулы для волновой аберрации

Для оценки качества изображения, даваемого оптической системой, необходимо (см. гл. X) знать величину волновой аберрации, т. е. отступления поверхности волны (поверхности, ортогональной лучам пучка, выходящего из оптической системы и образующего изображение точки-предмета) от идеальной (сферической) волны.

Рассмотрим частный случай, когда точка и ее изображение находятся на оси оптической системы. Пусть S (рис. I.15) —

Рис. I.15

Рис. I.16

точка, из которой исходит луч SM_1. После выхода из системы луч пересекает ось ее в точке S'. Обозначим через p_1 расстояние SM_1 (на чертеже отрицательное); через $\bar{d}_1$ — расстояние по лучу от первой до второй поверхности; через $\bar{d}_\kappa$ — расстояние по лучу от κ-й до $\kappa + 1$-й поверхности. Величина $-n_1p_1 + n_2\bar{d}_1 + \cdots + n'p' = l$ называется *оптическим путем луча*. Если из этой величины l вычесть сумму $-n_1s_1 + n_2d_1 + \cdots + n's' = l_0$ (оптический путь вдоль оси системы), то разность $l - l_0$ обозначает волновую аберрацию луча SM_1. Эта разность $l - l_0$, как показал Конради, может быть вычислена при помощи приема, аналогичного приему, примененному Кербером для вывода его дифференциальных формул. Вычислим разность $l - l_0$ для одной поверхности. В этом случае (рис. I.16)

$$l - l_0 = n'p' - np - (n's' - ns) = n'(p' - s') - n(p - s), \quad (I.75)$$

где $p = \frac{h}{\sin u}$; $s = \frac{h}{\operatorname{tg} u} + a$; a — стрелка, соответствующая высоте h.

Далее

$$p - s = h\left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u}\right) - a = h\left(\frac{\operatorname{tg} u - \sin u}{\sin u \operatorname{tg} u}\right) - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

или

$$p - s = h \operatorname{tg} \frac{u}{2} - 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = r \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{u}{2} - 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$= 2r \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Аналогично

$$p' - s' = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{u'}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right);$$

$$l - l_0 = n'(p' - s') - n(p - s) =$$

$$= 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left[n' \operatorname{tg} \frac{u'}{2} - n \operatorname{tg} \frac{u}{2} - (n' - n) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right]. \quad (I.76)$$

Подставляя полученные выражения для $p - s$ и $p' - s'$, преобразуем формулу (I.76). Выражение в квадратных скобках можно написать в таком виде:

$$n' \left(\operatorname{tg} \frac{u'}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - n \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) =$$

$$= \frac{n' \sin \frac{i'}{2}}{\cos \frac{u'}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{n \sin \frac{i}{2}}{\cos \frac{u}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{n' \sin \frac{i'}{2}}{\cos \frac{u'}{2}} - \frac{n \sin \frac{i}{2}}{\cos \frac{u}{2}} \right).$$

Умножим и разделим последнее выражение на $2 \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2}$ и приведем к общему знаменателю. Тогда выражение в скобках принимает вид

$$\frac{1}{\cos \frac{u}{2} \cos \frac{u'}{2} 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2}} n \sin i \times$$

$$\times \left(\cos \frac{u}{2} \cos \frac{i}{2} - \cos \frac{u'}{2} \cos \frac{i'}{2} \right).$$

Наконец, помня, что

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

получаем для $l - l_0$

$$l - l_0 = \frac{h}{2} \frac{n \sin i \sin \frac{u' - u}{2} \sin \frac{u' + i}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{u}{2} \cos \frac{u'}{2} \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2}}. \quad (I.77)$$

Если оптическая система состоит из нескольких поверхностей, имеющих общую ось симметрии, разность оптических путей $l - l_0$, относящаяся ко всей системе, равна сумме разностей, относящихся к каждой поверхности отдельно. Вопрос о волновых аберрациях будет более подробно рассмотрен в гл. X.

6. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В некоторых случаях могут оказаться полезными следующие соотношения между величинами, определяющими лучи падающий и преломленный при прохождении через сферическую поверхность (формулы приводятся без выводов):

$$\frac{n'}{r-s} - \frac{n}{r-s'} = -\frac{2n'}{r}\,\frac{\sin\frac{i'-i}{2}\cos\frac{u'+u}{2}}{\sin i}; \tag{I.78}$$

$$\frac{n'\cos u'}{r-s} - \frac{n\cos u}{r-s'} = -\frac{n'\sin(i'-i)}{r\sin i}; \tag{I.79}$$

$$\frac{n'}{r-s} - \frac{n}{r-s'} = \frac{n'-n}{r}\cos\frac{u'+u}{2}\sec\frac{i'+i}{2}; \quad \text{(Эрфле)}$$

$$\frac{n'}{s'}\cos\frac{u'+i'}{2} - \frac{n}{s}\cos\frac{u+i}{2} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(n'\cos\frac{u'+i}{2} - n\cos\frac{u+i}{2}\right), \quad \text{(Кайзер)}$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} =$$

$$= \frac{n'-n}{r} + 2\,\frac{n(r-s)}{rs}\sin\frac{i'-i}{2}\sec\frac{u'+i}{2}\sin\frac{u+i'}{2}; \quad \text{(Конради)}$$

$$n'\sin u' - n\sin u = \frac{n'-n}{r}\,h\cos\frac{i'-i}{2}\sec\frac{i'+i}{2}; \tag{I.80}$$

$$n's'\sin u' - ns\sin u = h(n'\cos i' - n\cos i). \tag{I.81}$$

7. ОТРАЖЕНИЕ ОТ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Если в центрированной оптической системе встречается несколько отражающих поверхностей, то расчет хода луча через систему можно выполнить по вышеприведенной схеме для систем преломляющих поверхностей, но только правило знаков нужно изменить. В этом случае положительным направлением будем считать направление слева направо, как и раньше, но это может и не совпадать с направлением света. Далее нужно принять, что отражающая поверхность с номером κ разделяет две среды с показателями преломления равными по величине, но с противоположными знаками, т. е. нужно принять, что $n_{\kappa+1} = -n_\kappa$.

Правила знаков для величин s, s', r и h остаются без изменения. Правила знаков для углов u, i и φ можно оставить такими же, но нужно понимать под направлением луча направление слева направо, которое, как сказано, не всегда совпадает с направлением распространения света. Толщине $d_к$ после отражения приписывается знак, противоположный знаку толщины $d_{к-1}$.

Таким образом, расчет делается по обычным вышеприведенным формулам, в процессе расчета хода луча при отражении меняют знак у показателя преломления и у толщины, следующей за отражающей поверхностью. Если после первого (и вообще нечетного) отражения следует несколько преломляющих поверхностей, приходится некоторое время (до следующей отражающей поверхности) иметь дело с отрицательными толщинами и показателями преломления.

При этом, однако, отношение n/n' на преломляющих поверхностях остается положительным. Для быстрой ориентировки в знаках углов u и i следует представить себе, что луч во всех средах распространяется слева направо, и в этом предположении определять знаки углов u и i, пользуясь обычными правилами, изложенными в начале главы.

8. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ. ОШИБКИ И ИХ НАХОЖДЕНИЕ

Расчеты хода лучей, меридиональных и косых, а также определение положения фокусов бесконечно тонких астигматических пучков удобнее всего производить с помощью логарифмических таблиц. Вычисления с помощью арифмометров также получили некоторое распространение, но до сих пор нельзя указать ни на одну схему, которая была бы заметно выгоднее других. При выборе способа вычислений следует в первую очередь руководствоваться соображениями, связанными с эксплуатацией тех или иных пособий — таблиц или счетных машин.

В большинстве случаев достаточную точность дают пятизначные логарифмические таблицы, однако при расчетах длиннофокусных систем (объективы телескопических систем с большим увеличением, астрономические объективы) и систем с большими апертурными углами (объективы микроскопов) лучше пользоваться шестизначными, а иногда и семизначными (при фокусных расстояниях свыше метра) таблицами или применять особые приемы, о которых говорилось выше.

Одним из таких приемов, пригодных для вычислений сферической аберрации, является применение дифференциальных формул Кербера и Рабиновича. Обычно вычисления делаются одновременно двумя вычислителями, сверяющими через определенное число операций полученные результаты. Этот прием не вполне гарантирует от ошибок, и одной из задач конструктора является ведение расчета таким образом, чтобы всякая ошибка была сразу

обнаружена и не оказывала влияния на дальнейший ход работы. Грубые ошибки замечаются без труда по значительному расхождению между полученным и ожидаемым результатом. Гораздо труднее отыскание мелких ошибок, встречающихся чаще, чем крупные. Их причина — неправильное интерполирование, неверное сложение и т. д.

Такие ошибки, влияющие на результат расчета достаточно малы, чтобы обратить на себя внимание ведущего работу, могут иметь большое значение для дальнейшего хода вычислений, давая неверный материал, на основе которого делаются неправильные выводы о влиянии изучаемого параметра на качество изображения, образуемого системой, и т. д. Для предупреждения подобных последствий можно рекомендовать не давать ни одного расчета хода луча, не зная наперед хотя бы примерного значения ожидаемых результатов; ввиду этого необходимо тщательно собрать и обработать тот материал, который может помочь такому предсказанию. Такая предварительная подготовка, помимо прямой цели, дает необходимые и важные для дальнейшего ведения расчета сведения о свойствах рассчитываемой или изучаемой системы. В тех случаях, когда отсутствуют какие-либо вспомогательные материалы, необходимо сделать расчеты нескольких добавочных лучей. Имея несколько точек на кривых аберраций, можно судить о правильности отдельных результатов. В дальнейших главах будут даны примеры такой обработки материалов; будет показано, какую ценную помощь могут оказать применение теории аберраций третьего порядка и некоторые сведения об аберрациях высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Rohr M. Die Theorie d. optischen Instrumente. Berlin, Springer, 1904.
2. Czapski S., Eppenstein O. Grundzüge d. Theorie der Optischen Instrumente. Leipzig, Barth, 1924.
3. Smith T. National Physical Laboratory, Collected Researches, vol. 18, 1922.
4. Лебедев И. В. Опт. пром., 1938, № 7.
5. Feder D. P. JOSA, vol. 41, 1951.
6. Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика. М. — Л., АН СССР, 1946.
7. Рабинович Г. Д. — ЖТФ. Т. XVI. Вып. 9, 1946.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ АБЕРРАЦИЙ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1. АБЕРРАЦИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Гауссова теория изображения и эйконалы

Гауссова теория изображения оптическими системами является приближением, пригодным только в случаях, когда поперечные размеры оптической системы и размеры объекта очень малы по сравнению с продольными размерами системы или, другими словами, когда поле зрения системы и ее апертура очень малы. В реальных системах законы гауссовой теории теряют смысл. Изображение светящейся точки уже не представляет собой точку; лучи, излученные точкой-объектом и прошедшие через оптическую систему, уже не собираются в одной точке, а образуют в плоскости установки некоторую фигуру рассеяния весьма сложного вида; картина усложняется еще явлениями дифракции, которые будут рассмотрены особо (см. гл. X).

Теория аберраций, наравне с гауссовой теорией изображения, лежит в основе всех методов расчета оптических систем. Явление аберраций для зеркал было известно в глубокой древности, а с XVII в. оно стало известным и для преломляющих систем (Кеплер, Декарт); изучение сферической аберрации было предпринято Ньютоном; ему было известно также и явление астигматизма. Однако, несмотря на ряд блестящих работ Гюйгенса, Р. Смита, Клеро, Эйлера и Лагранжа по геометрической оптике, систематическое изучение аберраций началось только в середине XIX в. (Зейдель, Эри, Коддинтон и др.); в дальнейшем развитии теории аберраций принимали участие Пецваль, Аббе, Гульстранд, Шварцшильд, Т. Смит и др. Параллельно с перечисленными исследованиями, основанными в общем на законе преломления Снеллиуса, развивалась (на основе принципов Ферма и Малюса о кратчайшем оптическом пути) теория характеристических функций Гамильтона, из которой возникли эйконалы Брунса и Шварцшильда.

Систематическая и полная теория аберраций оптических систем может быть разработана на основании особой теории соответствия между двумя совокупностями прямых (лучей); эти соответствия устанавливаются при помощи функций, называемых эйконалами и определяющих свойства изображений. В отличие от теории коллинеарности Аббе, в которой совокупности лучей удовлетворяют

трем основным условиям коллинеарности Максвелла, предполагающим заранее полное отсутствие аберраций, в теории эйконала делается единственное и вполне естественное предположение, что каждому лучу в пространстве предмета соответствует луч в пространстве изображения. Это соответствие выражается некоторой зависимостью между координатами лучей; написав эту зависимость по определенному правилу, можно посредством простой математической операции получить все аберрации оптической системы. Кроме того, теория эйконала позволяет установить ряд свойств оптических систем весьма общего характера, которые значительно труднее получить другими методами.

Рис. II 1

Эйконалы представляют собой функции от тех или иных параметров, выражающие оптические расстояния между специальным образом выбранными точками. Напомним, что оптическим путем между двумя точками A и B называется сумма $\sum nl$ произведений показателей преломления n на отрезки l, отсчитываемые вдоль пути луча, соединяющего точки A и B (рис. II.1).

Эйконалы отличаются друг от друга выбором параметров, определяющих луч, а также точек начала и конца отсчета оптического пути. Для решения задачи о расчете аберраций, особенно если интересует зависимость их от положения предмета и изображения, удобнее всего использовать так называемый угловой эйконал, т. е. оптический путь между точками P и P' — точками пересечения луча с перпендикулярами к нему, опущенными из точек O и O', в которых плоскости предмета и изображения пересекают оптическую ось системы. В качестве параметров, определяющих луч, возьмем направляющие косинусы μ и ν падающего и μ' и ν' преломленного лучей. Третий косинус λ (λ') определяется из известных соотношений

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1; \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (II.1)$$

Пусть O и O' (рис. II.2) — две сопряженные точки на оси системы в пространстве предметов и в пространстве изображений; $RMM'R'$ — луч; OP и $O'P'$ — перпендикуляры, опущенные из точек O и O' на луч $RMM'R'$. Если четыре величины μ, ν, μ', ν' заданы, то, вообще говоря, луч полностью определен, так как один и только один луч обладает указанными значениями параметров.

Действительно, пусть заданы параметры μ, ν, μ' и ν'. Параметры μ и ν определяют совокупность параллельных лучей, падающих на систему. Среди этой совокупности лучей найдется один и только один, у которого после преломления через оптическую систему направляющие косинусы будут соответственно равны μ' и ν'.

Исключением является случай телескопических систем, когда может не оказаться ни одного луча с заданными параметрами или их может быть бесконечно большое число, если система идеально исправлена для данного направления.

Зависимость углового эйконала от переменных μ, ν, μ', ν' может быть установлена с помощью дифференциальных соотно-

Рис. II.2

шений, для вывода которых нужно рассмотреть новый луч R_1, бесконечно близкий к лучу R. Предположим, что в пространстве предметов луч R_1 параллелен лучу R, а следовательно, имеет те же μ и ν, что и луч R, но проходит через точку $y + dy$, $z + dz$ плоскости YZ. После преломления через оптическую систему луч R_1 займет положение, определяемое косинусами $\mu' + d\mu'$, $\nu' + d\nu'$. В общем случае луч R_1' в пространстве изображений не будет параллелен лучу R', но и не будет пересекать его. Найдем на обоих лучах две ближайшие точки: точку N' с координатами X', Y' и Z' на луче R' и точку N_1' с координатами $X' + dX'$; $Y' + dY'$ и $Z' + dZ'$ на луче R_1'. Отрезок $N'N_1'$ есть кратчайшее расстояние между лучами R' и R_1' в пространстве изображений; он перпендикулярен каждому из них. Обозначим косинусы углов, образуемых лучом R' с осями $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, буквами λ', μ' и ν'; эти косинусы связаны соотношением

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1.$$

Соответственные косинусы для луча R_1' будут равны $\lambda' + d\lambda'$, $\mu' + d\mu'$ и $\nu' + d\nu'$.

Опустим из начала координат O' перпендикуляры: $O'P'$ на направление луча R' и $O'P_1'$ на направление луча R_1'. Расстояния $N'P'$ и $N_1'P_1'$, равные проекциям радиусов-векторов $O'N'$ и $O_1'N'_1$

на лучи R' и R_1', очевидно, определяются формулами

$$N'P' = \lambda' X' + \mu' Y' + \nu' Z'; \tag{II.2}$$

$$N_1'P_1' = (\lambda' + d\lambda')(X' + dX') + (\mu' + d\mu')(Y' + dY') + \\ + (\nu' + d\nu')(Z' + dZ'). \tag{II.3}$$

Введем функцию W, выражающую собой длину оптического пути между точками P и P' в зависимости от значений μ, μ', ν и ν'; измененное для луча R_1' значение той же функции W дает длину оптического пути между точкой P_1 (пересечением перпендикуляра OP_1, опущенного из начала координат O на луч R_1) и точкой P_1'. Согласно представлениям волновой теории света, лучи геометрической оптики суть нормали к поверхности световой волны; поэтому два бесконечно близких параллельных луча R и R' в пространстве предметов можно рассматривать как нормали к элементу плоской волны, находящемуся в плоскости OPP_1; в таком случае световые колебания в точках P и P_1 имеют одинаковые фазы. В пространстве изображений точки N' и N_1', лежащие на общем перпендикуляре $N'N_1'$ к лучам R' и R_1', также принадлежат одному элементу поверхности волны и, следовательно, имеют одинаковые фазы колебаний. Согласно теореме Малюса, система лучей, ортогональных поверхности волны в пространстве предметов, сохраняет свойство ортогональности по отношению к поверхности волны после всех преломлений и отражений при прохождении ее через оптическую систему; поэтому можно считать, что отрезки PP_1 и $N'N_1'$ лежат на поверхности волны, проходящей через систему. В этом случае оптические длины между точками P и N', с одной стороны, и точками P_1 и N_1', с другой, одинаковы; поэтому приращение функции W определяется произведением n' на разность путей, определяемых уравнениями (II.2) и (II.3),

$$N_1'P_1' - N'P' = \lambda' dX' + \mu' dY' + \\ + \nu' dZ' + X' d\lambda' + Y' d\mu' + Z' d\nu'.$$

При этом произведения второго порядка малости, конечно, во внимание не принимаются.

В этой разности сумма первых трех членов

$$\lambda' dX' + \mu' dY' + \nu' dZ' = 0,$$

так как прямая $N'N_1'$ перпендикулярна лучу с направляющими косинусами λ', μ', ν'. Таким образом,

$$dW = n'(X' d\lambda' + Y' d\mu' + Z' d\nu'). \tag{II.4}$$

В силу соотношения (II.1)

$$d\lambda' = -\frac{\mu' d\mu' + \nu' d\nu'}{\lambda'}.$$

Следовательно,

$$dW = n'\left(Y' - X'\frac{\mu'}{\lambda'}\right)d\mu' + n'\left(Z' - X'\frac{\nu'}{\lambda'}\right)d\nu',$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \mu'} &= n'\left(Y' - X'\frac{\mu'}{\lambda'}\right); \\ \frac{\partial W}{\partial \nu'} &= n'\left(Z' - X'\frac{\nu'}{\lambda'}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (II.5)$$

Геометрическое толкование правых частей уравнения (II.5) не представляет затруднений: они равны соответственно координатам Y', Z' точки L' пересечения луча с плоскостью $Y'Z'$, что легко проверить, если в уравнение луча

$$\frac{x' - X'}{\lambda'} = \frac{y' - Y'}{\mu'} = \frac{z' - Z'}{\nu'}$$

подставить $x' = 0$. Тогда y' и z' получаются равными правым частям уравнения (II.5).

С помощью точно таких же рассуждений можно прийти к выводу, что

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = ny; \quad \frac{\partial W}{\partial \nu} = nz, \qquad (II.6)$$

где y и z — координаты точки пересечения луча R с плоскостью YZ в пространстве предметов. Переписываем уравнение (II.5), учитывая геометрическое толкование:

$$\frac{\partial W}{\partial \mu'} = -n'y'; \quad \frac{\partial W}{\partial \nu'} = -n'z'. \qquad (II.7)$$

Системы уравнений (II.6) и (II.7) показывают, что если бы функция $W(\mu, \nu, \mu', \nu')$ была известна в явном виде, то, дифференцируя ее по одной из переменных, от которых она зависит, и подставляя в выражение этой производной численные значения μ, ν, μ' и ν' для рассматриваемого луча, можно получить координаты точки пересечения луча с плоскостью YZ (или $Y'Z'$). Рассматривая ряд лучей, исходящих из одной и той же точки плоскости предмета, и вычисляя все производные $\frac{\partial W}{\partial \mu'}$ и $\frac{\partial W}{\partial \nu'}$, соответствующие этим лучам, можно получить ряд значений для точек пересечения лучей с плоскостью изображения. Естественно брать за плоскости YZ и $Y'Z'$ плоскости предмета и изображения, что в дальнейшем и будет сделано.

Таким образом, функция W определяет точку пересечения луча с плоскостью изображения, что является основной задачей

расчета хода луча. Однако функция W, за исключением очень малого числа не представляющих практического интереса случаев, не может быть выражена в конечном виде как функция от μ, ν, μ' и ν'; ее приходится выражать в виде ряда, расположенного по степеням μ, ν, μ', ν'.

К этим вычислениям мы вернемся ниже. Если с чисто технической стороны применение теории эйконала для расчета аберраций не представляет каких-либо серьезных преимуществ по сравнению с методами, основанными на непосредственном применении элементарных формул тригонометрического расчета хода лучей, то необходимо отметить, что только эта теория позволяет получать очень ценные при расчете сведения общего характера об аберрациях (например, данные о числе независимых коэффициентов аберраций разных порядков тех или иных оптических систем).

Общий вид выражений для аберраций третьего порядка

Как следует из формул (II.6) и (II.7) производные от углового эйконала W по направляющим косинусам μ, ν, μ', ν' равны соответственно координатам y, z, y', z' точек пересечения лучей с плоскостями предмета и изображения.

Рис. II.3

Пусть LL' (рис. II.3) — центрированная оптическая система; OO — плоскость предмета; $O'O'$ — плоскость изображений; PP и $P'P'$ — плоскости входного и выходного зрачков; A — точка предмета, лежащая в меридиональной плоскости на расстоянии $y = l$ от оси; $ABCDEF$ — луч, определяемый координатами m и M точки его пересечения с плоскостью входного зрачка; этот луч пересекает плоскость изображений $O'O'$ в точке F, координаты которой y' и z'. Если бы система была идеальной, то мы должны были бы иметь $y' = \beta y$, $z' = \beta z = 0$.

Отступления $y' - \beta y = \delta g'$ и $z' - \beta z = \delta G'$ представляют собой проекции на оси координат поперечной аберрации $A_0'F$, т. е. расстояния между идеальным изображением A_0' точки A и точкой пересечения луча с плоскостью изображения.

Эти проекции суть функции от координат падающего луча l, m и M и от конструктивных элементов оптической системы OLL', т. е. от радиусов кривизны ее поверхностей, толщин и показателей преломления линз, воздушных промежутков между линзами и положения плоскостей предмета и входного зрачка.

Считая систему известной, рассмотрим $\delta g'$ и $\delta G'$ как функции от одних только координат луча l, m, M, так что

$$\delta g' = f_1(l,\ m,\ M);\ \delta G' = f_2(l,\ m,\ M).$$

Вследствие симметрии системы относительно оси легко установить, что функции f_1 и f_2 не могут содержать членов четных порядков, как lm, M^2, mM и др.; присутствие таких членов нарушило бы выполнение условий

$$f_1(-l,\ -m,\ -M) = -f_1(l,\ m,\ M);$$

$$f_2(l,\ m,\ -M) = -f_2(l,\ m,\ M)$$

и т. д., обусловленных симметрией системы. Пусть e — расстояние от плоскости входного зрачка до плоскости предмета. Если $f_1(l,\ m,\ M)$ разложить в ряд Маклорена по величинам $\frac{l}{e}$, $\frac{m}{e}$ и $\frac{M}{e}$, которые мы примем за величины первого порядка малости, то получим

Рис. II.4

$$f_1(l,\ m,\ M) = a_1\frac{l}{e} + a_2\frac{m}{e} + a_3\frac{M}{e} + b_1\frac{l^3}{e^3} + b_2\frac{l^2m}{e^3} + b_3\frac{l^2M}{e^3} + \cdots, \qquad (II.8)$$

где $a_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial l}\right)_0$ — частная производная от f_1 по $\frac{l}{e}$, соответствующая значению $l = 0$; $a_2 = \left(\frac{\partial f_2}{dm}\right)_0$ — частная производная от f_2 по $\frac{m}{e}$, соответствующая значению $m = 0$, и т. д.; $b_1 = \left(\frac{\partial^3 f_1}{dl^3}\right)$ — частная производная от f_1 третьего порядка по l для значения $l = 0$ и т. д.

Но коэффициенты a_1, a_2, a_3 равны нулю. Это вытекает из принципа Ферма, что легче всего показать следующим образом. В теории идеальных систем, а также реальных систем в параксиальной области было показано, что все лучи, исходящие из точки предмета, вновь сходятся в точку, лежащую в плоскости изображений.

Рассмотрим, что происходит с изображением, если взять в качестве плоскости установки плоскость, отстоящую от плоскости O' на величину Δ. Такое изменение плоскости установки может улучшить качество изображения в тех случаях, когда имеются аберрации, и иногда называется дефокусировкой. Пусть P' (рис. II.4) — плоскость выходного зрачка системы; P_0' — центр выходного

зрачка; A' — изображение точки-предмета A параксиальными лучами; N' — точка на выходном зрачке с координатами m' и M'. Найдем координаты y' и z' точки пересечения A'' луча, проходящего через точку N_1', с плоскостью O_1', отстоящей от плоскости изображения O' на величину Δ и от выходного зрачка на $e' + \Delta$. Уравнение луча $N'A'$ имеет вид

$$\frac{X}{e'} = \frac{Y - m'}{y' - m'} = \frac{Z - M'}{-M'}$$

или

$$Y = m' + \frac{y' - m'}{e'} X; \; Z = M' + \frac{-M'}{e'} X.$$

Дадим X значение $e' + \Delta$. Тогда

$$Y = m' + (y' - m')\left(1 + \frac{\Delta}{e'}\right) = y' + (y' - m')\frac{\Delta}{e'};$$

$$Z = M' - M'\left(1 + \frac{\Delta}{e'}\right) = -M'\frac{\Delta}{e'}.$$

Изменение координат точки пересечения при переходе от старой плоскости O к новой еще не характеризует изменения картины, так как такому изменению подверглись координаты всех лучей, в том числе и главного луча $P_0'A'$. Важны изменения, отнесенные к новому положению точки пересечения главного луча. Для главного луча координаты этой точки равны

$$Y_0 = y' + y'\frac{\Delta}{e'} = y'\left(1 + \frac{\Delta}{e}\right); \; Z_0 = 0.$$

Относительные изменения

$$Y - Y_0 = -m'\frac{\Delta}{e'}; \quad Z - Z_0 = -M'\frac{\Delta}{e'}$$

пропорциональны первым степеням координат m' и M'. Но для идеальных систем $m' = \beta_p m$; $M' = \beta_p M$, где β_p — линейное увеличение в зрачках. Для реальных систем приходится ввести поправки третьего порядка малости относительно величин $\frac{m}{e}$, $\frac{M}{e}$, которыми для принятой нами точности можно пренебречь, так как они умножаются на Δ — величину второго порядка малости, поскольку она такого же порядка малости, что и продольные аберрации системы.

Окончательно можно сказать, что изменение положения плоскости установки на величину Δ вводит аберрации

$$\delta g' = -m\beta_p\frac{\Delta}{e'}; \; \delta G' = -M\beta_p\frac{\Delta}{e'}$$

первого порядка малости. Отсюда можно сделать вывод, что наличие членов аберраций первого порядка малости свидетельствует *о случайности* выбора плоскости установки.

Если за плоскость установки принять плоскость, сопряженную с плоскостью предмета, то коэффициенты a_1, a_2 и a_3 должны быть равны нулю.

Определим более точно вид разложения f_1 (l, m, M) и f_2 (l, m, M). С этой целью установим существование функции S, частные производные от которой по ее аргументам как раз равны f_1 и f_2; эта функция S играет роль потенциала аберраций. Симметрия системы позволяет легко представить разложение функции S в ряд по степеням ее аргументов и по этому разложению решить поставленный вопрос.

Уравнение поверхности волны

Рассмотрим поверхность волны пучка лучей, исходящих из светящейся точки A, лежащей в меридиональной плоскости. После выхода из оптической системы OO' эта волна, претерпевшая на каждой преломляющей поверхности изменение формы, больше не является сферической. Ее отступление от сферической формы может быть определено отрезком N, представляющим собой отсчитываемое по нормали расстояние между реальной волной и идеальной волновой поверхностью, определяемой центром в точке A_0' (идеальном изображении точки A_1) и радиусом R', равным расстоянию между плоскостью изображения и плоскостью выходного зрачка.

Рис. II.5

Пусть OX (рис. II.5) — оптическая ось системы; O — начало координат; XOY — меридиональная плоскость, содержащая гауссово изображение C светящейся точки, причем C находится на расстоянии l_0' от оси.

Пусть S — идеальная волновая поверхность с вершиной в точке O и радиусом $OC = R'$; M — некоторая точка этой поверхности; MK — нормаль к волновой поверхности в этой точке; K — точка пересечения нормали с реальной волновой поверхностью.

Уравнение идеальной волновой поверхности имеет вид

$$(x-d)^2 + (y-l_0')^2 + z^2 - R'^2 = 0,$$

где d — абсцисса точки пересечения плоскости установки с осью OX.

Можно написать уравнение реальной волновой поверхности в таком виде:

$$f(x,\ y,\ z) = (x-d)^2 + (y-l_0')^2 + z^2 - (R' + N)^2 = 0,$$

где N — отрезок MK — некоторая функция от y и от z.

Уравнение нормали к реальной волне в точке с координатами y, z и x имеет вид

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

откуда, пренебрегая величиной N по сравнению с R' и помня, что N — функция от y и z, получаем

$$\frac{X-x}{x-d} = \frac{Y-y}{y-l_0'-R'\frac{\partial N}{\partial y}} = \frac{Z-z}{z-R'\frac{\partial N}{\partial z}}. \qquad (II.9)$$

Полагая в последнем уравнении $X = d$, получаем значения координат $Z = \delta G'$, $Y = l_0' + \delta g'$ точки пересечения луча с плоскостью установки, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \delta G' &= R'\frac{\partial N}{\partial z}; \\ \delta g' &= R'\frac{\partial N}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (II.10)$$

Уравнения (II.10) связывают поперечные аберрации $\delta G'$ и $\delta g'$ с производными от функции N по z и по y. Остается теперь выразить последние координаты через известные m' и M'.

Если аберрации системы невелики, то можно принять, что направление реального луча, проходящего через точку M идеальной волновой поверхности с координатами x, y, z, мало отличается от направления нормали MC, т. е. можно принять, что реальный луч проходит через точку C с координатами d, l_0' и O. Положим, что плоскость yOz совпадает с плоскостью выходного зрачка и что координаты точки пересечения луча с этой плоскостью суть 0, m' и M'. Так как эти координаты должны удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки M и C, то они связаны следующими соотношениями:

$$M' = \frac{d}{d-x}z; \quad m' = \frac{dy - xl_0'}{d-x}, \qquad (II.11)$$

где

$$x = d - \sqrt{R^2 - z^2 - (y-l_0')^2}.$$

Эти приближенные уравнения дают достаточную точность для всех случаев, встречающихся на практике, так как нормали

в соответственных точках обеих волновых поверхностей — реальной и идеальной сферической — мало отличаются друг от друга.

Если угол расхождения выходящего пучка невелик и отношение диаметра выходного зрачка к расстоянию d (или R') не превышает 1 : 4 и даже 1 : 3, то формулы (II.11) могут быть упрощены следующим образом. Положим, что $d = R'$; тогда обычным приемом разложения корня квадратного в ряд по формуле бинома Ньютона находим

$$x = \frac{1}{2} d \frac{z^2 + (y - l_0')^2}{d^2}.$$

Далее, используя формулы (II.11) и помня, что x мало́ по сравнению с d, получаем приближенные формулы для m' и M' в таком виде:

$$m' = y + \frac{x}{d}(y - l_0'); \quad M' = z\left(1 + \frac{x}{d}\right).$$

После замены x только что найденным приближенным значением находим

$$\left.\begin{aligned} M' &= z\left[1 + \frac{1}{2}\frac{z^2 + (y - l_0')^2}{d^2}\right]; \\ m' &= y + \frac{1}{2}\frac{z^2 + (y - l_0')^2}{d^2}(y - l_0'). \end{aligned}\right\} \qquad (II.12)$$

Наоборот, y и z выражаются через M' и m' следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} y &= m' - \frac{1}{2}\frac{M'^2 + (m' - l_0')^2}{d^2}(m' - l_0'); \\ z &= M'\left(1 - \frac{1}{2}\frac{M'^2 + (m' - l_0')^2}{d^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (II.13)$$

Формулами (II.12) и (II.13) следует пользоваться только тогда, когда нужна исключительная точность; во всех остальных случаях можно просто положить, что $M' = z$, $m' = y$, и тогда вместо формулы (II.10) имеем

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= R'\frac{\partial N}{\partial m'}; \\ \delta G' &= R'\frac{\partial N}{\partial M'}. \end{aligned}\right\} \qquad (II.14)$$

Волновая аберрация N представляет собой функцию от y' и z', т. е. от координат точки пересечения луча со сферой S. Но координаты y' и z' могут быть выражены через m' и M', поэтому функция N может быть разложена в ряд по степеням m' и M'. Она зависит также от конструктивных элементов системы и от положения плоскости предмета, но в данном вопросе эта зависимость может

не приниматься во внимание. Сопоставляя уравнения (II.8) и (II.14) и помня, что коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ и что $m' = \beta m$ и $M' = \beta M$ с точностью до членов третьего порядка малости, мы видим, что разложение функции N начинается с членов четвертого порядка малости.

Рассмотрим теперь, как использовать симметрию системы для определения числа коэффициентов разложения.

Каноническая форма уравнения поверхности волны

В выражение всякой функции от нескольких переменных входит еще ряд коэффициентов, число которых путем специального выбора системы координат или введением новой системы переменных может быть доведено до минимума.

Например, уравнение конического сечения в прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

с шестью коэффициентами A, B, C, D, E, F. Но особым выбором осей координат это уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где имеется только два коэффициента a и b. Никакими способами коническое сечение не может быть представлено меньшим числом параметров.

Волновая аберрация N представляет собой функцию четырех параметров, например y, z, m', M' (за y и z здесь принимаем координаты точки пересечения луча с плоскостью предмета).

Если разложить эту функцию в ряд по степеням величин y, z, m' и M', то в общем случае будет 1 член нулевого порядка, 4 члена первого порядка, 10 (1 + 3 + 6) членов второго порядка, 20 (1 + 3 + 6 + 10) членов третьего порядка и 35 (1 + 3 + 6 + + 10 + 15) членов четвертого порядка (столько членов, сколько имеется частных производных того же порядка). Особым выбором системы координат (перемещением начала координат и изменением направления осей) число членов может быть уменьшено на несколько единиц.

Насколько деликатен вопрос о минимальном числе независимых коэффициентов функции, можно иллюстрировать двумя примерами из теории аберраций.

Пецваль, первым давший разложение в ряд аберраций пятого порядка, насчитал 12 коэффициентов; Шварцшильд нашел всего 9. По поводу этого числа возникла полемика между Кербером и Зоннефельдом; Кербер, проделав разложение другим методом, подтвердил результаты Пецваля, в то время как Зоннефельд доказал правильность вывода Шварцшильда. Победа осталась за последним.

Лармор насчитал 7 независимых коэффициентов в разложении эйконала второго порядка общей оптической системы; Смит и после него Герцбергер показали, что это число может быть сведено к 6 (вместо 10 при случайном выборе координатной системы).

Если оптическая система обладает осью симметрии, то функция N по-прежнему зависит от четырех переменных: y, z, m' и M', но эти четыре переменные могут входить в выражение для N только в определенных комбинациях, обусловливаемых осевой симметрией. Пусть OX (рис. II.6) — оптическая ось системы; $A(y, z)$ — точка, где луч пересекает плоскость предмета; $P'(m', M')$ — точка, где луч пересекает плоскость выходного зрачка; φ и ψ — углы, образуемые с меридиональной плоскостью радиусами-векторами $OA = r$ и $O'P' = r'$. Положение луча AP' по отношению к оси симметрии OX определяется тремя параметрами, например расстояниями OA и $O'P'$ и разностью углов $\varphi - \psi$; все эти три величины при вращении луча AP' относительно оси остаются постоянными. Но

Рис. II.6

$$y = r\cos\varphi; \quad m' = r'\cos\psi;$$
$$z = r\sin\varphi; \quad M' = r'\sin\psi.$$

Следовательно, постоянными остаются величины

$$R = y^2 + z^2 = r^2; \quad R_p = m'^2 + M'^2 = r'^2;$$
$$u = ym' + zM' = rr'\cos(\varphi - \psi).$$

Так как положение прямой AP' относительно оси OX полностью определено тремя величинами R_p, R и $(\varphi - \psi)$, то N может зависеть от y, z, m' и M' только через их функции R, R_p и u.

Так как это функции второго порядка относительно y, z, m' и M', то величина $N^{(4)}$, т. е. сумма всех членов N, порядок которых равен четырем, может быть составлена только из шести комбинаций, а именно R^2, R_p^2, u^2, RR_p, Ru, R_pu, и имеет вид

$$N^{(4)} = +\frac{A}{4}R^2 + \frac{B}{4}R_p^2 + Cu^2 + \frac{D}{2}RR_p + ERu + FR_pu,$$

где A, B, ..., F — некоторые постоянные, зависящие только от конструктивных элементов системы; численные коэффициенты $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ поставлены для удобства дальнейших выкладок.

С целью упрощения выберем плоскость XOY так, чтобы она проходила через точку объекта; тогда $z = 0$. Дифференцируя последнее уравнение, вычисляя производные согласно (II.14) и заменяя величины R, R_p и u их выражениями, получаем

$$\delta g' = R'[Bm'(m'^2 + M'^2) + F(3m'^2 + M'^2)y +$$
$$+ (2C + D)m'y^2 + Ey^3];$$
$$\delta G' = R'[BM'(m'^2 + M'^2) + 2m'M'yF + DM'y^2].$$

Члена, содержащего коэффициент A, нет, и остались только члены, зависящие от B, C, D, E, F. Каждый из этих членов соответствует некоторой комбинации произведений величин y, m', M', причем сумма степеней всегда равна трем. Отсюда и произошло название «аберрации третьего порядка», данное этим членам. Положим $R'B = A_1$, $R'F = B_1$, $(2C + D)R' = C_1$, $R'E = E_1$, $y = l$.

Для $\delta g'$ и $\delta G'$ получаются следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= A_1 m'(m'^2 + M'^2) + B_1 l(3m'^2 + M'^2) + C_1 l^2 m' + E_1 l^3; \\ \delta G' &= A_1 M'(m'^2 + M'^2) + 2B_1 l m' M' + D_1 l^2 M', \end{aligned}\right\} \quad (\text{II}.15)$$

где A_1, B_1, . . ., E_1 — коэфициенты, зависящие только от постоянных оптической системы и от положения плоскостей объекта и входного зрачка, но не зависящие от координат луча; последний определяется четырьмя координатами: двумя в плоскости объекта ($y = l$, $z = 0$) и двумя координатами пересечения луча с плоскостью выходного зрачка (m' и M'). Впрочем, можно заменить координаты в плоскости выходного зрачка m' и M' координатами точки пересечения луча с плоскостью входного зрачка m и M. Для этой цели пользуются соотношениями $m' = m\beta_p$, $M' = M\beta_p$, верными только в гауссовой области; но при рассмотрении аберраций третьего порядка такая замена не меняет результатов, и мы получаем формулу точно такого же вида, как формула (II.15), где коэффициенты A_1, . . ., E_1 имеют иное численное значение.

Изображение точек при наличии аберраций

Как уже было указано, гомоцентрический пучок лучей, вышедших из какой-нибудь точки пространства предметов, после прохождения через оптическую систему вследствие наличия аберраций оказывается не гомоцентрическим; лучи его не пересекаются в одной точке и поэтому в плоскости гауссового изображения образуют размытое светлое пятно — пятно рассеяния. Формулы (II.15) дают возможность определить точку пересечения с плоскостью изображения каждого отдельного луча из числа образующих пучок, если оптическая система обладает аберрациями только третьего порядка.

Чтобы исследовать распределение точек пересечения с плоскостью изображения отдельных лучей данного пучка, обычно пользуются следующим приемом: из всего пучка рассматривают непрерывную совокупность лучей, выходящих из одной точки предмета и по выходе из системы пересекающих плоскость выходного зрачка по окружностям с центром на оси системы.

Каждая такая совокупность лучей в плоскости изображений дает систему точек пересечения, геометрическое место которых

есть замкнутая более или менее сложная кривая. Обыкновенно изучают кривые, получающиеся в том случае, когда только один из пяти коэффициентов в формулах (II.15) не равен нулю, т. е. изучают в отдельности кривые аберраций, определяемые только одним из коэффициентов.

Каждая из пяти аберраций, определяемых одним из коэффициентов в формулах аберраций, имеет особое название. Аберрация, обусловленная коэффициентом A, называется *сферической аберрацией*; коэффициент B определяет *кому*, C — *кривизну поверхности меридиональных фокусов астигматического элементарного пучка*, D — *кривизну поверхности сагиттальных фокусов того же пучка*, E — *дисторсию* (изображения). Необходимо отметить, что в действительности случаи, когда система обладает только одной аберрацией, являются исключительными; обычно системы имеют все пять аберраций. Различные комбинации аберраций для различных точек предмета дают иногда очень сложные кривые распределения точек пересечения лучей, принадлежащих к одной определенной выше совокупности лучей, с плоскостью изображения.

Если допустить, что оптическая система не дает аберраций в плоскости выходного зрачка, т. е. что выходной зрачок есть безаберрационное, идеальное изображение входного зрачка, то каждой совокупности лучей, выбираемой указанным способом для исследования распределения лучей по выходе их из системы, в пространстве предметов соответствует пучок лучей, расположенных на конической поверхности с вершиной в изображаемой точке и проходящих через точки окружности в плоскости выходного зрачка с центром на оптической оси. На самом деле, вследствие аберраций в зрачках, окружности в плоскости входного зрачка соответствует замкнутая кривая в плоскости выходного зрачка, отступающая по форме от окружности. Но эти отступления невелики, и ими можно пренебречь при решении всех задач, связанных с качеством изображения, так как этот вопрос по своей природе не требует особо точных ответов.

Если распределение лучей в пучке, выходящем из оптической системы, известно, то в некоторой степени можно судить о распределении световой энергии в пятне рассеяния по большей или меньшей плотности точек пересечения лучей с плоскостью изображения при условии равномерного распределения точек пересечения тех же лучей с плоскостью выходного зрачка. Найденное таким образом распределение энергии соответствует действительному только в случаях значительных величин аберраций; у более совершенных систем с хорошим исправлением аберраций распределение световой энергии в пятне рассеяния есть результат интерференции когерентных лучей и потому место наибольшей густоты точек пересечения лучей может не быть местом наибольшей освещенности.

В дальнейшем при исследовании распределения лучей в пучке будем рассматривать совокупности их, определяемые пятью окружностями в плоскости выходного зрачка с радиусами, длины которых относятся как 1 : 0,8 : 0,6 : 0,4 : 0,2, т. е. образуют арифметическую прогрессию.

Сферическая аберрация. Если коэффициенты $B = C = D = E$ равны нулю, то оптическая система обладает только сферической аберрацией третьего порядка; координаты точки пересечения луча с плоскостью изображения определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= Am'(m'^2 + M'^2); \\ \delta G' &= AM'(m'^2 + M'^2). \end{aligned}\right\} \qquad (II.16)$$

Переходя к полярным координатам в плоскости выходного зрачка и принимая за полярную ось $O'y'$, имеем

$$m' = \rho' \cos\theta; \quad M' = \rho' \sin\theta,$$

где ρ' и θ — полярные координаты точки с прямоугольными координатами m', M'.

Тогда

$$\delta g' = A\rho'^3 \cos\theta;$$

$$\delta G' = A\rho'^3 \sin\theta,$$

откуда

$$\delta g'^2 + \delta G'^2 = A^2\rho'^6.$$

Рис. II.7

Следовательно, при постоянном значении ρ' кривая, описываемая лучами при их пересечении с плоскостью изображения, является окружностью с радиусом, равным $A\rho'^3$. При этом из соотношения $\frac{\delta g'}{\delta G'} = \operatorname{ctg}\theta$ вытекает, что каждой точке на выходном зрачке соответствует точка в плоскости изображения, расположенная в той же меридиональной плоскости, что и первая точка.

Между окружностями с центрами на оси системы в плоскости выходного зрачка и соответствующими им окружностями в плоскости изображения существует подобие особого рода с переменным масштабом подобия, зависящим от радиуса окружности ρ'. Равномерно нанесенным окружностям на выходном зрачке (рис. II.7) соответствуют в плоскости изображения окружности с очень быстро растущими радиусами. При радиусах, численные значения которых меняются по этому закону, в плоскости изображения получаются фигуры, представленные на рис. II.8. В табл. II. 1 указаны относительные значения ρ', причем за единицы

измерения для обеих величин условно приняты радиусы окружностей с номером 6; числа обоих столбцов не могут быть сравниваемы друг с другом, так как в действительности единица первого столбца имеет размеры радиуса входного зрачка, а единица второго обычно не превышает малых долей миллиметра.

Площади последующих зон быстро растут, так как лучи сильно концентрированы в середине; количество их быстро уменьшается к краям изображения.

Расчет показывает, что если разделить кружок рассеяния на пять частей, отделенных окружностями, радиусы которых ме-

Рис. II.8

Таблица II.1

№ кольца	ρ'	$r' = \rho'^3$
1	0	0
2	0,2	0,008
3	0,4	0,064
4	0,6	0,216
5	0,8	0,512
6	1	1

няются через равные промежутки в пятую часть радиуса зрачка, то в первом кольце (наименьшем) сосредоточивается 34% лучей из числа всех, равномерно заполняющих выходной зрачок, хотя площадь кольца составляет всего 4% всей площади пятна; во втором кольце сосредоточивается 20%, в третьем — 17%, в четвертом — 15%, в последнем — 14%. Как уже было указано, вследствие интерференции лучей в системах с умеренными значениями сферической аберрации, действительное сосредоточение световой энергии в центральной части пятна рассеяния значительно превышает то, какое характеризуется приведенными цифрами, полученными без учета дифракционных явлений; правильные результаты дает дифракционная теория изображений (см. гл. X).

Если экран, на котором получается изображение точки, перемещать параллельно самому себе вдоль оптической оси, то диаметр кружка рассеяния, получаемого на экране вследствие сферической аберрации, изменяется. Пусть луч KM (рис. II.9), соответствующий краю выходного зрачка, пересекает ось в точке M, а параксиальный луч — в точке G, так что GM представляет продольную сферическую аберрацию системы; при смещении плоскости установки по направлению от G к M до некоторой

плоскости P, перпендикулярной оси и проходящей через точку A, наблюдается сначала уменьшение диаметра кружка рассеяния, а потом увеличение его. Плоскость P называют плоскостью наименьшего кружка рассеяния. В простейшем случае, когда поперечная аберрация может быть представлена единственным членом третьего порядка, а члены высших порядков отсутствуют, плоскость наименьшего кружка рассеяния находится на расстоянии трех четвертей длины GM от гауссовой плоскости; радиус наименьшего кружка рассеяния в четыре раза меньше, чем в гауссовой плоскости. Вывод, выполненный уже Ньютоном, изложим в более обычном для современного читателя виде.

Рис. II.9

Рассматриваемый луч KM (рис. II.9), пересекающий ось под углом u, имеет поперечную сферическую аберрацию, измеряемую отрезком GH_G в гауссовой плоскости. Согласно первой из формул (II.16), этот отрезок определяется уравнением

$$GH_G = \delta g' = Am'^3.$$

Так как величина m' пропорциональна углу u, то можно написать

$$GH_G = au^3,$$

где a — коэффициент пропорциональности.

Из треугольника MGH_G имеем $\delta g' = u\delta s'$, т. е.

$$\delta s' = au^2.$$

Назовем высоту пересечения луча K_1H_G с плоскостью PA буквой h, а расстояние плоскости PA от гауссовой плоскости — Δ_m ($\Delta_m < 0$); из треугольников MAH_A и MGH_G имеем

$$h = \frac{\delta g'(\Delta_m - \delta s')}{\delta s'} = u(\Delta_m - au^2).$$

Диаметр наименьшего кружка $2h_{\min}$ определяется положением точки пересечения крайнего луча с каким-то другим, подлежащим определению лучом; для первого луча имеем

$$h_к = -(au_к^2 - \Delta_m)\, u_к,$$

для второго

$$h_{\min} = h_к = -(au_{\min}^2 - \Delta_m)\, u_{\min}.$$

Исключая $h_к$, находим

$$\Delta_m = a\frac{u_{\min}^3 - u_к^3}{u_{\min} - u_к} = a(u_{\min}^2 + u_{\min}u_к + u_к^2).$$

Минимум значения Δ_m при переменном $u_{\min}$ и заданном $u_к$ получается, когда

$$\frac{\partial}{\partial u_{\min}}\left(u_{\min}^2 + u_{\min}u_к + u_к^2\right) = 2u_{\min} + u_к = 0;$$

отсюда находим

$$u_{\min} = -\frac{u_к}{2}.$$

Это значит, что искомый луч образует с осью угол, в два раза меньший, чем краевой, и с обратным знаком.

Подставляя вместо $u_{\min}$ его значение через $u_к$, получаем для $\Delta_{\min}$

$$\Delta_{\min} = a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)u_к^2 = \frac{3}{4}au_к^2;$$

при этом

$$h_к = -\left(au_к^2 - \Delta_{\min}\right)u_к = -\frac{1}{4}au_к^3,$$

т. е. четверть поперечной аберрации в плоскости Гаусса. Таким образом, оба положения доказаны.

Рассматривая изображение точки, даваемое системой, которая обладает только сферической аберрацией третьего порядка, меняя плоскость установки от гауссовой плоскости в сторону точки M, наблюдают следующую картину: сначала видна яркая точка с большим ореолом, при передвижении плоскости яркость в центре мало меняется, ореол уменьшается, но его яркость растет, становясь сравнимой с яркостью центра; в плоскости наименьшего сечения яркость фона максимальная, затем начинается быстрое расплывание картины.

Отличительная черта сферической аберрации по сравнению с остальными — ее независимость от положения точки-объекта в плоскости предмета. Когда объект находится на оси, все остальные аберрации (в монохроматическом свете) исчезают и остается одна сферическая аберрация. Это свойство относится также и к более общему случаю сферической аберрации всяких порядков.

Кома. Кома, определяемая выражениями

$$\left.\begin{aligned}\delta g' &= B_1(3m'^2 + M'^2)\,l_1;\\ \delta G' &= 2B_1m'M'l_1,\end{aligned}\right\} \qquad (II.17)$$

пропорциональна первой степени удаления точки-предмета от оси и второй степени апертуры.

Для изучения комы снова рассмотрим совокупности лучей, определяемых окружностями в плоскости выходного зрачка. Покажем, что каждой окружности в плоскости выходнго зрачка соответствует окружность в плоскости изображения.

Переходя, как и раньше, к полярным координатам, получаем

$$\delta g' = B_1\rho'^2(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,l_1 = B_1\rho'^2 l_1(2+\cos 2\theta);$$

$$\delta G' = B_1\rho'^2(2\cos\theta\sin\theta)\,l_1 = B_1 l_1\rho'^2\sin 2\theta.$$

Отсюда

$$\delta g' - 2B_1 l_1\rho'^2 = B_1 l_1\rho'^2\cos 2\theta;$$

$$\delta G' = B_1 l_1\rho'^2\sin 2\theta.$$

Из этой системы уравнений находим

$$(\delta g' - 2B_1 l_1\rho'^2)^2 + \delta G'^2 = (B_1 l_1\rho'^2)^2. \qquad (II.18)$$

Следовательно, точка с координатами $\delta g'$, $\delta G'$ описывает окружность, радиус которой $R = B_1 l_1\rho'^2$ пропорционален квадрату радиуса-вектора ρ'; центр ее, расположенный в меридиональной плоскости, находится на расстоянии $2B_1 l_1\rho'^2$ от гауссова изображения; это расстояние тоже пропорционально квадрату ρ'.

Рис. II.10

Если ρ' меняется по избранному ранее закону арифметической прогрессии, то радиусы окружностей в плоскости изображения растут как квадраты целых чисел, а расстояния между последующими центрами окружностей растут как члены арифметической прогрессии (рис. II.10).

Нужно обратить внимание на то обстоятельство, что когда луч вычерчивает окружность на выходном зрачке, его пересечение с плоскостью Гаусса описывает окружность дважды, вследствие наличия коэффициента 2 в аргументе косинуса и синуса.

Если луч двигается радиально в плоскости выходного зрачка, т. е. величина θ постоянна, ρ' переменна, то соответствующая точка пересечения луча с плоскостью изображения также движется по прямой. Все эти прямые проходят через гауссово изображение точки.

Огибающей всех окружностей служит пара прямых, расположенных под углом 30° к оси симметрии изображения. В самом деле, из уравнения (II.18), полагая для краткости $B_1 l_1\rho'^2 = \alpha$, получаем дифференцированием по α

$$-2(\delta g' - 2\alpha) - \alpha = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{2}{3}\delta g'.$$

Подставляя это значение α в уравнение (II.18), получаем

$$\frac{1}{3}\delta g'^2 - \delta G'^2 = 0.$$

Левая часть уравнения может быть разложена на два множителя:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\delta g' - \delta G'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\delta g' + \delta G'\right) = 0,$$

т. е. огибающая состоит из двух прямых, уравнения которых

$$\delta g' - \sqrt{3}\delta G' = 0 \text{ и } \delta g' + \sqrt{3}\delta G' = 0.$$

Прямые образуют с осью $\delta g'$ углы $+30°$ и $-30°$.

Распределение энергии в кружке рассеяния при коме несимметрично: вся энергия расположена в небольшом угле (60°), обращенном, в зависимости от знака коэффициента B_1, в сторону оси или в противоположную. При этом плотность энергии, или освещенность, быстро убывает в направлении от вершины угла приблизительно обратно пропорционально расстоянию от вершины. Пятно рассеяния имеет вид яркой точки, вернее, кружка малых размеров, с постепенно расширяющимся хвостом.

О так называемой меридиональной коме и способе ее определения на основании тригонометрических расчетов см. стр. 213—215.

Астигматизм и кривизна поля. Положив в формуле (II.15) $A_1 = B_1 = E_1 = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= C_1 m' l^2; \\ \delta G' &= D_1 M' l^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.19)}$$

Полагая по-прежнему $m' = \rho' \cos\theta$, $M' = \rho' \sin\theta$ и исключая θ, получаем уравнение кривой, соответствующей постоянному значению ρ':

$$\frac{\delta g'^2}{(C_1\rho' l^2)^2} + \frac{\delta G'^2}{(D_1\rho' l^2)^2} = 1. \qquad \text{(II.20)}$$

Это — эллипс с полуосями $a = D_1\rho' l^2$, $b = C_1\rho' l^2$. Величины a и b растут пропорционально первой степени ρ' и второй степени l. Фигура рассеяния, вызываемая наличием коэффициентов C_1 и D_1, представлена на рис. II.11. Распределение энергии в этой фигуре равномерно, так как a и b пропорциональны значению ρ' и все эллипсы подобны.

Легко показать, что, когда меняется плоскость установки, меняются форма и величина фигуры рассеяния. На рис. II.12 показаны три положения плоскости установки, представляющие особый интерес. В плоскости I, в которой лежит фокус меридиональных лучей, фигура рассеяния представляется в виде отрезка прямой, лежащего перпендикулярно меридиональной плоскости;

в плоскости II, в которой лежит фокус сагиттальных лучей, фигура рассеяния вырождается в прямую, лежащую в плоскости меридиана; в плоскости III, лежащей посередине между I и II, фигура рассеяния имеет вид круга. Если $C_1 = 0$, т. е. нет астигматизма, все фигуры рассеяния представляют собой круги и существует плоскость, для которой диаметр круга равен нулю.

Рис. II.11

Изображение плоскости, перпендикулярной оси, даваемое системой, в которой $C_1 = 0$, является резким, но искривленным и представляет собой параболоид вращения. Чтобы показать это, рассмотрим сечение астигматического пучка какой-нибудь плоскостью, параллельной гауссовой плоскости и отстоящей от нее на расстояние Δ.

Рис. II.12

Принимаем за начало координатных осей центр выходного зрачка; ось x направляем вдоль оптической оси системы, ось y совмещаем с линией пересечения меридиональной плоскости с плоскостью выходного зрачка, а ось z — с линией пересечения сагиттальной плоскости с плоскостью зрачка. Точки пересечения какого-нибудь луча с плоскостью выходного зрачка имеют координаты O, m' и M'; в гауссовой плоскости луч проходит через точку с координатами e', $l' + \delta g'$ и $\delta G'$, где e' — расстояние между гауссовой плоскостью и плоскостью выходного зрачка.

Уравнение луча имеет вид

$$\frac{X}{e'} = \frac{Y - m'}{l' - \delta g' - m'} = \frac{Z - M'}{\delta G' - M'}.$$

Координаты точки пересечения луча с указанной выше плоскостью, параллельной гауссовой плоскости, назовем $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$;

их значения находим из уравнения луча, подставляя $e' + \Delta$ вместо X. Считаем, что Δ мало́ по сравнению с e', и пренебрежем произведениями малых величин $\frac{\Delta}{e'}\delta g'$ и $\frac{\Delta}{e'}\delta G'$; это дает

$$\overline{Y} = l' + \delta g' + \frac{\Delta}{e'} l' - \frac{\Delta}{e'} m';$$

$$\overline{Z} = \delta G' - \frac{\Delta}{e'} M'.$$

Для главного луча координаты точек пересечения его с той же плоскостью равны $l'\left(1 + \frac{\Delta}{e'}\right)$ и 0, так как для него $m' = M' = 0$; поэтому аберрации луча $\delta g'$ и $\delta G'$, отнесенные к точке пересечения главного луча с этой плоскостью, равные разности соответственных координат обоих лучей, определяются формулами

$$\overline{\delta g'} = \delta g' - \frac{\Delta}{e'} m' = \left(C_1 l'^2 - \frac{\Delta}{e'}\right) m';$$

$$\overline{\delta G'} = \delta G' - \frac{\Delta}{e'} M' = \left(D_1 l'^2 - \frac{\Delta}{e'}\right) M'.$$

Вводим новые обозначения

$$C_2 = C_1 - \frac{\Delta}{e' l'^2};$$

$$D_2 = D_1 - \frac{\Delta}{e' l'^2}.$$

Тогда обе слагающие аберрации луча в новой плоскости можно написать в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\delta g'} &= C_2 l'^2 m' = C_2 l'^2 \rho' \cos\theta; \\ \overline{\delta G'} &= D_2 l'^2 M' = D_2 l'^2 \rho' \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{II}.21)$$

Так как формулы имеют тот же вид, что и формулы для аберраций в гауссовой плоскости, то, вообще говоря, кривые пересечения со смещенной плоскостью сохраняют форму эллипсов во всех параллельных сечениях, полуоси эллипсов пропорциональны коэффициентам C_2 и D_2, изменяющим свои значения в зависимости от величины Δ.

Рассмотрим несколько частных случаев формулы (II.21).

1. В плоскости, для которой $\Delta = C_1 e' l'^2$, C_2 обращается в нуль; эллипс вырождается в отрезок $2a$, перпендикулярный меридиональной плоскости; длина отрезка определяется формулой

$$2a = 2(D_1 - C_1) l'^2 \rho',$$

2. В плоскости, для которой $\Delta = D_1 e' l'^2$, D_2 обращается в нуль; эллипс вырождается в отрезок прямой, перпендикулярный оси и лежащий в меридиональной плоскости; длина отрезка равна

$$2b = 2(D_1 - C_1) l'^2 \rho'.$$

3. В плоскости, лежащей посередине между двумя предыдущими, имеем

$$\Delta = \frac{1}{2}(C_1 + D_1) e' l'^2.$$

Рис. II.13

Коэффициенты C_2 и D_2 равны между собой по абсолютной величине; эллипс обращается в окружность, радиус которой равен

$$\frac{D_1 - C_1}{2} \rho' l'^2.$$

4. Если $C_1 = D_1$, астигматическая разность элементарного пучка, как мы видели, равна нулю. Все параллельные сечения пучка суть окружности, кроме одного сечения, для которого

$$\Delta = C_1 e' l'^2 = D_1 e' l'^2.$$

В этом сечении $C_2 = D_2 = 0$, т. е. пучок оказывается гомоцентрическим.

Определение фокусов бесконечно тонких астигматических пучков может производиться следующим образом.

Рассмотрим меридиональное сечение пучка лучей, выходящих из выходного зрачка $P_1 P_2$ (рис. II.13): PA — главный луч пучка, $P_1 A_1$ и $P_2 A_2$ — два крайних луча, пересекающих плоскость выходного зрачка в точках с координатами $+m'$ и $-m'$. Определим линию рассеяния $A_1 A_2$ пучка в гауссовой плоскости GA системы. Если обозначить расстояние гауссова изображения, даваемого пучком, от оси буквой l', то

$$GA_1 = l' + \delta g_1' \text{ и } GA_2 = l' + \delta g_2',$$

поэтому длина линии рассеяния $A_1 A_2$ определяется формулой

$$A_1 A_2 = \delta g_2' - \delta g_1'.$$

Обозначим расстояние точки B_m, в которой пересекаются оба крайние луча, от гауссовой плоскости буквой x'_m; на чертеже $x'_m < 0$. Расстояние от плоскости изображения до плоскости выходного зрачка по прежнему обозначим $e' = x' - s'$. Из подобия треугольников находим

$$\frac{\delta g'_2 - \delta g'_1}{-x'_m} = \frac{2m'}{-e' + x'_m}.$$

Пренебрегаем величиной x'_m в знаменателе правой части, так как она мала по сравнению с e'. Тогда для x'_m получаем

$$x'_m = \frac{e'}{2m'}(\delta g'_2 - \delta g'_1) = \frac{-(s' - x')}{2m'}(\delta g'_2 - \delta g'_1).$$

Вычисляем разность $\delta g'_2 - \delta g'_1$, дважды применяя первую из формул (II.15) и полагая при этом, что m' для верхней точки равно $|-m'|$ для нижней точки; это дает

$$x'_m = -\frac{s' - x'}{m'}(A_1 m'^3 + C_1 l^2 m').$$

Изложенный вывод можно повторить для сагиттального сечения того же пучка лучей и определить расстояние x'_s от гауссовой плоскости точки пересечения крайних лучей пучка с координатами в плоскости выходного зрачка $m' = 0$ и $\pm M'$; в результате вычисления находим

$$x'_s = -\frac{s' - x'}{2M'}(\delta G'_2 - \delta G'_1)$$

или

$$x'_s = \frac{-(s' - x')}{M'}(A_1 M'^3 + D_1 l^2 M').$$

Чтобы получить из двух последних формул координаты фокусов меридионального и сагиттального элементарных пучков, нужно найти предел, к которому стремятся найденные величины x'_m и x'_s, когда m' и M' стремятся к нулю; этим путем приходим к формулам

$$x'_m = -(s' - x')\, C_1 l^2;$$

$$x'_s = -(s' - x')\, D_1 l^2.$$

Таким образом, коэффициенты C_1 и D_1 в разложении Зейделя определяют координаты обоих фокусов астигматического элементарного пучка, для которого осью служит главный луч с аберрациями, определяемыми формулами (II.15).

Найдем разность координат обоих фокусов

$$x'_s - x'_m = -(x' - s')\, l^2 (C_1 - D_1).$$

Эта разность является проекцией на ось системы расстояния между сагиттальным и меридиональным фокусами пучка, т. е. проекцией астигматической разности на ось, характеризующей астигматизм системы.

Астигматическая разность элементарного пучка пропорциональна разности коэффициентов $C_1 - D_1$ в разложении Зейделя. Ординату l' точки A, т. е. отрезок AG, можно рассматривать как изображение отрезка l_0. Пренебрегая дисторсией системы, можно написать

$$l' = \beta l,$$

где β — линейное увеличение системы в области параксиальных лучей.

Воспользуемся обозначением e' для разности $x' - s'$ и перепишем формулы для координат x'_m и x'_s в таком виде:

$$x'_m = \frac{C_1 e' l'^2}{\beta^2} \quad \text{и} \quad x'_s = \frac{D_1 e' l'^2}{\beta^2}.$$

Обе формулы определяют геометрические места меридиональных и сагиттальных фокусов пучков с различными l', т. е. с различными углами наклона к оси; очевидно, что оба геометрические места суть параболы с различными параметрами, касающиеся одна другой в точке на оси системы. Определим кривизны обеих парабол $\frac{1}{R_m}$ и $\frac{1}{R_s}$ в точке на оси системы. В непосредственной близости от вершины имеем соотношения

$$x'_m = \frac{l'^2}{2R_m} \quad \text{и} \quad x'_s = \frac{l'^2}{2R_s},$$

пользуясь которыми для исключения l', получаем зависимость кривизн R_m и R_s от коэффициентов C_1 и D_1

$$\frac{1}{R_m} = \frac{2e'}{\beta^2} C_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_s} = \frac{2e'}{\beta^2} D_1.$$

Таким образом, кривизна поверхностей меридиональных и сагиттальных изображений пропорциональна коэффициентам C_1 и D_1 в разложении Зейделя.

Дисторсия. Последняя из аберраций третьего порядка — дисторсия — определяется единственной координатой

$$\delta g' = E_1 l^3.$$

Она не зависит от координат пересечения луча с выходным зрачком m' и M', и, следовательно, все лучи, идущие из определенной точки объекта, при отсутствии других аберраций собираются в одну точку в плоскости Гаусса, но эта точка не совпадает с идеальным изображением точки объекта. Отступление от

идеального положения пропорционально кубу l, так что изображение точки, лежащей близко к оси, очень мало отклонено от своего идеального положения, в то время как изображение удаленной от оси точки отклонено значительно, вследствие чего нарушается подобие между предметом и изображением. Рассмотрим изображение прямой, лежащей в плоскости предмета и не проходящей через оптическую ось некоторой оптической системы, обладающей дисторсией. Изображение этой прямой в случае идеальной оптической системы, обладающей теми же кардинальными точками, что и рассматриваемая система, должно было бы представляться прямой BC (рис. II.14). Так как рассматриваемая нами оптическая система обладает дисторсией, то каждая точка B изображения прямой отклонится по направлению $OB_к$ на некоторую величину $\overline{B_кB'_к}$ равную El^3, где l — расстояние от оси до точки, изображение которой совпадает с точкой $B_к$ ($к$ — номер точки).

Рис. II.14

Пусть $OB_к = l'$; отношение $\frac{l'}{l}$ постоянно и равно линейному увеличению системы β. Можно поэтому написать

$$\overline{B_кB'_к} = \frac{E}{\beta^3} l'^3 = \frac{E}{\beta^3} \overline{OB_0^3} \sec^3 \omega,$$

где ω — угол между прямой OB_0, перпендикулярной к прямой BC и направлением $OB_к$. Полагая для краткости

$$\frac{E\overline{OB_0^3}}{\beta^3} = a,$$

получим

$$\overline{B_кB'_к} = a \sec^3 \omega.$$

Кривая $B'_0B'_3$ — реальное изображение прямой пространства предметов — определяется как геометрическое место изображений всех точек этой прямой; из сказанного выше следует, что уравнение кривой $B'_0B'_3$ в полярных координатах (OB_0 — полярная ось, ω — полярный угол) имеет вид

$$\rho = R \sec \omega + a \sec^3 \omega = R \sec \omega \left(1 + \frac{a}{R} \sec^2 \omega\right),$$

где $R = \overline{OB}_0$.

Кривая может быть построена по точкам и имеет вид, представленный на рис. II.14, если дисторсия положительна (подушкообразная дисторсия); если дисторсия отрицательна, изображение прямых имеет кривизну, направленную в сторону центра (бочкообразная дисторсия). Дисторсия искажает форму контуров, в особенности на краю поля; углы между элементами кривых могут значительно менять свою величину.

Рассмотренными пятью аберрациями исчерпывается перечень аберраций третьего порядка для монохроматического пучка лучей.

Комбинированные аберрации. Аберрации третьего порядка в чистом виде почти никогда не встречаются, за исключением сферической аберрации для точки на оси системы. Обычно имеется комбинация всех пяти аберраций; кроме того, к ним добавляются члены аберраций более высоких степеней разложения, о которых подробно будет сказано ниже. В общем случае, когда ни один из коэффициентов A_1, B_1, . . ., D_1 не равен нулю, распределение энергии в пятне рассеяния зависит от четырех величин и систематическое изучение всевозможных комбинаций коэффициентов содержит непреодолимые трудности.

Если рассматривать только форму кривых аберраций, не интересуясь их абсолютной величиной и положением, можно уменьшить число параметров с пяти до трех. В качестве иллюстраций разнообразия, создаваемого распределением лучей, приводим несколько чертежей, соответствующих различным комбинациям коэффициентов A и B (рис. II.15—II.19).

Полагая в формуле (II.15) $A_1 = E_1 = 0$ и принимая за единицу коэффициент комы $B_1 l$, можно написать

$$\delta g' = 3m'^2 + M'^2 + Am';$$

$$\delta G' = 2m'M' + BM',$$

где

$$A = C_1 l^2; \quad B = D_1 l^2.$$

Сферическая аберрация на рис. II.15—II.19 во внимание не принята, так как для точек, расположенных далеко от оси, она играет второстепенную роль.

Для сравнения приведен рис. II.20, изображающий аберрационную картину фотографического объектива «Нептун 8» ($f' = 210$ *мм*, 1 : 4,5) для наклонного пучка, образующего угол 27° с осью. Число окружностей на входном зрачке здесь доведено до 16, вместо 10 для предыдущих рисунков; число точек на каждой окружности 32. Объектив «Нептун» обладает большими аберрациями высших порядков, что объясняет сложность аберрационной картины.

Рис. II.15

Рис. II.16

Рис. II.17

Рис. II.18

Рис. II.19

Рис. II.20

Определение коэффициентов аберраций третьего порядка центрированной оптической системы

Выражения сумм S через коэффициенты b. В начале главы было показано, что если обозначить через W угловой эйконал, т. е. оптический путь $PMM_1M_2M'P'$ (см. рис. II.2) между основаниями перпендикуляров, опущенных на луч из центров O и O' плоскостей предмета и изображений, то координаты y и z, y' и z' точек пересечения луча с этими плоскостями получаются по формулам (II.6) и (II.7)

$$\frac{1}{n}\frac{\partial W}{\partial \mu} = y; \qquad -\frac{1}{n'}\frac{\partial W}{\partial \mu'} = y';$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial W}{\partial \nu} = z; \qquad -\frac{1}{n'}\frac{\partial W}{\partial \nu'} = z',$$

где μ, ν, μ', ν' — направляющие косинусы луча до и после преломления через систему.

Функция W обладает такими же свойствами относительно координат μ, ν, μ' и ν', как и функция N относительно m', M', y и z (см. стр. 59). Поэтому, обозначая через ε, ε' и δ выражения $\varepsilon = \mu^2 + \nu^2$, $\varepsilon' = \mu'^2 + \nu'^2$, $\delta = \mu\mu' + \nu\nu'$, имеем для W следующее выражение:

Рис. II.21

$$W = W_0 + A\varepsilon + B\varepsilon' + C\delta + \frac{a_6}{4}\varepsilon^2 + a_5\varepsilon\delta + \frac{a_4}{2}\varepsilon\varepsilon' +$$

$$+ \frac{a_3}{2}\delta^2 + a_2\delta\varepsilon' + \frac{a_1}{4}\varepsilon'^2 \ldots \qquad \text{(II.22)}$$

Функция W зависит от положения предмета. Обозначим через W_H значение функций W, когда плоскостью предметов является передняя главная плоскость H; пусть Δ и Δ' — расстояния от соответственных главных плоскостей до плоскостей предмета и изображения.

Обозначим через τ отношение $\frac{\alpha}{\alpha'}$, обратное угловому увеличению системы γ. Из соотношения $h = \alpha\Delta = \alpha'\Delta'$ (рис. II.21) получаем $\frac{\Delta'}{\Delta} = \tau$. Кроме того, основная формула, связывающая параксиальные координаты плоскостей предмета и изображения с фокусными расстояниями, имеет вид

$$\frac{f}{\Delta} + \frac{f'}{\Delta'} = 1.$$

Сопоставляя ее с предыдущей формулой, получаем для Δ и Δ' соотношения

$$\Delta = \frac{f}{n}\frac{n\tau - n'}{\tau}; \quad \Delta' = \frac{f}{n}(n\tau - n'). \qquad (II.23)$$

Вычисляем разность угловых эйконалов $W - W_H = n'\,(\overline{N'N'_H}) - n\,(\overline{NN_H})$. Из рис. II.22 видно, что $\overline{N'N'_H} = \Delta'\lambda'$. Выражая Δ и Δ' через f и τ, получаем

$$W - W_H = n'\,\Delta'\lambda' - n\,\Delta\lambda = \frac{f}{n}(n\tau - n')\left(n'\lambda' - \frac{n\lambda}{\tau}\right). \qquad (II.24)$$

Для вычисления аберраций третьего порядка следует брать для W только члены четвертого порядка малости относительно

Рис. II.22

Рис. II.23

переменных μ, ν, μ', ν'. То же относится и к выражению $W - W_H$, для разложения которого после замены λ и λ' их выражениями через μ, μ' и ν, ν'

$$\lambda = \sqrt{1 - \mu^2 - \nu^2} = \sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2;$$

$$\lambda' = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon' - \frac{1}{8}\varepsilon'^2.$$

Получаем

$$W - W_H = -\frac{1}{8}\frac{f}{n}(n\tau - n')\left(n'\varepsilon'^2 - \frac{n}{\tau}\varepsilon^2\right). \qquad (II.25)$$

Поперечная аберрация $\delta g' = y' - \beta y$ выражается с помощью формул (II.6) и (II.7) следующим образом:

$$-n'\delta g' = \frac{\partial W}{\partial \mu'} + \frac{n'}{n}\beta\frac{\partial W}{\partial \mu} = \frac{\partial W}{\partial \mu'} + \tau\frac{\partial W}{\partial \mu}. \qquad (II.26)$$

Подставляя вместо $W = W_H + (W - W_H)$ его выражение через μ, ν, μ' и ν' и производя дифференцирование, получаем выражение для $-n'\delta g'$ как функции от μ, ν, μ' и ν'. Для вывода аберраций Зейделя, выраженных через l, m' и M', нужно еще заменить μ, ν, μ' и ν' их выражениями через расстояние от точки до оси l и координаты m' и M' пересечения луча с плоскостью выходного зрачка. Помня, что μ, ν и μ', ν' являются косинусами углов,

образуемых лучом с осями y и z до и после преломления, мы можем написать следующие соотношения (рис. II.23):

$$\frac{y-m}{x-s}=-\mu; \quad \frac{y'-m'}{x'-s'}=-\mu'; \tag{II.27}$$

$$\frac{z-M}{x-s}=-\nu; \quad \frac{z'-M'}{x'-s'}=-\nu'.$$

Величины z и z' полагаем равными нулю, y обозначаем через l; кроме того, необходимо исключить l', m, M и удобно исключить также $x'-s'$. Для этого пользуемся соотношениями

$$l'=\beta_0 l; \quad m=\frac{m'}{\beta_p}; \quad M=\frac{M'}{\beta_p},$$

где β_p — линейное увеличение в зрачках.

Кроме того, условие Лагранжа—Гельмгольца, применяемое к сопряженным плоскостям предмета и изображения, дает

$$n\alpha l=n'\alpha' l'.$$

Но

$$\alpha=\frac{m}{x-s}; \quad \frac{l'}{l}=\beta_0; \quad \frac{m'}{m}=\beta_p;$$

следовательно,

$$x'-s'=(x-s)\frac{m'}{m}\frac{l'}{l}\frac{n'}{n}=(x-s)\beta_p\beta_0\frac{n'}{n}=(x-s)\beta_p\tau. \tag{II.28}$$

После исключения l', m и M с помощью перечисленных формул выражения (II.27) принимают вид

$$\mu=\frac{m'-l\beta_p}{(x-s)\beta_p}; \quad \mu'=\frac{m'-l\beta_0}{x'-s'}; \quad \nu=\frac{M'}{(x-s)\beta_p}; \quad \nu'=\frac{M'}{x'-s'}.$$

Подставим эти выражения в полученную формулу для $-n'\delta g'$. Обозначая

$$\frac{l}{x-s}=w; \quad \frac{m'}{x'-s'}=-\omega'; \quad \frac{M'}{x'-s'}=-\Omega'; \quad \frac{n'}{n}\beta_p=\tau' \tag{II.29}$$

с целью сохранения в выражениях для аберраций лишь угловых величин поля зрения w и апертур ω' и Ω', получаем окончательно

$$\left.\begin{aligned} -2n'\delta g' &= \tilde{S}_{\mathrm{I}}\omega'(\omega'^2+\Omega'^2)+\tilde{S}_{\mathrm{II}}(3\omega'^2+\Omega'^2)w+\\ &+(3\tilde{S}_{\mathrm{III}}+J^2\tilde{S}_{\mathrm{IV}})\omega' w^2+\tilde{S}_{\mathrm{V}}w^3;\\ -2n'\delta G' &= \tilde{S}_{\mathrm{I}}\Omega'(\omega'^2+\Omega'^2)+\tilde{S}_{\mathrm{II}}2\omega'\Omega' w+\\ &+(\tilde{S}_{\mathrm{III}}+J^2\tilde{S}_{\mathrm{IV}})\Omega' w^2, \end{aligned}\right\} \tag{II.30}$$

где

$$J=n\alpha\beta(x-s)=-nf'\alpha'\beta\frac{\tau'-\tau}{\tau'}=n'f\alpha'\beta\frac{\tau'-\tau}{\tau'}=n\alpha l, \tag{II.30*}$$

так как (рис. II.23)

$$x = \frac{f}{n}\left(\frac{n\tau' - n'}{\tau'}\right); \quad s = \frac{f}{n}\left(\frac{n\tau - n'}{\tau}\right);$$

$$x - s = f\frac{n'}{n}\frac{\tau' - \tau}{\tau\tau'}; \quad l = \beta(x - s).$$

Величина J представляет собой инвариант Лагранжа—Гельмгольца; если $s_1 = \infty$, то $J = n'f\alpha'\beta$. При этом

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\tilde{S}_{\mathrm{I}} &= b_4 + 4b_3\tau + 6b_2\tau^2 + 4b_1\tau^3 + b_0\tau^4 + \\
&\quad + \frac{1}{2}f'n\tau(1 + \tau^2); \\
-\frac{\tau'}{2}\tilde{S}_{\mathrm{II}} &= b_4 + 3b_3\tau + 3b_2\tau^2 + b_1\tau^3 + \tau'(b_3 + 3b_2\tau + \\
&\quad + 3b_1\tau^2 + b_0\tau^3) + \frac{1}{2}f'n\tau(1 + \tau\tau'); \\
-\frac{\tau'^2}{2}\left(\tilde{S}_{\mathrm{III}} + \frac{J^2}{3}\tilde{S}_{\mathrm{IV}}\right) &= b_4 + 2b_3\tau + b_2\tau^2 + \\
&\quad + 2\tau'(b_3 + 2b_2\tau + b_1\tau^2) + \tau'^2(b_2 + 2b_1\tau + b_0\tau^2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}f'n\tau(1 + \tau'^2); \\
-\frac{\tau'^3}{2}\tilde{S}_{\mathrm{V}} &= b_4 + b_3\tau + 3\tau'(b_3 + b_2\tau) + 3\tau'^2 \times \\
&\quad \times (b_2 + b_1\tau) + \tau'^3(b_1 + b_0\tau) + \frac{1}{2}f'n\tau\left(1 + \frac{\tau'^3}{\tau}\right); \\
-\frac{1}{2}\tilde{S}_{\mathrm{IV}} &= \frac{3b_{-1}}{(n'f)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.31)$$

В этих формулах коэффициенты b выражаются через коэффициенты a следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&b_4 = a_1 - \frac{1}{2}f'n'; \quad b_2 = \frac{1}{3}(a_3 + a_4); \quad a_0 = a_6 + \frac{1}{2}fn; \\
&b_3 = a_2; \quad b_1 = a_5; \quad b_{-1} = \frac{1}{3}\left(a_4 - \frac{a_3}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.32)$$

Отметим, что коэффициенты углового эйконала $a_1, a_2, \ldots, a_6$ не зависят от положения зрачка и, за исключением a_1 и a_6, не зависят также от положения предмета. Они являются такими же инвариантами оптических систем, как и радиусы, толщины и показатели преломления, но связаны с коэффициентами аберраций гораздо проще, чем перечисленные конструктивные элементы, а именно линейным образом. Поэтому они являются удоб-

ными характеристическими величинами оптических систем, определяющими качество изображения, даваемого этими системами.

Формулы (II.31) могут быть написаны в удобном для запоминания виде, если только ввести следующие обозначения:

$$\tilde{S}_{\mathrm{I}} = S_1; \quad \tilde{S}_{\mathrm{III}} + \frac{J^2}{3}\tilde{S}_{\mathrm{IV}} = S_3; \quad \tilde{S}_{\mathrm{V}} = S_4;$$

$$\tilde{S}_{\mathrm{II}} = S_2; \quad \tilde{S}_{\mathrm{IV}} = S_{\mathrm{IV}}$$

и понимать операцию $((b+\tau)^p$ как возведение в степень p бинома $(b+\tau)$ с последующей заменой степеней b индексами при той же величине, так что

$$((b+\tau)^p = b_p + pb_{p-1}\tau + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}b_{p-2}\tau^2 + \cdots + \tau^p$$

и полагать при этом, что $b_m\ b^n = b_{m+n}$.

Тогда формулы (II.31) могут быть заменены одной формулой

$$-\frac{1}{2}S_\kappa = \tau^{1-\kappa}\Big[((b+\tau)^{5-\kappa}((b+\tau')^{\kappa-1} + \\ + \frac{1}{2}f'n\tau(1+\tau^{3-\kappa}\tau'^{\kappa-1})\Big], \qquad \text{(II.33)}$$

что легко проверить, проделав указанные операции.

Формулы (II.30), (II.31) или (II.33) позволяют найти аберрации третьего порядка системы при любом положении предмета и входного зрачка, определяемом величинами τ и τ', и решают важную задачу об изменении аберраций при изменении положения предмета или входного зрачка.

Определение коэффициентов b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4. Для применения формулы (II.33) нужно знать численные значения этих коэффициентов. Они могут быть получены следующим образом.

Рассмотрим случай, когда предмет на бесконечности, а входной зрачок в переднем фокусе системы. Пусть суммы, рассчитанные для этих положений предмета и входного зрачка (при условии, что $\alpha'_p = 1$ и $\beta_1 = 1$), равны соответственно значениям S_{I}, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_{V}. Из формул (II.31) при $\tau = 0$ и $\tau' = \infty$ вытекает

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2}S_{\mathrm{I}} = b_4; && -\frac{J^2}{2}S_{\mathrm{IV}} = 3b_{-1}; \\ &-\frac{1}{2}S_{\mathrm{II}} = b_3; && -\frac{1}{2}S_{\mathrm{V}} = b_1 + \frac{1}{2}f'n. \\ &-\frac{1}{2}\left(S_{\mathrm{III}} + \frac{J^2}{3}S_{\mathrm{IV}}\right) = b_2; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.34)}$$

Остается неопределенным коэффициент b_0. Его можно определить следующим образом.

Вычислим сумму $\overleftarrow{S}_{\mathrm{I}}$ для второго рассчитанного в обратном ходе луча, т. е.

$$\overleftarrow{S}_{\mathrm{I}} = \sum y \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta \frac{1}{n}} \right)^2 \Delta \frac{\beta}{n} \text{ при } \beta'_p = 1; \; y_1 = f'.$$

Поперечная сферическая аберрация третьего порядка $\delta g'$ луча, проходящего через передний фокус, определяется по формуле

$$-2n'\delta g' = \overleftarrow{S}_{\mathrm{I}}\omega'^3.$$

Но $\overleftarrow{S}_{\mathrm{I}}$ определяется по первой из формул (II.31), а именно:

$$-\frac{1}{2} S_{\mathrm{I}} = b_0\tau^4,$$

так как τ стремится к бесконечности и члены, содержащие τ в степенях меньше четырех, исчезают.

Отсюда следует

$$n'\delta g' = b_0\tau^4\omega'^3.$$

Так как $\delta g'$ бесконечно большое, переходим от поперечной аберрации к угловой $[\alpha'] = -\frac{\delta g'}{s'}$; угловая аберрация остается постоянной при беспредельном увеличении s' и $\delta g'$. Ввиду того что $s' = \frac{m'}{\omega'}$, где m' — расстояние от оси до точки пересечения луча с выходным зрачком, имеем

$$n'[\alpha'] = -\frac{b_0\tau^4\omega'^4}{m'} = -\frac{b_0}{m'}\omega_1^4,$$

так как можно принять

$$\frac{\omega'}{\omega_1} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{\tau}.$$

Этой угловой аберрации $[\alpha']$ соответствует в обратном ходе поперечная аберрация δg, равная $[\alpha']f$, где f — переднее фокусное расстояние системы. Поэтому

$$\overleftarrow{\delta g} = \frac{n'}{n}[\alpha']f = -\frac{b_0}{nm'}\omega_1^4 f.$$

Но по определению фокусного расстояния $\frac{m'}{f} = \omega_1$; следовательно,

$$n\overleftarrow{\delta g} = -b_0\omega_1^3.$$

Учитывая изменение направления луча и сопоставляя последнее уравнение с вышеприведенным, получаем

$$n\overleftarrow{\delta g} = -\frac{\overleftarrow{S}_{\mathrm{I}}}{2}\omega'^3.$$

При изменении хода луча меняются местами n и n', δg и $\delta g'$, ω_1 и ω'. Поэтому

$$b_0 = -\frac{\overleftarrow{S_I}}{2}. \qquad (II.34^*)$$

Из формул (II.31) и (II.33) вытекает очень важное следствие — невозможность существования оптических систем, исправленных для всех положений предмета и входного зрачка. Действительно, необходимость устранения всех пяти сумм Зейделя при любых значениях τ (т. е. при любом положении предмета) приводит к тому, что все коэффициенты b_κ должны равняться нулю. Но при этом остаются не равными нулю члены, не зависящие от b и стоящие в конце выражений для сумм $\left[\text{например, } \frac{1}{2} f' n\tau\,(1+\tau^2) \text{ и т. д.}\right]$.

Рис. II.24

Исключением является случай $f' = \infty$ (плоскопараллельные пластинки, плоские зеркала, телескопические системы с увеличением $+1$ или -1), для которого возможно *в принципе* полное исправление аберраций третьего (и вообще любого) порядка.

Теперь предстоит вычисление коэффициентов S_I, S_{II}, . . ., S_V для любой центрированной оптической системы со сферическими поверхностями. С этой целью вычисляется функция W_H для одной поверхности и определяются коэффициенты аберраций третьего порядка для этого случая. Чтобы получить коэффициенты аберраций третьего порядка для всей системы, можно поступить следующим образом. Аберрации каждой поверхности с помощью теоремы Лагранжа—Гельмгольца переносятся в пространство изображений всей системы, и аберрация всей системы складывается из аберраций отдельных поверхностей. Такое сложение законно для аберраций третьего порядка, так как те пренебрежения, которые при этом делаются, сказываются только на аберрациях высшего (начиная с 5-го) порядка.

Вычисление коэффициентов *b* для одной сферической поверхности. Рассмотрим сферическую поверхность OM (рис. II.24) с центром кривизны в точке C и радиусом r. Вычислим оптический путь для случая, когда плоскость предмета и изображения проходит через центр. Используем простую точную формулу для оптического пути

$$W_c = n'\,\overline{MN'} - n\overline{MN},$$

откуда

$$W_c = r\,(n' \cos i' - n \cos i).$$

Это выражение легко приводится к виду

$$W_c = r\sqrt{n^2 + n'^2 - 2nn' \cos(i' - i)}, \qquad (II.35)$$

что легко проверить возведением в квадрат обоих выражений.

Замечая, что

$$\cos(i'-i)=\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=\sqrt{1-(\mu^2+\nu^2)}\sqrt{1-(\mu'^2+\nu'^2)}+$$
$$+\mu\mu'+\nu\nu'=(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon')^{\frac{1}{2}}+\mu\mu'+\nu\nu',$$

подставляем это выражение в формулу (II.35). Разлагая в ряд корень квадратный, входящий в эту формулу, и удерживая в разложении необходимое число членов, можно W_c написать в виде

$$W_c=r(n'-n)\left[1+\frac{2nn'}{(n'-n)^2}\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2-2\varepsilon\varepsilon'}{8}-\delta\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$W_c=r(n'-n)\left[1+\frac{nn'}{(n'-n)^2}\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}-\delta\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\frac{nn'}{(n'-n)^2}T\right], \qquad \text{(II.36)}$$

где

$$T=(\varepsilon'-\varepsilon)^2-\frac{nn'}{(n'-n)^2}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2+2\varepsilon\varepsilon'-4\delta(\varepsilon+\varepsilon')+4\delta^2).$$

Чтобы получить W_H — оптический путь для главных плоскостей, совпадающих и проходящих через точку O, — нужно к W_c прибавить

$$W_H-W_c=-r(n'\lambda'-n\lambda)=-r(n'-n)+rQ,$$

где

$$Q=\frac{1}{r}(n'\varepsilon'-n\varepsilon)+\frac{1}{8}(n'\varepsilon'^2-n\varepsilon^2).$$

Складывая $W_c+(W_H-W_c)=W_H$ и отбрасывая члены второго порядка, излишние при вычислении аберраций, после простых преобразований получаем

$$(W_H)_4=\frac{r}{8(n'-n)}\left[(n'\varepsilon'-n\varepsilon)^2-\frac{n^2n'^2}{(n'-n)^2}(\varepsilon'+\varepsilon-2\delta)^2\right], \qquad \text{(II.37)}$$

где индекс 4, поставленный у величины W_H, означает, что в разложении приняты во внимание только члены, содержащие четвертую степень величин μ, ν, μ' и ν'.

Производя возведение в квадрат, приведение подобных членов, сравнение коэффициентов при разложении W [формула (II.22)] и переходя от коэффициентов a к коэффициентам b, получаем, полагая $q=\frac{1}{2}r\frac{n^2n'^2}{(n'-n)^3}$:

$$\left.\begin{aligned} &b_4=-q;\quad b_2=-\frac{1}{3}q\frac{n^2+n'^2+nn'}{nn'};\quad b_1=q;\\ &b_3=q;\quad b_{-1}=-\frac{1}{3}q\frac{(n'-n)^2}{nn'};\quad b_0=-q.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.38)}$$

Выражения сумм S через радиус, показатели и увеличения τ и τ'. Подставляя эти значения b в выражения (II.31) для аберраций и разбивая на множители, получаем выражения зейделевых коэффициентов

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{I}} &= -q(1-\tau)^2\left(\tau-\frac{n}{n'}\right)\left(\tau-\frac{n'}{n}\right);\\
\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{II}} &= q\frac{\tau'-1}{\tau'}(\tau-1)\left(\tau-\frac{n}{n'}\right)\left(\tau-\frac{n'}{n}\right);\\
\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{III}} &= q\left(\frac{\tau'-1}{\tau'}\right)^2\left(\tau-\frac{n}{n'}\right)\left(\tau-\frac{n'}{n}\right);\\
\widetilde{S}_{\mathrm{IV}} &= \frac{n'-n}{nn'r};\\
\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{V}} &= q\frac{\tau'-1}{\tau'^3(\tau-1)}\left[(\tau'-1)^2\left(\tau-\frac{n}{n'}\right)\left(\tau-\frac{n'}{n}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{(n'-n)^2}{nn'}(\tau'-\tau)^2\right].
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II}.39)$$

Выражения сумм S через α и β. Для вычислений удобно рассматривать два параксиальных луча, один из которых пересекает оптическую ось в центре плоскости предметов и образует с осью углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_p$, а другой пересекает ось в центре входного зрачка и образует с осью углы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta'_p$. Эти переменные введены Ланге. Замечая, что

$$\left.\begin{aligned}
&\tau=\frac{\alpha}{\alpha'};\quad \tau'=\frac{\beta}{\beta'};\quad q=\frac{1}{2}r\frac{n^2n'^2}{(n'-n)^3};\quad r=h\frac{n'-n}{n'\alpha'-n\alpha};\\
&\tau'-\tau=\frac{J\tau'}{n'f\alpha'\beta}=-\frac{J\tau'(\alpha'n'-\alpha n)}{nn'\alpha'\beta h},
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II}.40)$$

где J определяется по формуле (II.30 *), получаем для сумм Зейделя выражения

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{S}_{\mathrm{I}} &= \frac{h}{\alpha'^4}\left(\frac{\alpha'-\alpha}{\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}}\right)^2\left(\frac{\alpha'}{n'}-\frac{\alpha}{n}\right);\\
\widetilde{S}_{\mathrm{II}} &= \frac{h}{\alpha'^3\beta}\left(\frac{\alpha'-\alpha}{\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{\beta'-\beta}{\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{\alpha'}{n'}-\frac{\alpha}{n}\right);\\
\widetilde{S}_{\mathrm{III}} &= \frac{h}{\alpha'^2\beta^2}\left(\frac{\beta'-\beta}{\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}}\right)^2\left(\frac{\alpha'}{n'}-\frac{\alpha}{n}\right);\\
\widetilde{S}_{\mathrm{IV}} &= \frac{1}{h}\frac{\alpha'n'-\alpha n}{nn'};\\
\widetilde{S}_{\mathrm{V}} &= \frac{h}{\alpha'\beta^3}\frac{(\beta'-\beta)^3}{\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)^2}\left(\frac{\alpha'}{n'}-\frac{\alpha}{n}\right)\frac{1}{\alpha'-\alpha}+\\
&+\frac{J^2}{\alpha'\beta h}\frac{\alpha'n'-\alpha n}{nn'}\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II}.41)$$

Имея аберрации отдельных поверхностей, можно вычислить аберрации всей системы, перенося поперечную аберрацию, вызванную поверхностью κ, в пространство изображений всей системы с помощью закона Лагранжа—Гельмгольца.

Пусть p — номер последней поверхности системы; κ — номер произвольной поверхности; тогда $n'_p\alpha'_p\delta g'_p = n'_\kappa\alpha'_\kappa\delta g'_\kappa$. Для получения инварианта Лагранжа, относящегося к поверхности с номером κ, достаточно помножить формулы (II.30) с обеих сторон на α'_κ. Складывая величины $n'_\kappa\alpha'_\kappa\delta g'_\kappa$, относящиеся ко всем поверхностям, получаем поперечную аберрацию $\delta g'_p$ всей системы, умноженную на $n'_p\alpha'_p$; поэтому

$$\left.\begin{aligned}
-2n'_p\delta g'_p &= \omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{I}\kappa} + \\
&+ \left(3\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)w_1\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{II}\kappa} + \omega'_p w_1^2\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\times \\
&\times\left(3\tilde{S}_{\mathrm{III}} + J^2\tilde{S}_{\mathrm{IV}}\right) + w_1^3\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{V}}; \\
-2n'_p\delta G'_p &= \Omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{I}\kappa} + \\
&+ 2\omega'_p\Omega'_p w_1\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{II}\kappa} + \Omega'_p w_1^2\sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\left(\tilde{S}_{\mathrm{III}} + J^2\tilde{S}_{\mathrm{IV}}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.42)$$

Вводим обозначения

$$S_{\mathrm{I}} = \sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{I}\kappa}; \quad S_{\mathrm{II}} = \sum\frac{\alpha'_\kappa}{\alpha'_p}\tilde{S}_{\mathrm{II}\kappa} \text{ и т. д.}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'_p S_{\mathrm{I}} &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} h_\kappa\left(\frac{\Delta_\kappa\alpha}{\Delta_\kappa\frac{1}{n}}\right)^2\Delta_\kappa\frac{\alpha}{n}\frac{1}{\alpha'^3_\kappa}; \\
\alpha'_p S_{\mathrm{II}} &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} h_\kappa\left(\frac{\Delta_\kappa\alpha}{\Delta_\kappa\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{\Delta_\kappa\beta}{\Delta_\kappa\frac{1}{n}}\right)\Delta_\kappa\frac{\alpha}{n}\frac{1}{\alpha'^2_\kappa\beta_\kappa}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.43)$$

и т. д.

Заметим, что выражения сумм $\alpha'_p S_{\mathrm{I}}$, $\alpha'_p S_{\mathrm{II}}, \ldots, \alpha'_p S_{\mathrm{V}}$ однородны относительно переменных α и β, т. е. не зависят от выбора

единиц для α и β. Условимся брать $\alpha'_p = 1$; $\beta_1 = 1$. Тогда выражения для зейделевых коэффициентов принимают вид

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= \sum hP; \\ S_{\mathrm{II}} &= \sum hP\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}; \\ S_{\mathrm{III}} &= \sum hP\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2; \\ S_{\mathrm{IV}} &= \sum \frac{1}{h}\frac{\alpha' n' - \alpha n}{nn'}; \\ S_{\mathrm{V}} &= \sum\left[hP\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2 + \frac{J^2}{h}\frac{\Delta\alpha n}{nn'}\right]\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.44)$$

где $$P = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\right)^2 \Delta\frac{\alpha}{n}; \quad \Delta\alpha = \alpha' - \alpha; \quad \Delta\beta = \beta' - \beta;$$

$$\Delta\frac{1}{n} = \frac{1}{n'} - \frac{1}{n}.$$

Формулы (II.42) совместно с формулами (II.43) являются основными для расчета оптических систем. Они относятся к общему случаю любых центрированных систем, составленных из сферических поверхностей. В том виде, в котором они приведены, они позволяют вычислить лишь приближенные значения аберраций систем с небольшими апертурными углами и при небольших углах поля. В сущности, они заменяют тригонометрический расчет хода лучей, требуя гораздо меньшей затраты труда (вычисления требуют трех-четырех знаков и во многих случаях могут быть выполнены с помощью логарифмической линейки, в то время как тригонометрический расчет требует применения шестизначных таблиц).

Формулы для коэффициентов аберраций третьего порядка играют настолько важную роль в расчете оптических систем, что необходимо иметь самые разнообразные видоизменения этих формул; на практике представляется большое число отдельных частных случаев, требующих применения тех или иных вариантов формул.

Переписываем формулы (II.42) и (II.44) с учетом формул (II.43):

$$\left.\begin{aligned} -2n'_p\delta g'_p &= \omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)S_{\mathrm{I}} + \left(3\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)w_1 S_{\mathrm{II}} + \\ &+ \omega'_p w_1^2\left(3S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}\right) + w_1^3 S_{\mathrm{V}}; \\ -2n'_p\delta G'_p &= \Omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)S_{\mathrm{I}} + 2\omega'_p\Omega'_p w_1 S_{\mathrm{II}} + \\ &+ \Omega'_p w_1^2\left(S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.45)$$

где $J = n_1\alpha_1 l_1 = n'_p\alpha'_p l'_p$;

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= \sum h\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\right)^2 \Delta\frac{\alpha}{n};\\
S_{\mathrm{II}} &= \sum h\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}}\Delta\frac{\alpha}{n};\\
S_{\mathrm{III}} &= \sum h\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}}\right)^2 \Delta\frac{\alpha}{n};\\
S_{\mathrm{IV}} &= \sum\frac{1}{h}\frac{\Delta\alpha n}{nn'};\\
S_{\mathrm{V}} &= \sum\left[h\frac{\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}}\right)^3\Delta\frac{\alpha}{n}}{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}} + \frac{J^2}{h}\frac{\Delta\alpha n}{nn'}\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right].
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{II}.45^*)$$

Как было указано выше, при выводе формул (II.45) предполагалось, что точка-объект лежит в меридиональной плоскости. Но иногда встречается необходимость иметь формулы, пригодные для общего случая, когда положение точки определяется двумя координатами l_1 и L_1. Вывод формул для $\delta g'$ и $\delta G'$ при L_1 (или $W_1 = \frac{L_1}{x_1 - s_1}$) отличном от нуля может быть выполнен с помощью формул (II.45), применяемых для случая, когда меридиональная плоскость повернута на некоторый угол ψ, определяемый формулой $\operatorname{tg}\psi = \frac{L_1}{l_1}$. Зная выражения для аберраций в повернутой системе координат, можно получить выражения для их проекций на первоначальные плоскости. Подробный вывод смотри в книге А. И. Тудоровского [13] на стр. 451.

В результате получаются следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
-2n'_p\delta g'_p &= \omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)S_{\mathrm{I}} + \left(3w'_p\omega'^2_p + w'_p\Omega'^2_p + \right.\\
&\left. + 2W'_p\omega'_p\Omega'_p\right)S_{\mathrm{II}} + \left(3\omega'^2_p\omega'_p + \omega'_pW'^2_p + 2w'_pW'_p\Omega'_p\right)S_{\mathrm{III}} +\\
&+ J^2\omega'_p\left(w'^2_p + W'^2_p\right)S_{\mathrm{IV}} + w'_p\left(w'^2_p + W'^2_p\right)S_{\mathrm{V}};\\
-2n'_p\delta G'_p &= \Omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)S_{\mathrm{I}} +\\
&+ \left(3W'_p\Omega'^2_p + W'_p\omega'^2_p + 2w'_p\omega'_p\Omega'_p\right)S_{\mathrm{II}} +\\
&+ \left(3W'^2_p\Omega'_p + \Omega'_p\omega'^2_p + 2w'_pW'_p\omega'_p\right)S_{\mathrm{III}} +\\
&+ J^2\Omega'_p\left(w'^2_p + W'^2_p\right)S_{\mathrm{IV}} + W'_p\left(w'^2_p + W'^2_p\right)S_{\mathrm{V}}.
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{II}.46)$$

Выражения сумм S через s и x. Приведем формулы (II.46) к виду, предложенному еще Зейделем и Рором. С этой целью заменим углы отрезками, относящимися к пространству предметов. Используем формулы (II.29)

$$w = \frac{l}{x-s}; \quad \omega' = -\frac{m'}{x'-s'}; \quad \Omega' = -\frac{M'}{x'-s'}.$$

Затем замечаем, что для параксиального луча

$$ni = n(u-\varphi) = n\left(\frac{h}{s} - \frac{h}{r}\right) = -hn\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = -hQ_s,$$

так как инвариант $n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$ обычно принято обозначать через Q_s.

С другой стороны,

$$i' - i = \frac{n}{n'} i - i = \left(\frac{n}{n'} - 1\right) i = \alpha' - \alpha,$$

поэтому $(n - n')\frac{i}{n'} = \alpha' - \alpha$, или $ni = -\frac{\alpha' - \alpha}{n' - n} nn' = \frac{\alpha' - \alpha}{\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}}$,

откуда

$$-hQ_s = \frac{\alpha' - \alpha}{\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}}.$$

Величина

$$\Delta\frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha'}{n'} - \frac{\alpha}{n} = \frac{h}{s'n'} - \frac{h}{sn} = h\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right) = h\Delta\frac{1}{ns}.$$

Аналогично имеем

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}} = -yQ_x,$$

где

$$Q_x = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'}\right).$$

Кроме того, нужно заменить все величины, относящиеся к пространству изображений (ω', Ω'), величинами, относящимися к пространству предметов.

Принимая во внимание однородность выражений аберраций относительно величин α и β, а также соотношения

$$\frac{\omega_1}{\alpha_1} = \frac{\omega_p'}{\alpha_p'}; \quad \frac{\Omega_1}{\alpha_1} = \frac{\Omega_p'}{\alpha_p'},$$

которые можно считать точными в области аберраций третьего порядка, формулы (II.42), (II.43) и (II.45) можно написать в любом виде, содержащем величины ω и Ω вместо ω' и Ω' (при условии,

что за единицу принята величина α_1) или w' вместо w (если вместо β_1 за единицу принять β'_p). Так, например, формулы (II.45) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} -2n'_p\alpha'_p\delta g'_p &= \omega_1\left(\omega_1^2+\Omega_1^2\right)S'_{\mathrm{I}}+\left(3\omega_1^2+\Omega_1^2\right)w_1S'_{\mathrm{II}}+\\ &+\omega_1w_1^2\left(3S'_{\mathrm{III}}+J^2S'_{\mathrm{IV}}\right)+w_1^3S'_{\mathrm{V}};\\ -2n'_p\alpha'_p\delta G'_p &= \Omega_1\left(\omega_1^2+\Omega_1^2\right)S'_{\mathrm{I}}+2\omega_1\Omega_1w_1S'_{\mathrm{II}}+\Omega_1w_1^2\times\\ &\times\left(S'_{\mathrm{III}}+J^2S'_{\mathrm{IV}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.47)$$

где S'_{I}, S'_{II}, . . ., S'_{V} имеют те же значения, что и S_{I}, S_{II}, . . ., S_{V}, только α_1 (а не α'_p) принимается равным единице.

После всех указанных выше (стр. 91) замен формулу (II.47) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} 2\,\frac{n'_p\alpha'_p\delta g'_p}{h_1} &= \frac{m_1\left(m_1^2+M_1^2\right)}{(x_1-s_1)^3}\,s_1^3\overline{S}_{\mathrm{I}}-\frac{3m_1^2+M_1^2}{(x_1-s_1)^3}\,l_1s_1^2x_1\overline{S}_{\mathrm{II}}+\\ &+\frac{m_1l_1^2}{(x_1-s_1)^3}\,s_1x_1^2\left(3\overline{S}_{\mathrm{III}}+\overline{S}_{\mathrm{IV}}\right)-\frac{l_1^3}{(x_1-s_1)^3}\,x_1^3\overline{S}_{\mathrm{V}};\\ 2\,\frac{n'_p\alpha'_p\delta G'_p}{h_1} &= \frac{M_1\left(m_1^2+M_1^2\right)}{(x_1-s_1)^3}\,s_1^3\overline{S}_{\mathrm{I}}-\frac{2m_1M_1}{(x_1-s_1)^3}\,l_1s_1^2x_1\overline{S}_{\mathrm{II}}+\\ &+\frac{M_1l_1^2}{(x_1-s_1)^3}\,s_1x_1^2\left(\overline{S}_{\mathrm{III}}+\overline{S}_{\mathrm{IV}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.48)$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} \overline{S}_{\mathrm{I}} &= \sum\left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^4Q_{s\kappa}^2\Delta_\kappa\frac{1}{ns};\\ \overline{S}_{\mathrm{II}} &= \sum\left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^3\frac{y_\kappa}{y_1}\,Q_{x\kappa}Q_{s\kappa}\Delta_\kappa\frac{1}{ns};\\ \overline{S}_{\mathrm{III}} &= \sum\left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^2\left(\frac{y_\kappa}{y_1}\right)^2Q_{x\kappa}^2\Delta_\kappa\frac{1}{ns};\\ \overline{S}_{\mathrm{IV}} &= -\sum\left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^2\left(\frac{y_\kappa}{y_1}\right)^2(Q_{x\kappa}-Q_{s\kappa})^2\frac{1}{r_\kappa}\Delta_\kappa\frac{1}{n};\\ \overline{S}_{\mathrm{V}} &= \sum\left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)\left(\frac{y_\kappa}{y_1}\right)^3Q_{x\kappa}\left[(Q_{x\kappa}-Q_{s\kappa})\times\right.\\ &\left.\times\frac{1}{r}\Delta_\kappa\frac{1}{n}+Q_{x\kappa}^2\Delta_\kappa\frac{1}{nx}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.49)$$

Отметим некоторые видоизменения формулы (II.49). Для этого необходимо применить две весьма важные формулы, выведенные впервые Зейделем и связывающие между собой координаты точек пересечения с поверхностями линз двух параксиальных лучей. В качестве таких лучей обычно принимаются параксиальный, проходящий через центр объекта, и параксиальный, проходящий

через центр входного зрачка. Вывод этих двух формул приводится ниже.

Две формулы Зейделя. Эти формулы связывают координаты двух вспомогательных лучей. Эти же формулы могут применяться и для любых двух параксиальных лучей, проходящих через центрированную оптическую систему.

Первая из формул вытекает непосредственно из инварианта Лагранжа—Гельмгольца $n_к l_к \alpha_к = J$, где J — постоянная. Для вывода формулы обратимся к рис. II.25, на котором $O_к N_к$ представляет одну из преломляющих поверхностей системы с номером $к$. Рассмотрим в пространстве предметов две точки S_1 и P_1 на оси системы (в частности, это могут быть точка предмета и центр входного зрачка). Предположим, что $S_к$ и $P_к$ — изображения этих точек, даваемые в параксиальной области частью системы, предшествующей поверхности с номером $к$. В частном случае, рассмотренном в гл. I, через первую точку проходит первый вспомогательный луч, не показанный на чертеже, через вторую — второй вспомогательный луч $N_к P_к$, образующий с осью угол $\beta_к$ и пересекающий поверхность $O_к N_к$ в точке $N_к$ на высоте $y_к$. Этот луч проходит через конец отрезка $S_к L_к$, равного $l_к$; координаты точек $S_к$ и $P_к$, как и раньше, обозначены буквами $s_к$ и $x_к$. Очевидно, что для параксиального луча $N_к P_к$

Рис. II.25

$$\beta_к = \frac{y_к}{x_к} = \frac{l_к}{x_к - s_к}.$$

Угол $\alpha_к$, образуемый с осью первым вспомогательным параксиальным лучом, определяется аналогичной формулой

$$\alpha_к = \frac{h_к}{s_к},$$

где $h_к$ — высота точки пересечения луча с поверхностью $O_к N_к$.

Инвариант J может быть преобразован следующим образом:

$$J = n_к l_к \alpha_к = n_к (x_к - s_к) \beta_к \alpha_к = n_к (x_к - s_к) \frac{y_к}{x_к} \frac{h_к}{s_к} =$$

$$= n_к \left(\frac{1}{s_к} - \frac{1}{x_к} \right) y_к h_к.$$

Окончательно

$$J = n_к y_к h_к \left(\frac{1}{s_к} - \frac{1}{x_к}\right)$$

или

$$y_к h_к (Q_{xк} - Q_{sк}) = J \qquad (II.50)$$

и, в частности,

$$y_к h_к (Q_{xк} - Q_{sк}) = y_1 h_1 (Q_{x1} - Q_{s1}), \qquad (II.50^*)$$

где $Q_{xк}$ и $Q_{sк}$ — инварианты Аббе.

В таком виде обычно и пишут первую формулу Зейделя. Эта формула связывает разность величин $Q_{xк} - Q_{sк}$, относящуюся к любой поверхности $к$, с величиной $Q_{x1} - Q_{s1}$, относящейся к первой поверхности:

$$Q_{x1} - Q_{s1} = n_1 \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{x_1}\right).$$

Рис. II.26

Первая формула Зейделя может быть записана и в таком виде:

$$y_к h_к (Q_{xк} - Q_{sк}) = y_1 h_1 n_1 \times \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{x_1}\right) = J_1 = J. \qquad (II.51)$$

Следовательно, первая формула Зейделя позволяет исключить величину Q_x, выражая ее через Q_s; но в выражение для Q_x через Q_s входит еще и координата второго луча y.

Вторая формула Зейделя связывает y с координатами первого вспомогательного луча, с радиусами, толщинами и показателями преломления линз, а также с воздушными промежутками между линзами; в сущности, она представляет собой не что иное, как формулу для расчета параксиального луча через систему.

Пусть $O_{к-1}$ и $O_к$ (рис. II.26) — вершины преломляющих поверхностей с номерами $к - 1$ и $к$; $M_{к-1}$ и $M_к$ — точки пересечения первого вспомогательного луча с обеими поверхностями $к - 1$ и $к$ после преломления через поверхность $к - 1$. Из подобия треугольников $M_{к-1}H_{к-1}S_к$ и $M_к M_{к-1} T_{к-1}$ имеем

$$\frac{h_{к-1} - h_к}{h_{к-1}} = \frac{\overline{H_{к-1}H_к}}{\overline{H_{к-1}S_к}}.$$

Последнее отношение в пределе равно $\frac{d_{к-1}}{s'_{к-1}}$.

Таким образом,

$$\frac{h_{к-1} - h_к}{h_{к-1}} = \frac{d_{к-1}}{s'_{к-1}}.$$

Аналогично

$$\frac{y_{\kappa-1}-y_\kappa}{y_{\kappa-1}}=\frac{d_{\kappa-1}}{x'_{\kappa-1}}.$$

Вычитая первое уравнение из второго и умножая обе части на $\frac{y_{\kappa-1}}{h_\kappa}$, получаем

$$\frac{y_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}}-\frac{y_\kappa}{h_\kappa}=d_{\kappa-1}\frac{y_{\kappa-1}}{h_\kappa}\left(\frac{1}{x'_{\kappa-1}}-\frac{1}{s'_{\kappa-1}}\right)=$$

$$=-d_{\kappa-1}\frac{y_{\kappa-1}}{h_\kappa n_\kappa}(Q_{x,\ \kappa-1}-Q_{s\ \kappa-1}).$$

Применяя первую формулу Зейделя (II.50), имеем

$$\frac{y_\kappa}{h_\kappa}=\frac{y_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}}-h_1y_1(Q_{x1}-Q_{s1})\frac{d_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}h_\kappa n_\kappa}.$$

Давая индексу κ последовательно значения 2, 3, . . ., p и складывая все полученные уравнения, получаем

$$\frac{y_p}{h_p}=\frac{y_1}{h_1}+h_1y_1(Q_{x1}-Q_{s1})\sum_2^p\frac{d_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}h_\kappa n_\kappa}.$$

Это уравнение может быть написано в таком виде:

$$\frac{y_p}{h_p}=\frac{y_1}{h_1}+n_1\alpha_1l_1\sigma_p=\frac{y_1}{h_1}+J\sigma_p, \tag{II.52}$$

где

$$\sigma_p=\sum_2^p\frac{d_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}h_\kappa n_\kappa}.$$

Можно переписать уравнение и таким образом:

$$\frac{y_p}{y_1}=\frac{h_p}{h_1}+\frac{h_p}{y_1}n_1\alpha_1l_1\sigma_p \tag{II.53}$$

или еще

$$\frac{y_p}{y_1}=\frac{h_p}{h_1}+h_1h_p(Q_{x1}-Q_{s1})\sigma_p. \tag{II.54}$$

Для этого достаточно умножить обе части уравнения (II.52) на отношение $\frac{h_p}{y_1}$. В некоторых случаях (например, при определении аберраций в зрачках) необходимо знать величину $\bar{J}$, имеющую тот же смысл, что и J, но относящуюся к зрачкам. Заметим, что

$$\bar{J}=n_\kappa m_\kappa\beta_\kappa=h_\kappa y_\kappa(Q_{s\kappa}-Q_{x\kappa})=h_\kappa y_\kappa\left(\frac{1}{x_\kappa}-\frac{1}{s_\kappa}\right)=-J$$

при любых значениях κ. В системах без отражающих поверхностей или с четным числом таковых

$$J=n'_p\alpha'_pl'_p=n'_p\alpha'_p\beta'_p(x'_p-s'_p)=n_1\alpha_1\beta_1(x_1-s_1).$$

Если предмет на бесконечности, то при $\alpha'_p = 1$; $n'_p = 1$; $f = -1$; $\beta_1 = 1$; $l'_p = f\beta_1$

$$J = n'_p f \beta_1 = -1.$$

Если в оптической системе имеется нечетное число отражающих поверхностей, то для предмета на бесконечности при $\alpha'_p = 1$; $n'_p = 1$; $\beta_1 = 1$

$$J = +1, \text{ так как } l'_p > 0.$$

Выражения сумм S после исключения величины Q_x. Большое практическое значение имеет в формулах (II.49) исключение величин Q_x и $\Delta \frac{1}{nx}$. Для этого служит формула (II.51), из которой вытекает, что $Q_{x\kappa} = Q_{s\kappa} + \frac{J}{h_\kappa y_\kappa}$. Величину $\Delta \frac{1}{nx}$ можно исключить, пользуясь следующими соотношениями:

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{r} - \frac{Q_x}{n'}; \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{r} - \frac{Q_x}{n},$$

откуда

$$\Delta \frac{1}{nx} = \frac{1}{r} - Q_x \Delta \frac{1}{n^2}.$$

Тогда формулы (II.49) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\bar{S}_{\mathrm{I}} &= \sum \left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^4 Q_{s\kappa}^2 \Delta_\kappa \frac{1}{ns};\\
\bar{S}_{\mathrm{II}} &= \sum \left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^3 \frac{y_\kappa}{y_1} Q_{s\kappa}^2 \Delta_\kappa \frac{1}{ns} + \frac{J}{y_1 h_1} \sum \left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^2 Q_{s\kappa} \Delta_\kappa \frac{1}{ns};\\
\bar{S}_{\mathrm{III}} &= \sum \left(\frac{h_\kappa}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_\kappa}{y_1}\right)^2 Q_{s\kappa}^2 \Delta_\kappa \frac{1}{ns} +\\
&+ \frac{2J}{y_1 h_1} \sum \frac{h_\kappa}{h_1} \frac{y_\kappa}{y_1} Q_{s\kappa} \Delta_\kappa \frac{1}{ns} + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \Delta_\kappa \frac{1}{ns};\\
\bar{S}_{\mathrm{IV}} &= -\frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{1}{r_\kappa} \Delta_\kappa \frac{1}{n};\\
\bar{S}_{\mathrm{V}} &= \sum \left(\frac{y_\kappa}{y_1}\right)^3 \frac{h_\kappa}{h_1} Q_{s\kappa}^2 \Delta_\kappa \frac{1}{ns} +\\
&+ \frac{3J}{h_1 y_1} \sum \left(\frac{y_\kappa}{y_1}\right)^2 Q_{s\kappa} \Delta_\kappa \frac{1}{ns} +\\
&+ \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{y_\kappa}{y_1} \frac{h_1}{h_\kappa} \left(3\Delta_\kappa \frac{1}{ns} - \frac{1}{r} \Delta_\kappa \frac{1}{n}\right) -\\
&- \frac{J^3}{h_1^3 y_1^3} \sum \left(\frac{h_1}{h_\kappa}\right)^2 \Delta_\kappa \frac{1}{n_\kappa^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.55)$$

Переходя к переменным α, пользуясь формулами, приведенными на стр. 91, и вводя обозначения

$$P = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}}\right)^2 \left(\frac{\alpha'}{n'} - \frac{\alpha}{n}\right);$$

$$W = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}}\right) \left(\frac{\alpha'}{n'} - \frac{\alpha}{n}\right);$$

$$\Pi = \frac{\alpha' n' - \alpha n}{n n'},$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}
\bar{S}_{\mathrm{I}} &= \frac{1}{h_1^4} \sum h_\kappa P_\kappa; \\
\bar{S}_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{h_1^3 y_1} \left(\sum y_\kappa P_\kappa - J \sum W_\kappa\right); \\
\bar{S}_{\mathrm{III}} &= \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left(\sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa} P_\kappa - 2J \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa} W_\kappa + \right. \\
&\qquad \left. + J^2 \sum \frac{1}{h_\kappa} \Delta_\kappa \frac{\alpha}{n}\right); \\
\bar{S}_{\mathrm{IV}} &= \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{1}{h_\kappa} \Pi_\kappa; \\
\bar{S}_{\mathrm{V}} &= \frac{1}{h_1 y_1^3} \left[\sum \frac{y_\kappa^3}{h_\kappa^2} P_\kappa - 3J \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa^2} W_\kappa + J^2 \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa^2} \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left(3\Delta_\kappa \frac{\alpha}{n} + \Pi_\kappa\right) - J^3 \sum \frac{1}{h_\kappa^2} \Delta_\kappa \frac{1}{n^2}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.56)$$

Коэффициенты при $\bar{S}_{\mathrm{I}}, \ldots, \bar{S}_{\mathrm{V}}$ в выражениях для $n'\alpha'\delta g'$ и $n'\alpha'\delta G'$ даны в формуле (II.48).

Эти выражения сумм очень полезны для систем, состоящих из отдельных сравнительно тонких компонентов. Отметим, что суммы S и $\bar{S}$ связаны следующими, легко получаемыми из сравнения формул (II.43) и (II.49), соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= h_1^4 \bar{S}_{\mathrm{I}}; \qquad J^2 S_{\mathrm{IV}} = h_1^2 y_1^2 \bar{S}_{\mathrm{IV}}; \\
S_{\mathrm{II}} &= h_1^3 y_1 \bar{S}_{\mathrm{II}}; \qquad S_{\mathrm{V}} = h_1 y_1^3 \bar{S}_{\mathrm{V}}. \\
S_{\mathrm{III}} &= h_1^2 y_1^2 \bar{S}_{\mathrm{III}};
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.56^*)$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= \sum h_\kappa P_\kappa;\\
S_{\mathrm{II}} &= \sum y_\kappa P_\kappa - J \sum W_\kappa;\\
S_{\mathrm{III}} &= \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa} P_\kappa - 2J \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa} W_\kappa + J^2 \sum \frac{1}{h_\kappa} \Delta \frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa};\\
S_{\mathrm{IV}} &= \sum \frac{1}{h_\kappa} \Pi_\kappa;\\
S_{\mathrm{V}} &= \sum \frac{y_\kappa^3}{h_\kappa^2} P_\kappa - 3J \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa^2} W_\kappa + J^2 \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa^2} \times\\
&\times \left(3\Delta \frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa} + \Pi_\kappa\right) - J^3 \sum \frac{1}{h_\kappa^2} \Delta \frac{1}{n_\kappa^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.57)$$

В практике расчетов встречаются случаи, когда приведенные выше формулы теряют смысл или принимают неопределенный вид.

Частные случаи. Приводим формулы (II.42*) и (II.44*) с использованием сокращенных обозначений, приведенных на стр. 89:

$$-2n'\delta g' = S_{\mathrm{I}}\omega' (\omega'^2 + \Omega'^2) + S_{\mathrm{II}} (3\omega'^2 + \Omega'^2) w_1 +$$

$$+ (3S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}) \omega' w_1^2 + S_{\mathrm{V}} w_1^3;$$

$$-2n'\delta G' = S_{\mathrm{I}}\Omega' (\omega'^2 + \Omega'^2) + 2S_{\mathrm{II}}\omega'\Omega' w_1 + (S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}) \Omega' w_1^2;$$

$$S_{\mathrm{I}} = \sum hP; \quad S_{\mathrm{II}} = \sum hP \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}; \quad S_{\mathrm{III}} = \sum hP \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2;$$

$$S_{\mathrm{IV}} = \sum \frac{1}{h} \Pi; \quad S_{\mathrm{V}} = \sum hP \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^3 + \frac{J^2}{h} \Pi \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}.$$

Как было указано выше, в формулах (II.43) за единицу приняты α'_p и β_1, при этом $J = n'\alpha' l' = n' (x'_p - s'_p) \beta'_p$.

Этими формулами нельзя пользоваться, когда $\alpha' = 0$, т. е. в весьма важном случае визуальных систем (телескопические системы, микроскопы и т. д.). За единицу тогда можно принимать угол α_1.

Однородность формул относительно отношений $\frac{\omega}{\alpha}$, т. е. величин, имеющих по существу одинаковый смысл, приводит к тому, что выбор угла α, принятого за единицу, безразличен. Нужно только в формулах (II.42) заменить ω' тем из углов ω'_t, для которого соответственная величина α_t принимается равной

единице. Формула (II.42) принимает тогда вид

$$\left.\begin{aligned} -2n_t'\delta g_t' &= S_{\mathrm{I}}\omega_t'\left(\omega_t'^2+\Omega_t'^2\right)+S_{\mathrm{II}}\left(3\omega_t'^2+\Omega_t'^2\right)w+\\ &+\left(3S_{\mathrm{III}}+J^2S_{\mathrm{IV}}\right)\omega_t'w^2+S_{\mathrm{V}}w^3;\\ -2n_t'\delta G_t' &= S_{\mathrm{I}}\Omega_t'\left(\omega_t'^2+\Omega_t'^2\right)+2S_{\mathrm{II}}\omega_t'\Omega_t'w+\\ &+\left(S_{\mathrm{III}}+J^2S_{\mathrm{IV}}\right)\Omega_t'w^2, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.58)$$

где t — любое число.

Формулы (II.43) остаются при этом условии без изменения, но за единицу следует принять α_t'. Величину J надо принять равной $n_t'\left(x_t'-s_t'\right)\beta_t'$.

Такой случай имеет место в телескопических системах, где $\alpha_1=\alpha_p'=0$. При отсутствии оборачивающих систем за t следует принимать величину, соответствующую пространству, отделяющему объектив от окуляра; $\alpha=1$ удобнее всего брать в пространстве перед окуляром.

Случай $s_1=\infty$. Очень важным является случай, когда предмет на бесконечности. Тогда $\alpha_1=0$; $\alpha_p'=\frac{h_1}{f'}$, где f' — фокусное расстояние системы. Удобно принимать заднее фокусное расстояние $f'=1{,}0$ и первую высоту $h_1=1{,}0$. Тогда $\alpha_p'=1{,}0$; $J=n_p'\alpha_p'l_p'=n_p'1f\beta_1=-n\beta_1$, так как $f=-\frac{n}{n'}f'$. Если, как было принято выше, $\beta_1=1$, то $J=-n$; если $n=1$, то $J=-1$.

Случай $\beta_1=0$ $(x_1=\infty)$. Этот случай встречается при расчете микроскопов. За единицу следует брать β_p'; тогда нужно заменить в формуле (II.42) угол w углом w_p', а величину J принять равной $n_p'\alpha_p'\left(x_p'-s_p'\right)$; если $\alpha_p'=1$, то $J=n_p'\left(x_p'-s_p'\right)$.

Случай $\alpha'=\alpha$. Иногда встречается случай, когда две следующих одна за другой величины α равны. Тогда все приведенные выше выражения для S_{II}, S_{III} и S_{IV} теряют смысл, так как для поверхности с номером κ появляется неопределенность вида $0\cdot\infty$. В первых двух упомянутых суммах неопределенность раскрывается, если написать для соответствующей поверхности

$$\left.\begin{aligned} \overline{S}_{\mathrm{II}\,\kappa} &= h_\kappa\frac{\Delta\alpha_\kappa}{\Delta_\kappa\frac{1}{n_\kappa}}\frac{\Delta\beta_\kappa}{\Delta_\kappa\frac{1}{n_\kappa}}\Delta_\kappa\frac{\alpha}{n}=0;\\ \overline{S}_{\mathrm{III}\,\kappa} &= h_\kappa\left(\frac{\Delta_\kappa\beta}{\Delta_\kappa\frac{1}{n_\kappa}}\right)^2\Delta_\kappa\frac{\alpha}{n}=\frac{J^2}{h_\kappa}\alpha_\kappa\Delta_\kappa\frac{1}{n_\kappa}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.59)$$

Последнее выражение может быть получено из формулы (II.56) для $\overline{S}_{\mathrm{III}}$; первые два члена обращаются в нуль, так как при $\alpha=\alpha'$ $P=0$ и $W=0$; остается только третий член.

Для пятой суммы неопределенность раскрывается сложнее. Перепишем выражение для S_V из формулы (II.56) для одной κ-й поверхности:

$$\overline{S}_{V,\kappa} = \frac{1}{h_1 y_1^3}\left[\frac{y_\kappa^3}{h_\kappa^2} P_\kappa - 3J\frac{y_\kappa^2}{h_\kappa^2} W_\kappa + J^2 \frac{y_\kappa}{h_\kappa^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(3\Delta_\kappa \frac{\alpha}{n} + \Pi_\kappa\right) - J^3 \frac{1}{h_\kappa^2} \Delta \frac{1}{n^2}\right].$$

Заметим, что $P_\kappa = W_\kappa = 0$ при $\alpha'_\kappa = \alpha_\kappa$. Опуская индекс κ, получаем для S_V на поверхности κ

$$h_1 y_1^3 \overline{S}_V = J^2 \frac{y}{h^2}\left[3\left(\frac{\alpha'}{n'} - \frac{\alpha}{n}\right) + \frac{\alpha' n' - \alpha n}{nn'}\right] - \frac{J^3}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Ввиду того, что $\alpha = \alpha'$,

$$h_1 y_1^3 \overline{S}_V = J^2 \frac{y}{h^2} 2\alpha\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) - \frac{J^3}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{J^2}{h^2}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right)\left[2y\alpha - J\left(\frac{1}{n'} + \frac{1}{n}\right)\right].$$

Из выражения радиуса кривизны через α и β (помня, что $\alpha' = \alpha$) получаем

$$\alpha y = \frac{h(\beta' n' - \beta n)}{n' - n}.$$

С другой стороны,

$$J = hy(Q_x - Q_s) = hyQ_x = -h\frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}}.$$

Заменяя αy и J их выражениями через β и n, получаем после простых преобразований

$$\overline{S}_{V\kappa} = \frac{1}{h_1 y_1^3}\frac{J^2}{h}(\beta' + \beta)\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{J}{h_1 y_1^3}(\beta'^2 - \beta^2).$$

Переход от $\overline{S}_V$ к S_V может быть выполнен с помощью одной из формул (II.56*) $S_V = h_1 y_1^3 \overline{S}_V$. Восстанавливая индекс κ, получаем

$$S_{V\kappa} = -J(\beta_{\kappa+1}^2 - \beta_\kappa^2). \qquad \text{(II.60)}$$

Пример вычисления сумм S для фотографического объектива. Приводим расчет сумм Зейделя (с добавлением двух хроматических сумм, значение которых будет объяснено ниже) для фотографического объектива типа «триплет» с относительным отверстием 1 : 3,5

и фокусным расстоянием 100 *мм*. В табл. II.2 приведены вычисления сумм и радиусов кривизны поверхностей в предположении, что система определена углами $\alpha_к$ и толщинами $d_к$. Вычисления состоят из четырех частей.

В первой части вычисляются величины, относящиеся к показателям стекол: n, Δn, ν, $\Delta\nu$, $\frac{n_{G'}-n_D}{n_D}$, $\Delta\frac{n_{G'}-n_D}{n_D}$.

Во второй части вычисляются функции от α: α, $\Delta\alpha$, $\alpha\nu$, $\Delta\alpha\nu$, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}$, W, P, C, $\frac{d}{f'}$, h.

В третьей части вычисляются:

1) радиусы кривизны по формуле $r = h\frac{\Delta n}{\Delta\alpha n}$, для чего в таблице составлены столбцы величин αn, $\Delta\alpha n$, $\frac{\Delta n}{\Delta\alpha n}$;

2) величины y и β второго параксиального луча, для чего в столбцах располагаются величины y, $\Delta n\beta$, $n\beta$, β, β_n (т. е. β, поделенные на β_1, чтобы согласно принятому условию β_1 равнялось единице);

3) величины S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_V в следующем порядке: $\Delta\beta_n$, $\frac{\Delta\beta_n}{\Delta\alpha}$, hP (из 7 и 10-го столбцов второй части), $S_{II} = hP\frac{\Delta\beta_n}{\Delta\alpha}$, $S_{III} = S_{II}\frac{\Delta\beta_n}{\Delta\alpha}$, $S_{IV} = -\frac{\Delta\frac{1}{n}}{r}$, $S_V = (S_{III} + S_{IV})\frac{\Delta\beta_n}{\Delta\alpha}$.

В четвертой части вычисляются величины hC и yC — составляющие хроматических сумм $S_I^{хр}$ и $S_{II}^{хр}$ — и дается сводка значений всех суммы. В приведенном случае $J = -1$.

Выражения сумм S после исключения величин y. Можно совершенно исключить координаты $y_к$ и получить для сумм $S_I, \ldots, S_V$ выражения, зависящие только от координат первого вспомогательного луча s_1, s' и h и от начальной координаты y_1 второго вспомогательного луча. Формулы, отвечающие этому требованию, вследствие своей сложности не имеют практического значения; однако они позволяют вывести одну весьма важную теорему, относящуюся к влиянию положения входного зрачка на аберрации системы.

Исходя из формулы (II.52) (задавая p значение $к$), согласно которой

$$\frac{y_к}{h_к} = \frac{y_1}{h_1} + J\sigma_к,$$

где

$$\sigma_к = \sum_2^к \frac{d_{к-1}}{h_{к-1}h_к n_к},$$

Таблица II.2

№ части	n	Δn	$\nu = \frac{1}{n}$	$\Delta\nu$	$\frac{n_{G'} - n_D}{n_D}$	$\Delta \frac{n_{G'} - n_D}{n_D}$
I	1,0		1,0		0,0	
	1,6126	0,6126	0,62012	—0,37988	0,0082476	0,0082476
	1,0	—0,6126	1,0	0,37988	0,0	—0,0082476
	1,6259	0,6259	0,61504	—0,38496	0,0129836	0,0129836
	1,0	—0,6259	1,0	0,38496	0,0	—0,0129836
	1,6126	0,6126	0,62012	—0,37988	0,0082476	0,0082476
	1,0	—0,6126	1,0	0,37988	0,0	—0,0082476

	α	$\Delta\alpha$	$\alpha\nu$	$\Delta\alpha\nu$	$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}$	W	P	C	$\frac{d}{f'}$	h
II	0,0		0,0							
	0,865	0,865	0,53640	0,53640	—2,2770	—1,2214	2,781	—0,018780	0,16	1,0
	1,900	1,035	1,90000	1,36360	2,7245	3,7151	10,122	—0,022471	0,05	0,8616
	0,550	—1,350	0,33827	—1,56173	3,5069	—5,4768	—19,207	0,045532	0,03	0,7666
	—0,300	—0,850	—0,30000	—0,63827	—2,2080	1,4093	—3,112	0,028668	0,14	0,7501
	—0,110	0,190	—0,06821	0,23179	—0,5002	—0,1159	0,058	—0,0041254	0,12	0,7921
	1,0	1,110	1,0	1,06821	2,9220	3,1213	9,120	—0,024099		0,8053

	αn	$\Delta\alpha n$	$\frac{\Delta n}{\Delta\alpha n}$	r	$\frac{\Delta n}{r}$	$100y$	$\Delta n\beta$	$n\beta$	β
	0,0							0,77410	0,77410
	1,3949	1,3949	0,43917	43,917	0,0139190	27,923	0,38950	1,16360	0,72157
	1,9000	0,5051	—1,21283	—104,497	0,0058624	16,378	0,09602	1,25962	1,25962
	0,8942	—1,0058	—0,62229	—47,705	—0,0131202	10,080	—0,13225	1,12737	0,69338
	—0,3000	—1,1942	0,52412	39,314	—0,0159205	8,0	—0,12737	1,0	1,0
	—0,1774	0,1226	4,99673	395,791	0,0015478	—6,0	—0,00929	0,99071	0,61436
	1,0	1,1774	—0,52030	—41,900	0,0146205	—13,372	—0,19551	0,79520	0,79520
III	β_n	$\Delta\beta_n$	$\frac{\Delta\beta_n}{\Delta\alpha}$	hP	S_{II}	S_{III}	S_{IV}	$S_{III}+S_{IV}$	S_V
	1,0								
	0,93214	—0,06786	—0,07845	2,781	—0,2182	0,0171	0,8650	0,8821	—0,0692
	1,62720	0,69506	0,67156	8,721	5,8567	3,9331	0,3635	4,2966	2,8854
	0,89573	—0,73147	0,54183	—14,724	—7,9779	—4,3227	—0,8069	—5,1296	—2,7794
	1,29182	0,39609	—0,46599	—2,334	1,0876	—0,5069	—0,9793	—1,4862	0,6925
	0,79364	—0,49818	—2,62200	0,046	—0,1206	0,3162	0,0961	0,4123	—1,0811
	1,02726	0,23362	0,21047	7,344	1,5460	0,3254	0,9068	1,2322	0,2593

	hC	yC	Сводка
	—1,8780	—0,5244	$S_I = 1,834$
	—1,9361	—0,3680	$S_{II} = 0,174$
IV	3,4905	0,4590	$S_{III} = -0,238$
	2,1504	0,2293	$S_{IV} = 0,445$
	—0,3267	0,0248	$S_V = -0,093$
	—1,9407	0,3223	$100S_I^{xp} = -0,44$
			$100S_{II}^{xp} = 0,14$

и подставляя вместо $y_к$ его значение из этой формулы во все формулы (II.56) для сумм $S_I, \ldots, S_V$, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\bar{S}_I &= \sum hP;\\
\bar{S}_{II} &= \frac{y_1}{h_1}\sum hP + J\sum(hP\sigma - W);\\
\bar{S}_{III} &= \left(\frac{y_1}{h_1}\right)^2\sum hP + 2J\frac{y_1}{h_1}\sum(hP\sigma - W) +\\
&\quad + J^2\sum\left(hP\sigma^2 - 2W\sigma + \frac{1}{h}\Delta\frac{\alpha}{n}\right);\\
\bar{S}_{IV} &= \sum\frac{1}{h}\Delta\frac{\alpha n}{nn'} = \sum\frac{\Pi}{h};\\
\bar{S}_V &= \left(\frac{y_1}{h_1}\right)^3\sum hP + 3\left(\frac{y_1}{h_1}\right)^2 J\sum(hP\sigma - W) +\\
&\quad + 3\frac{y_1}{h_1}J^2\sum\left(hP\sigma^2 - 2W\sigma + \frac{1}{h}\Delta\frac{\alpha}{n}\right) +\\
&\quad + \frac{y_1}{h_1}J^2\sum\frac{\Pi}{h} + J^3\sum\left[hP\sigma^3 - 3W\sigma^2 +\right.\\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{h}\left(3\Delta\frac{\alpha}{n} + \Pi\right) - \frac{1}{h^2}\Delta\frac{1}{n^2}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (II.61)$$

Для перехода от коэффициентов к аберрациям следует применять формулы (II.45). Для краткости вводим следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum hP = s_1; \quad \sum(hP\sigma - W) = s_2;\\
&\sum\left(hP\sigma^2 - 2W\sigma + \frac{1}{h}\Delta\frac{\alpha}{n}\right) = s_3; \quad \sum\frac{\Pi}{h} = s_4;\\
&\sum\left[hP\sigma^3 - 3W\sigma^2 + \frac{\sigma}{h}\left(3\Delta\frac{\alpha}{n} + \Pi\right) - \frac{1}{h^2}\Delta\frac{1}{n^2}\right] = s_5.
\end{aligned}\right\} \quad (II.62)$$

Все величины s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 не зависят от положения входного зрачка. Последнее характеризуется отношением $\frac{y_1}{h_1}$, которое для краткости обозначим буквой g. В таком случае

$$\left.\begin{aligned}
\bar{S}_I &= s_I;\\
\bar{S}_{II} &= gs_1 + Js_2;\\
\bar{S}_{III} &= g^2 s_1 + 2Jgs_2 + J^2 s_3;\\
\bar{S}_{IV} &= s_4;\\
\bar{S}_V &= g^3 s_1 + 3g^2 Js_2 + gJ^2(3s_3 + s_4) + J^3 s_5;
\end{aligned}\right\} \quad (II.63)$$

Влияние перемещения входного зрачка на аберрации третьего порядка. Формула (II.63) показывает следующее:

1) если $s_1 = 0$, то $\bar{S}_I = 0$ и $\bar{S}_{II}$ не зависят от g (положения зрачка);

2) если $\bar{S}_{\mathrm{I}} = 0$ и $\bar{S}_{\mathrm{II}} = 0$, то s_1 и s_2 равны нулю, а следовательно, $\bar{S}_{\mathrm{III}} = J^2 s_3$ не зависит от g;

3) $\bar{S}_{\mathrm{IV}}$ от g не зависит;

4) если $\bar{S}_{\mathrm{I}} = \bar{S}_{\mathrm{II}} = \bar{S}_{\mathrm{III}} = \bar{S}_{\mathrm{IV}} = 0$, то $s_1 = 0$, $s_2 = s_3 = s_4 = 0$, а следовательно, $\bar{S}_{\mathrm{V}} = J^3 s_5$ и не зависит от положения входного зрачка.

Отсюда вытекает следующая теорема, имеющая большое практическое значение: *при исправлении первых t аберраций третьего порядка аберрация с номером $t + 1$ (при изложенной выше системе нумерации аберраций) не зависит от положения входного зрачка.* Например, если исправлена сферическая аберрация, то нельзя использовать положение входного зрачка для устранения комы; если и сферическая аберрация и кома исправлены, то астигматизм и кривизна поля не зависят от положения входного зрачка.

Если все аберрации исправлены за исключением дисторсии, то на эту последнюю нельзя воздействовать никаким изменением положения входного зрачка. В самом деле, все лучи одного пучка, вышедшие из какой-нибудь точки пространства предметов, пересекают плоскость изображения в одной точке; какой бы луч ни считать за главный (т. е. какое бы ни выбирать положение входного зрачка), дисторсия измениться не может.

Влияние положения предмета на аберрации третьего порядка. В большинстве оптических систем положение плоскости предмета не постоянно (зрительные трубы, фотографические объективы и т. д.), и необходимо определить, как влияет на качество изображения изменение положения предмета.

Этот вопрос с достаточной для практики точностью может быть решен с помощью формул (II.33), составленных для аберраций третьего порядка. Для этого надо вычислить коэффициенты $b_{-1}, \ldots, b_4$ по формулам (II.34) и (II.34*).

В большинстве случаев изменение положения предмета невелико. При этом положение входного зрачка не меняется. Изменение сумм может быть вычислено дифференцированием формул (II.31) по величине τ. Например, для $\tilde{S}_{\mathrm{I}}$ получаем

$$d\left(-\frac{1}{2}\tilde{S}_{\mathrm{I}}\right) = \left[4\left(b_3 + 3b_2\tau + 3b_1\tau + b_0\tau^3\right) + \frac{1}{2} fn'\left(1 + 3\tau^2\right)\right] d\tau.$$

Для частного случая $\tau = 0$ имеем

$$d\left(-\frac{1}{2}\tilde{S}_{\mathrm{I}}\right) = \left(4b_3 + \frac{1}{2} fn'\right) d\tau. \qquad \text{(II.64)}$$

Условие, чтобы сферическая аберрация оставалась исправленной при больших расстояниях до предмета, формулируется так:

$$\tilde{S}_{\mathrm{I}} = 0;$$

$$d\tilde{S}_{\mathrm{I}} = 0,$$

откуда вытекает, что при $\tau = 0$

$$b_4 = 0; \quad b_3 = -\frac{1}{8} fn'. \tag{II.65}$$

Заметим, что условие уничтожения комы выражается следующим образом: $\tilde{S}_{II} = 0$; $b_4 + b_3\tau' = 0$.

Ввиду того, что $b_4 = 0$, получаем

$$b_3 = 0. \tag{II.66}$$

Условие апланатизма противоречит условию Гершеля, выражающему равенство нулю сферической аберрации для бесконечно малого продольного отрезка прямой. Наилучшим решением является компромисс:

$$b_3 = \frac{1}{16} f'n. \tag{II.67}$$

Аберрации третьего порядка центрированных систем с несферическими поверхностями

Хотя теория аберраций третьего порядка центрированных оптических систем может быть построена для общего случая несферических поверхностей, все же более целесообразно рассматривать отдельно сферические и отдельно несферические поверхности по следующим соображениям. Большинство оптических систем не содержит несферических поверхностей, так как их точное изготовление представляет большие затруднения. Для этого большинства должны быть составлены наиболее простые формулы. К тому же введение одной или нескольких несферических поверхностей производится вычислителем только в том случае, когда не удается решить задачу исправления системы с помощью одних лишь сферических поверхностей. Но тогда задача может быть решена в два приема: сначала для сферических поверхностей, а далее вводятся коэффициенты деформации в одной-двух поверхностях и с их помощью усовершенствуется система из сферических поверхностей. Роль деформации сферической поверхности более наглядно выступает при отдельном ее рассматривании.

Рис. II.27

Введем сначала понятие коэффициента деформации b. Рассмотрим (рис. II.27) меридианную кривую OM поверхности вращения с осью Ox. Ее уравнение в декартовых координатах может быть написано в виде

$$x = f(y).$$

Для сферы это уравнение, как это вытекает из уравнения окружности $y^2 = x(2r - x)$ после того, как оно решено относи-

тельно x, имеет вид

$$x = \frac{1}{2}\frac{y^2}{r} + \frac{1}{8}\frac{y^4}{r^3} + \frac{1}{16}\frac{y^6}{r^5}.$$

Заменим сферу поверхностью вращения с радиусом кривизны у вершины равным r. Ее уравнение будет

$$x = \frac{1}{2}\frac{y^2}{r} + a_1 y^4 + a_2 y^6 + \cdots$$

Сравнивая эту поверхность со сферой, напишем ее коэффициенты a_1, a_2 в виде

$$a_1 = \frac{1}{8}\frac{(1+b)}{r^3};$$

$$a_2 = \frac{1}{16}\frac{(1+c)}{r^5}.$$

Рис. II.28

Коэффициенты b и c могут быть названы коэффициентами деформации, поскольку деформация исчезает, когда эти коэффициенты равны нулю.

Укажем в качестве примера, что если $b = -1$, $c = -1$ и т. д., поверхность является параболоидальной [1].

Разность MM_1, отсчитанная параллельно оси от сферической поверхности до деформированной, определяется разностью Δx абсцисс при одном и том же y (рис. II.28):

$$\Delta x = \frac{1}{8}\frac{by^4}{r^3} + \frac{1}{16}\frac{cy^6}{r^5} + \cdots$$

Вычислим изменение углового эйконала ΔW, вызываемое деформацией поверхности. Определим сначала расстояние ΔN по нормали между сферической и деформированной поверхностями. Оно равно $\Delta x \cos\varphi$, где φ, как принято, угол между нормалью к поверхности и осью. Но если ограничиться первым членом в разложении x, то получим, что

$$\Delta N = \Delta x = \frac{1}{8}\frac{by^4}{r^3}.$$

Отступление несферической поверхности от сферической, отсчитываемое вдоль падающего луча, можно написать в виде $\Delta = \frac{\Delta N}{\cos i}$, где i — угол между падающим лучом и нормалью к поверхности в точке преломления. С принятой степенью точности можно считать $\cos i = 1$; тогда

$$\Delta = \Delta N = \Delta x = \frac{1}{8}\frac{by^4}{r^3}.$$

---

[1] Подробнее вопрос о связи типа поверхности с коэффициентом b будет рассмотрен в гл. IX.

Приращение оптического пути ΔW, как это вытекает из определения углового эйконала W (см. стр. 51—53), равно $\Delta(n - n')$, а следовательно,

$$\Delta W = -(n' - n)\frac{1}{8}\frac{by^4}{r^3}. \qquad (II.68)$$

Формула (II.68) выведена для меридиональной плоскости. В общем случае вместо y нужно рассматривать величину H — расстояние точки пересечения луча с поверхностью от оси.

Согласно изложенному выше, к ранее вычисленному нами угловому эйконалу W добавим для несферической поверхности с коэффициентом деформации b величину

$$\Delta W = -\frac{1}{8}\frac{(n' - n)}{r^3}bH^4.$$

Эту величину с точностью, нас интересующей, можно считать постоянной при переходе от сферической к деформированной поверхности.

Вычислим изменения величин $n'\delta g'$ и $n'\delta G'$, вызываемые асферичностью поверхности. Пользуясь формулой (II.26), получаем

$$\Delta(n'\delta g') = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\mu'} - \tau\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\mu}$$

и аналогично

$$\Delta(n'\delta G') = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\nu'} - \tau\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\nu}.$$

Заметим, что $H^2 = Y^2 + Z^2$, где Y и Z — проекции H на меридиональную и экваториальную плоскости. Для каждой из этих проекций, как это вытекает из общих теорем геометрической оптики, можно написать формулы преломления

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{r}(n' - n) &= -(\mu' n' - \mu n); \\ \frac{Z}{r}(n' - n) &= -(\nu' n' - \nu n). \end{aligned}\right\} \qquad (II.69)$$

Возводим в квадрат оба выражения и складываем, помня, что по определению (см. стр. 79) $\mu^2 + \nu^2 = \varepsilon$; $\mu'^2 + \nu'^2 = \varepsilon'$; $\mu\mu' + \nu\nu' = \delta$:

$$H^2\frac{(n' - n)^2}{r^2} = n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta;$$

$$\frac{H^4}{r^3}(n' - n) = \frac{r(n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta)^2}{(n' - n)^3}.$$

Для ΔW получаем

$$\Delta W = -\frac{rb}{8(n' - n)^3}(n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta)^2. \qquad (II.70)$$

Составим выражения $\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\mu'} + \tau\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\mu}$ и $\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\nu'} + \tau\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\nu}$. После простых выкладок получаем

$$\Delta(-n'\delta g') = \frac{\partial(\Delta W)}{\partial\mu'} + \tau\frac{\partial(\Delta W)}{\partial\mu} =$$

$$= \frac{rb}{2(n'-n)^3}(n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta)(n'\mu' - n\mu)(n' - n\tau).$$

Заменим выражение $(n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta)$ его значением $\frac{H^2}{r^2}(n'-n)^2$ и $(n'\mu' - n\mu)$ — его значением $-\frac{Y}{r}(n'-n)$, после чего получаем для $\Delta(n'\delta g')$

$$\Delta(n'\delta g') = \frac{b}{2r^2}H^2Y(n' - n\tau). \quad (II.71)$$

Аналогично получаем для $\Delta(n'\delta G')$

$$\Delta(n'\delta G') = \frac{b}{2r^2}H^2Z(n' - n\tau). \quad (II.71^*)$$

Рис. II.29

Остается выразить H и Z через величины h, y, l, s и x.

Пользуясь рис. II.29, на котором изображена проекция параксиального луча на меридиональную плоскость, имеем в пространстве изображений

$$Y = m' + x'\frac{m'-l'}{s'-x'} = \frac{m's' - l'x'}{s'-x'}.$$

Аналогично

$$Z = M' + x'\frac{M'}{s'-x'} = \frac{M's'}{s'-x'}.$$

Подставляя эти значения Y и Z в выражения (II.71) и (II.71*) для $\Delta(n'\delta g')$ и $\Delta(n'\delta G')$, что допустимо в области аберраций третьего порядка, получаем

$$-\Delta(n'\delta g') = \frac{b}{2r^2}\frac{(n'-n\tau)}{(s'-x')^3}[(m's' - l'x')^2 +$$

$$+ M'^2s'^2](m's' - l'x') = \frac{b}{2r^2}\frac{(n'-n\tau)}{(s'-x')^3}[s'^3m'(M'^2 + m'^2) -$$

$$- s'^2l'x'(3m'^2 + M'^2) + 3s'm'l'^2x'^2 - l'^3x'^3] =$$

$$= \frac{b}{2r^2}(n'-n\tau)[s'^3\omega'(\Omega'^2 + \omega'^2) + s'^2x'w'(3\omega'^2 + \Omega'^2) +$$

$$+ 3s'x'^2\omega'w'^2 + x'^3w'^3].$$

Но ввиду того, что $\tau = \frac{\alpha}{\alpha'}$; $n' - n\tau = \frac{n'\alpha' - n\alpha}{\alpha'} = \frac{h}{r}\frac{n'-n}{\alpha'} = \frac{s'(n'-n)}{r}$, имеем [1]

$$-\Delta(n'\delta g') = \frac{bs'}{2r^3}(n'-n)[\cdots].$$

Составляем величину $\Delta(n'\alpha'\delta g')$, обладающую свойством инварианта Лагранжа—Гельмгольца:

$$-\Delta(n'\alpha'\delta g') = \frac{1}{2}\frac{b}{r^3}h(n'-n)[\cdots] = \frac{1}{2h^2}\frac{b(\alpha'n'-\alpha n)^3}{(n'-n)^2}[\cdots].$$

Обозначим через B выражение перед квадратными скобками:

$$B = \frac{b(\alpha'n'-\alpha n)^3}{(n'-n)^2};$$

тогда

$$-\Delta(n'\alpha'\delta g') = \frac{1}{2h^2}B[\cdots]. \qquad (II.73)$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках входит как один из сомножителей в коэффициент при величине P в выражении аберраций третьего порядка для сферической поверхности. Воспользуемся для этого формулами (II.48) и (II.56) для величины $n'_p\alpha'_p\delta g'_p$ и вычислим коэффициент при P. Он равняется

$$\frac{h_1}{2}\left[\frac{m_1(m_1^2+M_1^2)}{(x_1-s_1)^3}s_1^3\frac{1}{h_1^4}h_1 - \frac{3m_1^2+M_1^2}{(x_1-s_1)^3}l_1s_1^2x_1\frac{1}{h_1^3y_1}y_1 + \right.$$

$$\left. + 3\frac{m_1l_1^2}{(x_1-s_1)^3}s_1x_1^2\frac{1}{h_1^2y_1^2}\frac{y_1^2}{h_1} - \frac{l_1^3}{(x_1-s_1)^3}x_1^3\frac{1}{h_1y_1^3}\frac{y_1^3}{h_1^2}\right]P =$$

$$= \frac{h_1}{2}\left[-s_1^3\omega_1(\omega_1^2+\Omega_1^2)\frac{1}{h_1^4}h_1 - \right.$$

$$-s_1^2x_1w_1(3\omega_1^2+\Omega_1^2)\frac{1}{h_1^3y_1}y_1 -$$

$$\left. -3s_1x_1^2\omega_1w_1^2\frac{1}{h_1^2y_1^2}\frac{y_1^2}{h_1} - x_1^3w_1^3\frac{1}{h_1y_1^3}\frac{y_1^3}{h_1^2}\right]P.$$

Это выражение легко привести к следующему виду:

$$-\frac{h_1}{2}\left[s_1^3\omega_1(\omega_1^2+\Omega_1^2) + s_1^2x_1w_1(3\omega_1^2+\Omega_1^2) + \right.$$

$$\left. + 3s_1x_1^2\omega_1w_1^2 + x_1^3w_1^3\right]\frac{1}{h_1^3}P = -\frac{1}{2h^2}[\cdots]P. \qquad (II.74)$$

---

[1] Здесь и далее значок [. . .] означает выражение в квадратных скобках в предыдущей формуле.

Принимая во внимание замечания, сделанные на стр. 91 при выводе формулы (II.47), величины s_1; ω_1; Ω_1; x_1 и w_1 в формуле (II.74) можно заменить на s'; ω'; Ω'; x' и w'.

После этого легко видеть, что коэффициент при P в правой части формулы (II.74) совершенно одинаков с коэффициентом при B в правой части формулы (II.73). Другими словами, выражения для сумм $S_{\mathrm{I}}, \ldots, S_{\mathrm{V}}$ (II.57) с добавлением членов, зависящих от несферичности поверхностей, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}}^{*} &= \sum h_{\kappa}(P_{\kappa}+B_{\kappa});\\
B &= b\left(\frac{n'\alpha'-n\alpha}{n'-n}\right)^{3}(n'-n);\\
S_{\mathrm{II}}^{*} &= \sum y_{\kappa}(P_{\kappa}+B_{\kappa})-J\sum W_{\kappa};\\
S_{\mathrm{III}}^{*} &= \sum \frac{y_{\kappa}^{2}}{h_{\kappa}}(P_{\kappa}+B_{\kappa})-2J\sum \frac{y_{\kappa}}{h_{\kappa}}W_{\kappa}+\\
&\quad + J^{2}\sum \frac{1}{h_{\kappa}}\Delta_{\kappa}\frac{\alpha}{n};\\
S_{\mathrm{IV}} &= \frac{1}{h_{\kappa}}\Pi_{\kappa};\\
S_{\mathrm{V}}^{*} &= \sum \frac{y_{\kappa}^{3}}{h_{\kappa}^{2}}(P_{\kappa}+B_{\kappa})-3J\sum \frac{y_{\kappa}^{2}}{h_{\kappa}^{2}}W_{\kappa}+\\
&\quad + J^{2}\sum \frac{y_{\kappa}}{h_{\kappa}^{2}}\left(3\Delta_{\kappa}\frac{\alpha}{n}+\Pi_{\kappa}\right)-J^{3}\sum \frac{1}{h_{\kappa}^{2}}\Delta_{\kappa}\frac{1}{n^{2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.75)$$

Из этих формул вытекает следующее важное следствие: величины B_{κ}, зависящие от деформации поверхности, складываются с величиной P_{κ} той же поверхности, и обе величины действуют совместно; ни на W_{κ}, ни на другие функции от α_{κ} деформация не влияет.

При вычислениях сумм Зейделя с учетом деформации по формулам (II.42) и (II.43) нужно к величинам P_{κ} добавить соответствующие величины B_{κ} и произвести те же вычисления — умножения на $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$ и т. д. — с суммой $(P_{\kappa}+B_{\kappa})$, что и с P_{κ} в случае сферической поверхности. Если пользоваться табл. II.2, то следует добавить после столбца P_{κ} еще следующие столбцы: $(\Delta\alpha_{\kappa}n_{\kappa})^{3}$, $(\Delta n)^{2}$, $\frac{(\Delta\alpha n)^{3}}{(\Delta n)^{2}}$, $P_{\kappa}+B_{\kappa}$; дальше никаких изменений по сравнению с таблицей II.2 не будет. Таким образом, выражения поперечных аберраций $\delta g'$ и $\delta G'$ для случая асферических поверхностей будут

иметь вид

$$\left.\begin{aligned} -2n'\delta g' &= S_{\mathrm{I}}^{*}\omega'\left(\omega'^{2}+\Omega'^{2}\right)+S_{\mathrm{II}}^{*}\left(3\omega'^{2}+\Omega'^{2}\right)w+\\ &+\left(3S_{\mathrm{III}}^{*}+J^{2}S_{\mathrm{IV}}\right)\omega' w^{2}+S_{\mathrm{V}}^{*}w^{3};\\ -2n'\delta G' &= S_{\mathrm{I}}^{*}\Omega'\left(\omega'^{2}+\Omega'^{2}\right)+2S_{\mathrm{II}}^{*}\omega'\Omega' w+\\ &+\left(S_{\mathrm{III}}^{*}+J^{2}S_{\mathrm{IV}}\right)\Omega' w^{2}. \end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{II}.75^{*})$$

Примеры применения этих формул будут даны в главе о расчете оптических систем с несферическими поверхностями во второй части книги.

Отступление от отношения синусов и кома

Предположим, что оптическая система исправлена в отношении сферической аберрации для определенного положения предмета. Точка на оси этого предмета изображается идеально в виде точки. Но всякая точка плоскости предмета, отстоящая от оси на некотором, хотя бы очень малом расстоянии, изображается астигматично вследствие комы, и кружок рассеяния, вызываемый комой, растет пропорционально расстоянию точки от оси. Аббе показал, что изображение этих точек оказывается идеальным, если соблюдено условие синусов, т. е. если для любого луча, проходящего в пространстве предмета через точку на оси и через ее изображение, имеет место соотношение $\frac{\sin u_1}{\sin u'}=\frac{1}{\gamma}$, где γ — угловое увеличение, соответствующее положению предмета и его изображения. Если отношение синусов этих углов не постоянно, то условие синусов не выполнено. Отсюда вытекает, что отступление от закона синусов должно быть связано с комой оптической системы.

В некоторых курсах оптики отступление от закона синусов излагается таким образом, что читатели склонны рассматривать его как какую-то особую, шестую аберрацию системы; ее называют иногда даже аберрацией Чеберле. На самом деле отступление от закона синусов представляет собой лишь некий признак, по которому можно судить о коме системы, *не проделывая тригонометрического расчета хода лучей, излучаемых точкой, находящейся на некотором расстоянии от оси* (единственный способ определения комы, если не считать вычисления коэффициента S_{II}).

Отступление от закона синусов дает возможность определить с большой степенью точности кому пучка лучей *любого отверстия при достаточно малом расстоянии точки от оси*. К решению поставленного вопроса о связи между комой и отступлением от закона синусов можно подойти двояко.

Можно на основании теории аберраций третьего порядка найти соотношение между отступлением от закона синусов и коэффициентами Зейделя для первой и второй сумм. Такие выводы

имеются, например, в работе А. И. Тудоровского [1], а также в первом издании этой книги [2].

Однако больший интерес представляет геометрический вывод, из которого вытекает более общая связь, распространяющаяся на аберрации любого порядка.

Здесь будет приведено *обобщение формулы Штебле—Лихоцкого*, изложенное в работе автора [3].

Введем величину δ_s, определяемую формулой

$$\delta_s = \frac{\sin u}{\tau \sin u'} - 1, \qquad (II.76)$$

где u и u' — углы с осью луча, пересекающего выходной зрачок на расстоянии t от оси; τ — предел при $u = 0$ отношения $\frac{\sin u}{\sin u'}$, т. е. величина, обратная угловому увеличению γ.

Отметим, что величина δ_s не равна величине $\delta_{\sin}$, приведенной в [2] на стр. 113. Она приблизительно равна ей, но с обратным знаком.

Лихоцким было доказано следующее положение.

Рис. II.30

Пусть из точки A, находящейся на оси оптической системы, идут два симметричных луча, пересекающихся с осью в точке A', образуя с осью углы ω' (рис. II.30); пусть $\delta s' = A_0'A'$ — продольная сферическая аберрация этих лучей. Рассмотрим точку B, лежащую на бесконечно малом расстоянии от оси на перпендикуляре к оси, проходящем через A. Два луча исходят из B таким образом, что после преломления они образуют с третьим (главным) лучом $P'B'$ те же углы. Поставим условие, чтобы эти три луча $M'B'$, $P'B'$ и $M_1'B'$ пересеклись в общей точке B' и фигура $M'B'M_1'$ в точности повторяла фигуру $M'A'M_1'$. Это условие принято после Штебле называть условием *изопланатизма*: при его выполнении изображение точки B тождественно с изображением точки A. Штебле и Лихоцкий доказали, что если это условие выполнено, имеет место соотношение

$$\delta_s + \frac{\delta s'}{x_0' - s_0'} = 0. \qquad (II.77)$$

Для доказательства этого положения Лихоцкий делает предположение о том, что точки M' и M_1' расположены на окружности, проходящей через P' и A'. В реальных оптических системах это предположение, пожалуй, никогда не осуществляется, что в значительной степени лишает его теорему практического интереса.

Кроме того, условие Штебле—Лихоцкого не позволяет вычислять значения комы, когда левая часть уравнения (II.77) не равна нулю.

Нашей целью является вывод формулы, связывающей поперечную кому меридионального пучка любой апертуры при бесконечно малой величине расстояния предмета от оси с величинами δ_s и $\delta s'$.

Отметим, что при определении комы пучка любого отверстия должны быть приняты предосторожности, совершенно излишние при выводе комы третьего порядка. В частности, необходимо точно условиться о выборе двух крайних лучей, по которым определяется кома.

Рис. II.31

В отличие от Лихоцкого, принимающего в качестве крайних лучей два луча, образующие с главным равные по значению углы, рассмотрим два луча, выбранные таким образом, что синусы углов, образуемых этими лучами с осью, отличаются от синуса угла, образуемого с осью главным лучом, на одинаковые величины. Такой выбор пары лучей может быть обоснован следующим образом.

Величина плоского потока лучей, исходящего из бесконечно малого источника света, пропорциональна не углу между крайними лучами пучка, а разности синусов этих углов. Таким образом, можно считать, что при выбранной здесь паре крайних лучей энергии обеих частей пучка, разделенных главным лучом, равны.

Рассмотрим два бесконечно тонких меридиональных пучка AM и BN, исходящих из точки A на оси системы и точки B на расстоянии l от первой (рис. II.31). Расстояние l в дальнейшем будем считать бесконечно малым. Пусть u — угол, образуемый первым пучком с осью. Второй пучок образует такой угол $u + du$ с осью, что после преломления он пересекает первый пучок в точке M' выходного зрачка. Обозначим через u' угол, образуемый пучком AM с осью после преломления. Поперечную кому пучка, соответствующую данной апертуре $A = n \sin u$ и заданному положению выходного зрачка, определим следующим образом.

Вычислим высоту y' пересечения с гауссовой плоскостью изображения трех лучей: главного луча, проходящего через центр выходного зрачка P, образующего угол ε с осью, и двух лучей, образующих с осью такие углы u'_+ и u'_-, что $\sin u'_+ - \varepsilon = \varepsilon - \sin u'_- = \sin \omega'$.

Обозначим эти высоты через y'_0, y'_+ и y'_-. Образуем величину

$$K_m = \frac{y'_+ + y'_-}{2} - y'_0. \qquad \text{(II.78)}$$

Эту величину назовем комой меридионального пучка для апертуры A'. Она, как известно, характеризует степень несимметричности преломленного пучка.

Кома третьих порядков не зависит от выбора плоскости установки; это положение неверно для комы пучка большого отверстия, но нетрудно вычислить изменение комы при изменении плоскости установки. Этот вывод будет выполнен ниже; он позволит вычислить кому не в плоскости Гаусса, что вызывает ряд затруднений, а в плоскости $A'H'$, содержащей фокусы бесконечно тонких меридиональных пучков $M'S'$ и $M'B'$, и затем перейти к коме в гауссовой плоскости, которая представляет интерес для конструктора-вычислителя.

Рис. II.32

В плоскости $A'H'$ величина $l' = A'B'$ определяется точно по обобщенной формуле Лагранжа—Гельмгольца

$$nl \cos u \, du = n'l' \cos u' \, du'. \qquad (II.79)$$

Определим абсциссу точки A' относительно гауссова изображения A_0' точки A. Имеем

$$\overline{A_0'H'} = \overline{A_0'S'} + \overline{S'H'} = \delta s' + \overline{S'A'} \cos u'.$$

Но $\overline{S'A'}$ определяется из элементарного треугольника $A'S'S_1'$:

$$\overline{A'S'} = \frac{d(\delta s')}{du'} \sin u'. \qquad (II.80)$$

Поэтому $\overline{A_0'H'} = \delta s' + \frac{d(\delta s')}{du'} \sin u' \cos u'$. Ордината y' точки пересечения луча $M'B'$ с плоскостью $A'H'$ равна

$$y' = \overline{A'S'} \sin u' + l' = \frac{d(\delta s')}{du'} \sin^2 u' + \frac{nl \cos u \, du}{n' \cos u' \, du'}. \qquad (II.81)$$

При составлении выражения для комы можно заметить, что в выражении для y' [формула (II.81)] первый член правой части представляет собой нечетную функцию относительно u' и при перемене знака u' меняет свой знак, не меняя своего значения. При составлении полусуммы $\frac{y'_+ + y'_-}{2}$ этот член пропадает; вторые члены, наоборот, составляют четную функцию от u' и при составлении $\frac{y'_+ + y'_-}{2}$ дают $\frac{n \, dl \cos u \, du}{n' \cos u' \, du'}$. Чтобы получить y_0' в плоскости A', находим сначала значение $y_Г'$ в плоскости Гаусса, соответствующей углу $u' = 0$ (рис. II.32). Имеем

$$y_Г' = dl_Г' = \frac{n \, dl \, du}{n' \, du'} \Big|_{u=0} = \beta \, dl, \qquad (II.82)$$

где β — линейное увеличение системы для сопряженных точек A и A_0'.

В плоскости A' ордината y_0' равна $y_\Gamma' + \overline{H'A_0'}\varepsilon$. Обозначим $\overline{H'A_0'}$ через $-\Delta$.

Тогда

$$-\Delta = \overline{H'A_0'} = \overline{H'S'} + \overline{S'A_0'} = -\left(\frac{d(ds')}{du'}\sin u' \cos u' + \delta s'\right);$$

$$y_0' = dl_\Gamma' - \varepsilon\Delta. \qquad (II.83)$$

Для комы K_m в плоскости $A'H'$ получаем

Рис. II.33

$$K_m = \frac{n\,dl \cos u\,du}{n' \cos u'\,du'} - dl_\Gamma' + \varepsilon\Delta \qquad (II.84)$$

или

$$K_m = dl_\Gamma' \left[\frac{d(\sin u)}{d(\tau \sin u')} - 1\right] + \varepsilon\Delta. \qquad (II.85)$$

Но $\sin u = \tau \sin u' (1 + \delta_s)$; дифференцируя это выражение по $\sin u'$, получаем

$$\frac{d(\sin u)}{\tau\, d(\sin u')} = 1 + \delta_s + \sin u' \frac{d\delta_s}{d(\sin u')};$$

$$K_m = dl_\Gamma' \left[\delta_s + \sin u' \frac{d\delta_s}{d(\sin u')}\right] + \varepsilon\Delta. \qquad (II.86)$$

Определив кому для плоскости $A'H'$, нужно вычислить ее для плоскости O'. Этот переход может быть выполнен следующим образом. Пусть (рис. II.33) $y_1' = H_1A_1$ — высота пересечения луча с плоскостью H_1, а $y_2' = H_2A_2$ — высота пересечения того же луча с плоскостью H_2; пусть Δ — расстояние между этими плоскостями. Имеем $y_2' = y_1' - \Delta \operatorname{tg} u'$. Пусть известна кома K_1 для плоскости H_1. Для плоскости H_2 она получится по формуле

$$K_2 = K_1 - \Delta\left(\frac{\operatorname{tg} u_+' + \operatorname{tg} u_-'}{2} - \operatorname{tg} u_0'\right). \qquad (II.87)$$

Но

$$\left.\begin{aligned} \sin u_+' &= \sin \omega' + \varepsilon; \\ \sin u_-' &= -\sin \omega' + \varepsilon; \\ \sin u_0' &= +\varepsilon; \end{aligned}\right\} \qquad (II.88)$$

$$\operatorname{tg} u_+' = \frac{\sin \omega'}{\cos u_+'} + \frac{\varepsilon}{\cos u_+'}. \qquad (II.89)$$

Если $\sin u'_+ = \sin \omega' + \varepsilon$, то с точностью до членов, содержащих ε в первой степени, имеем

$$\cos u'_+ = \cos \omega' - \varepsilon \operatorname{tg} \omega',$$

как легко проверить из соотношения

$$\sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1.$$

Подставляя в формулу (II.89) значение $\cos u'_+$, получаем после простых преобразований следующее выражение для $\operatorname{tg} u'_+$:

$$\operatorname{tg} u'_+ = \frac{\sin \omega'}{\cos \omega' - \varepsilon \operatorname{tg} \omega'} + \frac{\varepsilon}{\cos \omega'} = \operatorname{tg} \omega' \left(1 + \varepsilon \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right) + \frac{\varepsilon}{\cos \omega'} =$$

$$= \operatorname{tg} \omega' + \varepsilon \left(\frac{\sin^2 \omega}{\cos^3 \omega} + \frac{1}{\cos \omega'}\right) = \operatorname{tg} \omega' + \frac{\varepsilon}{\cos^3 \omega}.$$

Отсюда

$$K_2 = K_1 - \Delta \left(\frac{\varepsilon}{\cos^3 \omega'} - \varepsilon\right) = K_1 - \Delta\varepsilon \left(\frac{1}{\cos^3 \omega'} - 1\right), \quad \text{(II.90)}$$

и, если заменить Δ его значением

$$\Delta = \left[\frac{d(\delta s')}{du'} \sin u' \cos u' + \delta s'\right], \quad \text{(II.91)}$$

то после некоторых преобразований получаем выражение для комы в плоскости O'

$$K_{O'} = l' \frac{d}{d \sin u'} \left(\delta_s \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x'_0 - s'_0}\right). \quad \text{(II.92)}$$

В случае, если $s = \infty$, величина $\delta_s = \frac{\sin u}{\tau \sin u'} - 1$ теряет смысл и заменяется выражением

$$\delta_s = \frac{s_1 \sin u}{s_1 \tau \sin u'} - 1 = \frac{h_1}{\sin u' f'} - 1$$

и формула принимает вид

$$K_{O'} = l' \frac{d}{d(\sin u')} \left(\frac{h_1}{f'} - \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x'_0 - s'_0}\right). \quad \text{(II.93)}$$

Для комы, вызываемой сагиттальными лучами, Конради [4] была выведена формула, которая после перехода к нашим обозначениям имеет вид

$$-\frac{K_s}{l'} = 1 - \frac{\sin u_1}{\tau \sin u'} \frac{s'_0 - x'}{s' - x'},$$

где $K_s = l'_s - l'$; l'_s — ордината точки пересечения двух симметричных сагиттальных лучей, исходящих из точки l объекта и принадлежащих зоне зрачка, соответствующей апертуре $\sin u_1$

(величина l предполагается бесконечно малой); l' — ордината точки пересечения главного луча того же пучка с плоскостью, в которой пересекается пара сагиттальных лучей (эта плоскость при бесконечно малом l содержит точку пересечения с осью луча, исходящего из точки предмета на оси с апертурой $\sin u_1$); s_0' и s' — абсциссы точек пересечения с осью параксиального луча и луча с апертурой $\sin u_1$.

Приведем формулу к более удобному виду

$$-\frac{K_s}{l'} = 1 - \frac{\sin u_1}{\tau \sin u'} \frac{s_0' - x'}{s' - x'} = 1 - \frac{\sin u_1}{\tau \sin u'} \frac{s_0' - x' + \Delta s' - \Delta s'}{s_0' + \Delta s' - x'}.$$

Помня, что $\frac{\sin u_1}{\tau \sin u'} - 1 = \delta_s$ и вводя это значение в формулу, получаем

$$\frac{K_s}{l'} = \delta_s + \frac{\Delta s'}{x' - s'} + \delta_s \frac{\Delta s'}{x' - s'}, \qquad \text{(II.94)}$$

где $\Delta s' = s' - s_0'$.

Последним членом формулы (II.94) в большинстве случаев можно пренебречь. Любопытно, что для сагиттальной комы выражение комы непосредственно связано с отступлением δ_s, в то время как для меридиональной оно связано с производной от δ_s по аргументу $\sin u'$.

Для практического применения формул следует графически представить функцию $\delta_s \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x_0' - s_0'}$ в зависимости от аргумента $\sin u'$ и измерить угол касательной в нескольких точках кривой.

Если ограничиться аберрациями третьего порядка, то можно считать $\delta_s = D \sin^2 u'$; $\delta s' = A \sin^2 u'$, где A и D — коэффициенты, зависящие от конструкции системы и положения предмета.

Заменяя $\operatorname{tg} u'$ в формуле (II.93) через $\sin u'$, получаем

$$K = l' \frac{d}{d(\sin u')} \left(D \sin^3 u' + \frac{A \sin^3 u'}{x_0' - s_0'} \right) = 3l' \left(\delta_s + \frac{\delta s'}{x_0' - s_0'} \right). \qquad \text{(II.95)}$$

Однако последней формулой необходимо пользоваться с осторожностью (при отсутствии высших порядков величин δ_s и $\delta s'$). Значительно лучше следить не за самой величиной $\delta_s \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x_0' - s_0'}$, а за ее производной и добиться того, чтобы производная по $\sin u'$ обращалась в ноль (если нужно исправить кому).

Признаком отсутствия высших порядков комы служит пропорциональность величины $\eta = \delta_s + \frac{\delta s'}{x_0' - s_0'}$ или $\eta = \frac{\delta s'}{x_0' - s_0'} + \frac{\delta f'}{f'}$ (когда предмет на бесконечности) квадрату апертурного

угла $\sin u'$ (или h_1). В таком случае можно считать, что реальная кома K_m определяется упрощенной формулой

$$K_m = 3l' \left(\frac{\delta s'}{x' - s'} + \delta_s \right). \qquad (II.96)$$

Пример. Двухлинзовый склеенный объектив работает с увеличением —1. Входной зрачок совпадает с объективом; фокусное расстояние его 600 *мм*, диаметр отверстия 120 *мм*. Сферическая аберрация $\delta s'$ для луча на краю отверстия ($m_1 = 60$) равна 1,52 *мм*; отношение $\frac{\sin u'}{\sin u_1}$ для этого луча равно —1,0062; для параксиального луча $\frac{\alpha'}{\alpha_1} = -1$. Определить кому объектива для точки изображения с координатой $l'_p = +2{,}5$ *мм* при полном отверстии.

Применяя формулу (II.96), имеем

$$\delta g'_к = 3 \cdot 2{,}5 \left(-\frac{1{,}52}{1200} - 0{,}0062 \right) =$$

$$= 7{,}5 (-0{,}0014 - 0{,}0062) = -0{,}056.$$

Точный тригонометрический расчет дал для величины $\delta g'_к$ значение —0,061.

Любопытно получить для этого же объектива величину меридиональной комы на основании его второй суммы S_{II}. Эта сумма по формуле (II.47) оказалась равной $+6{,}45J$, а $J = n_1 (x_1 - s_1) = x_1 - s_1$.

Таким образом,

$$-2n'_p \alpha'_p \delta g'_{p,к} = 3\omega_1^2 w_1 S_{II} = 3\omega_1^2 w_1 (x_1 - s_1) = 3\omega_1^2 l_1 \cdot 6{,}45.$$

При $n'_p = 1$; $\alpha'_p = -1$; $l_1 = -2{,}5$; $\omega_1 = -\frac{60}{1200}$ получаем

$$\delta g'_{p,к} = -\frac{3}{2} \left(\frac{60}{1200} \right)^2 2{,}5 \cdot 6{,}45 = -0{,}060.$$

Результат совпадает с тем, который дает тригонометрический расчет.

Другой вывод формулы, связывающей отступление от отношения синусов с коэффициентом сферической аберрации и комы, пригодной лишь в пределах аберраций третьего порядка, представляет интерес ввиду того, что прием, используемый в этом случае, встречается и при выводе таких аберраций, как хроматическая разность увеличений и хроматическая разность сферических аберраций. Поэтому мы его здесь приводим [2].

Пусть по-прежнему

$$\delta_s = \frac{\alpha'_p}{\alpha_1} \frac{\sin u_1}{\sin u'_p} - 1 = \frac{1}{\tau} \frac{\sin u_1}{\sin u'_p} - 1. \qquad (II.97)$$

Вычислим отношение $\frac{\sin u'_p}{\sin u_1}$, принимая во внимание только члены второго порядка малости.

Напишем очевидное тождество

$$\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = \frac{\sin u'_p}{\sin u_p} \frac{\sin u'_{p-1}}{\sin u_{p-1}} \cdots \frac{\sin u_2}{\sin u_1}. \qquad \text{(II.98)}$$

Отношение $\frac{\sin u'}{\sin u}$ для любой поверхности может быть определено из треугольника MSS' (см. рис. I.16), где MS — падающий луч; MC — нормаль; OC — оптическая ось системы; MS' — преломленный луч:

$$\frac{\sin u'_\kappa}{\sin u_\kappa} = \frac{MS}{MS'} = \frac{p}{p'}. \qquad \text{(II.99)}$$

Отрезки $p = MS$ и $p' = MS'$ могут быть определены из треугольников MSC и $MS'C$:

$$p^2 = (r-s)^2 + r^2 - 2r(r-s)\cos\varphi = s^2 + 2r(r-s)(1-\cos\varphi) =$$
$$= s^2 + 4r(r-s)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

С указанной выше точностью можно написать

$$p^2 = s^2 + r(r-s)\varphi^2, \qquad \text{(II.100)}$$

откуда, используя разложение в ряд для квадратного корня, получаем

$$p = s\left[1 + \frac{1}{2}\frac{r(r-s)}{s^2}\varphi^2\right]. \qquad \text{(II.101)}$$

Аналогично для отрезка p' находим

$$p' = s'\left[1 + \frac{1}{2}\frac{r(r-s')}{s'^2}\varphi^2\right]. \qquad \text{(II.101*)}$$

С той же точностью определяем отношение отрезков

$$\frac{p}{p'} = \frac{s}{s'}\left[1 - \frac{1}{2}\varphi^2\Delta\frac{r(r-s)}{s^2}\right], \qquad \text{(II.102)}$$

где $\Delta\frac{r(r-s)}{s^2}$, согласно обозначению Аббе, заменяет разность

$$\Delta\frac{r(r-s)}{s^2} = \frac{r(r-s')}{s'^2} - \frac{r(r-s)}{s^2} = -r^2Q_s\Delta\frac{1}{ns}. \qquad \text{(II.103)}$$

Следовательно,

$$\frac{p}{p'} = \frac{s}{s'}\left(1 + \frac{1}{2}h^2Q_s\Delta\frac{1}{ns}\right),$$

или

$$\frac{p}{p'} = \frac{s}{s'}\left(1 - \frac{1}{2}W\right), \qquad \text{(II.104)}$$

где

$$W = h^2 Q_s \Delta \frac{1}{ns}.$$

Перемножая отношения $\frac{p}{p'}$ для всех поверхностей, имеем с той же точностью

$$\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = \frac{p_p}{p'_p}\frac{p_{p-1}}{p'_{p-1}}\cdots\frac{p_1}{p'_1} = \frac{s_p}{s'_p}\cdots\frac{s_1}{s'_1}\left(1 - \frac{1}{2}\sum_1^p W\right). \quad (\text{II}.105)$$

Для вычисления произведения отношений $\frac{s}{s'}$ вводим отрезки $s'_{0\kappa}$ и $s_{0\kappa}$ для соответственных параксиальных лучей; полагаем, что $s_\kappa = s_{0\kappa} + \delta s_\kappa$; $s'_\kappa = s'_{0\kappa} + \delta s'_\kappa$, где δs_κ и $\delta s'_\kappa$ — продольные сферические аберрации луча до и после преломления через рассматриваемую поверхность с номером κ. Разлагаем в ряд выражение для отношения $\frac{s_\kappa}{s'_\kappa}$:

$$\frac{s_\kappa}{s'_\kappa} = \frac{s_{0\kappa} + \delta s_\kappa}{s'_{0\kappa} + \delta s'_\kappa} = \frac{s_{0\kappa}}{s'_{0\kappa}}\left(1 + \frac{\delta s_\kappa}{s_{0\kappa}} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_{0\kappa}} + \cdots\right). \quad (\text{II}.106)$$

С принятой точностью останавливаемся на первой степени отношения $\frac{\delta s}{s}$, так как $\frac{\delta s}{s}$ — величина второго порядка малости, пропорциональная квадрату угла u.

Для произведения всех отношений $\frac{s_\kappa}{s'_\kappa}$ имеем

$$\frac{s_p}{s'_p}\cdots\frac{s_1}{s'_1} = \frac{s_{0p}}{s'_{0p}}\cdots\frac{s_{01}}{s'_{01}}\left[1 + \sum_1^p\left(\frac{\delta s_\kappa}{s_{0\kappa}} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_{0\kappa}}\right)\right]. \quad (\text{II}.107)$$

Сумма $\sum$ может быть разбита на пары членов следующим образом:

$$\sum_1^p\left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa}\right) = \frac{\delta s_1}{s_1} + \left(\frac{\delta s_2}{s_2} - \frac{\delta s'_1}{s'_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\delta s_3}{s_3} - \frac{\delta s'_2}{s'_2}\right) + \cdots - \frac{\delta s'_p}{s'_p}, \quad (\text{II}.108)$$

где для краткости опущены значки 0.

Ввиду того, что $\delta s'_\kappa = \delta s_{\kappa+1}$ и $s'_\kappa = s_{\kappa+1} + d_\kappa$, где d_κ — расстояние между поверхностями с номерами κ и $\kappa + 1$, имеем

$$\sum_1^p \left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} \right) = \frac{\delta s_1}{s_1} - \frac{\delta s'_p}{s'_p} + \delta s_2 \frac{d_1}{s'_1 s_2} + \delta s_3 \frac{d_2}{s'_2 s_3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{d_\kappa \delta s_{\kappa+1}}{s'_\kappa s_{\kappa+1}} + \cdots + \frac{d_{p-1} \delta s_p}{s'_{p-1} s_p}. \qquad (II.109)$$

Так как предмет не имеет аберрации, то $\delta s_1 = 0$; поэтому

$$\sum_1^p \left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} \right) = - \frac{\delta s'_p}{s'_p} + \sum_1^{p-1} \frac{d_\kappa \delta s_{\kappa+1}}{s'_\kappa s_{\kappa+1}}. \qquad (II.110)$$

Рассмотрим формулу (II.48) и введем новые суммы S_{I} и S_{II}, связанные с суммами $\overline{S}_{\mathrm{I}}$ и $\overline{S}_{\mathrm{II}}$ соотношениями

$$S_{\mathrm{I}} = \overline{S}_{\mathrm{I}} h_1^4;$$

$$S_{\mathrm{II}} = \overline{S}_{\mathrm{II}} h_1^3 y_1.$$

Тогда получаем при $M_1 = 0$

$$2n'_p \delta g'_p \alpha'_p = \frac{m_1^3}{(x_1 - s_1)^3} \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^3 S_{\mathrm{I}} - \frac{3m_1^2}{(x_1 - s_1)^2} \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 S_{\mathrm{II}}. \qquad (II.48^*)$$

Остальные члены можно не выписывать, так как они не нужны для вывода искомой формулы.

Здесь

$$S_{\mathrm{I}} = \sum_1^p h_i P_i;$$

$$S_{\mathrm{II}} = \sum_1^p y_i P_i - J \sum_1^p W_i.$$

Из формулы (II.48*) получаем для поперечной сферической аберрации

$$2n'_\kappa \delta g'_\kappa \alpha'_\kappa = \frac{m_1^3}{(x_1 - s_1)^3} \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^3 \sum_1^\kappa h_i P_i,$$

но так как $\frac{m_1}{x_1 - s_1} = \alpha_1$, $\frac{h_1}{s_1} = \alpha_1$, то

$$\delta s'_\kappa = \frac{\delta g'_\kappa}{\alpha'_\kappa} = - \frac{\sum_1^\kappa h_i P_i}{2n'_\kappa \alpha'^2_\kappa}. \qquad (II.111)$$

Подставляя это значение в формулу (II.110), находим

$$\sum_{1}^{p}\left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa}-\frac{\delta s_\kappa'}{s_\kappa'}\right)=\frac{\sum\limits_{1}^{p} h_i P_i}{2n_p'\alpha_p'^2 s_p'}-\frac{1}{2}\sum_{1}^{p-1}\frac{d_\kappa\sum\limits_{1}^{\kappa} h_i P_i}{n_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+1}^2 s_\kappa' s_{\kappa+1}}. \quad (II.112)$$

Второй член правой части формулы (II.112), вследствие соотношений

$$s_\kappa'\alpha_{\kappa+1}=h_\kappa;\quad s_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+1}=h_{\kappa+1},$$

может быть написан в виде

$$-\frac{1}{2}\sum_{1}^{p-1}\frac{d_\kappa\sum\limits_{1}^{\kappa} h_i P_i}{n_{\kappa+1}h_\kappa h_{\kappa+1}}.$$

Учитывая последнее преобразование, получаем вместо (II.112) после перераспределения величин P

$$\sum_{1}^{p}\left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa}-\frac{\delta s_\kappa'}{s_\kappa'}\right)=\frac{\sum\limits_{1}^{p} h_i P_i}{2n_p'\alpha_p'^2 s_p'}-\frac{1}{2}\left[h_1P_1\left(\frac{d_1}{n_2h_1h_2}+\frac{d_2}{n_3h_2h_3}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{d_{p-1}}{n_ph_{p-1}h_p}\right)+h_2P_2\left(\frac{d_2}{n_3h_2h_3}+\cdots+\frac{d_{p-1}}{n_ph_{p-1}h_p}\right)+\cdots$$

$$\left.\cdots+h_{p-1}P_{p-1}\frac{d_{p-1}}{n_ph_{p-1}h_p}\right]. \quad (II.113)$$

Введем обозначение из формулы (II.52)

$$\sigma_p=\sum_{2}^{p}\frac{d_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}h_\kappa n_\kappa};$$

тогда выражение в квадратных скобках принимает вид

$$h_1P_1\sigma_p+h_2P_2(\sigma_p-\sigma_2)+h_3P_3(\sigma_p-\sigma_3)+\cdots$$

$$\cdots+h_{p-1}P_{p-1}(\sigma_p-\sigma_{p-1}). \quad (II.114)$$

Прибавляя и отнимая член $\sigma_p h_p P_p$, получаем

$$[\cdots]=\sigma_p\sum_{1}^{p}h_\kappa P_\kappa-\sum_{1}^{p}\sigma_\kappa h_\kappa P_\kappa. \quad (II.115)$$

После этого можем написать

$$\sum_1^p \left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_1^p h_i P_i}{n'_p \alpha'^2_p s'_p} - \frac{1}{2}\left(\sigma_p \sum_1^p h_\kappa P_\kappa - \right.$$

$$\left. - \sum_2^p \sigma_\kappa h_\kappa P_\kappa \right). \qquad (II.116)$$

Возвращаясь к формулам (II.105) и (II.110) и применяя формулу (II.116), получаем для отношения синусов следующие выражения:

$$\frac{s_{01}}{s'_{01}} \cdots \frac{s_{0p}}{s'_{0p}} = \frac{\alpha'_p}{\alpha_1} = \frac{1}{\tau};$$

$$\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = \frac{\alpha'_p}{\alpha_1}\left[1 + \frac{1}{2}\sum_1^p h_\kappa P_\kappa \left(\frac{1}{n'_p \alpha'_p h_p} - \sigma_p\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_1^p (\sigma_\kappa h_\kappa P_\kappa - W_\kappa)\right] + \text{члены высшего порядка малости.} \qquad (II.117)$$

Вторая формула Зейделя (II.52) дает для σ_p выражение

$$\sigma_p = \frac{1}{J}\left(\frac{y_p}{h_p} - \frac{y_1}{h_1}\right).$$

Подставляя это значение σ_p в формулу (II.117) и помня, что $n'\alpha' l' = J$, получаем

$$\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = \frac{\alpha'_p}{\alpha_1}\left\{1 + \frac{1}{2J}\frac{l'_p - y_p}{h_p}\sum_1^p h_\kappa P_\kappa + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2J}\left[\frac{y_1}{h_1}\sum_1^p h_\kappa P_\kappa + J\sum_1^p (\sigma_\kappa h_\kappa P_\kappa - W_\kappa)\right]\right\}. \qquad (II.118)$$

Но выражение в квадратных скобках равно $\overline{S}_{II}$, как это видно из формулы (II.61). Так как $\sum hP = \overline{S}_I$, то можно написать

$$\tau\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = 1 + \frac{l'_p - y_p}{2Jh_p}\overline{S}_I + \frac{1}{2J}\overline{S}_{II}. \qquad (II.119)$$

Из рис. II.25 легко выводим, что $y_p - l'_p = s_p\beta'_p$; но этому коэффициенту при S_{I} может быть дана более симметричная форма, а именно:

$$\frac{l'_p - y_p}{2Jh_p} = -\frac{s'_p\beta'_p}{2Jh_p} = -\frac{\beta'_p}{2J\alpha'_p}. \qquad (\mathrm{II}.120)$$

Следовательно,

$$\tau\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = 1 - \frac{1}{2\alpha'_pJ}\left(\beta'_p\overline{S}_{\mathrm{I}} - \alpha'_p\overline{S}_{\mathrm{II}}\right). \qquad (\mathrm{II}.121)$$

Обозначим для краткости через q выражение второго порядка малости $\frac{1}{2\alpha'_pJ}\left(\beta'_p\overline{S}_{\mathrm{I}} - \alpha'_p\overline{S}_{\mathrm{II}}\right)$. Тогда

$$\tau\frac{\sin u'_p}{\sin u_1} = 1 - q; \qquad (\mathrm{II}.122)$$

$$\delta_s = \frac{1}{\tau}\frac{\sin u_1}{\sin u'_p} - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = 1 + q - 1 = q. \qquad (\mathrm{II}.123)$$

Следовательно,

$$\delta_s = \frac{1}{2\alpha'_pJ}\left(\beta'_p\overline{S}_{\mathrm{I}} - \alpha'_p\overline{S}_{\mathrm{II}}\right). \qquad (\mathrm{II}.124)$$

Задача состоит в том, чтобы, зная отступление от отношения синусов и продольную сферическую аберрацию, определить кому системы в предположении, что последняя обладает лишь аберрациями третьего порядка.

Рассмотрим три луча, исходящие из общей точки и пересекающие входной зрачок в меридиональной плоскости: средний в центре зрачка, а два других — на расстояниях $+m$ и $-m$ от среднего.

Пусть l'_1, l'_2, l'_3 — ординаты точек пересечения этих лучей с гауссовой плоскостью изображения, причем l'_2 соответствует среднему лучу, l'_1 — верхнему.

Обозначим через $\delta g'_к$ следующую величину:

$$\delta g'_к = \frac{l'_1 + l'_3}{2} - l'_2. \qquad (\mathrm{II}.125)$$

Эта величина характеризует несимметричность расположения крайних лучей относительно положения среднего — главного — луча пучка и называется меридиональной комой пучка для отверстия его $2m$. Если система обладает аберрациями только третьего порядка, то величина $\delta g'_к$ зависит только от коэффициента S_{II}, и, чтобы показать это, образуем выражение

$$\delta g'_к = \frac{l'_1 + l'_3}{2} - l'_2 = \frac{\delta g'_1 + \delta g'_3}{2} - \delta g'_2, \qquad (\mathrm{II}.126)$$

где $\delta g'_i$ — меридиональное отклонение точки пересечения с гауссовой плоскостью луча с номером i от гауссова изображения точки.

Для вычисления этого выражения воспользуемся формулой (II.48*), положив $M_1 = 0$; давая величине m_1 последовательно значения $+m$, 0 и $-m$, получаем

$$2n'_p\alpha'_p\delta g'_p = -\frac{3m_1^2}{(x_1 - s_1)^2}\left(\frac{s_1}{h_1}\right)^2 \overline{S}_{\text{II}}; \qquad \text{(II.127)}$$

все остальные члены, зависящие от $\overline{S}_{\text{I}}$, $\overline{S}_{\text{III}}$, $\overline{S}_{\text{IV}}$, $\overline{S}_{\text{V}}$, сокращаются.

Замечая по-прежнему, что $\left(\frac{m_1}{x_1 - s_1}\right)^2\left(\frac{s_1}{h_1}\right)^2 = 1$, имеем

$$2n'_p\alpha'_p\delta g'_p = -3\overline{S}_{\text{II}}. \qquad \text{(II.128)}$$

Последняя формула показывает, что $\delta g'_p$ зависит только от коэффициента комы $\overline{S}_{\text{II}}$.

Вернемся к формуле (II.124) для δ_s.

Тригонометрические расчеты хода луча дают непосредственно $\delta s'_p$ и $\delta_{\sin}$, а нужно получить ожидаемое значение комы $\delta g'_{\kappa,\ p}$. Для этого нужно исключить $\overline{S}_{\text{I}}$ и $\overline{S}_{\text{II}}$, заменяя их выражениями через $\delta s'_p$ и $\delta g'_{\kappa,\ p}$. Из уравнения (II.42), полагая $w = 0$ и помня, что $\delta s' = \alpha'\delta g'_1$, получаем

$$2n'_p\alpha'^2_p\delta s'_p = -\overline{S}_{\text{I}}. \qquad \text{(II.129)}$$

Подставляя (II.128) и (II.129) в формулу (II.124) и пользуясь уравнениями $J = n'\alpha'l'$ и $\frac{\beta'}{l'} = \frac{1}{x' - s'}$, решаем относительно $\delta g'_{\kappa,\ p}$. Окончательная формула, имеющая вид

$$\delta g'_{\kappa,\ p} = 3l'_p\left(\frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} + \delta_s\right), \qquad \text{(II.130)}$$

совпадает с выражением (II.96).

Формула (II.130) непригодна для обширной группы оптических систем, применяемых для получения изображения бесконечно удаленных предметов; в этом случае $s_1 = \infty$ и величина δ_s теряет смысл. Покажем, что вместо нее можно ввести другую величину.

Согласно определению имеем

$$\delta_s = \frac{\sin u_1}{\sin u'_p}\,\frac{\alpha'_p}{\alpha_1} - 1.$$

Первый член правой части может быть написан в таком виде: $\frac{\sin u_1}{\sin u'_p}\,\frac{s_1\alpha'_p}{s_1\alpha_1}$, где s_1 — расстояние от предмета до первой поверхности системы. В пределе произведение $s_1 \sin u_1$ равно h_1. Так

как $s_1\alpha_1 = h_1$ и $\frac{h_1}{\alpha'_p} = f'$, где f' — заднее фокусное расстояние системы, то можно написать

$$\delta_s = \frac{h_1}{\sin u'_p}\frac{1}{f'} - 1 = \frac{1}{f'}\left(\frac{h_1}{\sin u'_p} - f'\right). \qquad (II.131)$$

Обозначим символом $\delta f'$ разность $\frac{h_1}{\sin u'_p} - f'$; тогда

$$\delta_s = \frac{\delta f'}{f'} \qquad (II.132)$$

и формула (II.130) принимает вид

$$\delta g'_{к,\ p} = 3l'\left(\frac{\delta s'}{x' - s'} + \frac{\delta f'}{f'}\right). \qquad (II.133)$$

Как уже было сказано, случаи, когда $s_1 = \infty$, на практике встречаются очень часто, и тогда нужно применить формулу (II.133). В тех случаях, когда $x'_p - s'_p = -f'$, т. е. когда выходной зрачок системы совпадает с ее задней главной плоскостью, формула упрощается. Это имеет место, во-первых, во всех бесконечно тонких объективах, если выходной зрачок совпадает с оправой объектива, и, во-вторых, в тех случаях, когда объектив состоит из двух одинаковых и симметрично расположенных половинок (фотографические объективы типа «Апланат», двойные симметричные анастигматы типа «Дагор», «Планар», «Плазмат» и т. п.).

Формула (II. 133) принимает наиболее простой вид

$$\delta g'_{к,\ p} = \frac{3l'}{f'}(\delta f' - \delta s'). \qquad (II.134)$$

Бывает полезно на основании результатов расчета хода лучей через оптическую систему получить значение второй суммы S_{II}. В наиболее часто встречающихся случаях, когда предмет находится на бесконечности, по формуле (II.45) имеем

$$\delta g'_{к,\ p} = -\frac{3}{2}\frac{\omega'^2}{n'}w_1 S_{II} \text{ и } l' = -f'\frac{n}{n'}w_1.$$

Используя эти выражения и формулу (II.133), можно получить следующее:

$$S_{II} = 2n_1\left(\frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} + \frac{\delta f'}{f'}\right)\frac{1}{\omega'^2_p}, \qquad (II.135)$$

или

$$S_{II} = 2n_1\eta\frac{1}{\omega'^2_p}, \qquad (II.136)$$

где

$$\eta = \frac{\delta s'_p}{x'_p - s_p} + \frac{\delta f'}{f'}. \qquad (II.137)$$

Применение формул для аберраций третьего порядка к частным случаям

Простая, бесконечно тонкая линза. Теория аберраций хорошо применима в случае простых линз, если относительное отверстие последних невелико (например, не превышает $^1/_3$—$^1/_4$) и если главный луч пересекает линзу на небольшой высоте (не более 0,25—0,30 диаметра линзы).

Положим, что для линзы известны: ее фокусное расстояние f, показатель преломления n материала, из которого она изготовлена, и углы α_1, α_2 и α_3, образуемые с осью первым вспомогательным лучом до преломления (в воздухе), после преломления (в стекле) и после второго преломления (в воздухе). Первый из этих углов α_1 возьмем равным единице. Пусть расстояние от плоскости предмета до линзы равно s, расстояние от изображения до линзы равно s'. Линейное увеличение линзы $\beta = \frac{s'}{s}$. Правило знаков для величин s изложено в гл. I (см. стр. 6). На основании гауссовой оптики имеем следующие соотношения:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}; \quad s = f\left(\frac{1}{\beta} - 1\right); \quad s' = f(1 - \beta). \quad \text{(II.138)}$$

Параметр h — высота пересечения первого вспомогательного луча с линзой — равен $s\alpha_1 = s$ и одинаков для обеих поверхностей линзы. Соотношения между радиусами кривизны и параметрами α выражаются следующими уравнениями:

$$r_1 = s\,\frac{n-1}{\alpha_2 n - 1}; \quad r_2 = s\,\frac{n-1}{\alpha_2 n - \alpha_3}. \quad \text{(II.139)}$$

Параметр α_3 связан с линейным увеличением β формулой $\beta\alpha_3 = 1$. Легко проверить, что радиусы кривизны r_1 и r_2 удовлетворяют известному равенству

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\alpha_3 - 1}{s}. \quad \text{(II.140)}$$

Выпишем выражения, входящие в состав сумм в формулах (II.57), применительно к данному случаю (для краткости введено обозначение $\nu = \frac{1}{n}$):

$$\sum W = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\nu - 1}(\alpha_2\nu - 1) + \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{1 - \nu}(\alpha_3 - \alpha_2\nu) =$$

$$= \frac{\alpha_3 - 1}{1 - \nu}[\alpha_3 + 1 - (1 + \nu)\alpha_2]; \quad \text{(II.141)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum P &= \left(\frac{\alpha_2-1}{\nu-1}\right)^2(\alpha_2\nu-1)+\left(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{1-\nu}\right)^2(\alpha_3-\alpha_2\nu)= \\
&= \frac{\alpha_3-1}{(1-\nu)^2}\left[\alpha_3^2+\alpha_3+1-(2+\nu)(\alpha_3+1)\alpha_2+(2\nu+1)\alpha_2^2\right]; \\
\sum \Delta\frac{\alpha}{n} &= \sum \Delta\alpha\nu = \alpha_2\nu-1+\alpha_3-\alpha_2\nu=\alpha_3-1; \\
\sum \Pi &= \frac{\alpha_2 n-\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_3-\alpha_2 n}{n}=\frac{\alpha_3-1}{n}=(\alpha_3-1)\nu; \\
\sum \Delta\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}-1+1-\frac{1}{n^2}=0.
\end{aligned}\right\}\text{(II.142)}$$

Остальные величины y и J, входящие в выражения сумм, определяются следующим образом. Пусть x — расстояние от линзы до входного зрачка. По условию принимаем $y_1 = x$; $J = x - s$, так как $n_1 = \alpha_1 = 1$.

Таким образом, выражения сумм Зейделя, определяемых по формулам (II.57), принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= sP; \\
S_{\mathrm{II}} &= xP-(x-s)W; \\
S_{\mathrm{III}} &= \frac{x^2}{s}P-2(x-s)\frac{x}{s}W+\frac{(x-s)^2}{s}(\alpha_3-1); \\
S_{\mathrm{IV}} &= \frac{\alpha_3-1}{s}\nu=\frac{\nu}{f}; \\
S_{\mathrm{V}} &= \frac{x^3}{s^2}P-3(x-s)\left(\frac{x}{s}\right)^2W+(x-s)^2\times \\
&\times\frac{x}{s^2}(3+\nu)(\alpha_3-1),
\end{aligned}\right\}\text{(II.143)}$$

где

$$P=\frac{\alpha_3-1}{(1-\nu)^2}\left[\alpha_3^2+\alpha_3+1-(2+\nu)(\alpha_3+1)\alpha_2+(2\nu+1)\alpha_2^2\right];$$

$$W=\frac{\alpha_3-1}{1-\nu}\left[\alpha_3+1-(1+\nu)\alpha_2\right].$$

Согласно формулам (II.47) аберрации для линзы можно написать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
-2\alpha_3\delta g' &= \omega_1(\omega_1^2+\Omega_1^2)S_{\mathrm{I}}+(3\omega_1^2+\Omega_1^2)w_1S_{\mathrm{II}}+ \\
&+\omega_1 w_1^2\left[3S_{\mathrm{III}}+(x_1-s_1)^2S_{\mathrm{IV}}\right]+w_1^3S_{\mathrm{V}}; \\
-2\alpha_3\delta G' &= \Omega_1(\omega_1^2+\Omega_1^2)S_{\mathrm{I}}+2\omega_1\Omega_1 w_1S_{\mathrm{II}}+ \\
&+\Omega_1 w_1^2\left[S_{\mathrm{III}}+(x_1-s_1)^2S_{\mathrm{IV}}\right].
\end{aligned}\right\}\text{(II.144)}$$

Для перевода угловых величин ω, Ω и w в линейные можно воспользоваться формулами

$$\omega_1 = -\frac{m_1}{x_1 - s_1}; \quad \Omega_1 = -\frac{M_1}{x_1 - s_1}; \quad w_1 = \frac{l_1}{x_1 - s_1}. \quad (II.145)$$

Формулы (II.143) и (II.144) пригодны только для конечных значений расстояния от предмета до линзы. Случай $s = \infty$ будет изучен особо. Рассмотрим сначала несколько частных случаев.

1. Предмет и изображение совпадают ($s = 0$). Этот случай встречается в коллективах, применяющихся в телескопических системах и служащих для отклонения главных лучей системы, т. е. центральных лучей наклонных пучков. Когда $s = 0$, то $\alpha_3 = \alpha_1$, а следовательно, P и W равны нулю. Нетрудно видеть, что $S_{I} = S_{II} = 0$. В остальных суммах S_{III}, S_{IV} и S_{V} появляются неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которые необходимо раскрыть. Когда s стремится к нулю, α_3 стремится к единице, а отношение $\frac{\alpha_3 - 1}{s}$ остается постоянным и равным $\frac{1}{f}$. Выражение для S_{III} в этом случае может быть написано в виде

$$S_{III} = \frac{x^2}{f(\alpha_3 - 1)} P - 2\frac{x^2}{f(\alpha_3 - 1)} W + \frac{x^2}{f}.$$

Выражения для P и W даны на стр. 129.

В том случае, когда s стремится к нулю, P и W принимают простой вид, так как $\alpha_3 = 1$ и $\alpha_2 = \nu$.

Действительно,

$$\frac{(1-\nu)^2}{\alpha_3 - 1} P = 3 - (2+\nu)2\nu + (2\nu + 1)\nu^2 = (1-\nu)^2(3+2\nu);$$

$$\frac{1-\nu}{\alpha_3 - 1} W = 2 - (1+\nu)\nu = (1-\nu)(2+\nu).$$

После всех подстановок получаем

$$\frac{f}{x^2} S_{III} = \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^2 (1-\nu)^2(3+2\nu) - \frac{2}{1-\nu}(1-\nu)(2+\nu) + 1 =$$

$$= (3+2\nu) - 2(2+\nu) + 1 = 0.$$

Таким образом, S_{III} равно нулю.

Пятая сумма S_V при $s = 0$ принимает вид

$$S_V = \frac{x^3}{s^2}[P - 3W + (3+\nu)(\alpha_3 - 1)].$$

Заменив P и W их выражениями через ν, получаем

$$S_V = \frac{x^3}{s^2}(\alpha_3 - 1)[(3+2\nu) - 3(2+\nu) + (3+\nu)] = \frac{x^3}{f}\frac{1}{s}(0) = \frac{0}{0},$$

т. е. неопределенность. Чтобы раскрыть ее, можно воспользоваться выражением для S_V из формулы (II.49).

Обозначая через $\delta g'_{дист}$ линейную дисторсию линзы, имеем

$$\delta g'_{дист}\alpha'_p = -\frac{1}{2}\frac{l_1^3}{(x_1-s)^3}x_1^3\sum h_к\left(\frac{y_к}{y_1}\right)^3 Q_x \times$$

$$\times\left[(Q_x-Q_s)\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n}+Q_x^2\Delta\frac{1}{nx}\right]. \qquad (II.146)$$

В нашем частном случае $h_к = 0$, $\frac{y_к}{y_1} = 1$ и произведения

$$\sum hQ_x^2\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n} \quad и \quad hQ_x^3\Delta\frac{1}{nx}$$

равны нулю, так как Q_x и $\Delta\frac{1}{nx}$ — конечные величины. Единственная величина, которая, умноженная на $h_к$, может дать нечто, отличное от нуля, это $Q_xQ_s\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n}$, так как произведение hQ_s— конечно. Таким образом, получаем

$$\delta g'_{дист}\alpha'_p = \frac{1}{2}l_1^3\sum hQ_xQ_s\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n}, \qquad (II.147)$$

но

$$hQ_s = -\frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}; \quad yQ_x = -\frac{\Delta\beta}{\Delta\nu},$$

где α и β — углы параксиальных вспомогательных лучей с осью.

Помня, что $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ и $\alpha_2 = \nu$, получаем

$$\delta g'_{дист} = \frac{1}{2}\frac{l_1^3}{y_1}\left[\frac{(\beta_2-\beta_1)(\nu-1)}{(\nu-1)^2}\frac{1}{r_1}(\nu-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{(\beta_3-\beta_2)(1-\nu)}{(1-\nu)^2}\frac{1}{r_2}(1-\nu)\right],$$

или

$$\delta g'_{дист} = \frac{1}{2}\frac{l_1^3}{y_1}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{r_1}+\frac{\beta_3-\beta_2}{r_2}\right).$$

Последнее выражение может быть изменено исключением радиусов r_1 и r_2.

Ввиду того, что

$$r_1 = y_1\frac{n-1}{\beta_2 n-\beta_1} \quad и \quad r_2 = y_1\frac{1-n}{\beta_3-\beta_2 n},$$

получаем окончательно

$$\delta g'_{дист} = \frac{1}{2}\frac{l_1^3}{y_1^2}(\beta_3 - \beta_1)\left[\frac{\beta_2(1+n) - \beta_1 - \beta_3}{n-1}\right]. \qquad (II.148)$$

Так как $\beta_3 - \beta_1 = \frac{y}{f}$, последняя формула может быть написана в таком виде:

$$\delta g'_{дист} = \frac{1}{2}\frac{l_1^3}{y_1 f}\left(\frac{(1+n)\beta_2 - \beta_1 - \beta_3}{n-1}\right), \qquad (II.148^*)$$

или, выражая β через r и x, получаем

$$\delta g'_{дист} = \frac{1}{2}\frac{l_1^3}{f}\left(\frac{1}{r_1 n} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{n x_1}\right). \qquad (II.148^{**})$$

Как показывают формулы (II.148*) и (II.148**), дисторсия простой линзы, даже когда плоскости предмета и изображения сливаются, не равна нулю [кроме исключительного случая, когда $(1+n)\beta_2 = \beta_1 + \beta_3$]. В результате последних вычислений можно прийти к следующим выводам: бесконечно тонкая линза, давая изображение при увеличении $+1$, т. е. при совпадении плоскостей предмета и изображения, обладает только двумя аберрациями: кривизной поля, обусловленной тем, что четвертая сумма S_{IV} отлична от нуля $\left(S_{IV} = \frac{\nu}{f}\right)$, и дисторсией, определяемой формулой (II.148**).

Все остальные аберрации равны нулю.

2. *Предмет и изображение находятся на близком расстоянии.* Пусть имеется бесконечно тонкий компонент, заднее фокусное расстояние которого равно f'; s и s' — расстояния от линзы до предмета и до изображения; α и α' — углы, образованные лучом с осью до и после преломления. Обозначим линейное увеличение компонента через β и положим $\frac{s'}{s} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \beta = 1 + \varepsilon$. Предположим, что ε мало. Напомним выражения для коэффициентов аберраций третьего порядка системы бесконечно тонких компонентов, находящихся в воздухе:

$$S_I = \sum h_i P_i;$$

$$S_{II} = \sum y_i P_i - J\sum W_i;$$

$$S_{III} = \sum \frac{y_i^2}{h_i} P_i - 2J\sum \frac{y_i}{h_i} W_i + J^2 \sum \Phi_i;$$

$$J^2 S_{IV} = J^2 \sum \Phi_i \Pi_i;$$

$$S_V = \sum \frac{y_i^3}{h_i^2} P_i - 3J\sum \frac{y_i^2}{h_i^2} W_i + J^2 \sum \frac{y_i}{h_i}\Phi_i(3 + \Pi_i),$$

где

$$\Pi_i = \sum \frac{\varphi_i}{n_i};$$

$$J = \alpha_1 l_1 = \alpha' l';$$

$$y_i = x_i \beta_i = x_i' \beta_i'; \quad h_i = s_i \alpha_i = s_i' \alpha_i';$$

α_i и β_i — углы вспомогательных лучей с осью.

По мере того как увеличение β линзы приближается к единице, величины P_i, W_i, h_i приближаются к нулю, выражения для S_{I} и S_{II} стремятся к нулю, а для S_{III} и S_{V} становятся неопределенными. Чтобы раскрыть неопределенность, необходимо вместо величин P_i и W_i ввести основные параметры $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$, вычисленные по тем же формулам, что и P_i и W_i, но в предположении, что $\alpha = 0$; $\alpha' = 1$.

Существуют соотношения (см. гл. III, стр. 254), связывающие P_i и W_i с $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$. Выразим α через α' и ε:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha'(1+\varepsilon); \\ \alpha' - \alpha &= -\varepsilon\alpha', \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.149)$$

откуда $h = f'(\alpha' - \alpha) = -\varepsilon\alpha' f'$.

Подставим выражения (II.149) в упомянутые соотношения. Получаем

$$\left.\begin{aligned} P = \alpha'^3 [&-(3+2\pi)\varepsilon + (4\mathbf{W} - 7 - 4\pi)\varepsilon^2 + \\ &+ (-\mathbf{P} + 4\mathbf{W} - 4 - 2\pi)\varepsilon^3]; \\ W = \alpha'^2 [&-(2+\pi)\varepsilon + (\mathbf{W} - 2 - \pi)\varepsilon^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.150)$$

Входной зрачок обычно находится далеко от линзы, поэтому с достаточной степенью точности можно считать $x = \infty$. Положим $\beta' = 1$ и $\alpha' = 1$. Тогда $y = f'$; $J = (1+\varepsilon) f'$; $\Phi = \frac{1}{f'}$.

Если принять во внимание малость величины ε и удержать в разложениях только член, содержащий ε в низшей степени, то получаем для одного компонента

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= (3+2\pi)\varepsilon^2 f'; \\ S_{\mathrm{II}} &= -(1+\pi)\varepsilon f'; \\ S_{\mathrm{III}} &= (1-2\mathbf{W})\varepsilon f'; \\ J^2 S_{\mathrm{IV}} &= f'\pi; \\ S_{\mathrm{V}} &= (\mathbf{W}-1) f'. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.151)$$

На основании этих формул можно сделать следующие выводы.

1. Сферическая аберрация пропорциональна второй степени ε и практически отсутствует.

2. Поскольку величина π у большинства тонких компонентов мало отличается от 0,65 и может считаться постоянной, кома зависит только от расстояния предмета до линзы и не зависит от формы линзы.

3. Астигматизм рассматриваемых систем пропорционален первой степени ε и зависит от формы линзы; при $\mathbf{W} = 0{,}5$ астигматизм компонента исправлен.

4. Дисторсия, вызываемая тонким компонентом, зависит от формы линзы и в первом приближении не зависит от ε, т. е. ей может быть сообщено любое значение даже при $\varepsilon = 0$.

3. Линза дает изображение при увеличении — 1. Тогда $s = -2f$; $\alpha_1 = 1{,}0$; $\alpha_3 = -1$. В этом случае имеем следующие выражения для P, W, $\sum \Delta\alpha\nu$, Π:

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{2}{(1-\nu)^2}\left[1+(2\nu+1)\alpha_2^2\right]; \\ W &= \frac{2}{1-\nu}(1+\nu)\alpha_2; \\ \sum \Delta\alpha\nu &= -2; \\ \sum \Pi &= -2\nu. \end{aligned}\right\} \qquad (II.152)$$

По формулам (II.143) получаем следующие выражения сумм:

$$\left.\begin{aligned} S_{I} &= \frac{4f'}{(1-\nu)^2}\left[1+(2\nu+1)\alpha_2^2\right]; \\ S_{II} &= -\frac{2x_1}{(1-\nu)^2}\left[1+(2\nu+1)\alpha_2^2\right] - \frac{2(2f'+x_1)}{1-\nu}(1+\nu)\alpha_2; \\ S_{III} &= -\frac{x_1^2}{2f'}P + \frac{x_1(x_1+2f')}{f'}W + \frac{(x_1-2f')^2}{f'}; \\ S_{IV} &= \frac{\nu}{f'}; \\ 4f'^2 S_{V} &= x_1^3 P - 3x_1^2(x_1+2f')W - 2x_1(x_1+2f')^2(3+\nu). \end{aligned}\right\} \qquad (II.153)$$

Выражения для сумм принимают особенно простой вид в том практически важном случае, когда $x_1 = 0$, т. е. когда отверстие линзы служит входным зрачком. Тогда

$$\left.\begin{aligned} S_{I} &= \frac{4f'}{(1-\nu)^2}\left[1+(2\nu+1)\alpha_2^2\right]; \\ S_{II} &= -\frac{4f'}{1-\nu}(1+\nu)\alpha_2; \\ S_{III} &= 4f'; \\ S_{IV} &= \frac{\nu}{f'}; \\ S_{V} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (II.154)$$

и для поперечных аберраций $\delta g'$ и $\delta G'$ по формуле (II.47) получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta g'}{2f'} &= \omega_1\left(\omega_1^2+\Omega_1^2\right)\frac{\left[1+(2\nu+1)\,\alpha_2^2\right]}{(1-\nu)^2} - \\ &- \left(3\omega_1^2+\Omega_1^2\right) w_1\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_2 + \omega_1 w_1^2(3+\nu); \\ \frac{\delta G'}{2f'} &= \Omega_1\left(\omega_1^2+\Omega_1^2\right)\frac{\left[1+(2\nu+1)\,\alpha_2^2\right]}{(1-\nu)^2} - \\ &- 2\omega_1\Omega_1 w_1\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_2 + \Omega_1 w_1^2(1+\nu).\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.155)}$$

Наилучшие результаты получаются при $\alpha_2 = 0$. Тогда кома исчезает, остаются некоторый минимум сферической аберрации, кривизна поля и астигматизм. Последние две аберрации не зависят от формы линзы, т. е. от α_2.

4. Случай, когда предмет на бесконечности ($s_1 = \infty$). Нужно исходить из формул (II.57) и (II.142), причем $\alpha_3 = 1$; $\alpha_1 = 0$. Получаем для сумм $S_{\mathrm{I}}, \ldots, S_{\mathrm{V}}$ следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= h_1\sum P = P; \\ S_{\mathrm{II}} &= yP + W; \\ S_{\mathrm{III}} &= y^2P + 2yW + 1; \\ S_{\mathrm{IV}} &= \nu; \\ S_{\mathrm{V}} &= y^3P + 3y^2W + y(3+\nu); \\ P &= \frac{1}{(1-\nu)^2}\left[1-(2+\nu)\,\alpha_2 + (2\nu+1)\,\alpha_2^2\right]; \\ W &= \frac{1}{1-\nu}\left[1-(1+\nu)\,\alpha_2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.156)}$$

Особый интерес представляет случай, когда $y_1 = 0$, т. е. зрачок входа совпадает с линзой. Тогда $S_{\mathrm{I}} = P$; $S_{\mathrm{II}} = W$; $S_{\mathrm{III}} = 1$; $S_{\mathrm{IV}} = \nu$; $S_{\mathrm{V}} = 0$. От формы линзы, т. е. от значения α_2, зависят только сферическая аберрация и кома. Остальные аберрации зависят только от фокусного расстояния линзы, ее отверстия и положения рассматриваемой точки в плоскости предмета.

Пример 1. Плоско-выпуклая линза, обращенная выпуклостью к предмету, снабженная диафрагмой, находящейся на расстоянии 50 *мм* впереди нее, дает изображение бесконечно удаленной точки, расположенной на линии, образующей угол — 10° с оптической осью. Фокусное расстояние линзы 100 *мм*, отверстие — 20 *мм*, показатель преломления $n = 1{,}5$. Определить аберрации линзы.

В этом случае поперечная сферическая аберрация определяется с большой точностью членом третьего порядка, так как члены

высших порядков очень малы. Из формулы (II.139) следует, что для плоско-выпуклой линзы, когда $r_2 = \infty$,

$$\alpha_2 = \nu = \frac{2}{3}.$$

Применяя формулы (II.47) и (II.156), находим

$$\left.\begin{aligned}
&-2\delta g'_p = \frac{m_1^3}{F'^2} P + \frac{3m_1^2}{F'} w_1 (yP + W) + m_1 w_1^2 \times \\
&\times (3S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}) + F' w_1^3 S_{\mathrm{V}} \left(\text{ввиду того, что } \omega_1 = \frac{m_1}{F'}\right); \\
&W = \frac{1}{1-\nu}[1 - (1+\nu)\alpha_2] = \\
&= \frac{1}{1-\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\right] = -\frac{1}{3}; \\
&P = \frac{1}{(1-\nu)^2}\left[1 - (2+\nu)\alpha_2 + (2\nu+1)\alpha_2^2\right] = \\
&= 9\left[1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{4}{3}+1\right)\frac{4}{9}\right] = \frac{7}{3} = 2{,}33.
\end{aligned}\right\} \quad (\text{II.157})$$

Вычисляем суммы S_{I}, S_{II}, . . ., S_{V}:

$$S_{\mathrm{I}} = P = \frac{7}{3}; \quad S_{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3} - \frac{1}{3} = -1{,}5;$$

$$S_{\mathrm{III}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{23}{12} = 1{,}92; \quad S_{\mathrm{IV}} = \frac{2}{3};$$

$$S_{\mathrm{V}} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2}{3}\right) = -2{,}37.$$

Для отдельных членов поперечной аберрации по формулам (II.157) находим

$$\delta g'_{сф.\,аб} = -\frac{m_1^3}{2F'^2} P = -\frac{10^3}{2\cdot 100^2} 2{,}33 = -0{,}116 \text{ мм};$$

$$\delta g'_{кома} = -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{F'} w_1 S_{\mathrm{II}} = \frac{3}{2}\frac{10^2}{100} 0{,}174\cdot 1{,}5 = +0{,}392 \text{ мм};$$

$$\delta g'_{мер.\,крив} = -\frac{m_1}{2} w_1^2 (3S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}) =$$

$$= -\frac{10}{2} 0{,}174^2 [(3\cdot 1{,}92) + 0{,}67] = -0{,}151\cdot 6{,}4 = -0{,}97 \text{ мм};$$

$$\delta g'_{дист} = -F' \frac{w_1^3}{2} S_{\mathrm{V}} = -0{,}265\cdot 2{,}37 = -0{,}63 \text{ мм}.$$

Интересно вычислить продольную величину астигматизма. Она равна поперечной, деленной на выходной апертурный угол системы, т. е. на $\omega_p' = \frac{m_1}{f'}$. Поперечная величина астигматизма

$$-\frac{m_1}{2} w_1^2 2S_{III} = -m_1 w_1^2 S_{III};$$

продольная величина

$$-F' w_1^2 S_{III} = -100 \cdot 0{,}174^2 \cdot 1{,}92 = -5{,}8 \text{ мм}.$$

Пример 2. Определить дисторсию плоско-выпуклого коллектива с фокусным расстоянием 100 *мм* из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ в случае, когда изображение точки находится на поверхности коллектива на расстоянии 15 *мм* от оси; увеличение в зрачках равно — 1.

Определяем y_1. Полагаем $\beta_1 = 1$; $x_1 = -2f$, так как увеличение в зрачках равно —1. Таким образом, $y_1 = x_1\beta_1 = -2f = -200$. Определяем β_2 и β_3. Первая поверхность плоская, следовательно, $\beta_2 = \frac{\beta_1}{n} = 0{,}667$; $\beta_3 = -\beta_1 = -1$, так как увеличение в зрачках равно —1.

Применяя формулу (II.148*), получаем

$$\delta g'_{дист} = -\frac{1}{2}\frac{15^3}{200 \cdot 100}\frac{(2{,}5 \cdot 0{,}667) + 1 - 1}{0{,}5} = -0{,}28 \text{ мм};$$

тригонометрический контроль дал —0,29 *мм*.

Влияние формы простой линзы на величины *P* и *W*. Оптические элементы всякой оптической системы, и в частности простой линзы, могут быть разделены на две группы: а) «внешние» элементы, как-то: фокусное расстояние, отверстие, увеличение при заданном положении предмета или изображения; б) «внутренние» элементы, определяющие конструкцию системы, а именно: радиусы кривизны отдельных поверхностей, толщины линз, расстояния между линзами, показатели преломления отдельных сред. В простой линзе к первой группе элементов относятся фокусное расстояние f и расстояние до предмета s, а также линейное увеличение $\beta = \frac{l'}{l_1} = \frac{s'}{s}$; ко второй — параметры, вполне определяющие конструктивные элементы системы, т. е. n и α_2. Действительно, по данному α_2 и известным из первой группы элементам f, α_1 и α_3 можно вычислить радиусы кривизны поверхностей линзы; толщина ее принимается равной нулю, и система вполне определена. При заданном значении f параметр α_2 влияет только на форму линзы. Рассмотрим зависимость параметров P и W от α_2.

Величина

$$W = \frac{\alpha_3 - 1}{1 - \nu}[\alpha_3 + 1 - (1 + \nu)\alpha_2],$$

определяемая по формуле на стр. 128, линейна относительно α_2 и может принять любое наперед заданное значение.

Она равна нулю при

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_3 + 1}{1 + \nu}.$$

Величина

$$P = \frac{\alpha_3 - 1}{(1 - \nu)^2} \left[\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1 - (2 + \nu)(\alpha_3 + 1)\alpha_2 + (2\nu + 1)\alpha_2^2\right]$$

второй степени относительно α_2 и может принять любые большие значения, но имеет некоторый минимум, ниже которого она не может опускаться. Значение этого минимума зависит от α_3 и от ν. Для практических приложений важно знать, когда величина P может обратиться в нуль, так как только в этих случаях сферическая аберрация может быть вполне устранена. Условие, при котором выражение для P имеет вещественные корни, может быть написано в виде

$$\left[(2 + \nu)(\alpha_3 + 1)\right]^2 - 4(\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1)(2\nu + 1) \geqslant 0 \qquad \text{(II.158)}$$

или

$$\nu(\nu - 4)(\alpha_3^2 + 1) + (4 + 2\nu)\alpha_3 \geqslant 0.$$

Это условие приводит к тому, что для каждого значения ν величина α_3 должна находиться между некоторыми определенными пределами. Неравенство (II.158) может быть переписано в виде

$$\alpha_3^2 - \frac{4 + 2\nu^2}{(4 - \nu)\nu}\alpha_3 + 1 \leqslant 0. \qquad \text{(II.159)}$$

Положим для краткости

$$\frac{2 + \nu^2}{(4 - \nu)\nu} = m,$$

где m — положительная величина.

Неравенство (II.159) принимает вид

$$\alpha_3^2 - 2m\alpha_3 + 1 \leqslant 0$$

и удовлетворяется, когда α_3 лежит между пределами

$$m - \sqrt{m^2 - 1} \text{ и } m + \sqrt{m^2 - 1}.$$

Результаты вычисления m для различных значений показателя преломления n даны в табл. II.3; там же указаны те пределы значений α_3, при которых P может обратиться в нуль.

Таблица показывает, что чем больше показатель, тем шире пределы изменения для α_3, т. е. те области для s и s', для которых может быть исправлена сферическая аберрация. Как правило, последняя может быть исправлена только при увеличениях, близких к единице, т. е. при слабом действии линзы.

Таблица II.3

n	m	$\sqrt{m^2-1}$	Нижний предел α_3	Верхний предел α_3
1,5	1,100	0,458	0,642	1,558
1,6	1,133	0,533	0,600	1,667
1,7	1,169	0,605	0,564	1,774

Апланатические точки преломляющей поверхности. В случае одной преломляющей поверхности сферическая аберрация и кома пропорциональны соответственно величинам S_{I} и S_{II}, значения которых в этом случае согласно формулам (II.57) таковы:

$$S_{\mathrm{I}} = h\left(\frac{\alpha'-\alpha}{\nu'-\nu}\right)^2(\alpha'\nu'-\alpha\nu);$$

$$S_{\mathrm{II}} = y\left(\frac{\alpha'-\alpha}{\nu'-\nu}\right)^2(\alpha'\nu'-\alpha\nu) - J\left(\frac{\alpha'-\alpha}{\nu'-\nu}\right)(\alpha'\nu'-\alpha\nu).$$

Обе суммы обращаются одновременно в нуль, когда один из множителей $\alpha'-\alpha$ или $\alpha'\nu'-\alpha\nu$ равен нулю. Первый случай не представляет интереса, так как луч проходит без преломления; во втором случае $\alpha'\nu' = \alpha\nu$. Положение точек, для которых имеет место условие одновременного уничтожения сферической аберрации и комы, может быть определено, если к полученному уравнению прибавить еще следующее уравнение преломления:

$$\alpha' n' - \alpha n = \frac{h}{r}(n'-n).$$

Исключая α' из первого уравнения и внося его значение во второе, получаем $\alpha = \frac{h}{r}\frac{n}{n+n'}$; $\alpha' = \frac{h}{r}\frac{n'}{n+n'}$. Расстояния сопряженных точек S и S', для которых соблюдены поставленные выше условия, равны $s = \frac{h}{\alpha}$; $s' = \frac{h}{\alpha'}$, или

$$s = r\frac{n+n'}{n};\quad s' = r\frac{n+n'}{n'}. \qquad \text{(II.160)}$$

Эти точки носят название апланатических точек сферической преломляющей поверхности. Они находят применение в расчетах объективов микроскопа.

Другие применения теории аберраций третьего порядка будут рассмотрены ниже в связи с расчетом различных оптических систем.

Афокальный мениск конечной толщины. До сих пор рассматривались аберрации бесконечно тонких линз. Однако бывают случаи, когда линзы, хотя и афокальны, обладают аберрацией

вследствие того, что при малых радиусах кривизны поверхностей даже небольшая толщина, нарушая равенство высот $h_1 = h_2$, вызывает появление отличного от нуля коэффициента сферической аберрации.

Обозначим через $[\delta g']$ угловую сферическую аберрацию менисковой афокальной линзы (рис. II.34) с радиусами r_1 и r_2, толщиной d и показателем преломления $n = \frac{1}{\nu}$ для луча, параллельного оси, пересекающего мениск на высоте m; выражая α_2 через r_1 и помня, что $h_2 = h_1 - d_1\alpha_2$, можно, пользуясь формулой (II.45) для случая двух поверхностей, получить

Рис. II.34

$$[\delta g'] = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{r_1}\right)^3 \frac{d}{r_1}\nu(1-\nu)^2. \qquad (II.161)$$

Аберрация положительна при любом значении r_1.

Мениск усугубляет сферическую аберрацию простой положительной линзы. Так как всякую линзу конечной толщины можно рассматривать как состоящую из мениска и бесконечно тонкой линзы, то из формулы (II.161) вытекает, что увеличение толщины линзы увеличивает значение коэффициента сферической аберрации.

Коррекционные мениски будут рассмотрены во второй части книги.

Аберрации высших порядков

Теория аберраций третьего порядка дает только первое приближение в расчете координат пересечения различных лучей с плоскостью изображения. Можно получить более точную картину расположения точек пересечения, если в разложении эйконала по степеням малых величин y, z, m' и M' взять следующие члены более высокого порядка (под m' и M' следует понимать координаты точек пересечения луча не с плоскостью выходного зрачка, а со сферой Шварцшильда, центр которой находится на оси в плоскости изображения, а вершина — в плоскости выходного зрачка). Такая работа была выполнена Кольшюттером [5] для аберраций пятого порядка. Число независимых аберраций пятого порядка равно девяти. Существует четырнадцать аберраций седьмого порядка и двадцать — девятого порядка и вообще $\frac{(t+1)(t+7)}{8}$ аберраций порядка t. Последнее число определяется так. На стр. 60 было показано, что эйконал для оптических систем, имеющих ось симметрии, является функцией только трех величин R, R_p и u, связанных с координатами луча следующим образом:

$$R = y^2 + z^2;\ R_p = m'^2 + M'^2;\ u = ym' + zM'.$$

Для вычисления аберраций t-го порядка нужно брать производные по m' и M' от всех членов порядка $t+1$, которые получаются в разложении эйконала N по степеням координат луча. Так как величины R, R_p и u, от которых зависят члены разложения эйконала, второго порядка малости по отношению к координатам луча y, z, m' и M', то надо найти такое число произведений степени $\frac{t+1}{2}$, которое можно составить из величин R, R_p и u; это число равно $\frac{(t+3)(t+5)}{8}$. Из этого числа нужно вычесть число членов, не зависящих ни от m', ни от M', так как последние аберраций не дают, как это видно из формулы (II.10). Таких членов, содержащих только $R=y^2+z^2$, может быть только один. Разность

$$\frac{(t+3)(t+5)}{8}-1=\frac{(t+1)(t+7)}{8}$$

и есть искомое число.

Рассмотрим особо *аберрации пятого порядка*. Разложение эйконала по степеням R, R_p и u дает следующие члены третьего порядка малости относительно переменных и шестого порядка относительно координат y, z, m' и M':

$$N^{(6)}=a_0R^3+a_1R^2R_p+a_2R^2u+a_3R_p^3+a_4R_p^2R+$$
$$+a_5R_p^2u+a_6u^3+a_7u^2R+a_8u^2R_p+a_9RR_pu.$$

Формулы (II.10) дают для величины поперечных аберраций пятого порядка (с точностью до постоянного множителя)

$$\left.\begin{aligned}
&\delta g' \text{ пропорциональное } \frac{y'-y}{r}=\frac{\partial N}{\partial m'}=\frac{\partial N}{\partial R_p}\frac{\partial R_p}{\partial m'}+\\
&\qquad+\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial m'}=\frac{\partial N}{\partial R_p}2m'+\frac{\partial N}{\partial u}y;\\
&\delta G' \text{ пропорциональное } \frac{z'-z}{r}=\frac{\partial N}{\partial M'}=\frac{\partial N}{\partial R_p}\frac{\partial N}{\partial M'}+\\
&\qquad+\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial M'}=\frac{\partial N}{\partial R_p}2M'+\frac{\partial N}{\partial u}z.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(II.162)}$$

Желая получить только общий вид аберраций пятого порядка, а не численные значения коэффициентов a_1, a_2, . . ., a_9, можно заменить такие величины, как y и z, соответственно величинами l и 0, им пропорциональными, после чего получить, обозначая через b_1, b_2, . . ., b_9 коэффициенты, соответственно пропорциональные a_1, a_2, . . ., a_9,

$$\delta g'=2b_1m'l^4+6b_3m'(m'^2+M'^2)^2+4b_4l^2m'(m'^2+M'^2)+$$
$$+4b_5lm'^2(m'^2+M'^2)+2b_8l^2m'^3+2b_9l^3m'^2+b_2l^5+$$
$$+b_5l(m'^2+M'^2)^2+3b_6l^3m'^2+2b_7l^4m'+$$
$$+2b_8l^2m'(m'^2+M'^2)+b_9l^3(m'^2+M'^2).$$

Аналогично для $\delta G'$ получаем

$$\delta G' = 2b_1 M' l^4 + 6b_3 M' (m'^2 + M'^2)^2 + 4b_4 l^2 M' (m'^2 + M'^2) +$$

$$+ 4b_5 M' m' l (m'^2 + M'^2) + 2b_8 l^2 m'^2 M' + 2b_9 l^3 m' M'.$$

Располагая члены выражений по возрастающим степеням l, получаем

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= 6b_3 m' (m'^2 + M'^2)^2 + b_5 (m'^2 + M'^2)(5m'^2 + M'^2) l + \\ &+ [4b_4 m' (m'^2 + M'^2) + 2b_8 m' (2m'^2 + M'^2)] l^2 + \\ &+ [b_9 (3m'^2 + M'^2) + 3b_6 m'^2] l^3 + 2(b_1 + b_7) m' l^4 + b_2 l^5; \\ \delta G' &= 6b_3 M' (m'^2 + M'^2)^2 + 4b_5 (m'^2 + M'^2) M' m' l + \\ &+ [4b_4 M' (m'^2 + M'^2) + 2b_8 m'^2 M'] l^2 + 2b_9 m' M' l^3 + 2b_1 M' l^4. \end{aligned}\right\} \quad (\text{II}.163)$$

При переходе от одной преломляющей поверхности к системе из нескольких преломляющих поверхностей общий вид уравнений не меняется, хотя сами коэффициенты не могут быть получены таким же простым способом, как для случая аберраций третьего порядка. Для характеристики аберраций пятого порядка удобно поступить так же, как и в случае аберраций третьего порядка: приравнивая последовательно все коэффициенты разложения, кроме одного, нулю, изучать распределение точек пересечения с плоскостью изображения лучей, соответствующих определенным кривым на выходном зрачке, например окружностям с центром на оси системы. С этой целью полагаем

$$m' = \rho \cos \theta; \; M' = \rho \sin \theta,$$

где ρ — радиус окружности, через которую проходят лучи, пересекая выходной зрачок; θ — угол между радиусом-вектором, идущим из центра зрачка на рассматриваемую точку пересечения, и меридиональной плоскостью.

Все девять аберраций родственны аберрациям третьего порядка, и это отражается в названиях аберраций.

1. *Сферическая аберрация пятого порядка* определяется уравнениями

$$\delta g' = 6b_3 \rho^5 \cos \theta; \; \delta G' = 6b_3 \rho^5 \sin \theta. \qquad (\text{II}.164)$$

При постоянном ρ получаются окружности. Если последовательные значения ρ образуют арифметическую прогрессию 0,0; 0,2; 0,4;. . .; 1, то соответствующие им окружности в плоскости изображения концентричны с очень быстро возрастающими диаметрами, которые соответственно пропорциональны величинам 0; 0,0003; 0,0100; 0,077; 0,328. Вследствие этого получается весьма быстрое рассеяние энергии по мере удаления от центра изображения.

2. *Кома высшего порядка* по отверстию определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\delta g' &= b_5(m'^2+M'^2)(5m'^2+M'^2)\,l = b_5\rho^4(3+2\cos 2\theta)\,l;\\ \delta G' &= 4b_5(m'^2+M'^2)\,m'M'l = b_5\rho^4(2\sin 2\theta)\,l\end{aligned}\right\}\quad(\text{II.165})$$

и, как кома третьего порядка, дает окружности, но центры их в меридиональной плоскости удалены от точки пересечения главного луча на расстояния, пропорциональные не второй, а четвертой степени радиуса окружности ρ. Угол огибающих, также прямых, с осью равен 41,8°. Картина напоминает кому третьего порядка, но рассеивание лучей гораздо сильнее по мере удаления от гауссова изображения.

3. *Сферическая аберрация высшего порядка* для каждой точки изображения дает точно такую же картину, как сферическая аберрация третьего порядка, но отличается от аберрации третьего порядка тем, что в точке с координатой $l=0$ она отсутствует и быстро растет пропорционально квадрату l, как это видно из уравнений

$$\left.\begin{aligned}\delta g' &= 4b_4m'(m'^2+M'^2)\,l^2;\\ \delta G' &= 4b_4M'(m'^2+M'^2)\,l^2.\end{aligned}\right\}\quad(\text{II.166})$$

Рис. II.35

4. *Кривизна высшего порядка* также зависит от l^2, но кривые рассеяния не окружности, как в случае аберраций третьего порядка, а крылоподобные кривые (рис. II.35), которые легко могут быть получены из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\delta g' &= 2b_8m'(2m'^2+M'^2)\,l^2 = 2b_8\rho^3\cos\theta\,(1+\cos^2\theta)\,l^2;\\ \delta G' &= 2b_8m'm'M'l^2 = 2b_8\rho^3\cos^2\theta\sin\theta l^2.\end{aligned}\right\}\quad(\text{II.167})$$

Если придавать θ все значения от 0 до 2π, то точка пересечения луча пробегает всю кривую (при положительном b_8) сначала по верхней петле, потом описывает зеркальное отражение верхней петли от горизонтальной оси. Кроме формы фигур, соответствующих постоянному значению ρ, имеется еще одно существенное отличие рассматриваемой аберрации от кривизны третьего порядка: быстрое рассеяние света по мере удаления от центра вместо равномерного распределения.

5. *Кома высшего порядка по полю*, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\delta g' &= b_9(3m'^2+M'^2)\,l^3;\\ \delta G' &= 2b_9m'M'l^3,\end{aligned}\right\}\quad(\text{II.168})$$

отличается от комы третьего порядка только тем, что размеры картины, даваемой ею, зависят от куба, а не от первой степени l. При заданном l боковая кома пятого порядка добавляет свой эффект к коме третьего порядка, не меняя вида и распределения кривых, а меняя только размеры.

6. *Дисторсия высшего порядка* (по отверстию) определяется уравнениями

$$\delta g' = 3b_6 m'^2 l^3; \ \delta G' = 0 \qquad \text{(II.169)}$$

и дает прямую линию, длина которой пропорциональна квадрату m'.

7. *Боковая кривизна и астигматизм высшего порядка*, определяемые уравнениями

$$\delta g' = 2(b_1 + b_7) m' l^4; \ \delta G' = 2b_1 M' l^4, \qquad \text{(II.170)}$$

отличаются от кривизны и астигматизма третьего порядка только тем, что они зависят не от квадрата l, а от l^4; характер картины при постоянном l одинаков для обеих аберраций.

8. *Дисторсия высшего порядка по наклону* («боковая»), определяемая уравнениями

$$\delta g' = b_2 l^5; \ \delta G' = 0, \qquad \text{(II.171)}$$

отличается от дисторсии третьего порядка только тем, что она пропорциональна пятой степени l.

Следует еще раз обратить внимание на то обстоятельство, что в действительности перечисленные аберрации в чистом виде не встречаются; имеет место общее уравнение (II.163), к которому нужно прибавить выражения аберраций третьего порядка и аберраций более высоких порядков; последние всегда более или менее искажают своим присутствием влияние аберраций третьего и пятого порядков. Истинные кривые распределения лучей в плоскости изображения имеют на самом деле очень сложный вид, о котором не могут дать понятие кривые отдельных аберраций; этот вид очень быстро меняется с изменением положения точки (l) и отверстия системы (ρ).

Коэффициенты b_1, b_2, . . ., b_9 аберраций пятого порядка так сложны, что их нет смысла вычислять по выведенным для них формулам [5]. Такое вычисление тем более бесполезно в тех случаях, когда величины аберраций пятого порядка становятся значительными, так как при этом неизменно обнаруживается также и влияние аберраций более высокого порядка, вычисление которых с помощью формул разложения практически невозможно.

Помимо диссертации Кольшюттера [5] формулы для вычисления сферической аберрации пятого порядка можно найти в книге Рора [6].

Г. Д. Рабинович [7] предложил более удобные формулы для вычисления сферической аберрации и отступления от отношения синусов. Приводим эти формулы без доказательства.

Положим

$$\Delta s' = az'^2 + bz'^4; \quad \eta = a_1 z'^2 + b_1 z'^4,$$

где

$$z' = \sin u' \left(\frac{\alpha' \sin u}{\alpha \sin u'}\right)^{3/2} = \sin u' \left(\frac{h_\kappa s_1 \sin u_1}{h_1 s' \sin u'}\right)^{3/2} \approx \sin u';$$

$$\Delta s'_{\mathrm{III}} = az'^2; \quad \Delta s'_{\mathrm{V}} = bz'^4; \quad \eta_{\mathrm{III}} = a_1 z'^2; \quad \eta_{\mathrm{V}} = b_1 z'^4;$$

$$\Delta s' = \Delta s'_{\mathrm{III}} + \Delta s'_{\mathrm{V}} + \cdots; \quad \eta = \eta_{\mathrm{III}} + \eta_{\mathrm{V}} + \cdots$$

Вводим вспомогательные величины

$$\omega_\nu = \frac{1}{n_\nu} \frac{\Delta\alpha_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}}; \quad \omega'_\nu = \frac{1}{n_{\nu+1}} \frac{\Delta\alpha_\nu}{\Delta \frac{1}{n_\nu}},$$

и уже многократно применяемые величины

$$W = \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\alpha}{n};$$

$$P = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}}\right)^2 \Delta \frac{\alpha}{n},$$

и, кроме того,

$$\tau_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha^2_{\nu+1} + \alpha^2_\nu + \omega'^2_\nu + \omega^2_\nu\right) = \alpha^2_\nu + \omega^2_\nu + \mathbf{W}_\nu;$$

$$B_\nu = -\frac{2}{J}\left(\frac{\Delta\beta_\nu}{\Delta\alpha_\nu} \sum_{i=1}^{i=\nu} h_i P_i - \sum_{i=1}^{i=\nu} h_i P_i \frac{\Delta\beta_i}{\Delta\alpha_i}\right),$$

где

$$J = n\alpha\beta(x - s);$$

$$\overline{C}_\nu = -\frac{2}{3}\left(\alpha^2_{\nu+1} \sum_{i=1}^{i=\nu} h_i P_i - \alpha^2_\nu \sum_{i=1}^{i=\nu-1} h_i P_i\right);$$

$$\overline{C}_1 = -\frac{2}{3}\alpha^2_2 h_1 P_1.$$

Окончательно имеем для сферической аберрации и отступления от отношения синусов третьего и пятого порядков следующие выражения:

$$\Delta S'_{\mathrm{III}} = -\frac{1}{2}\frac{z'^2}{n'\alpha'^4} \sum_{\nu=1}^{\nu=k} h_\nu P_\nu;$$

$$\eta_{\mathrm{III}} = -\frac{1}{2}\frac{z'^2}{\alpha'^2 J} \sum_{\nu=1}^{\nu=k} h_\nu P_\nu \frac{\Delta\beta_\nu}{\Delta\alpha_\nu};$$

$$\Delta s'_{\mathrm{V}} = -\frac{3}{8}\frac{z'^4}{n'\alpha'^6} \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \left[h_\nu P_\nu (\tau_\nu + B_\nu) + \overline{C}_\nu\right];$$

$$\eta_V = -\frac{3}{8}\frac{z'^4}{\alpha'^4} J \sum_{\nu=1}^{\nu=k} [h_\nu P_\nu (\tau_\nu + B_\nu) + \overline{C}_\nu] \frac{\Delta\beta_\nu}{\Delta\alpha_\nu}.$$

Можно еще написать $\Delta s'_V$ в виде

$$\Delta s'_V = -\frac{3}{8}\frac{z'^4}{n'\alpha'^6} \sum_{\nu=1}^{\nu=k} [h_\nu P_\nu (\tau_\nu + \beta_\nu)] - \frac{1}{2} z'^2 \Delta s'_{III}.$$

Приближенные способы вычисления аберраций пятого и более высоких порядков

Сферическая аберрация высших порядков тонких склеенных систем. При расчете оптических систем необходимо учесть влияние аберраций высших порядков. В настоящее время (1963 г.) рядом авторов такие формулы выведены, в частности М. Герцбергером [8] и Д. Ю. Гальперном в его докторской диссертации. Однако чрезвычайная громоздкость формул для расчета коэффициентов пятого порядка (а тем более коэффициентов более высокого порядка) делает их практически неприменимыми. Кроме того, в тех случаях, когда аберрации пятого порядка велики и должны быть приняты во внимание, то велики и аберрации более высоких порядков; поэтому знание коэффициентов аберраций пятого порядка без знания остальных коэффициентов приносит мало пользы.

При таких обстоятельствах естественно искать более простые пути расчета приближенных значений коэффициентов аберраций высших порядков. Одна из таких попыток описана в первом издании этой книги [2], стр. 133—140. Здесь приведем без доказательства одну из полученных формул, пригодную для сравнительно простых систем типа двойных склеенных объективов, а именно:

$$\Delta s'_{в.\,п} = \frac{3}{40} \sin^4 u'_p \sum r_к q_к^6 \left(\frac{1}{n'^5_к} - \frac{1}{n^5_к}\right), \qquad (II.172)$$

где $\Delta s'_{в.\,п}$ — та доля продольной сферической аберрации, которая вызывается членом пятого порядка; $q_к = -\dfrac{\alpha'_к - \alpha_к}{\dfrac{1}{n'_к} - \dfrac{1}{n_к}}$ — нуль-инвариант поверхности $к$ $(\alpha'_p = 1{,}0)$.

Пример 1. Возьмем объектив из двух склеенных линз со следующими данными:

$$r_1 = +43{,}3; \quad r_2 = -43{,}9; \quad r_3 = -2196{,}0; \qquad d_1 = 5; \quad n_2 = 1{,}5163; \quad d_2 = 2; \quad n_3 = 1{,}6169;$$

$$F = 100; \quad s_1 = \infty; \quad q_2 = 4{,}51.$$

Вычислить сферическую аберрацию для луча с высотой $h = 14{,}14$.

Влияние первой и третьей поверхностей незначительно, и им можно пренебречь.

Пользуясь формулой (II.172), можно вычислить

$$\sin^4 u'_p = 0{,}000400; \quad n_к^5 = 8{,}015;$$

$$q_к^6 = 8415; \quad n_к'^5 = 11{,}052;$$

$$\Delta s'_{в.\,n} = 0{,}38.$$

Тригонометрический расчет дает для $\Delta s'_{в\ n}$ 0,43.

Пример 2. Объектив из двух склеенных линз, значительно переисправленный, с очень большими высшими порядками, имеет следующие данные:

$$r_1 = +31{,}5; \quad d_1 = 2{,}0; \quad n_2 = 1{,}6169;$$

$$r_2 = +16{,}2; \quad d_2 = 5{,}0; \quad n_3 = 1{,}5163;$$

$$r_3 = -135{,}4;$$

$$F = 100; \quad s_1 = \infty; \quad q_2 = 7{,}75.$$

Вычислить высшие порядки аберраций для двух лучей с высотами $h_1 = 10$ и $h_1 = 14{,}1$. Как и в предыдущем случае, влияние первой и последней поверхностей ничтожно.

Пользуясь формулой (II.172), вычисляем для $h = 10$

$$\sin^4 u'_p = 0{,}0001; \quad n_к^5 = 11{,}052;$$

$$q_к^6 = 216666; \quad n_к'^5 = 8{,}015;$$

$$\Delta s'_{в.\,n} = 0{,}90;$$

для $h_1 = 14{,}1$

$$\Delta s'_{в.\,n} = 3{,}6.$$

Аберрация третьего порядка равна 0,89 для первого луча и 1,79 — для второго.

Суммарная аберрация равна соответственно 1,8 и 5,4; точный тригонометрический расчет дает 1,98 и 8,7. В первом издании этой книги [2] при решении приведенных здесь примеров были использованы графики, что дало результаты, более близкие к тригонометрическим, а именно: для первого луча $\Delta s'_{в.\,n} = 1{,}11$; суммарная аберрация 2,00; для второго луча $\Delta s'_{в.\,n} = 6{,}5$; суммарная аберрация 8,3.

Сферическая аберрация высших порядков систем значительной длины. Одна из основных причин появления аберраций высших порядков (особенно важная в оптических системах с большими расстояниями между линзами) заключается в том, что вследствие наличия аберраций третьего порядка лучи проходят с большим

отклонением от своего идеального пути, определяемого законами гауссовой оптики. Пусть (рис. II.36) $ABCD$ — луч, рассчитанный по правилам параксиальной оптики; $ABC'D_1$ — реальный луч. Вследствие сферической аберрации линзы L_1 он направляется по BC', пересекает линзу L_2 значительно ниже, чем следовало бы, если бы не было аберрации, и после преломления линзой L_2 пересекает ось в точке D_1. При вычислении аберраций третьего порядка предполагается, что реальный луч пересекает линзу L_2 на расстоянии L_2C от оси; фактически луч пересекает ее в другом месте. Это изменение пути вызывает отклонение луча в дальнейшем его следовании, не принятое в расчет в теории аберраций третьего

Рис. II.36

порядка, и последствия этого изменения вызывают аберрации пятого (и более высокого) порядка. Учет таких аберраций представляет большие затруднения.

Интерполяционный метод вычисления коэффициентов аберраций высших порядков. Любая аберрация, например сферическая, кома, астигматизм, может быть разложена в ряд по степеням малой величины, принятой в качестве переменной, например величины угла луча с осью, или отношения высоты пересечения луча с входным зрачком к фокусному расстоянию системы, или (наиболее общий случай) синуса угла с осью луча в пространстве изображения, или угла поля зрения и т. д. Коэффициенты этих разложений определяются на основании значений изучаемой аберрации, полученных из результатов тригонометрического расчета хода лучей через оптическую систему для нескольких значений переменной.

Пример. Определим коэффициенты сферической аберрации для объектива. Продольную сферическую аберрацию для объектива можно написать в таком виде:

$$\delta s' = a \sin^2 u' + b \sin^4 u' + c \sin^6 u'. \qquad \text{(II.173)}$$

В большинстве случаев можно ограничиваться первыми тремя членами разложения. Для определения трех неизвестных коэффициентов a, b и c нужно иметь расчет трех лучей для различных значений u' — угла луча с осью после выхода из системы. Если известна первая сумма Зейделя для сферической аберрации третьего порядка, достаточно знать аберрации двух лучей. Пред-

положим, что рассчитаны координаты трех лучей, для которых получены значения углов с осью u_1', u_2', u_3' и аберрации $\delta s_1'$, $\delta s_2'$, $\delta s_3'$. Имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a\sin^2 u_1' + b\sin^4 u_1' + c\sin^6 u_1' &= \delta s_1'; \\ a\sin^2 u_2' + b\sin^4 u_2' + c\sin^6 u_2' &= \delta s_2'; \\ a\sin^2 u_3' + b\sin^4 u_3' + c\sin^6 u_3' &= \delta s_3', \end{aligned}\right\} \qquad (\text{II.174})$$

из которых нетрудно определить коэффициенты a, b, c. Для этого можно подобрать начальные данные s_1 и u_1 для трех лучей таким образом, чтобы отношения $\frac{\sin^2 u_1'}{\sin^2 u_3'}$ и $\frac{\sin^2 u_2'}{\sin^2 u_3'}$ были примерно равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, для чего полагают $\frac{\sin^2 u_1}{\sin^2 u_3} = \frac{1}{3}$ и $\frac{\sin^2 u_2}{\sin^2 u_3} = \frac{2}{3}$, где u_1, u_2, u_3 — углы с осью лучей в пространстве предмета. Начертив кривую $\delta s'$ как функцию от $\sin^2 u'$, нетрудно найти графически значения $\delta s'$, соответствующие тем u', которые в точности удовлетворяют поставленному условию.

Введем вспомогательные выражения

$$\bar{A} = a;$$

$$\bar{B} = b\sin^2 u_3';$$

$$\bar{C} = c\sin^4 u_3'.$$

Подставим их в уравнения (II.174):

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}\sin^2 u_1' + \frac{\bar{B}}{\sin^2 u_3'}\sin^4 u_1' + \frac{\bar{C}}{\sin^4 u_3'}\sin^6 u_1' &= \delta s_1'; \\ \bar{A}\sin^2 u_2' + \frac{\bar{B}}{\sin^2 u_3'}\sin^4 u_2' + \frac{\bar{C}}{\sin^4 u_3'}\sin^6 u_2' &= \delta s_2'; \\ \bar{A}\sin^2 u_3' + \frac{\bar{B}}{\sin^2 u_3'}\sin^4 u_3' + \frac{\bar{C}}{\sin^4 u_3'}\sin^6 u_3' &= \delta s_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{II.174*})$$

Деля все три уравнения (II.174*) на $\sin^2 u_3'$ и полагая, что

$$\frac{\delta s_1'}{\sin^2 u_3'} = y_1; \quad \frac{\delta s_2'}{\sin^2 u_3'} = y_2; \quad \frac{\delta s_3'}{\sin^2 u_3'} = y_3,$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}\bar{A} + \frac{1}{9}\bar{B} + \frac{1}{27}\bar{C} &= y_1; \\ \frac{2}{3}\bar{A} + \frac{4}{9}\bar{B} + \frac{8}{27}\bar{C} &= y_2; \\ \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} &= y_3. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, находим

$$\left.\begin{aligned}\overline{C} &= \frac{9}{2}y_3 - \frac{27}{2}y_2 + \frac{27}{2}y_1;\\ \overline{B} &= -\frac{9}{2}y_3 + 18y_2 - \frac{45}{2}y_1;\\ \overline{A} &= y_3 - \frac{9}{2}y_2 + 9y_1,\end{aligned}\right\}$$

откуда легко получить

$$\left.\begin{aligned}c &= \frac{\frac{9}{2}y_3 - \frac{27}{2}y_2 + \frac{27}{2}y_1}{\sin^4 u_3'};\\ b &= \frac{-\frac{9}{2}y_3 + 18y_2 - \frac{45}{2}y_1}{\sin^2 u_3'};\\ a &= y_3 - \frac{9}{2}y_2 + 9y_1.\end{aligned}\right\} \qquad (\text{II}.175)$$

Необходимость составить интерполяционную формулу для сферической аберрации встречается при оценке качества изображения, например при исследовании волновой аберрации системы. Примеры такого применения см. в гл. X.

Аберрации высшего порядка для точек, не лежащих на оси системы. Значительно бо́льшие трудности представляет решение вопроса об оценке качества изображения внеосевой точки. Один из возможных способов исследования опирается на изучение аналитического выражения волновой аберрации для рассматриваемой точки, а для вычисления этого выражения необходимо составить интерполяционную формулу для поперечных отклонений $\delta g'$ и $\delta G'$, учитывая и члены высших порядков.

С этой целью пишут выражения для аберраций $\delta g'$ и $\delta G'$ в виде разложения в ряд по степеням величин l_1, m_p' и M_p'; вид этого разложения известен из теории аберраций третьего и пятого порядков. При необходимости можно продолжать разложение и дальше, пользуясь тем же методом, но вычисления при этом очень усложняются. Коэффициенты аберраций третьего порядка могут быть вычислены непосредственно по формулам Зейделя. Коэффициенты аберраций пятого порядка могут быть вычислены на основании результатов тригонометрического расчета хода лучей через систему, если предположить, что аберрации точно определяются членами третьего и пятого порядка и что все члены высших порядков в разложении, начиная с седьмого порядка, равны нулю. Так как число коэффициентов пятого порядка равно девяти, то нужно рассчитать ход по крайней мере девяти лучей, в том числе нескольких косых; в действительности необходимо знать аберрации большего числа лучей, чтобы проверить возмож-

ность ограничения членами пятого порядка и вообще иметь возможность контроля.

Не будем останавливаться более подробно на технике вычисления коэффициентов аберраций высших порядков. Этот вопрос сложен и с принципиальной стороны вследствие того, что сходимость рядов сомнительна, и с практической, так как вычисление большого числа членов — к тому же неопределенного — представляет значительные трудности; кроме того, результаты таких вычислений обычно не представляют особого интереса.

Исключением является случай, когда по известным из тригонометрического расчета поперечным аберрациям требуется найти волновые аберрации, чтобы на основании дифракционной теории изображения вычислить распределение энергии в картине изображения объекта. В этом случае, по-видимому, более эффективны графические методы [9, 10].

Сложение аберраций

При расчете оптических систем часто представляется целесообразным разделить систему на две или больше частей и изучить их в отдельности. Число свободных параметров в каждой части меньше, чем во всей системе, и исследование всех частей в отдельности может быть выполнено с гораздо меньшей затратой труда и времени, чем исследование всей системы в целом. Однако остается еще решить задачу наилучшего подбора каждой части таким образом, чтобы аберрации всей системы получили надлежащие значения. Для этого нужно уметь «складывать аберрации», т. е. вычислить аберрацию всей системы, зная аберрации каждого компонента в отдельности.

В теории аберраций третьего порядка доказывается, что поперечные аберрации, вызываемые каждой поверхностью, с помощью закона Лагранжа—Гельмгольца могут быть спроектированы в любую плоскость изображений и сложены. Это свойство может быть перенесено на аберрации более высокого порядка.

В первом приближении можно считать, что поперечные аберрации, умноженные на $n'\alpha'$ (т. е. в сущности превращенные в разности оптических путей), складываются. При более точных вычислениях следует ввести поправки. Общего правила для вычисления поправок нельзя указать. Вид поправки зависит от способа, с помощью которого аберрации получены. Укажем несколько формул, выведенных Д. Ю. Гальперном [11, 12], позволяющих решать ряд задач и среди них задачу сложения аберраций.

Из эйконала Шварцшильда [13] легко выводится формула

$$\frac{\partial \delta g'}{\partial y_0'} = \frac{-\partial\left(\dfrac{\delta g'}{s'-x'} + \sin u' - \dfrac{\sin u}{\beta \dfrac{n'}{n}}\right)}{\partial\left(\dfrac{\delta g'}{s'-x'} + \sin u'\right)}, \qquad \text{(II.176)}$$

где $\delta g' = y' - \beta y$ — поперечная аберрация в плоскости с абсциссой s'; x' — абсцисса выходного зрачка; u и u' — углы луча с осью до и после преломления через оптическую систему.

Знак частной производной ∂ означает, что производная взята только по y_0'; постоянной остается, строго говоря, координата $m' = y' + (s' - x') \sin u'$ на сфере Шварцшильда.

С достаточным приближением можно положить, что $\overline{m'} = m'$ — координата точки пересечения луча с плоскостью выходного зрачка, тогда $\delta g' = 0$.

Формула (II.176) может быть упрощена, оставаясь точной, если $x' = \infty$.

Рис. II.37

В этом случае имеем совершенно точно

$$\frac{\partial \delta g'}{\partial y_0'} = \frac{-\partial (\sin u' - \tau \sin u)}{\partial \sin u'}, \quad (\text{II.176*})$$

где

$$\tau = \frac{n}{n'\beta}.$$

Обращение x' в бесконечность следует понимать таким образом. Положение сферы Шварцшильда, на которой отсчитываются координаты m', $\overline{M}'$, может быть принято произвольно; вовсе не обязательно считать ее соприкасающейся с плоскостью выходного зрачка. Эту сферу можно рассматривать как некоторую координатную поверхность; удобно считать ее находящейся на бесконечности, так как она в этом случае становится плоской и перпендикулярной оси. При этом лучи, соответствующие одному и тому же значению m', параллельны друг другу, т. е. значения углов u' для обоих лучей одинаковы. Если начертить кривую функции $\delta_s = (\sin u' - \tau \sin u)$ при аргументе $\sin u'$ (рис. II.37), то угловой коэффициент касательной δ_s равен производной от $\delta g'$ по y_0' при постоянном u'. Другими словами, зная аберрацию $\delta g'$, соответствующую расстоянию параксиального изображения точки от оси, можно получить значение этой аберрации при другом, но близком значении $y_0' + dy_0'$ (при том же апертурном угле u'). Для тех значений u', при которых касательная параллельна оси $\sin u'$, напимер u_0', аберрация $\delta g'$ при изменении y_0' не меняется. Если аберрация $\delta g'$ равна нулю, то она остается равной нулю и для соседних точек изображения.

Формула (II.176) позволяет также вычислить аберрацию системы двух компонентов, если для каждого из них известны его аберрации. Тригонометрический расчет, выполненный для каждого компонента в отдельности, дает значения аберраций для различного положения точек y_0' промежуточной плоскости. Переход от одной точки к другой может быть выполнен с помощью формулы (II.176).

Эта же формула может служить для решения задачи вычисления аберрации системы при обратном ходе лучей. Применение ее, конечно, возможно лишь при условии, что рассматриваемые пучки лучей в том и другом ходе настолько близки друг к другу, что координаты пересечения лучей с плоскостями предметов и изображения очень мало отличаются друг от друга.

Более подробно этот вопрос изложен в работе [13].

2. ХРОМАТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ

Ход лучей через оптическую систему зависит от показателей преломления сред, через которые луч проходит; показатели, в свою очередь, зависят от длины волны; поэтому изображения одного и того же объекта, например светящейся точки, даваемые лучами различной длины волны, не совпадают друг с другом. Так как плоскость установки в большинстве случаев является общей, то эти изображения создают размытую картину; на краях светлых полей появляются цветные каймы. Это явление носит название хроматической аберрации. Она в значительной степени портит качество изображения, ухудшает разрешающую силу прибора, и ее исправление требует большого внимания со стороны вычислителей, особенно для систем длиннофокусных или обладающих большой апертурой (астрономические объективы, объективы микроскопов). Для решения некоторых задач, связанных с исправлением хроматической аберраций систем, необходимо знать зависимость показателя преломления от длины волны.

Зависимость показателя преломления от длины волны

Существует ряд теоретических и эмпирических формул, связывающих значение показателя преломления n с длиной волны λ. Это формула Коши вида

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4},$$

более современная формула Зелльмейера

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{D_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

где λ_i — значения длин волн, соответствующих полосам поглощения, а D_i — постоянные коэффициенты. Однако формулы Коши и Зелльмейера громоздки для практических расчетов. Для последних более удобна формула Корню

$$n = n_0 + \frac{c}{\lambda - \lambda_0},$$

в которой n_0, c и λ_0 — постоянные, подбираемые так, чтобы функция наилучшим образом представляла значения показателей. Обычно вычисляют n_0, c и λ_0 из условия, что для трех значений λ — λ_1, λ_2, λ_3 — функция $f(\lambda)$ принимает три заданных значения n_1, n_2, n_3. Легко получить для λ_0 значение

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_3 - m\lambda_2}{1 - m},$$

где

$$m = \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_1} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Если принять, как это часто делается, $\lambda_3 = 656{,}3$; $\lambda_2 = 589{,}3$; $\lambda_1 = 486{,}1$, имеем $m = +p_D 1{,}6491$, где $p_D = \frac{n_F - n_D}{n_F - n_C}$.

Тогда

$$\lambda_0 = \frac{656{,}3 - 589{,}3m}{1 - m}.$$

По известному значению λ_0 легко получить c и n_0. Значения λ_0 можно получить по данным p_D (табл. II.4).

Таблица II.4

p_D	λ_0		p_D	λ_0	
0,698	145,7		710	197,1	
		9,5			7,4
700	155,2		712	204,5	
		9,1			7,2
702	164,3		714	211,7	
		8,8			6,9
704	173,1		716	218,6	
		8,3			6,7
706	181,4		718	225,3	
		8,0			6,4
708	189,4		720	231,7	
		7,7			6,1
710	197,1		722	237,8	

Эта таблица позволяет по заданному p_D найти λ_0 интерполяцией; зная λ_0, легко найти c и n_0.

Гартманн усложнил формулу Корню, придав ей вид

$$n = n_0 + \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha}.$$

Добавочный коэффициент α позволяет несколько расширить область применения формулы, но настолько усложняет вычисления, что формула Гартманна едва ли может получить практическое применение.

Наиболее рациональный способ выразить показатель преломления как функцию от длины волны состоит в следующем. Напишем n в виде

$$n = n_0 + \frac{c}{\lambda - \lambda_0} + R(\lambda),$$

где $R(\lambda)$ — поправочная функция, которая не превышает нескольких десятков единиц пятого знака даже в широкой области 330—900 *нм*.

В табл. II.5 приведены значения коэффициентов λ_0, $\lg c$, n_0 для большого числа сортов стекол довоенного изготовления. Для первой группы (до ТФ5 включительно) константы λ_0, c и n_0 вычислены по значениям показателей преломления для длин волн 339,934; 545,561; 863,017 *нм*; для второй группы — для длин волн 365, 546 и 656 *нм*.

В табл. II.6 даны значения $10^5 R(\lambda)$ для длин волн 350; 400; 500; 600; 700; 800; 900 и 950 *нм* для первой группы стекол и для длин волн 350; 400; 500; 600 и 700 *нм* для второй группы.

Однако табл. II.5 и II.6 могут быть применены лишь в тех случаях, когда нужно вычислить показатель преломления для одного из приведенных сортов стекла.

В общем случае удобно пользоваться табл. II.7, содержащей значения $p_\lambda = \frac{n_\lambda - n_F}{n_F - n_C}$ [14].

Если обозначить буквой p_λ частную относительную дисперсию оптического стекла, т. е. отношение $\frac{n_\lambda - n_F}{n_F - n_C}$, то величина p_λ может рассматриваться как функция одного аргумента λ, причем эта функция вполне определена, если только известно одно ее частное значение, например p_D. Другими словами, если для какого-нибудь стекла величина p_D равна известному числу, то, не зная ничего больше относительно этого стекла, можно наперед определить для него величину p_λ при любом λ.

Чтобы проверить правильность этого утверждения или, лучше, степень точности, с которой оно выполняется, можно поступить следующим образом: построив декартову систему координат, отложить по оси абсцисс величины p_D, а по оси ординат — p_h, $p_{G'}$ и $p_{A'}$. Все эти величины можно взять из каталога заводов, изготовляющих оптические стекла. Каждому стеклу соответствуют три точки: для h, для G' и для A'.

Если бы указанная закономерность выполнялась совершенно точно, все точки уложились бы на три кривые, представляющие собой зависимость p_h, $p_{G'}$ и $p_{A'}$ от p_D. Таким образом,

Таблица II.5

Сорт стекла	n_D	ν	λ_0	$\lg c$	n_0
К3	1,5100	63,4	157,77	1,89286	1,49199
К8	1,5163	64,1	154,46	1,90093	1,49810
К9	1,5181	58,9	167,64	1,90376	1,49991
БК4	1,5302	60,5	164,51	1,91198	1,51057
БК6 (5)	1,5399	59,7	166,05	1,92219	1,52032
БК8	1,5467	62,8	159,01	1,92491	1,52780
БК9	1,5646	55,8	174,25	1,95289	1,54391
БК10	1,5688	56,0	172,62	1,95544	1,54788
КФ1	1,5145	54,6	174,24	1,92658	1,49626
КФ3	1,5262	51,0	179,99	1,94460	1,50457
БФ6	1,5696	49,4	185,74	1,97550	1,54484
БФ5	1,5484	52,4	181,06	1,95041	1,52722
БФ7	1,5795	53,9	176,92	1,96655	1,55687
БФ11	1,6222	53,1	178,37	2,00344	1,59878
БФ12	1,6259	39,1	203,29	2,07475	1,59513
БФ13	1,6395	48,3	187,89	2,03684	1,61287
ЛФ2	1,5480	45,9	190,60	1,98383	1,52385
ЛФ5	1,5749	41,3	198,27	2,02924	1,54748
ЛФ7	1,5783	41,7	197,90	2,02819	1,55050
ТК1	1,5638	60,8	163,24	1,93888	1,54483
ТК2	1,5724	57,5	170,00	1,95256	1,55134
ТК3	1,5891	61,2	162,08	1,95081	1,56927
ТК5	1,6126	58,6	166,75	1,97966	1,59047
ТК6	1,6126	58,3	169,00	1,97631	1,59003
ТК7	1,6137	56,3	171,31	1,98671	1,59137
ТК8	1,6140	55,1	173,91	1,98694	1,59032
ТК10	1,6227	56,9	171,40	1,98971	1,60003
Ф1	1,6128	36,9	205,80	2,08510	1,58129

Сорт стекла	n_D	ν	λ_0	lg c	n_0
Ф2	1,6164	36,6	206,47	2,09062	1,58459
Ф3	1,6199	36,3	206,86	2,09474	1,58707
ТФ1	1,6475	33,9	211,15	2,13091	1,61154
ТФ2	1,6725	32,2	214,52	2,16185	1,63436
ТФ4	1,7398	28,2	222,58	2,23687	1,69308
ТФ5	1,7550	27,5	223,14	2,25378	1,70600
02	1,5294	57,8	173,73	1,96171	1,50744
КФ2	1,5189	57,3	170,10	1,90968	1,49979
К1	1,4982	65,1	157,96	1,86720	1,57960
К5	1,5110	64,3	161,56	1,87426	1,49387
К7	1,5142	64,0	163,28	1,87796	1,49632
К10	1,5263	60,1	168,83	1,89731	1,51121
БК2	1,5147	60,6	168,47	1,88942	1,49631
БК7	1,5414	59,1	172,12	1,91179	1,52228
БФ4	1,5473	53,6	180,48	1,93930	1,52626
БФ8	1,5826	46,5	192,57	2,00059	1,55725
БФ10	1,6079	46,2	190,56	2,02766	1,58421
ЛФ1	1,5406	47,2	190,74	1,96612	1,51903
ЛФ4	1,5730	42,7	196,94	2,01837	1,54681
ТК4	1,6111	55,8	174,42	1,98434	1,58818
ТК9	1,6171	54,0	178,28	1,99374	1,59312
ТК11	1,6577	51,2	182,24	2,03380	1,63173
Ф4	1,6242	35,9	207,53	2,10306	1,59060
ТФ10	1,7280	28,3	220,81	2,23540	1,68007
01	1,4686	66,3	159,53	1,83354	1,44986
03	1,5810	41,4	198,42	2,03559	1,55423
ТФ3	1,7172	29,5	219,14	2,21922	1,67280

Таблица II.6

Сорт стекла	Значения $10^5 R(\lambda)$ в зависимости от длины волны λ в *нм*							
	350	400	500	600	700	800	900	950
К3	+4	+5	—1	+3	+7	+5	—6	—
К8	+3	+2	—2	+4	+9	+7	—5	—24
К9	+9	+15	+2	0	+3	+2	—1	—
БК4	+7	+12	+2	+1	+5	+4	—4	—20
БК6	+11	+13	+2	+1	+4	+4	—5	—
БК8	+5	+6	—1	+3	+8	+5	—5	—24
БК9	+6	+20	+3	—1	+1	+2	—2	—16
БК10	+9	+20	+3	0	+2	+2	—3	—
КФ1	+8	+13	+2	+1	+4	+4	—4	—18
КФ3	+7	+16	+2	0	+4	+4	—5	—
БФ6	+13	+25	+5	—1	0	+2	—2	—
БФ5	+11	+19	+4	—1	+1	+2	—3	—16
БФ7	+13	+23	+5	—2	+2	+2	—2	—
БФ11	+15	+27	+5	—2	—1	+1	—2	—
БФ12	+17	+41	+10	—6	—6	—3	+1	—
БФ13	+15	+26	+5	—3	0	+1	—1	—11
ЛФ2	+11	+20	+3	—1	+1	+2	—3	—15
ЛФ5	+16	+28	+6	—2	—2	—1	0	—
ЛФ7	+15	+25	+5	—2	—1	+1	—	—
ТК1	+5	+11	—1	+1	+5	+4	—4	—20
ТК2	+10	+19	+4	0	+2	+3	—3	—16
ТК3	+7	+11	0	+3	+8	+6	—6	—
ТК5	+8	+17	+2	0	+4	+4	—4	—22
ТК6	+12	+21	+4	—1	+2	+2	—3	—16
ТК7	+12	+22	+4	—1	+1	+2	—4	—18
ТК8	+15	+26	+5	—3	—1	+1	—2	—15
ТК10	+13	+25	+5	—2	+1	+1	—2	—20
Ф1	+14	+41	+10	—6	—5	—1	—1	—

Сорт стекла	Значения $10^5 R(\lambda)$ в зависимости от длины волны λ в *нм*							
	350	400	500	600	700	800	900	950
Ф2	+22	+41	+9	—6	—6	—2	0	—6
Ф3	+20	+43	+11	—6	—6	—1	0	—6
ТФ1	+20	+51	+13	—8	—9	—3	+1	—
ТФ2	+20	+59	+15	—9	—11	—5	+2	—
ТФ4	+10	+78	+23	—13	—18	—8	+4	—
ТФ5	+30	+80	+20	—15	—18	—8	+6	+12
02	+6	+7	—1	+2	+8	+6	—6	
КФ2	—	+5	0	0	+1			
К5	—4	+4	+1	0	+3			
К7	—6	+4	+1	0	—2			
К10	—6	+8	+2	0	0			
К1	—2	+3	0	+1	—2			
БК2	—8	+7	+2	—1	+1			
БК7	—7	+9	+2	—1	+2			
БФ4	—	+9	+2	—1	+3			
БФ8	—7	+13	+3	—1	+1			
БФЛ	—5	+15	+4	—1	+3			
ЛФ1	—4	+9	+2	—1	+2			
ЛФ4	—4	+15	+3	—1	+2			
ТК9	—5	+14	+3	—1	—			
ТК4	—4	+14	+4	—1	+2			
ТК11	—6	+16	+4	—2	—			
Ф4	—	+21	+6	—2	+4			
ТФ8	—	+34	+11	—3	—			
Л70	—1	+2	0	0	—2			
Л79	+15	+5	—1	+3	—			
ТФ3	+32	+9	—3	+7	—			

Значения p_λ в зави

λ в нм	p_e / p_D	451 / 699	452 / 700	453 / 701	454 / 702	455 / 703	456 / 704	458 / 705	459 / 706	460 / 707	461 / 708	462 / 709	463 / 710
400		1,041	047	053	059	066	073	080	088	096	104	113	122
405		0,961	966	972	977	984	990	997	003	011	018	026	034
410		0,884	889	894	899	904	910	916	922	929	935	942	949
415		0,810	815	819	824	829	834	839	845	850	856	862	868
420		0,739	743	747	751	756	760	765	770	775	780	785	791
425		0,670	674	678	682	686	690	694	698	702	707	712	716
430		0,605	608	611	614	618	621	625	629	633	637	641	645
435		0,541	544	547	550	553	556	559	562	566	569	572	576
440		0,480	482	485	487	490	492	495	498	501	504	507	510
445		0420	422	425	427	429	431	434	436	439	441	444	446
450		0,363	365	367	369	370	372	374	376	378	380	383	385
455		0,307	309	311	312	314	315	317	319	320	322	324	325
460		0,254	255	256	258	259	260	262	263	264	266	267	268
465		0,202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
470		0,151	152	153	154	155	155	156	157	158	158	159	160
475		0,103	103	104	104	105	105	106	106	107	107	108	108
480		0,055	055	056	056	056	056	057	057	057	058	058	058
485		0,010	010	010	010	010	010	010	010	010	010	010	010
490		0,034	034	034	035	035	035	035	035	035	036	036	036
495		0,077	077	078	078	078	079	079	079	080	080	080	081
500		0,118	119	119	120	120	121	121	122	122	123	123	124
505		0,158	159	160	160	161	162	163	163	164	164	165	166
510		0,197	198	199	200	201	202	202	203	204	205	206	206
515		0,236	237	238	238	239	240	241	242	243	244	245	245
520		0,273	274	275	276	277	278	279	280	280	281	282	283
525		0,309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
530		0,344	345	346	347	348	349	350	352	353	354	355	356
535		0,378	379	380	382	383	384	385	386	387	388	389	391
540		0,412	413	414	415	416	417	418	420	421	422	423	424
545		0,444	445	446	447	448	450	451	452	453	454	455	457

симости от p_e и p_D

465	466	467	468	469	470	471	473	474	475	476	477	δ
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	
132	141	152	162	173	184	196	208	221	233	246	1,260	5
042	051	060	069	079	089	099	109	120	131	143	0,154	4
957	964	972	980	989	997	106	015	025	034	044	0,054	4
875	882	889	896	903	910	918	926	934	942	951	0,959	3
797	802	808	814	821	827	834	841	848	855	862	0,869	3
721	726	732	737	742	748	753	759	765	771	778	0,784	2
649	653	658	662	667	672	677	682	687	692	697	0,702	2
580	583	587	591	595	599	603	607	611	616	620	0,625	2
513	516	519	522	526	529	533	536	540	543	547	0,551	1
449	451	454	457	459	462	465	468	471	474	477	0,480	1
387	389	391	393	396	398	400	403	405	407	410	0,412	1
327	329	331	332	334	336	338	340	342	344	346	0,348	1
270	271	272	274	275	277	278	280	281	283	284	0,286	1
214	215	216	217	218	219	221	222	223	224	225	0,226	1
161	161	162	163	164	164	165	166	167	167	168	0,169	0
109	109	110	110	111	111	112	112	113	113	114	0,114	0
059	059	059	060	060	060	060	061	061	061	061	0,062	0
010	010	010	011	011	011	011	011	011	011	011	0,011	0
036	036	036	037	037	037	037	037	038	038	038	0,038	
081	081	082	082	082	083	083	084	084	084	085	0,085	
124	125	125	126	126	127	127	128	128	129	129	0,130	
166	167	168	169	170	170	171	172	172	173	173	0,174	
207	208	209	209	210	211	212	213	214	214	215	0,216	
246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	0,257	
284	285	286	287	288	289	290	292	293	294	295	0,296	
321	322	323	325	326	327	328	329	330	331	332	0,333	
357	358	359	361	362	363	364	365	366	367	368	0,370	
391	393	394	395	396	398	399	400	401	402	403	0,404	
425	427	428	429	430	431	432	434	435	436	437	0,439	
458	459	460	462	463	464	465	467	468	469	470	0,472	

														Значения p_λ в зави
λ в нм	p_e	451	452	453	454	455	456	458	459	460	461	462	463	
	p_D	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	
550	0,476	477	478	479	480	481	482	484	485	486	487	489		
555	0,507	508	509	510	511	512	513	515	516	517	518	520		
560	0,537	538	539	540	541	542	543	545	546	547	548	550		
565	0,566	567	568	569	570	572	573	574	575	576	577	579		
570	0,595	596	597	598	599	600	601	603	604	605	606	607		
575	0,623	624	625	626	627	628	629	630	631	633	634	635		
580	0,650	651	652	653	654	655	656	657	658	660	661	662		
585	0,677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688		
590	0,703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714		
595	0,778	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739		
600	0,753	754	755	756	757	758	758	759	760	761	762	762		
605	0,777	778	779	780	781	782	782	783	784	785	786	787		
610	0,801	802	803	804	804	805	806	807	807	808	809	810		
615	0,824	825	826	827	827	828	829	830	830	831	832	832		
620	0,847	848	849	850	850	851	851	852	852	853	853	854		
625	0,870	870	871	872	872	873	873	874	874	875	875	876		
630	0,891	892	893	893	894	894	895	895	895	896	897	897		
635	0,913	914	914	915	915	915	916	916	917	917	917	918		
640	0,934	935	935	935	936	936	936	936	937	937	937	938		
645	0,955	955	955	956	956	956	956	956	957	957	957	957		
650	0,975	975	975	976	976	976	976	976	976	976	976	976		
655	0,995	995	995	995	995	995	995	995	995	995	995	995		
660	1,014	014	014	014	014	014	014	014	014	014	014	014		
665	1,033	033	033	033	033	033	032	032	032	032	032	031		
670	1,052	052	052	051	051	051	051	050	050	050	049	049		
675	1,070	070	070	070	069	069	068	068	067	067	067	066		
680	1,089	088	088	087	087	086	086	085	085	084	084	083		
685	1,106	106	105	105	104	103	103	102	101	101	100	100		
690	1,124	123	122	122	121	120	119	119	118	117	116	116		
695	1,141	140	139	138	138	137	136	135	134	133	132	132		

симости от p_e p_D

465	466	467	468	469	470	471	473	474	475	476	477	δ
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	
490	491	492	494	495	496	497	499	500	501	502	0,504	
521	522	523	525	526	527	528	529	530	532	533	0,534	
551	552	553	555	556	557	558	559	560	562	563	0,564	
580	581	582	584	585	586	587	588	589	591	592	0,593	
608	610	611	612	613	614	615	617	618	619	620	0,621	
636	637	638	639	640	642	643	644	645	646	647	0,648	
663	664	665	666	667	668	669	671	672	673	674	0,675	
689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	0,700	
715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	722	0,726	
740	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	0,750	
764	765	766	766	767	768	769	770	771	772	773	0,774	
788	788	789	789	790	791	792	793	794	795	796	0,797	
811	811	812	813	814	814	815	816	816	817	818	0,819	
833	834	834	835	836	836	837	838	838	839	839	0,840	
855	856	856	857	858	858	859	859	860	860	861	0,861	
876	877	877	878	879	879	880	880	881	881	882	0,882	
898	898	899	899	900	900	901	901	901	901	902	0,902	
918	918	919	919	919	920	920	920	921	921	921	0,922	
938	938	938	939	939	939	940	940	940	940	941	0,941	
958	958	958	958	958	958	959	959	959	959	959	0,959	
976	977	977	977	977	977	977	977	977	978	978	0,978	
995	995	995	995	995	995	995	995	995	995	995	0,995	
013	013	013	013	013	013	013	013	013	013	013	1,013	
031	031	031	031	030	030	030	030	030	030	029	1,029	
049	048	048	048	047	047	047	047	046	046	046	1,045	
066	065	065	065	064	064	063	063	062	062	061	1,061	
083	082	082	081	081	080	080	079	079	078	078	1,077	
099	098	098	097	096	096	095	095	094	093	093	1,092	
115	114	113	113	112	111	110	110	109	108	108	1,107	
131	130	129	128	127	126	125	125	124	123	122	1,121	

													Значения p_λ в зави
λ в нм	p_e	451	452	453	454	455	456	458	459	460	461	462	463
	p_D	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710
700	1,158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147	
705	1,174	173	172	171	170	169	168	167	165	164	163	162	
710	1,190	189	188	187	186	184	183	182	181	179	178	177	
715	1,205	205	204	202	201	200	198	197	196	194	193	192	
720	1,222	220	219	218	216	215	213	212	210	209	207	200	
725	1,237	236	234	233	231	229	228	226	225	223	222	220	
730	1,252	251	249	247	246	244	242	241	239	237	235	234	
735	1,267	265	264	262	260	258	256	255	253	251	249	247	
740	1,282	280	278	276	274	272	270	268	266	264	263	261	
745	1,296	294	292	290	288	286	284	282	280	278	276	274	
750	1,310	308	306	304	302	299	297	295	293	291	289	286	
755	1,324	322	320	317	315	313	311	308	306	303	301	299	
760	1,338	335	333	331	328	326	323	321	319	316	314	311	
765	1,351	349	346	344	341	339	336	334	331	328	326	323	
770	1,365	362	359	357	354	351	349	346	343	341	338	335	
780	1,392	389	386	383	380	377	374	371	368	365	362	359	
790	1,417	414	411	408	404	401	398	394	391	388	385	382	
800	1,442	439	435	432	428	425	421	417	414	410	407	403	
810	1,467	463	459	456	452	448	444	440	436	432	429	425	
820	1,491	487	483	479	475	471	466	462	458	453	450	446	
830	1,515	510	506	502	497	493	489	484	473	474	471	466	
840	1,538	533	529	524	519	514	509	505	500	495	491	486	
850	1,561	555	550	545	540	535	530	525	520	515	510	505	
860	1,583	577	572	566	561	555	550	545	539	534	529	524	
870	1,505	599	593	587	581	575	570	564	558	552	548	542	
880	1,627	620	614	607	601	594	589	583	576	571	566	560	
890	1,648	641	634	627	621	614	608	601	595	589	583	578	
900	1,669	661	654	647	640	633	626	619	613	607	601	595	
910	1,689	682	674	667	660	652	645	637	631	625	618	613	
920	1,709	702	694	687	679	671	663	656	649	642	635	629	

симости от p_e и p_D

465	466	467	468	469	470	471	473	474	475	476	477	δ
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	
146	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	1,135	
161	160	159	158	157	156	155	153	152	151	150	1,149	
176	175	173	172	171	170	169	167	166	165	164	1,162	
190	189	188	186	185	184	182	181	180	178	177	1,176	
205	203	202	200	199	197	196	194	193	192	190	1,189	
218	217	215	214	212	211	209	208	206	204	203	1,201	
232	231	229	227	225	224	222	220	219	217	215	1,213	
246	244	242	240	238	236	235	233	231	229	227	1,225	
259	257	255	253	251	249	247	245	243	241	239	1,237	
272	270	267	265	263	261	259	257	255	253	251	1,249	
284	282	280	278	275	273	271	269	267	265	262	1,260	
297	294	292	290	287	285	283	281	278	276	273	1,271	
309	306	304	302	299	297	294	292	289	287	285	1,282	
321	318	316	313	310	308	305	303	300	298	295	1,293	
333	330	327	325	322	319	317	314	311	309	306	1,303	
357	354	351	348	345	343	340	337	334	331	328	1,325	
379	376	373	369	366	364	360	357	354	351	347	1,343	
400	397	394	390	387	384	380	377	373	370	366	1,362	
421	418	415	411	407	404	400	396	392	389	385	1,381	
442	439	435	431	427	423	419	415	411	407	403	1,399	
462	459	455	450	446	442	438	433	429	425	420	1,415	
482	478	474	469	465	460	456	451	447	442	437	1,432	
501	496	492	488	483	478	474	469	464	459	454	1,449	
520	575	510	505	500	496	491	486	480	475	470	1,465	
538	533	528	522	517	513	507	502	496	501	486	1,481	
555	550	545	539	534	529	523	518	512	507	501	1,495	
572	567	562	556	550	545	539	534	527	522	516	1,510	
589	584	578	572	566	560	554	549	542	537	530	1,524	
606	601	594	588	581	575	569	563	556	550	543	1,537	
623	617	610	603	596	590	584	577	570	562	556	1,550	

правильность закономерности была бы показана для трех случайных, частных значений аргумента λ, откуда можно было бы заключить, что она вообще имеет место для любого λ.

На самом деле точки, соответствующие различным сортам стекла, ложатся не по кривой, а внутри узкой трубки. Это объясняется, с одной стороны, тем, что данные каталога даются с точ-

Рис. II.38

ностью до одной-двух единиц третьего знака в величинах p, с другой стороны, тем, что закономерность не совсем верна. Для того чтобы по возможности исключить влияние случайных ошибок, был построен график (рис. II.38) по только что описанному принципу, но точки, которые наносились, относились не к какому-нибудь определенному стеклу, а к среднему из определенной группы стекол. Группы были взяты из каталога Шотта, где их имеется 18, в каждой группе в среднем 6—7 сортов стекол. К точкам для $p_{G'}$ относятся две кривые: одна из них, проведенная сплошной линией, представляет зависимость $p_{G'}$ от p_D для большинства стекол;

другая кривая, проведенная штриховой линией, охватывает четыре группы стекол, а именно: 1) баритовые кроны BaK; 2) курц-флинты KzF; 3) легкие флинты LLF; 4) флинты F. У всех этих стекол $p_{G'}$ несколько больше (на 0,002—0,003), чем у остальных групп.

Для величины p_h это явление выражено еще сильнее: разность между двумя категориями стекол доходит до 0,005—0,006. Для $p_{A'}$, наоборот, никакой ощутимой разницы нет.

Наличие определенной и единой для всех сортов стекол зависимости величины p_λ от двух аргументов p_D и λ (оставим пока в стороне вопрос о четырех группах, составляющих исключение) позволяет построить таблицы, дающие p_λ как функцию от p_D и λ. Табличные вычисления производились следующим образом.

1. На основании кривых, приведенных на рис. II.38, была построена таблица значений $p_{A'}$, $p_{G'}$ и p_h как функций от p_D (табл. II.8).

Таблица II.8

p_D	$p_{A'}$	$p_{G'}$	p_h	p_D	$p_{A'}$	$p_{G'}$	p_h
0,700	—1,358	0,555	0,971	0,712	—1,327	0,596	1,056
0,702	—1,353	0,561	0,981	0,714	—1,321	0,604	1,075
0,704	—1,348	0,567	0,993	0,716	—1,316	0,612	1,094
0,706	—1,342	0,573	1,007	0,718	—1,311	0,620	1,115
0,708	—1,337	0,580	1,023	0,720	—1,306	0,629	1,137
0,710	—1,332	0,588	1,039	0,722	—1,302	0,639	1,160

Примечание. Поправка для стекол второй группы $\Delta p_{G'} = 0{,}003$; $\Delta p_h = 0{,}005$ (для всех p_D).

2. Для каждого p_D вычислялись p_λ, где λ принимало значения от 400 до 770 *нм* через 5 *нм*. Основанием для этих вычислений служили шесть частных значений λ, для которых известны p_λ, а именно:

Спектральная линия	λ	p_λ
A'	768,5	$p_{A'}$
C	656,3	—1,0
D	589,3	p_D
F	486,1	0
G'	434,1	$p_{G'}$
h	404,7	p_h

Для интерполяции была применена формула Гартманна

$$n = n_0 + \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha},$$

к которой добавлялся особый поправочный член, уточняющий ее в крайних областях спектра.

Таким образом была получена табл. II.7. По вертикальным столбцам меняется λ при постоянном p_D; по горизонтальным строкам — p_D при постоянном λ.

Промежутки для p_D взяты в 0,001; так как на основании данных каталога эта величина не может быть получена точнее, то нет надобности интерполировать по этому аргументу. Для λ промежутки приняты в 5 *нм*. При таких промежутках разности функции достаточно постоянны и можно применить линейную интерполяцию, но вряд ли это нужно на практике, так как всегда имеется возможность округлить λ, выраженное в *нм*, до ближайшего кратного пяти и избежать всякого интерполирования.

Пользоваться табл. II.7 надо следующим образом:

1) взять из каталога или из спецификации величину показателя n_D, дисперсию $n_F - n_C$ и относительную частную дисперсию

$$\frac{n_F - n_D}{n_F - n_C} = p_D;$$

2) по величинам p_D и λ найти в таблице значение p_λ;

3) вычислить $n_\lambda = n_F + p_\lambda (n_F - n_C)$.

Таким образом, весь процесс нахождения показателя сводится к отысканию в таблице величины p_λ и умножению ее на другое число $(n_F - n_C)$.

Нужно обратить внимание на то, что, если $\lambda > 486{,}1$, то p_λ величина отрицательная, если $\lambda < 486{,}1$, то p_λ величина положительная.

Если стекло принадлежит к одной из групп BaF, KzF, LLF и F, то надо к величине p_λ прибавить поправку, указанную в отдельном столбце таблицы. Эта поправка не зависит практически от p_D.

Пример. Найти показатель n для $\lambda = 560$ *нм* для стекла Ленинградского завода оптического стекла К8: $n_D = 1{,}5163$; $n_F - n_C = 0{,}00806$; $n_F - n_D = 0{,}00566$.

Имеем

$$n_F = 1{,}52196;$$

$$p_D = \frac{n_F - n_D}{n_F - n_C} = 0{,}702;$$

$$p_{560} = -0{,}540 \text{ (из табл. II.7)};$$

$$n_{560} = 1{,}52196 - (0{,}540 \cdot 0{,}00806) = 1{,}51761.$$

Точность табл. II.7 может быть охарактеризована следующими числами: при ее помощи показатель может быть вычислен с точностью до одной единицы пятого знака в области $\lambda = 460 \div 700$ *нм*; до двух единиц — в области $\lambda = 430 \div 460$ *нм* и $\lambda = 700 \div 770$ *нм*;

до трех-четырех — в области $\lambda = 400 \div 430$ *нм*. Так как лучи последней области почти не действуют на глаз и потому не оказывают никакого заметного влияния на качество изображения по сравнению с областью желтых и зеленых лучей, то такая точность должна считаться вполне достаточной, тем более что она того же порядка, что и точность самых совершенных методов измерений показателей.

В последнее время фирмы «Шотт», «Ченс» и др. выпустили каталоги, в которых относительные частные дисперсии p_D не даются, а вместо них даются p_e, где e — линия, соответствующая длине волны 546,4; для того чтобы можно было пользоваться этими каталогами, рядом со строкой, содержащей все значения p_D от 0,699 до 0,722, в табл. II.7 дана дополнительная строка, дающая непосредственно значения p_e.

Табл. II.7 может быть использована для решения более общей задачи: по показателям преломления стекла для трех любых длин волн определить значение показателя для любой другой длины волны. Этот результат может быть получен способом постепенных приближений.

Классификация хроматических аберраций

В начале этой главы шла речь о том, что в монохроматическом свете всякая светящаяся точка изображается как некоторая фигура рассеяния, вид которой зависит от аберраций системы. Как положение точки изображения, так и аберрации системы зависят от показателя преломления испускаемой световой энергии. Если источник света испускает лучи всех длин волн, то каждой длине волны соответствуют определенная плоскость изображения и определенное пятно рассеяния и все эти пятна различных цветов складываются в общее окрашенное пятно.

Как аберрации монохроматических пучков, так и хроматические аберрации представляют собой сложное явление, для изучения которого необходима предварительная классификация. Хроматические аберрации могут быть разделены на группы по признаку принадлежности лучей к определенной области аберраций (гауссова область, аберрации третьего порядка); хроматические аберрации, относящиеся к области пятых и более высоких порядков, обычно не имеют практического значения.

В гауссовой области положение изображения зависит только от положения предмета и для лучей данного цвета не зависит от выбора лучей, образующих изображение. Так как положение изображения определяется двумя координатами, то число хроматических аберраций первого порядка равно двум: хроматическая аберрация положения и хроматическая аберрация увеличений.

В области Зейделя пяти аберрациям в монохроматическом свете соответствуют пять хроматических аберраций, из которых,

однако, только одна имеет практическое значение — хроматическая разность сферических аберраций.

Для оценки количественной стороны хроматической аберрации берут условно две определенные длины волны, лежащие по ту и другую сторону от некоторой средней длины волны, для которой выполняется основной расчет в монохроматическом свете. Например, при средней длине волны $\lambda_2 = 589{,}3$ *нм*, соответствующей желтой линии D натрия, берут $\lambda_1 = 656{,}3$ *нм* (линия C водорода) и $\lambda_3 = 486{,}1$ *нм* (линия F водорода). Хроматическая аберрация определяется разностью так или иначе выбранных координат, вышедших из системы лучей, соответствующих длинам волн λ_1 и λ_3.

Хроматическая аберрация положения

Положение плоскости изображения зависит от значения показателей преломления линз системы; изменение положения этой плоскости с изменением длины волны лучей обусловливает хроматическую аберрацию положения. Она определяется расстоянием $\delta s'_p$ между двумя плоскостями изображения одной и той же плоскости предмета, соответствующими двум длинам волн λ_1 и λ_3. Условимся обозначать величины, относящиеся к длинам волн λ_1 и λ_3, соответственно значками C и F, поставленными сразу же после обозначения величины, например s_C, n_C и т. д. Вообще говоря, величины, снабженные значками C и F, следует относить к длинам волн 656,3 и 486,1 *нм*, общепринятым для характеристики хроматических аберраций зрительных оптических приборов; но все результаты, полученные при таком частном подборе, могут быть обобщены для любых двух длин волн λ_1 и λ_3.

Рассматриваем некоторую точку-предмет S на оптической оси системы. Исходим из известной формулы преломления через сферическую поверхность.

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \qquad \text{(II.177)}$$

Берем два луча C и F, пересекающие ось до преломления в точках S_C и S_F с абсциссами s_C и s_F; расстояние $\overline{S_C S_F}$ предполагается очень малым. Так как к обоим лучам относится формула (II.177), то, написав ее дважды, один раз для лучей C и другой — для лучей F, вычитаем одно уравнение из другого. Пренебрегая квадратом малых разностей

$$\delta s = s_F - s_C \quad \text{и} \quad \delta s' = s'_F - s'_C,$$

получаем

$$-\frac{n'}{s'^2}\delta s' + \frac{n}{s^2}\delta s + \frac{\delta n'}{s'} - \frac{\delta n}{s} = \frac{\delta n' - \delta n}{r}, \qquad \text{(II.178)}$$

где для краткости положено, что

$$n_F - n_C = \delta n; \quad n'_F - n'_C = \delta n'.$$

Формулу (II.178) можно переписать в виде

$$\Delta \frac{n\delta s}{s^2} = \Delta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)\delta n, \tag{II.179}$$

где Δ — символ Аббе для разности двух одинакового вида выражений, различающихся только тем, что в первом выражении все величины со штрихами относятся к преломленному лучу, так что $\Delta q = q' - q$. С точностью, указанной выше, можно считать величины s' и n', относящимися к длине волны, лежащей между λ_1 и λ_3; максимальная точность получается тогда, когда эта длина волны принята равной $\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2}$.

Замечая, что $\frac{1}{s} - \frac{1}{r}$ равно $-\frac{Q_s}{n}$, где Q_s — нулевой инвариант Аббе, имеем

$$\Delta \frac{n\delta s}{s^2} = -\Delta \frac{Q_s}{n}\delta n = -Q_s \Delta \frac{\delta n}{n}. \tag{II.180}$$

Формула (II.180) решает вопрос о нахождении хроматической аберрации положения для случая одной поверхности.

Чтобы перейти к общему случаю системы из p поверхностей, замечаем, что

$$\delta s'_\kappa = \delta s_{\kappa+1}; \quad \delta n'_\kappa = \delta n_{\kappa+1};$$

$$\frac{h_\kappa}{s'_\kappa} = \alpha'_\kappa = \frac{h_\kappa}{s_{\kappa+1}} = \alpha_{\kappa+1},$$

где α_κ и α'_κ — углы с осью параксиального луча, проходящего через точку S предмета. Умножая обе части формулы (II.180) на h^2, получаем

$$\Delta n \frac{h^2}{s^2}\delta s = \Delta n \alpha^2 \delta s = -h^2 Q_s \Delta \frac{\delta n}{n}. \tag{II.181}$$

Применяем формулу (II.181) для всех p поверхностей системы:

$$n'_1 \alpha'^2_1 \delta s'_1 - n_1 \alpha_1^2 \delta s_1 = -h_1^2 Q_{1,s} \Delta_1 \frac{\delta_n}{n};$$

$$n'_2 \alpha'^2_2 \delta s'_2 - n_2 \alpha_2^2 \delta s_2 = -h_2^2 Q_{2,s} \Delta_2 \frac{\delta n}{n};$$

. . . . . .

$$n'_p \alpha'^2_p \delta s'_p - n_p \alpha_p^2 \delta s_p = -h_p^2 Q_{p,s} \Delta_p \frac{\delta n}{n}.$$

Складывая все полученные уравнения и принимая во внимание сделанное выше замечание, получаем в левой части $n'_p\alpha'^2_p\delta s'_p - n_1\alpha_1^2\delta s_1$. Таким образом,

$$n'_p\alpha'^2_p\,\delta s'_p - n_1\alpha_1^2\delta s_1 = -\sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} h_\kappa^2 Q_{\kappa,\,s}\Delta_\kappa \frac{\delta n}{n}. \qquad (II.182)$$

В левой части величина δs_1, относящаяся к точке-предмету, обычно равна нулю. Правую часть можно переписать в переменных Ланге, пользуясь многократно применявшейся формулой

$$-hQ_s = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}.$$

Тогда формула (II.182) принимает окончательный вид

$$\delta s'_p = \frac{1}{n'_p\alpha'^2_p}\sum_1^p h_\kappa \frac{\Delta\alpha_\kappa}{\Delta\frac{1}{n_\kappa}}\,\Delta\frac{\delta n_\kappa}{n_\kappa}. \qquad (II.183)$$

Величина $\delta s'_p$ называется *продольной хроматической аберрацией положения* изучаемой оптической системы. Нетрудно видеть, что она не зависит от единиц, в которых выражена величина α. Выражение, стоящее под знаком суммы, содержит произведение величин h и $\Delta\alpha$, из которых каждая имеет то же измерение, что и α_1. Сумма имеет измерение α_1^2; но и знаменатель α'^2_p имеет то же измерение, вследствие чего частное $\delta s'$ оказывается нулевого измерения по отношению к данному углу. Иногда говорят о поперечной хроматической аберрации положения, понимая под этим произведение отрезка $\delta s'_p$ на выходной апертурный угол ω'_p. Такое представление имеет условный характер и практически применимо только при очень малых апертурных углах.

Рассмотрим два частных случая применения формулы (II.183).

1. Простая линза в воздухе. Для бесконечно тонкой системы из двух поверхностей, находящейся в воздухе, формула (II.183) принимает особенно простой вид

$$\alpha'_2\delta s'_2 = h_1\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\nu_2-1}\frac{\delta n_2}{n_2} + h_2\frac{\alpha_3-\alpha_2}{1-\nu_2}\frac{\delta n_2}{n_2},$$

так как

$$\delta n_1 = \delta n_3 = 0.$$

Но у бесконечно тонкой системы $h_1 = h_2$; поэтому

$$\alpha'^2_2\,\delta s'_2 = \frac{h_1}{1-\nu_2}\frac{\delta n_2}{n_2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_2) =$$

$$= \frac{h_1}{1-\frac{1}{n_2}}\frac{\delta n_2}{n_2}(\alpha_1-\alpha_3) = h_1\frac{\delta n_2}{n_2-1}(\alpha_1-\alpha_3).$$

Пользуясь основной формулой для бесконечно тонкой линзы

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'},$$

где f' — ее фокусное расстояние, после умножения на h имеем

$$\alpha_3 - \alpha_1 = \frac{h_1}{f'}.$$

Подставляя это выражение в формулу для продольной хроматической аберрации, находим

$$\alpha_2'^2 \delta s_2' = -\frac{h_1^2}{f'} \frac{\delta n_2}{n_2 - 1}$$

или

$$\delta s_2' = -\frac{h_1^2}{\alpha_2'^2} \frac{1}{f'} \frac{\delta n_2}{n_2 - 1} = -\frac{s_2'^2}{f'} \frac{\delta n_2}{n_2 - 1}. \qquad \text{(II.184)}$$

Выражение $\frac{n_2 - 1}{\delta n}$ встречается часто во всех формулах, связанных с хроматическими аберрациями; Аббе назвал его коэффициентом дисперсии и обозначил буквой ν. В дальнейшем будем пользоваться этим обозначением. (До сих пор буквой ν обозначалась обратная величина показателя преломления $\frac{1}{n}$; во избежание недоразумений ν в этом значении не будет применяться в основных формулах, а только в промежуточных выводах).

Тогда формула (II.184) принимает особенно простой вид

$$\delta s' = -\frac{s'^2}{f'} \frac{1}{\nu}, \qquad \text{(II.184*)}$$

где индекс 2 у величины $\delta s'$ опущен. Формула (II.184*) может быть получена независимо от формулы (II.183) при использовании следующего выражения:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Дифференцируя по n и s', получаем

$$-\frac{\delta s'}{s'^2} = \delta n \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\delta n}{n - 1} \frac{1}{f'},$$

или

$$\delta s' = -\frac{s'^2}{f'} \frac{1}{\nu}.$$

2. Сложная линза. Если имеется две или несколько бесконечно тонких линз, разделенных бесконечно малыми воздушными промежутками, можно исходить из формулы

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \sum \Phi_i,$$

где Φ_i — оптическая сила линзы с номером i.

Дифференцируя эту формулу по s' и по значениям показателей, получаем

$$-\frac{\delta s'}{s'^2} = \sum \frac{\Phi}{\nu_i},$$

откуда

$$\delta s' = -s'^2 \sum \frac{\Phi_i}{\nu_i}, \qquad (II.185)$$

где ν_i — коэффициент Аббе для материала линзы i.

Формула (II.183) для хроматической аберрации положения дает возможность вычислить положение плоскости изображения для любого цвета по отношению к плоскости изображения, соответствующей определенному цвету K. Для этого нужно принять, что величина δn, входящая в выражение коэффициента ν, равна разности показателей $n_L - n_K$ для обоих рассматриваемых цветов; показатель n, так же как и величины α и h в формуле (II.183), соответствует некоторой средней длине волны.

Максимальная точность при вычислении хроматической аберрации получается в том случае, когда $n = \frac{n_L + n_K}{2}$ и когда α и h соответствуют именно этому значению n показателя. Это вытекает из легко доказываемого свойства разложения функций в ряд Тэйлора, заключающегося в том, что разность $f(x+h) - f(x)$ функции $f(x)$, соответствующая приращению h аргумента x, представляется через значение первой производной наиболее точно, если эта производная вычислена для значения аргумента x, равного $x + \frac{h}{2}$. Другими словами, в формуле

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+th) + R(x, h) \qquad (II.186)$$

остаточный член R (x, h) достигает минимального значения, когда коэффициент t равен $\frac{1}{2}$. Разлагая левую часть в ряд Тэйлора, можно убедиться, что при $t = \frac{1}{2}$ величина $R(x, h)$ не содержит множителя h^2, а только h^3. Последнее обстоятельство имеет большое практическое значение. Часто обнаруживаются расхождения, иногда существенные между значением хроматической аберрации, полученным точным тригонометрическим расчетом двух лучей разных длин волн, и значением, полученным по формуле (II.183). Расхождения объясняются тем, что величины α, h и n берутся не для среднего значения длины волны. Например, часто для вычисления хроматической аберрации в фиолетовой части спектра исходят из значений α, h и n, вычисленных для цвета D, лежащего вне фиолетовой области; в этом случае расхождения могут быть значительными.

Необходимо помнить, что величина хроматической аберрации, полученной на основании формулы (II.183), верна только для параксиальных лучей; практически формула применима для очень узкой области, соответствующей малым апертурным углам.

Хроматическая аберрация увеличений

Изображение точки, лежащей в меридиональной плоскости, в параксиальной области определяется двумя координатами — абсциссой s' и ординатой l', поэтому оно обладает двумя хроматическими аберрациями. Первая, исследованная выше, касается положения плоскости изображения; это аберрация абсциссы s'. Вторая относится к ординате l', которая также является функцией от длины волны луча. Эта аберрация измеряется либо разностью величин l' (ординат изображений одной и той же точки объекта лучами двух различных длин волн, которые мы будем условно обозначать значками C и F), либо связанными с нею величинами. Для определения линейного увеличения оптической системы можно исходить из формулы Лагранжа—Гельмгольца

$$n_1\alpha_1 l_1 = n'_p\alpha'_p l'_p,$$

откуда

$$\frac{l'_p}{l_1} = \frac{n_1\alpha_1}{n'_p\alpha'_p}.$$

Но, имея в виду формулу $h = s\alpha = s'\alpha'$, можно написать

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_p} = \frac{\alpha_1}{\alpha'_1}\frac{\alpha_2}{\alpha'_2}\frac{\alpha_3}{\alpha'_3}\cdots\frac{\alpha_p}{\alpha'_p} =$$

$$= \frac{s'_1}{s_1}\frac{s'_2}{s_2}\frac{s'_3}{s_3}\cdots\frac{s'_p}{s_p} = \prod_{\kappa=1}^{\kappa=p}\frac{s'_\kappa}{s_\kappa},$$

где символом Π обозначается произведение величин, стоящих под этим знаком; таким образом,

$$\frac{l'_p}{l_1} = \frac{n_1}{n'_p}\prod\frac{s'}{s}, \qquad \text{(II.187)}$$

где для краткости пропущен значок κ.

Рассмотрим теперь три параксиальных луча, исходящих из одной и той же точки предмета на оси, различных цветов C, D, F; длина волны луча D лежит в промежутке между значениями длин волн C и F. Полагая, что разности показателей для лучей C, D и F очень малы, можно вычислить разность $\delta l'_p = l'_{pF} - l'_{pC}$ дифференцированием уравнения (II.187). Величины n, s и др., которые

появятся при дальнейших выкладках, будут относиться к среднему лучу D. Логарифмическое дифференцирование дает

$$\frac{\delta l'_p}{l'_p} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_p}{n'_p} + \sum_1^p \left(\frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} - \frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} \right). \qquad (II.188)$$

Но сумма $\sum_1^p$ может быть разбита на пары членов следующим образом:

$$\sum_1^p \left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} \right) = \frac{\delta s_1}{s_1} + \left(\frac{\delta s_2}{s_2} - \frac{\delta s'_1}{s'_1} \right) + \left(\frac{\delta s_3}{s_3} - \frac{\delta s'_2}{s'_2} \right) + \cdots$$

$$\cdots - \frac{\delta s'_p}{s'_p}.$$

Ввиду того, что $\delta s'_\kappa = \delta s_{\kappa+1}$ и $s'_\kappa = s_{\kappa+1} + d_\kappa$, где d_κ — расстояние между поверхностями с номерами κ и $\kappa + 1$, имеем

$$\sum_1^p \left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} \right) = \frac{\delta s_1}{s_1} - \frac{\delta s'_p}{s'_p} + \delta s_2 \frac{d_1}{s'_1 s_2} + \delta s_3 \frac{d_2}{s'_2 s_3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{d_\kappa \delta s_{\kappa+1}}{s'_\kappa s_{\kappa+1}} + \cdots + \frac{d_{p-1} \delta s_p}{s'_{p-1} s_p}.$$

Так как предмет не имеет аберрации, то $\delta s_1 = 0$; поэтому

$$\sum_1^p \left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} - \frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} \right) = - \frac{\delta s'_p}{s'_p} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p-1} \frac{d_\kappa \delta s_{\kappa+1}}{s'_\kappa s_{\kappa+1}}. \qquad (II.188^*)$$

Но для продольной хроматической аберрации имеем формулу

$$\delta s'_\kappa = \frac{1}{n'_\kappa \alpha'^2_\kappa} \sum h \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n}.$$

Условимся для краткости писать

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n} = \bar{C};$$

тогда

$$\delta s'_\kappa = \frac{1}{n'_\kappa \alpha'^2_\kappa} \sum h \bar{C}. \qquad (II.189)$$

Подставляя это значение в формулу (II.188*), находим

$$\sum_{1}^{p}\left(\frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa}-\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa}\right)=\frac{\sum h\bar{C}}{n'_p\alpha'^2_p s'_p}-\sum_{\kappa=1}^{\kappa=p-1}\frac{d_\kappa\sum\limits_{1}^{\kappa}h_i\bar{C}_i}{n_{\kappa+1}\alpha^2_{\kappa+1}s'_\kappa s_{\kappa+1}}. \quad (II.190)$$

Второй член правой части формулы (II.190), вследствие соотношений

$$s'_\kappa\alpha_{\kappa+1}=h_\kappa;\quad s_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+1}=h_{\kappa+1},$$

может быть написан в виде

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=p-1}\frac{d_\kappa\sum\limits_{1}^{\kappa}h_i\bar{C}_i}{n_{\kappa+1}h_\kappa h_{\kappa+1}}.$$

Учитывая последнее преобразование, получаем вместо (II.190)

$$\sum_{1}^{p}\left(\frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa}-\frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa}\right)=\frac{-\sum\limits_{1}^{p}h_\kappa\bar{C}_\kappa}{n'_p\alpha'^2_p s'_p}+\left[\frac{d_1h_1\bar{C}_1}{n_2h_1h_2}+\frac{d_2\,(h_1\bar{C}_1+h_2\bar{C}_2)}{n_3h_2h_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{d_3\,(h_1\bar{C}_1+h_2\bar{C}_2+h_3\bar{C}_3)}{n_4h_3h_4}+\cdots+\frac{d_{p-1}\,(h_1\bar{C}_1+h_2\bar{C}_2+\cdots+h_{p-1}\bar{C}_{p-1})}{n_ph_{p-1}h_p}\right]. \quad (II.190^*)$$

Выражение в квадратных скобках можно написать иначе, перераспределяя величины $\bar{C}$:

$$[\cdots]=h_1\bar{C}_1\left(\frac{d_1}{n_2h_1h_2}+\frac{d_2}{n_3h_2h_3}+\cdots+\frac{d_{p-1}}{n_ph_{p-1}h_p}\right)+$$

$$+h_2\bar{C}_2\left(\frac{d_2}{n_3h_2h_3}+\cdots+\frac{d_{p-1}}{n_ph_{p-1}h_p}\right)+\cdots+h_{p-1}\bar{C}_{p-1}\frac{d_{p-1}}{n_ph_{p-1}h_p}.$$

Введем обозначение, которое уже использовалось в формуле (II.52),

$$\sigma_p=\sum_{2}^{p}\frac{d_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}h_\kappa n_\kappa};$$

тогда выражение в квадратных скобках принимает вид

$$[\cdots]=h_1\bar{C}_1\sigma_p+h_2\bar{C}_2(\sigma_p-\sigma_2)+h_3\bar{C}_3(\sigma_p-\sigma_3)+\cdots$$

$$\cdots+h_{p-1}\bar{C}_{p-1}(\sigma_p-\sigma_{p-1})=$$

$$=\sigma_p\sum_{1}^{p-1}h_\kappa\bar{C}_\kappa-\sigma_2h_2\bar{C}_2-\sigma_3h_3\bar{C}_3-\cdots-\sigma_{p-1}h_{p-1}\bar{C}_{p-1}.$$

Прибавляя и отнимая член $\sigma_p h_p \overline{C}_p$, получаем

$$[\cdots] = \sigma_p \sum_1^p h_\kappa \overline{C}_\kappa - \sum_2^p \sigma_\kappa h_\kappa \overline{C}_\kappa.$$

Таким образом, отбрасывая индексы, имеем

$$\sum \left(\frac{\delta s'_\kappa}{s'_\kappa} - \frac{\delta s_\kappa}{s_\kappa} \right) = \frac{\sum h\overline{C}}{n'_p \alpha'^2_p s'_p} - \left(\sigma_p \sum_1^p h\overline{C} - \sum_1^p \sigma h\overline{C} \right).$$

Заменяя σ_p его значением из формулы (II.52), т. е.

$$\sigma_p = \frac{1}{J} \left(\frac{y_p}{h_p} - \frac{y_1}{h_1} \right),$$

где

$$J = n'_p \alpha'_p l'_p,$$

получаем вместо формулы (II.188)

$$\frac{\delta l'_p}{l'_p} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_p}{n'_p} + \sum_1^p h\overline{C} \left(\frac{1}{n'_p \alpha'^2_p s'_p} - \frac{1}{n'_p \alpha'_p l'_p} \frac{y_p}{h_p} \right) +$$

$$+ \frac{1}{J} \frac{y_1}{h_1} \sum_1^p h\overline{C} + \sum_2^p \sigma h\overline{C}. \qquad \text{(II.191)}$$

Выражение в скобках преобразуется к виду

$$\frac{1}{n'_p \alpha'^2_p s'_p} - \frac{1}{n'_p \alpha'_p l'_p} \frac{y_p}{h_p} = \frac{1}{n'_p \alpha'^2_p s'_p} - \frac{y_p}{n'_p \alpha'^2_p s'_p l'_p} =$$

$$= \frac{1}{n'_p \alpha'^2_p l'_p} \left(\frac{l'_p - y_p}{s'_p} \right) = \frac{1}{J} \frac{\beta'_p}{\alpha'_p} = - \frac{1}{n'_p \alpha'^2_p (x'_p - s'_p)}.$$

Подставляя опять

$$\delta s'_p = \frac{\sum h\overline{C}}{n'_p \alpha'^2_p},$$

получаем

$$\frac{\delta l'_p}{l'_p} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_p}{n'_p} - \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} + \frac{1}{J} \frac{y_1}{h_1} \sum_1^p h\overline{C} + \sum_2^p \sigma h\overline{C}. \qquad \text{(II.191*)}$$

Умножая обе части формулы (II.191*) на $h_\kappa \overline{C}_\kappa$ и суммируя по всем κ от 1 до p, находим

$$\sum y\overline{C} = \frac{y_1}{h_1} \sum h\overline{C} + J \sum \sigma h\overline{C};$$

поэтому формула (II.191*) приводится к следующему виду:

$$\frac{\delta l'_p}{l'_p} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_p}{n'_p} - \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} + \frac{1}{J} \sum y\bar{C}. \qquad (II.192)$$

Когда последняя среда одинакова с первой, то

$$\frac{\delta n_1}{n_1} = \frac{\delta n'_p}{n'_p}$$

и

$$\frac{\delta l'_p}{l'_p} = -\frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} + \frac{1}{J} \sum y\bar{C}. \qquad (II.193)$$

Рис. II.39

На практике обычно разность $\delta l' = l'_F - l'_C$ не представляет интереса, потому что обе величины l'_F и l'_C измеряются каждая в плоскости установки, соответствующей ее цвету. Гораздо важнее другая разность, а именно разность координат точек пересечения двух лучей различных цветов, идущих из одной и той же точки объекта, с плоскостью изображения одного определенного цвета, например цвета D. В случае фотографического или проекционного объектива имеет значение разность координат лучей различных цветов в плоскости светочувствительного слоя и в плоскости экрана. В оптических системах, предназначенных для наблюдения глазом и имеющих окуляр, необходимо рассматривать картину аберраций в фокальной плоскости окуляра, т. е. снова в одной и той же плоскости для лучей всех цветов.

Рассмотрим некоторую плоскость установки $M_D N'_D$ для цвета D, не совпадающую с плоскостями изображений для цветов C и F (рис. II.39). Пусть цветные лучи C, D, F, исходящие из одной и той же точки-объекта, проходят через одну и ту же точку входного зрачка (чаще всего для оценки хроматической аберрации берут луч с координатами $m_1 = 0$ и $M_1 = 0$). После прохождения через систему лучи пересекают оптическую ось в точках P'_C, P'_D, P'_F и плоскость изображения лучей D — $M_D N'_D$ — в точках C,

N'_D, F. Пусть N'_F и N'_C — точки, где цветные лучи F и C пересекают плоскости изображения, соответствующие своему цвету. Тогда $M_F N'_F = l'_F$; $M_C N'_C = l'_C$. Обозначим расстояния точек пересечения лучей с плоскостью $M_D N'_D$ через L'_C, L'_D и L'_F. Требуется найти соотношение, связывающее разность $L'_F - L'_C$ с разностью $l'_F - l'_C$. Обозначим через β'_C, β'_D и β'_F углы, образуемые с осью лучами C, D и F; на рис. II.39 они отрицательны. Хотя углы β'_C, β'_D и β'_F не равны между собой, но они весьма близки друг к другу; при умножении малых величин порядка аберрации на одну из величин, например на β'_C, можно с достаточной степенью точности заменить ее величиной β'_D или β'_F. Поэтому можно легко установить связь между L'_F и l'_F и L'_C и l'_C:

$$L'_F = l'_F - \overline{M_F M_D}\beta'_F;$$

$$L'_C = l'_C - \overline{M_C M_D}\beta'_C.$$

Разность

$$L'_F - L'_C = l'_F - l'_C - (\overline{M_F M_D} - \overline{M_C M_D})\,\beta'_D = l'_F - l'_C + \overline{M_C M_F}\,\beta'_D.$$

Но отрезок $\overline{M_C M_F}$ представляет как раз продольную хроматическую аберрацию положения $\delta s'_p$, поэтому окончательно имеем

$$L'_F - L'_C = l'_F - l'_C + \delta s'_p \beta'_D. \qquad (II.194)$$

С другой стороны, из формулы (II.192) получаем

$$\delta l' = l'_F - l'_C = l'\left(-\frac{\delta s'}{x' - s'} + \frac{1}{J}\sum y\overline{C} + \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_p}{n'_p}\right). \qquad (II.192^*)$$

Так как

$$\frac{l'}{x' - s'} = \beta',$$

то уравнения (II.194) и (II.192*) дают

$$L'_F - L'_C = \frac{l'}{J}\sum y\overline{C} + l'\left(\frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_p}{n'_p}\right). \qquad (II.195)$$

Величина хроматической аберрации положения здесь исчезла. Если первая и последняя среды одинаковы, то

$$L'_F - L'_C = \frac{l'}{J}\, y\overline{C}. \qquad (II.196)$$

Эту формулу удобно писать еще в таком виде:

$$\frac{\delta L'}{l'} = \frac{1}{J}\sum y\overline{C}. \qquad (II.196^*)$$

Величина слева может быть названа *относительной хроматической аберрацией увеличений*; она выражается в процентах.

Отметим, что разность $\delta l'$ не зависит от координат луча в плоскости входного зрачка; это видно из формулы (II.188), где все величины зависят от координат первого вспомогательного луча, но не второго. В дальнейших преобразованиях вводятся искусственным путем координаты второго вспомогательного (главного) луча, но зависимость $\delta l'$ от координат этого луча, естественно, только кажущаяся. Причина такой независимости заключается в том, что все параксиальные лучи, исходящие из точки-предмета, пересекают плоскость изображения (своего цвета) в одной и той же точке.

Иначе обстоит дело с величиной $\delta L'$, измеряемой в одной и той же плоскости установки; она связана с выбором главного луча, поскольку разность $\delta L' - \delta l'$ зависит от наклона к оси последнего, как показывает формула (II.194). Единственный случай, когда $\delta L'$ также не зависит от выбора луча, это тот, когда исправлена первая хроматическая аберрация положения и $\delta s'_p = 0$. Тогда $\delta L' = \delta l'$, а последняя величина не зависит от координат луча.

Полагая, что луч проходит через центр зрачка и является «главным», доказанное свойство хроматической разности увеличений можно выразить следующим образом: если исправлена первая хроматическая аберрация, то вторая хроматическая аберрация (увеличений) не зависит от положения входного зрачка. Это свойство второй хроматической аберрации напоминает свойство комы при исправлении сферической аберрации. Возможность такой аналогии обусловливается тем, что первая и вторая хроматические аберрации находятся в области параксиальных лучей в таком же соотношении, как сферическая аберрация и кома в области оптики пучков конечного отверстия.

В дальнейшем будем понимать под хроматической аберрацией увеличений, или второй хроматической аберрацией, величину $L'_F - L'_C$; чаще всего будем пользоваться отношением $\frac{L'_F - L'_C}{l'}$, выражая его в процентах.

Выведем еще одну формулу, связывающую хроматическую аберрацию увеличения с хроматической аберрацией положения и аберрацией последнего угла α'.

Из формулы Лагранжа—Гельмгольца получаем

$$\frac{l'_p}{l_1} = \frac{n_1\alpha_1}{n'_p\alpha'_p}.$$

Дифференцируя логарифмы обеих частей этого уравнения, подставив $l'_F - l'_C$ вместо dl', находим

$$\frac{l'_F - l'_C}{l'} = \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn'_p}{n'_p} - \frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p}. \qquad \text{(II.197)}$$

Но величины $l'_F - l'_C$ и $L'_F - L'_C$ связаны соотношением

$$L'_F - L'_C = l'_F - l'_C + \delta s'_p \beta'.$$

Деля обе части этого уравнения на l', имеем

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = \frac{l'_F - l'_C}{l'} + \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p}.$$

Подставляя вместо отношения $\frac{l'_F - l'_C}{l'}$ его выражение (II.197), получаем для хроматической разности увеличений

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn'_p}{n'_p} + \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} - \frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p}. \qquad \text{(II.198)}$$

Если предмет находится на бесконечности, то $\frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p} = -\frac{df'}{f'}$.

Формула (II.198) позволяет вычислить величину хроматической разности увеличения, когда имеется расчет двух параксиальных лучей для двух цветов.

В случае *бесконечно тонкой линзы* формула (II.196*) может быть упрощена следующим образом. Для простой линзы имеем

$$\overline{C} = \sum \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1 - \frac{1}{n_2}} \frac{\delta n_2}{n_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\nu},$$

где ν — коэффициент дисперсии.

Разность $\alpha_1 - \alpha_3$ заменяем отношением $-\frac{h}{f}$, после чего получаем для $\overline{C}$ выражение

$$\overline{C} = -\frac{h}{f\nu}.$$

Подставляя это значение $\overline{C}$ в формулу (II.196*), находим

$$\frac{\delta L'}{l'} = -\frac{1}{J}\frac{yh}{f\nu} = -\frac{1}{\alpha'_2 l'}\frac{yh}{f\nu} = -\frac{h}{\alpha'_2}\frac{y}{l'}\frac{1}{f\nu}.$$

Замечая, что $\frac{y}{l'} = \frac{x'}{x' - s'}$ и $\frac{h}{\alpha'_2} = s'$, получаем окончательно

$$\frac{\delta L'}{l'} = -\frac{s'x'}{x' - s'}\frac{1}{f\nu}, \qquad \text{(II.199)}$$

где x' — расстояние от линзы до выходного зрачка; s' — расстояние от линзы до плоскости изображения. Если x' или s' равно нулю, вторая хроматическая аберрация равна нулю. Множитель $\frac{s'x'}{x' - s'}$ может быть заменен равным ему множителем

$\frac{sx}{x-s}$. Равенство этих двух выражений вытекает из основного уравнения для простой линзы

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f'},$$

откуда следует

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{s}-\frac{1}{x},$$

или

$$\frac{s'x'}{x'-s'}=\frac{sx}{x-s}.$$

Пример. Определить хроматическую разность увеличений для линзы из стекла К8 ($\nu = 64$), если предмет на бесконечности, а входной зрачок находится в переднем фокусе линзы (рис. II.40). Имеем $s' = f'$; $x' = \infty$, и, следовательно,

$$\frac{\delta L'}{l'}=-\frac{s'}{\left(1-\frac{s'}{x'}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{f\nu}=-\frac{1}{\nu}=-\frac{1}{64}=$$

$$=-1{,}5\%.$$

Рис. II.40

Применим формулу (II.196*) для случая *нескольких бесконечно тонких линз на бесконечно малых расстояниях друг от друга*. Выше было показано, что для одной бесконечно тонкой линзы величина $\overline{C}$ равна

$$\overline{C}=-\frac{h}{f\nu}=-\frac{\Phi}{\nu},$$

где Φ — оптическая сила линзы.

В данной системе ординаты точек пересечения первого и второго вспомогательных лучей со всеми линзами системы h и y одинаковы для всей системы и могут быть выведены за знак суммы.

Формула (II.196*) принимает тогда вид

$$\frac{\delta L'}{l'}=-\frac{yh}{J}\sum\frac{\Phi}{\nu}.$$

Но, как было показано, для простой линзы

$$\frac{hy}{J}=\frac{sx}{x-s}=\frac{s'x'}{x'-s'}.$$

Это соотношение остается в силе и здесь; поэтому

$$\frac{\delta L'}{l'} = -\frac{s'x'}{x'-s'} \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\Phi_i}{\nu_i}, \qquad (II.200)$$

где Φ_i — оптическая сила i-й линзы системы; ν_i — коэффициент Аббе стекла этой же линзы. Суммирование распространяется на все t линз системы.

Хроматическая аберрация высших порядков

Хроматические аберрации второй группы относятся исключительно к конечным апертурам или к конечным углам поля зрения. Они возникают оттого, что аберрации третьего, пятого и более высоких порядков зависят от показателей преломления и, следовательно, вид пятен рассеяния меняется с цветом лучей, создающих картину изображения: пятна кажутся окрашенными.

Этот эффект является вторичным. Уже сами по себе аберрации — величины малые, а изменения их с длиной волны составляют только небольшую долю их величины, поэтому сравнительно редки случаи, когда хроматические аберрации этой группы оказывают заметное влияние на качество изображения, даваемого системой. Можно отметить следующие случаи: хроматическая разность сферических аберраций в микроскопических объективах; хроматическая разность увеличений для больших углов поля зрения в широкоугольных фотографических объективах и т. д.

Вторичный спектр или остаточная хроматическая аберрация положения

При наличии не менее двух стекол в оптической системе всегда можно подбором фокусных расстояний отдельных линз системы свести в пространстве изображений в одну точку на оси два луча различных длин волн, например C и F; но при этом лучи других длин волн не пересекают ось в той же точке. Поэтому изображение, даваемое оптической системой с хорошим хроматическим исправлением для двух лучей, все-таки оказывается окрашенным. Эта остаточная хроматическая аберрация оптической системы оказывает иногда весьма заметное влияние на качество изображения, особенно в системах с большими фокусными расстояниями (астрономические объективы, коллиматоры для испытания оптических систем, перископы для подводных лодок и т. д.).

Допустим, что оптическая система в отношении хроматической аберрации исправлена для лучей двух цветов C и F. Представим графически величину s' как функцию от длины волны λ. Кривая зависимости s' от длины волны λ имеет вид, представленный на рис. II.41. Отметим на этой кривой экстремальную точку e.

Условимся расстояние между абсциссой точки e и общей абсциссой точек C и F называть вторичным спектром оптической системы для пары лучей C и F; тогда

$$\delta s'_{eF} = s'_F - s'_e.$$

Определим величину вторичного спектра для системы бесконечно тонких линз, находящихся в соприкосновении.

По-прежнему будем считать, что хроматическая аберрация положения исправлена для пары лучей двух цветов, условно обозначаемых через F и C. Кроме этих двух лучей рассмотрим лучи K и L, соответствующие двум длинам волн K и L. Хроматическая аберрация для этих лучей может быть вычислена с помощью формулы (II.185), а именно:

Рис. II.41

$$\delta s'_{KL} = -s'^2 \sum \frac{\Phi_i}{\nu_i},$$

где Φ_i — оптическая сила линзы i (для длины волны, лежащей между K и L), а $\nu_i = \frac{n_i - 1}{n_L - n_K}$; n_i — показатель преломления для средней длины волны.

Вводим следующий ряд обозначений:

$$\psi_i = \frac{\Phi_i}{n_i - 1};$$

$$m = -\frac{F}{s'^2};$$

$$\delta s'_{CF} = s'_F - s'_C;$$

$$\delta s'_{KL} = s'_L - s'_K;$$

$$p_{KL} = \frac{n_L - n_K}{n_F - n_C}.$$

Вводим также обозначение приведенной оптической силы $\varphi_i = F\Phi_i$, где F — фокусное расстояние всей системы; Φ_i — оптическая сила i-й линзы.

Двухлинзовые объективы. Условие масштаба дает

$$\frac{1}{F} = \Phi_1 + \Phi_2,$$

откуда

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

Хроматическая аберрация $\delta s'_{CF}$ согласно формуле (II.185) равна

$$\delta s'_{CF} = -\frac{s'^2}{F} \sum \frac{\Phi_i}{\nu_i} = \frac{1}{m}\left(\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}\right).$$

Аналогично для $\delta s'_{KL}$

$$\delta s'_{KL} = \frac{1}{m}\left(\frac{\varphi_1}{\nu_{1KL}} + \frac{\varphi_2}{\nu_{2KL}}\right).$$

Вводя переменное ψ_1, получаем для условия масштаба

$$(n_1 - 1)\psi_1 + (n_2 - 1)\psi_2 = 1. \qquad \text{(II.201)}$$

Величины $\delta s'_{CF}$ и $\delta s'_{KL}$ принимают вид

$$(n_F - n_C)_1 \psi_1 + (n_F - n_C)_2 \psi_2 = m\delta s'_{CF};$$

$$(n_L - n_K)_1 \psi_1 + (n_L - n_K)_2 \psi_2 = m\delta s'_{KL}.$$

Исключение ψ_1 и ψ_2 из этих трех уравнений дает

$$\begin{vmatrix} n_1 - 1 & n_2 - 1 & -1 \\ (n_F - n_C)_1 & (n_F - n_C)_2 & -m\delta s'_{CF} \\ (n_L - n_K)_1 & (n_L - n_K)_2 & -m\delta s'_{KL} \end{vmatrix} \qquad \text{(II.202)}$$

или, при делении на произведение $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{\nu_1} & \frac{1}{\nu_2} & -m\delta s'_{CF} \\ \frac{(p_{KL})_1}{\nu_1} & \frac{(p_{KL})_2}{\nu_2} & -m\delta s'_{KL} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II.203)}$$

Если хроматическая аберрация положения устранена для лучей C и F, то для вычисления вторичного спектра нужно положить $\delta s_{CF} = 0$; $K = D$; $L = F$. Тогда уравнение (II.203) дает

$$m\delta s'_{DF} = \frac{(p_{DF})_2 - (p_{DF})_1}{\nu_2 - \nu_1}. \qquad \text{(II.204)}$$

Таким образом, величина вторичного спектра пропорциональна отношению разности частных относительных дисперсий к разности относительных дисперсий. Формула (II.204) приводит к простому графическому построению, позволяющему получить исчерпывающие сведения о возможностях, которые дают современные оптические стекла в отношении уменьшения вторичного спектра.

Отложим по оси абсцисс величины ν_{CF}, по оси ординат — p_{DF}. Каждому стеклу соответствует одна точка. На рис. II.42 построение выполнено для величин ν_{CF} и p_{eF}, где e означает *спектральную линию* с длиной волны 546,1 *нм* — ртутную зеленую линию. Чтобы определить величину вторичного спектра, которая получится у системы из двух каких-нибудь стекол,

достаточно соединить прямой точки, относящиеся к этим стеклам. Тангенс представляет собой величину

$$\frac{(p_{DF})_2 - (p_{DF})_1}{\nu_2 - \nu_1},$$

которая при умножении на коэффициент $-\frac{s'^2}{F'}$, не зависящий от свойств стекол, и дает величину вторичного спектра.

На рис. II.42 нанесены точки, соответствующие всем группам стекол каталога фирмы «Шотт»; то, что по оси ординат отложены

Рис. II.42

величины не p_{DF}, а p_{eF}, нисколько не влияет на выводы. Одного взгляда на этот рисунок достаточно, чтобы убедиться, насколько затруднен выбор стекол для получения системы с минимальным вторичным спектром: все точки лежат на одной прямой; поэтому величина вторичного спектра почти не зависит от выбора стекол, если пользоваться наиболее употребительными сортами. Изложенное дает возможность оценивать величину вторичного спектра объективов, исправленных хроматически. У двухлинзового объектива величина вторичного спектра, определенная на основании формулы (II.204) по данным каталогов любых оптических заводов, равна 1/2000 от величины $\frac{s'^2}{F'}$ для группы лучей C, D и F. Если система ахроматизована для лучей C и F, то луч D не является тем лучом, для которого величина s' достигает своего минимума, так как его длина волны (589 *нм*) лежит гораздо ближе к лучам C ($\lambda = 656$ *нм*), нежели к лучам F ($\lambda = 486$ *нм*). Минимум s' имеет место для луча с длиной волны $\lambda \approx 560$ *нм*, и если величину вторичного спектра определить разностью $s'_{560} - s'_F$ или $s'_{560} - s'_C$,

то она окажется около 1/1700 $\frac{s'^2}{F'}$ для большинства пар стекол. Итак, величина вторичного спектра зависит от того, для каких двух лучей устранена хроматическая аберрация положения данного объектива. Выбор этих лучей определяется назначением объектива; общеприняты несколько способов ахроматизации, что дает возможность разделить объективы на группы по этому признаку.

К первой группе относятся оптические приборы визуального назначения: астрономические объективы для визуального рассматривания, бинокли, геодезические трубы, перископы и т. д. В них «соединяют» лучи C и F, т. е. ставится условие, что $s'_F = s'_C$ и s' достигает минимума для $\lambda = 560$ *нм*. Величина вторичного спектра равна 1/1700 от $\frac{s'^2}{F'}$.

Во вторую группу — ее можно называть фотовизуальной — входят все фотообъективы и ряд астрономических объективов, служащих для фотографирования с визуальной установкой на фокус. Вторичный спектр имеет минимум s' для цвета F, а соединены лучи D и G' ($\lambda = 589$ и $\lambda = 434{,}1$). Величина вторичного спектра здесь достигает 1/1300 величины $\frac{s'^2}{F'}$.

В третьей группе объективов (астрофотографической) исправление делается таким образом, чтобы наилучшее изображение, получаемое всегда около минимума кривой s' в зависимости от λ, получалось для той длины волны, которая энергичнее всего действует на нормальные фотопластинки; такой волной обычно считают волну луча G' ($\lambda = 434{,}1$); здесь соединены лучи F и h ($\lambda = 486$ *нм* и $\lambda = 404$ *нм*). Такое исправление было бы наиболее желательным для фотообъективов тех камер, у которых наведение на фокус производится не с помощью матового стекла, а с помощью шкалы расстояний или дальномера, как это имеет место в современных малогабаритных камерах. У объективов этой группы длина вторичного спектра, измеряемая расстоянием $s'_F - s'_{G'}$ (при $s'_F = s'_h$), равна $\frac{1}{2500}\frac{s'^2}{F'}$.

Вычисление величины вторичного спектра для любой спектральной области. В настоящее время спектральная область, в которой работают оптические системы, значительно расширяется как в сторону инфракрасной, так и в сторону ультрафиолетовой области спектра. Отдельные группы оптических систем предназначены работать в самых разнообразных областях с более или менее раздвинутыми границами, поэтому нужно иметь возможность вычислить заранее величину вторичного спектра для любой выбранной спектральной области.

Кроме того, приходится довольно часто решать на практике такую задачу: если система исправлена для спектральной об-

ласти $K—L$, какова хроматическая аберрация для двух других длин волн? Эта задача может быть в некоторых особо важных для практики случаях сведена к расчету тех же систем для области $C—F$, но для этого необходимо знать, какое значение имеет хроматическая аберрация для области $C—F$, когда она исправлена в области $K—L$. Так обстоит, например, дело при расчете двухлинзовых склеенных объективов, для которых составлены специальные вспомогательные таблицы, одним из аргументов которых служит хроматическая аберрация, определяемая параметром C и относящаяся к цветам C и F.

Многие рассуждения, связанные с вопросом о вторичном спектре, очень упрощаются, если вместо переменной λ ввести другую переменную l, связанную с λ соотношением

$$l = \frac{1000}{\lambda - 200},$$

в котором λ должна быть выражена в микрометрах (*мкм*).

Выше было указано, что между показателем преломления n и длиной волны λ существует зависимость (Корню)

$$n = n_0 + \frac{c}{\lambda - \lambda_0},$$

где n_0, c и λ_0 — постоянные, зависящие от рассматриваемого материала. Величина λ_0 для большинства оптических стекол меняется в пределах 160—220. Если принять λ_0 равным 200, то погрешность в величине показателя невелика и приближенно можно считать, что величины n и l связаны линейным соотношением

$$n = n_0 + c'l,$$

где $c' = \frac{c}{1000}$.

При этом оказывается, что ряд функций, зависящих от показателей, выражается гораздо проще через переменную l, чем через переменную λ. Это естественно, так как большинство функций, с которыми приходится встречаться на практике (например, дисперсия призм, хроматические аберрации линз и т. д.), выражается почти линейно через показатель, а поэтому связано с длиной волны зависимостью гиперболического типа.

График зависимости s' от длины волны для ахроматической системы представляет собой сложную кривую; если же в качестве переменной по оси абсцисс отложить величину l, то кривая зависимости принимает вид параболы. При этом из большого материала по расчету двухлинзовых объективов, различно исправленных в отношении хроматической аберрации (а также из вычислений, произведенных с помощью формул для хроматической аберрации), вытекает, что параметр параболы, изображающей зависимость s' от l, остается практически постоянным.

На основании сказанного возникает возможность выразить величину $s'_\lambda - s'_0$ (где s'_λ относится к лучу с длиной волны λ, а s'_0 — к лучу, для которого величина s' принимает экстремальное, для двухлинзовых объективов — минимальное значение) с помощью формулы вида

$$s'_\lambda = s'_0 + a\,(l_\lambda - l_0)^2. \qquad (II.205)$$

Здесь $l_\lambda = \frac{1000}{\lambda - 200}$; $l_0 = \frac{1000}{\lambda_0 - 200}$; λ_0 — длина волны, соответствующая минимальному значению величины s'. Коэффициент a, зависящий от положения предмета и от фокусного расстояния объектива, равен 0,00120 при бесконечно удаленном предмете и $\frac{s'^2}{F'}$ 0,00120, когда предмет на конечном расстоянии. Поэтому формулу (II.205) можно написать в виде

$$s'_\lambda - s'_0 = \frac{s'^2}{F'}\,0{,}00120\,(l_\lambda - l_0)^2. \qquad (II.206)$$

Эта формула позволяет решать ряд задач, связанных с определением вида хроматической кривой. Чтобы облегчить решение этих задач, нужно иметь таблицу перехода от величин λ к величинам l (см. табл. II.9).

В табл. II.10 приведены величины λ и l для наиболее часто применяемых длин волн.

Применение величины l вместо λ позволяет решить следующую важную задачу: вычислить хроматическую аберрацию $\delta s'_{CF}$, если система ахроматизована для длин волн K и L.

Таблица II.9

λ в *нм*	l	λ в *нм*	l	λ в *нм*	l	λ в *нм*	l	λ в *нм*	l
360	6,250	400	5,000	500	3,333	600	2,500	700	2,000
365	6,061	410	4,762	510	3,226	610	2,439	710	1,961
370	5,882	420	4,545	520	3,125	620	2,381	720	1,923
375	5,714	430	4,348	530	3,030	630	2,326	730	1,887
380	5,556	440	4,167	540	2,941	640	2,273	740	1,852
385	5,405	450	4,000	550	2,857	650	2,222	750	1,818
390	5,263	460	3,846	560	2,778	660	2,174	760	1,786
395	5,128	470	3,704	570	2,703	670	2,128	770	1,754
400	5,000	480	3,571	580	2,632	680	2,083	780	1,724
		490	3,448	590	2,564	690	2,041	790	1,695
		500	3,333	600	2,500	700	2,000	800	1,667

Таблица II.10

Линия спектра	λ в *нм*	l	Линия спектра	λ в *нм*	l
A'	766,5	1,759	F	486,1	3,495
C	656,3	2,192	g	435,8	4,239
D	589,3	2,569	G'	434,1	4,272
d	587,6	2,580	h	404,7	4,885
e	546,1	2,889			

Пусть l_L и l_K — значения величины l при $\lambda = \lambda_L$ и $\lambda = \lambda_K$. Ввиду симметричности параболы по отношению к своей оси, экстремум кривой $s'(l)$ в точке $L_{\min}$ соответствует значению $l_{\min}$, лежащему точно посередине между l_L и l_K, т. е. $l_{\min} = \frac{l_K + l_L}{2}$ (рис. II.43). Вычислим разность $\delta s'_{CF} = s'_F - s'_C$.

Имеем

$$\left.\begin{aligned} s'_F &= s'_0 + \frac{s'^2}{F'}\,0{,}00120\,(l_F - l_{\min})^2; \\ s'_C &= s'_0 + \frac{s'^2}{F'}\,0{,}00120\,(l_C - l_{\min})^2; \end{aligned}\right\} \qquad (II.207)$$

$$s'_F - s'_C = 0{,}00120\,\frac{s'^2}{F'}\left[(l_F - l_0)^2 - (l_C - l_0)^2\right] =$$

$$= 0{,}00120\,\frac{s'^2}{F'}\,(l_F - l_C)\,(l_F + l_C - 2l_0) =$$

$$= 0{,}00120\,\frac{s'^2}{F'}\,(l_F - l_C)\,(l_F + l_C - l_K - l_L).$$

Подставляя численные значения l_F и l_C, получаем

$$s'_F - s'_C = \frac{s'^2}{F'}\,[0{,}0089 - 0{,}00156\,(l_K + l_L)]. \qquad (II.208)$$

Если хроматическая аберрация (в параксиальной области) для лучей K и L не равна нулю, а соответствует значению параметра C_{KL}, то величина C (для области C—F) может быть выражена через C_{KL} согласно формуле

$$C = \frac{1{,}303}{l_L - l_K}\,C_{KL} + 0{,}0089 - 0{,}00156\,(l_K + l_L), \qquad (II.208^*)$$

которая получится, если написать формулу (II.206) для длин волн C, F, K и L и исключить величины s'_0 и $l_{\min}$.

Часто бывает желательным заранее знать величину вторичного спектра двойного склеенного или несклеенного объектива $\Delta s'$ при исправленной хроматической аберрации для лучей двух спектральных линий K и L. Значение $\Delta s'$ — вторичного спектра для фокусного расстояния, равного единице, при бесконечно удаленном источнике в зависимости от спектральной области, в которой выполняется ахроматизация, — приводится в табл. II.11 для наиболее употребительных на практике спектральных линий A', C, D, e, F, G' и h. В клетке, находящейся на пересечении столбца и строки, соответствующих интересующим нас значениям K и L, находится значение вторичного спектра в десятитысячных долях фокусного расстояния. Например, если соединены лучи спектральных линий F и h, находим в таблице число 6; вторичный спектр равен 0,0006, или $\frac{1}{1700}$ фокусного расстояния. Для других комбинаций длин волн можно найти величины вторичного спектра на рис. II.44 (правая сторона), соединяя прямой числа λ 3-й и 5-й шкал и делая отсчет на 4-й шкале $10^4 m\Delta s'$. На левой стороне рис. II.44 приведены три шкалы: две одинаковых шкалы λ и между ними шкала 10^4C. При необходимости ахроматизировать систему для двух длин волн λ_K и λ_L следует соединить

Рис. II.43

Таблица II.11

	A'	C	D	e	F	G'	h
A'	0	0,7	2	4	9	18	30
C	0,7	0	1	2	6	13	22
D	2	1	0	0,6	2	8	16
e	4	2	0,6	0	1	6	12
F	9	6	2	1	0	2	6
G'	18	13	8	6	2	0	1,5
h	30	22	16	12	6	1,5	0

прямой линией точки, соответствующие этим значениям λ. Точка пересечения этой прямой со второй шкалой дает значение величины 10^4 C, при которой осуществляется ахроматизация для длин волн λ_K и λ_L.

Вторичный спектр сложных систем. Если система состоит из нескольких линз (или зеркал и линз), толщина которых мала по сравнению с их фокусным расстоянием, можно написать для

Рис. II.44

хроматической аберрации, соответствующей двум цветам F и D, выражение

$$m\delta s'_{DF} = -\sum h_i^2 \psi_i (n_F - n_D)_i, \qquad \text{(II.209)}$$

где $\psi_i = \dfrac{\varphi_i}{n_D - 1}$ — величина, не зависящая от длины волны, так как она равна

$$\psi_i = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}.$$

Предположим, что хроматическая аберрация исправлена для лучей C и F. Тогда

$$m\delta s'_{CF} = -\sum h_i^2 \psi_i (n_F - n_C)_i = 0. \qquad \text{(II.209*)}$$

Вводим некоторую, совершенно произвольную, величину p, определение которой вытекает из дальнейшего.

Вычитаем из уравнения (II.209) уравнение (II.209*), умноженное на p:

$$m\delta s'_{DF} = -\sum h_i^2 \psi_i \left[(n_F - n_D)_i - p(n_F - n_C)_i\right] =$$

$$= -\sum h_i^2 \frac{\varphi_i (n_F - n_C)_i}{n_i - 1} \left[\left(\frac{n_F - n_D}{n_F - n_C}\right)_i - p\right] =$$

$$= -\sum h_i^2 \frac{\varphi_i}{\nu_i} (p_i - p). \qquad \text{(II.210)}$$

Величину p можно принять равной одному из p_i; в этом случае соответственный член пропадет.

Любопытно, что выражение (II.210) отличается от выражения хроматической аберрации только множителем $(p_i - p)$.

Устранение вторичного спектра. Как видно из предыдущего, применение обычных сортов оптического стекла не позволяет устранить вторичный спектр. Для его уничтожения необходимо использовать либо особые сорта стекол, обладающие необычным ходом дисперсии, либо кристаллы. Среди последних следует указать на два, обладающие такими свойствами, которые делают их особенно пригодными для изготовления апохроматических объективов. Это флюорит и фтористый литий, зависимость показателя преломления которых от длины волны приведена в приложении I руководящего материала 230.10.03. В табл. II.12 приведены показатели преломления для наиболее часто употребляемых длин волн. Остальные оптические характеристики этих кристаллов даны ниже.

	Флюорит	Фтористый литий
n_D	1,43384	1,39205
$n_F - n_C$	0,00456	0,00400
$n_F - n_D$	0,00321	0,00276
ν	95,1	98,0
p_D	0,704	0,690

Таблица II.12

Линия спектра	λ	Флюорит	Фтористый литий
h	404,7	1,44152	1,39851
G'	434,1	1,43961	1,39692
F	486,1	1,43705	1,39481
e	546,1	1,43496	1,39304
D	589,3	1,43384	1,39205
C	656,3	1,43249	1,39081
A'	768,5	1,43093	1,38927

Относительные частные дисперсии p_D этих материалов имеют те же значения, какими обладают оптические стекла, для которых число Аббе ν равно 52—54, например стекло KF3 ($n_D = 1{,}5262$; $\nu = 51$; $p_D = 0{,}707$); стекло 02 ($n_D = 1{,}5294$; $\nu = 51{,}8$; $p_D = 0{,}705$).

Комбинация флюорита или фтористого лития с этими сортами оптического стекла приводит к хорошему исправлению вторичного спектра, по крайней мере, для видимой области. Однако следует учесть, что флюорит и фтористый литий обладают большими температурными коэффициентами расширения и изменения показателя преломления; это требует принятия особых мер при конструировании оптических приборов, работающих в условиях изменяющейся температуры.

Заводы оптического стекла делали многочисленные попытки разработать сорта стекол, с помощью которых вторичный спектр мог бы быть устранен. Для этого, как видно из формулы (II.204), необходимо, чтобы частные относительные дисперсии обоих стекол были одинаковы. При этом разности величин ν стекол должны быть по возможности бóльшими, так как значения оптических сил φ обратно пропорциональны разности $\nu_1 - \nu_2$, а относительное отверстие объектива тем больше, чем меньше значения величин φ. Для достижения этого попытки делались в двух направлениях: увеличения в кронах величины p_D и уменьшения ее в флинтах, где она всегда больше. В отношении кронов никаких обнадеживающих результатов не было получено. Удалось разработать несколько сортов флинта с укороченной синей частью, например для стекла KzF2 фирмы «Шотт» имеем

$$n_D = 1{,}5294; \quad \nu = 51{,}8; \quad \frac{n_F - n_e}{n_F - n_C} = 0{,}459.$$

В пару к этому стеклу подходит крон K7, у которого

$$n_D = 1{,}5111; \quad \nu = 60{,}6; \quad \frac{n_F - n_e}{n_F - n_C} = 0{,}457.$$

Такая комбинация стекол дает вторичный спектр, равный

$$\frac{0{,}459 - 0{,}457}{60{,}6 - 51{,}8} = \frac{0{,}002}{8{,}8} = \frac{1}{4400},$$

т. е. лишь в 2—2,5 раза меньше, чем у нормальной пары Ф1/K8, для которой

$$\frac{0{,}469 - 0{,}454}{64{,}1 - 36{,}9} = \frac{0{,}014}{27{,}2} = \frac{1}{1943}.$$

При этом в последнем случае величина φ в три раза меньше, чем в первом, а следовательно, светосила объективов, изготовленных из курц-флинта и крона, в три раза меньше, чем у нормальных. Кроме того, как это будет показано дальше, комбинации

стекол с малой разностью ν приводят к большой сферохроматической аберрации, и этот недостаток почти целиком обесценивает уменьшение вторичного спектра.

Пример. Рассмотрим комбинацию двух стекол Шотта K2 и KzF2, дающих полное уничтожение вторичного спектра для лучей C, e и F:

	n_D	ν_{CF}	p_{eF}	p_{Fg}
$K2$	1,5160	56,8	0,459	0,547
$KzF2$	1,5294	51,8	0,459	0,551

Вычислим для этой пары положение луча g. Формула (II.204) дает

$$m\delta s'_{Fg} = \frac{(p_{Fg})_2 - (p_{Fg})_1}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{0{,}551 - 0{,}547}{56{,}8 - 51{,}8} = 0{,}0008 = \frac{1}{1200}.$$

При фокусном расстоянии в 1 *м* луч g пересекает ось на 0,8 *мм* дальше, чем лучи C, D и F.

Трехлинзовые системы. Замена двухлинзовой системы трехлинзовой позволяет поставить еще одно добавочное условие, а именно: можно потребовать, чтобы лучи четырех цветов пересекали ось в одной и той же точке; пусть это, например, будут лучи C, e, F и K.

Поступая так же, как в случае двух линз, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&(n_1 - 1)\psi_1 + (n_2 - 1)\psi_2 + (n_3 - 1)\psi_3 = 1;\\
&(n_F - n_C)_1\psi_1 + (n_F - n_C)_2\psi_2 + (n_F - n_C)_3\psi_3 = m\delta s'_{CF};\\
&(n_F - n_e)_1\psi_1 + (n_F - n_e)_2\psi_2 + (n_F - n_e)_3\psi_3 = m\delta s'_{eF};\\
&(n_K - n_e)_1\psi_1 + (n_K - n_e)_2\psi_2 + (n_K - n_e)_3\psi_3 = m\delta s'_{eK}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II.211)}$$

Исключение величин ψ_1, ψ_2, ψ_3 из этой системы уравнений дает

$$\begin{vmatrix}
n_1 - 1 & n_2 - 1 & n_3 - 1 & -1\\
(n_F - n_C)_1 & (n_F - n_C)_2 & (n_F - n_C)_3 & -m\delta s'_{CF}\\
(n_F - n_e)_1 & (n_F - n_e)_2 & (n_F - n_e)_3 & -m\delta s'_{eF}\\
(n_K - n_e)_1 & (n_K - n_e)_2 & (n_K - n_e)_3 & -m\delta s'_{eK}
\end{vmatrix} = 0, \quad \text{(II.212)}$$

а после деления на $(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & -1\\
\frac{1}{\nu_1} & \frac{1}{\nu_2} & \frac{1}{\nu_3} & -m\delta s'_{CF}\\
\frac{(p_{eF})_1}{\nu_1} & \frac{(p_{eF})_2}{\nu_2} & \frac{(p_{eF})_3}{\nu_3} & -m\delta s'_{eF}\\
\frac{(p_{eK})_1}{\nu_1} & \frac{(p_{eK})_2}{\nu_2} & \frac{(p_{eK})_3}{\nu_3} & -m\delta s'_{eK}
\end{vmatrix} = 0. \quad \text{(II.212*)}$$

Если $\delta s'_{CF} = \delta s'_{eF} = 0$, то после некоторых очевидных сокращений получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} m\delta s'_{eK} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 \end{vmatrix} \qquad (II.213)$$

где для краткости положено $p = p_{eF}$ и $p' = p_{eK}$. Вторичный спектр $m\delta s'_{eK}$ равен

$$(\nu_2 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_1)\left(\frac{p_3 - p_1}{\nu_3 - \nu_1} - \frac{p_2 - p_1}{\nu_2 - \nu_1}\right),$$

и для того, чтобы он не равнялся нулю, необходимо, чтобы точки на рис. II.42, соответствующие выбранным для расчета стеклам, не лежали на одной прямой. До появления курц-флинтов это условие было невыполнимо, так что вопреки утверждениям, встречающимся в некоторых курсах физики и астрономии, устранение вторичного спектра было неосуществимо даже при наличии трех сортов стекла. Впрочем, хотя наличие курц-флинтов позволяет получить знаменатель отличным от нуля в выражении для $\delta s'_{eK}$, подбор стекол, который обратил бы в ноль числитель этого выражения, весьма затруднителен.

Кроме того, необходимо подчеркнуть некоторую иллюзорность всех полученных результатов, в особенности в случае трехлинзовых систем, обусловленную тем, что ошибка в показателе преломления на одну-две единицы пятого знака после запятой — предел точности измерения показателя преломления современными точными методами — может весьма сильно изменить распределение хроматической аберрации в двухлинзовых, а тем более в трехлинзовых системах. Например, если взять уже примененную комбинацию стекол K2 и KzF2 по каталогу Шотта, то достаточно изменить показатель n_e у одного из этих стекол на 10^{-5}, не меняя при этом n_C и n_F, чтобы вторичный спектр стал 0,0002 вместо нуля; при фокусе в 5 *м* это дает уже 1 *мм*. В трехлинзовых объективах, вследствие малости знаменателя, неопределенность гораздо больше.

Следует добавить, что вследствие крутизны радиусов поверхностей малейшее отступление от правильной центрировки вызывает появление заметных аберраций, в частности комы. При выборе стекол для исправления или уменьшения вторичного спектра следует обратить на это особое внимание.

Хроматическая разность сферических аберраций

Величина сферической аберрации оптической системы зависит от длины волны лучей, для которых эта аберрация рассчитывается. Если система обладает большой апертурой, изменения

сферической аберрации с изменением длины волны могут становиться весьма значительными и этот недостаток может свести на нет исправление хроматической аберрации.

Пусть s'_λ — расстояние от последней поверхности системы до точки пересечения с осью луча, ордината которого на входном зрачке равна m. Если a, b, c — некоторые постоянные, от m не зависящие, то можно написать

$$s'_\lambda = (s'_\lambda)_0 + a_\lambda \sin^2 u_1 + b_\lambda \sin^4 u_1 + c_\lambda \sin^6 u_1 + \cdots$$

Рассмотрим два цветных луча C и F. Для них величины a, b, c принимают значения a_F, a_C; b_F, b_C; c_F, c_C. Поэтому

$$(s'_F)_m - (s'_C)_m = (s'_F)_0 - (s'_C)_0 + (a_F - a_C)\sin^2 u_1 + \\ + (b_F - b_C)\sin^4 u_1 \ldots \qquad \text{(II.214)}$$

Разность $(s'_F)_0 - (s'_C)_0$ представляет собой продольную хроматическую аберрацию параксиальных лучей; следующие члены выражения (II.214) обозначают хроматическую разность сферических аберраций, или, проще, «сферохроматическую» аберрацию. Практическое значение имеет только первый член разложения, содержащий разность $a_F - a_C$.

Таким образом, сферохроматическая аберрация определяется почти полностью разностью $a_F - a_C$, т. е. разностью сумм S_I для двух цветов. В принципе вычисление этой разности не представляет трудностей, так как достаточно продифференцировать S_I по показателям преломления и помножить каждую частную производную на конечную разность показателей $n_F - n_C$, чтобы получить с достаточной точностью искомое выражение. Однако даже в простейших случаях это выражение имеет настолько сложный вид, что до сих пор в литературе не опубликовано ни одной формулы для сферохроматической аберрации в общем случае. Автором такая формула была выведена для двухлинзовых склеенных бесконечно тонких объективов, исправленных в отношении хроматической аберрации.

Выведем формулу сферохроматической аберрации для бесконечно тонкой линзы.

В курсе Чапского — Эппенштейна [15] дана формула для сферической аберрации бесконечно тонкой линзы для бесконечно удаленного предмета, из которой можно вывести формулу для угловой аберрации $z' = -\frac{2\delta g'}{s'}$:

$$z' = h^3 \left[\frac{n+2}{n}\Phi\rho_1^2 - \frac{2n+1}{n-1}\Phi^2\rho_1 + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \Phi^3\right], \qquad \text{(II.215)}$$

где Φ — оптическая сила линзы; $\rho_1 = \frac{1}{r_1}$ — кривизна первой поверхности. Эту формулу легко получить из общей формулы для

сферической аберрации третьего порядка (II.142), если вместо α_2 написать его выражение через ρ_1: $\alpha_2 = h(n-1)\rho_1$, а α_3 приравнять $h\Phi$. Формула (II.215) удобна тем, что содержит кривизну $\rho_1 = \frac{1}{r_1}$, не зависящую от длины волны.

Имеем

$$z'_F - z'_C = \frac{dz'}{dn}(n_F - n_C).$$

Но

$$n_F - n_C = \frac{n_D - 1}{\nu};$$

$$\Phi_F - \Phi_C = (n_F - n_C)(\rho_1 - \rho_2) = \frac{\Phi}{\nu}.$$

После дифференцирования получаем

$$z'_F - z'_C = \frac{h^3}{\nu}\left[\frac{2+n^2}{n^2}\Phi\rho_1^2 - \frac{4n-1}{n-1}\Phi^2\rho_1 + \frac{n(3n-2)}{(n-1)^2}\Phi^3\right].$$

Последнюю формулу можно написать в виде

$$z'_F - z'_C = \frac{h^3}{\nu F^3}\left[\frac{2+n^2}{n^2}\bar{\rho}_1^2 - \frac{4n-1}{n-1}\bar{\rho}_1 + \frac{n(3n-2)}{(n-1)^2}\right],$$

где $\bar{\rho}_1 = F\rho_1 = \frac{F}{r_1}$, а F — фокусное расстояние линзы.

Можно преобразовать это выражение к виду

$$z'_F - z'_C = \frac{h^3}{\nu F^3}\left[p'_0 + A(\bar{\rho}_1 - \rho_0)^2\right], \qquad \text{(II.216)}$$

где

$$p'_0 = -\frac{n(4n^3 - 23n + 16)}{4(n-1)^2(2+n^2)};$$

$$A = \frac{2+n^2}{n^2};$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\,\frac{4n-1}{n-1}\,\frac{n^2}{2+n^2}.$$

В табл. II.13 приведены значения p'_0, A и ρ_0 как функции от n.

Сферохроматическую аберрацию нельзя устранить, так как ее минимальное значение обусловливается значением p'_0, которое для обычных значений n больше единицы; при этом линза имеет вид крутого мениска ($\rho_1 = 2{,}6$; $\rho_2 = 0{,}8$). Например, при $n = 1{,}5$, $\nu = 60$ и $\bar{\rho}_1 = 0$ имеем

$$z'_F - z'_C = \frac{h^3}{F^3}\,\frac{1}{60}\,(1{,}76 + 1{,}88\cdot 2{,}65^2) = \frac{h^3}{F^3}\,\frac{1}{4}.$$

При $\frac{2h}{F} = \frac{1}{5}$

$$z'_F - z'_C = \frac{1}{4000} \approx 1'.$$

В случае, когда предмет на конечном расстоянии, нужно исходить из формулы, приведенной в книге Чапского—Эппенштейна [15], а именно:

$$z' = h^3 \left[\frac{n+2}{n}\rho^2\Phi - \left(4\frac{n+1}{n}\sigma\Phi + \frac{2n+1}{n-1}\Phi^2\right)\rho + \right.$$

$$\left. + \frac{3n+2}{n}\sigma^2\Phi + \frac{3n+1}{n-1}\Phi^2\sigma + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\Phi^3\right], \qquad \text{(II.217)}$$

где $\sigma = \frac{1}{s_1}$; s_1 — расстояние от линзы до предмета.

Таблица II.13

n	A	ρ_0	ρ_0'
1,5	1,889	2,65	1,76
1,55	1,831	2,58	1,38
1,60	1,780	2,53	1,07
1,65	1,732	2,48	0,82
1,70	1,691	2,44	0,62

Предположим, что линзе с номером κ предшествует оптическая система, обладающая хроматической аберрацией положения $\Delta s'_{\kappa-1}$; пусть $\Delta h_{\kappa-1}$ — разность высот параксиальных лучей C и F на предыдущей линзе с номером $\kappa - 1$.

При вычислении разности $z'_F - z'_C$ нужно будет учесть влияние изменения показателя преломления n, оптической силы Φ, величины $\sigma_\kappa = \frac{1}{s_\kappa}$, высоты пересечения h_κ.

В статье автора [14] влияние первых трех перечисленных величин выведено, а именно:

$$\left.\begin{aligned} z'_F - z'_C = \frac{h^3}{F^3\nu}\left[\frac{2+n^2}{n}\bar{\rho}^2 - \left(4\frac{n^2+1}{n^2}\bar{\sigma} + \frac{4n-1}{n-1}\right)\bar{\rho} + \right. \\ \left. + \frac{3n^2+2}{n^2}\bar{\sigma}^2 + \frac{6n-2}{n-1}\bar{\sigma} + \frac{n(3n-2)}{(n-1)^2}\right] + \\ + \frac{h^3}{F^2}\left(-4\frac{n+1}{n}\bar{\rho} + 2\frac{3n+2}{n}\bar{\sigma} + \frac{3n+1}{n-1}\right)(\sigma_F - \sigma_C), \end{aligned}\right\} \text{(II.218)}$$

где $\bar{\sigma} = \frac{F}{s}$.

Остается учесть влияние изменения высоты пересечения h_κ. Вычислим Δh_κ. Из формулы перехода

$$h_\kappa = h_{\kappa-1} - d_{\kappa-1}\alpha_\kappa$$

получаем

$$\Delta h_\kappa = \Delta h_{\kappa-1} - d_{\kappa-1}\Delta\alpha_\kappa.$$

Рис. II.45

Вычислим $\Delta\alpha_\kappa$ по известным $\Delta s'_{\kappa-1}$ и $\Delta h_{\kappa-1}$. Пусть $\Delta g'$ (рис. II.45) — поперечная хроматическая аберрация, равная $\Delta s'_{\kappa-1}\alpha_\kappa$. Разность $\Delta\alpha_\kappa$ углов α_κ, соответствующих лучам C и F,

равна (с точностью до членов второго порядка малости)

$$\Delta\alpha_\kappa = \frac{-\Delta g'_{\kappa-1} + \Delta h_{\kappa-1}}{s'_{\kappa-1}} = \frac{-\Delta s'_{\kappa-1}\alpha_\kappa + \Delta h_{\kappa-1}}{s'_{\kappa-1}}.$$

Отсюда

$$\Delta h_\kappa = \Delta h_{\kappa-1} - d_{\kappa-1}\frac{-\Delta s'_{\kappa-1}\alpha_\kappa + \Delta h_{\kappa-1}}{s'_{\kappa-1}} = \Delta h_{\kappa-1}\left(1 - \frac{d_{\kappa-1}}{s'_{\kappa-1}}\right) +$$

$$+ d_{\kappa-1}\frac{\Delta s'_{\kappa-1}\alpha_\kappa}{s'_{\kappa-1}} = \Delta h_{\kappa-1}\frac{s_\kappa}{s'_{\kappa-1}} + d_{\kappa-1}\frac{\Delta s'_{\kappa-1}\alpha_\kappa}{s'_{\kappa-1}} =$$

$$= \Delta h_{\kappa-1}\frac{h_\kappa}{h_{\kappa-1}} + \frac{d_{\kappa-1}\alpha_\kappa^2\Delta s'_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}},$$

или

$$\frac{\Delta h_\kappa}{h_\kappa} = \frac{\Delta h_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}} + \frac{d_{\kappa-1}}{h_\kappa h_{\kappa-1}}\alpha_\kappa^2\Delta s'_{\kappa-1}.$$

Но

$$\alpha_\kappa^2\Delta s'_{\kappa-1} = \sum_1^{\kappa-1} h_i^2\Phi_i C_i,$$

причем суммирование производится по всем линзам, предшествующим κ-й.

Следовательно,

$$\frac{\Delta h_\kappa}{h_\kappa} = \frac{\Delta h_{\kappa-1}}{h_{\kappa-1}} + \frac{d_{\kappa-1}}{h_\kappa h_{\kappa-1}}\sum_1^{\kappa-1} h_i^2\Phi_i C_i.$$

Напишем эти соотношения для $\kappa = 2, 3, 4, \ldots$

$$\frac{\Delta h_1}{h_1} = 0;$$

$$\frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{d_1}{h_1 h_2} h_1^2\Phi_1 C_1;$$

$$\frac{\Delta h_3}{h_3} = \frac{d_1}{h_1 h_2} h_1^2\Phi_1 C_1 + \frac{d_2}{h_2 h_3}\left(h_1^2\Phi_1 C_1 + h_2^2\Phi_2 C_2\right)$$

и т. д.

Обозначим для краткости

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=i}\frac{d_\kappa}{h_\kappa h_{\kappa+1}} = \sigma_{i+1} \quad \text{и} \quad h_i^2\Phi_i C_i = \overline{C}_i.$$

Тогда

$$\frac{\Delta h_\kappa}{h_\kappa} = \overline{C}_1\sigma_\kappa + \overline{C}_2(\sigma_\kappa - \sigma_2) + \overline{C}_3(\sigma_\kappa - \sigma_3) + \ldots + \overline{C}_{\kappa-1}(\sigma_\kappa - \sigma_{\kappa-1})$$

или

$$\frac{\Delta h_\kappa}{h_\kappa} = \sigma_\kappa\sum_1^{\kappa-1}\overline{C} - \sum_1^{\kappa-1}\sigma\overline{C}. \qquad \text{(II.219)}$$

Воспользуемся второй формулой Зейделя (II.52):

$$\sigma_\kappa = \frac{1}{J}\left(\frac{y_\kappa}{h_\kappa} - \frac{y_1}{h_1}\right).$$

Заменяя σ его значением через y и h, получаем после ряда операций, аналогичных тем, которые были приведены при выводе хроматической аберрации увеличений,

$$\frac{\Delta h_\kappa}{h_\kappa} = \frac{1}{J}\left(\frac{y_\kappa}{h_\kappa}\sum_1^{\kappa-1}\bar{C} - \sum_1^{\kappa-1}\frac{y\bar{C}}{h}\right). \qquad \text{(II.220)}$$

Вычисляем влияние изменения высоты h_κ.

Обозначим для краткости

$$\bar{\rho} = \frac{F}{r}; \qquad \bar{\sigma} = \frac{F}{s};$$

$$\left[\frac{n+2}{n}\bar{\rho}^2 - \left(4\,\frac{n+1}{n}\bar{\sigma} + \frac{2n+1}{n-1}\right)\bar{\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{3n+2}{n}\bar{\sigma}^2 + \frac{3n+1}{n-1}\bar{\sigma} + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\right] = p_\kappa.$$

Формула (II.217) для z' при этих обозначениях может быть написана в виде

$$z' = \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^3}\,p_\kappa. \qquad \text{(II.221)}$$

Изменение h на Δh приводит к изменению z' на $\Delta z'$:

$$\Delta z' = \frac{3h_\kappa^2}{F_\kappa^3}\,p_\kappa\,dh_\kappa = \frac{3h_\kappa^3}{F_\kappa^3}\,p_\kappa\,\frac{dh_\kappa}{h_\kappa}. \qquad \text{(II.222)}$$

Пользуясь формулами (II.218) и (II.222), получаем

$$z'_F - z'_C = \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^3 \nu_\kappa}\left[\cdot\;\cdot\;\cdot\right] + \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^2}\left(\cdot\;\cdot\;\cdot\right)(\sigma_F - \sigma_C)_\kappa + \frac{3h_\kappa^3}{F_\kappa^3}\,p_\kappa\,\frac{dh_\kappa}{h_\kappa},$$

причем

$$\left[\cdot\;\cdot\;\cdot\right] = \frac{2+n^2}{n^2}\bar{\rho}^2 - \left(4\,\frac{n^2+1}{n^2}\bar{\sigma} + \frac{4n-1}{n-1}\right)\bar{\rho} +$$

$$+ \frac{3n^2+2}{n^2}\bar{\sigma}^2 + \frac{6n-2}{n-1}\bar{\sigma} + \frac{n(3n-2)}{(n-1)^2};$$

$$\left(\cdot\;\cdot\;\cdot\right) = -4\,\frac{n+1}{n}\bar{\rho} + 2\,\frac{3n+2}{n}\bar{\sigma} + \frac{3n+1}{n-1}.$$

Но

$$(\sigma_F - \sigma_C)_\kappa = \left(\frac{1}{s_F} - \frac{1}{s_C}\right)_\kappa = \frac{-\Delta s_\kappa}{s_\kappa^2} = \frac{-\Delta s_\kappa \alpha_\kappa^2}{h_\kappa^2} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_1^{\kappa-1} h^2 \Phi C}{h_\kappa^2} = \frac{-\sum\limits_1^{\kappa-1} \overline{C}_i}{h_\kappa^2}.$$

Следовательно,

$$(z_F' - z_C')_\kappa = \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^3 \nu_\kappa}\left[\cdot\ \cdot\ \cdot\right] - \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^2}\left(\cdot\ \cdot\ \cdot\right)\frac{\sum\limits_1^{\kappa-1} \overline{C}_i}{h_\kappa^2} +$$

$$+ \frac{3h_\kappa^3}{JF_\kappa^3} p_\kappa \left(\frac{y_\kappa}{h_\kappa}\sum_1^{\kappa-1} \overline{C} - \sum_1^{\kappa-1} \frac{y_\kappa \overline{C}}{h_\kappa}\right) =$$

$$= \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^3}\left\{\frac{1}{\nu_\kappa}\left[\cdot\ \cdot\ \cdot\right] - \frac{F_\kappa}{h_\kappa^2}\left(\cdot\ \cdot\ \cdot\right)\sum_1^{\kappa-1} \overline{C} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{J} p_\kappa \left(\frac{y_\kappa}{h_\kappa}\sum_1^{\kappa-1} \overline{C} - \sum_1^{\kappa-1} \frac{y\overline{C}}{h_\kappa}\right)\right\}.$$

После очевидных упрощений получаем

$$(z_F' - z_C')_\kappa = \frac{h_\kappa^3}{F_\kappa^3}\left\{\frac{1}{\nu_\kappa}\left[\cdot\ \cdot\ \cdot\right] + \left[\frac{3}{J}\frac{y_\kappa}{h_\kappa} p_\kappa - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{F_\kappa}{h_\kappa^2}\left(\cdot\ \cdot\ \cdot\right)\right]\sum_1^{\kappa-1} \overline{C} - \frac{3}{J} p_\kappa \sum_1^{\kappa-1} \frac{y\overline{C}}{h_\kappa}\right\}. \qquad \text{(II.223)}$$

Поперечная аберрация $\delta g'$ связана с угловой $\Delta z'$ формулой $-\delta g' = \Delta z' s'$, откуда $n'\alpha'\delta g' = -n' h \Delta z'$.

Подставляя вместо $\Delta z'$ его выражение из (II.223), получаем

$$n'\alpha'\delta g' = -n' \frac{h_\kappa^4}{F_\kappa^3}\left\{\frac{1}{\nu_\kappa}\left[\cdot\ \cdot\ \cdot\right] + \left[\frac{3}{J}\frac{y_\kappa}{h_\kappa} p_\kappa - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{F_\kappa}{h_\kappa^2}\left(\cdot\ \cdot\ \cdot\right)\right]\sum_1^{\kappa-1} \overline{C} - \frac{3}{J} p_\kappa \sum_1^{\kappa-1} \frac{y\overline{C}}{h_\kappa}\right\}. \qquad \text{(II.224)}$$

Если система состоит из q компонентов, то получаем

$$n'\alpha'\delta g' = -\sum_{1}^{q} n' \frac{h_\kappa^4}{F_\kappa^3}\left\{\frac{1}{\nu_\kappa}\left[\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \right] + \cdot\ \cdot\ \cdot\right\}. \qquad (\text{II}.224^*)$$

Другой возможный, но, по-видимому, не приведший пока к удобным формулам способ аналогичен в принципе тому, с помощью которого находят фокус меридионального бесконечно тонкого пучка; но здесь дифференцирование происходит по показателю преломления. Эта задача представляет трудности чисто технического характера, и ее успешное решение, по-видимому, вполне возможно.

Исправление сферохроматической аберрации в большинстве оптических систем вызывает серьезные затруднения. Впервые на нее обратил внимание Гаусс и, вычисляя радиусы кривизны астрономического двухлинзового объектива, исправил ее. Исправление этой аберрации в двухлинзовых системах возможно только за счет апланатизма, т. е. система, исправленная в отношении хроматической разности сферических аберраций, обладает значительной комой. При этом радиусы кривизны системы, удовлетворяющей условию Гаусса, очень малы, что приводит к большим толщинам линз. Гаусс, очевидно, переоценил влияние на качество изображения хроматической разности сферических аберраций, считая ее главной причиной, наблюдающейся в длиннофокусных астрономических объективах большой хроматической аберрации. На самом деле этот хроматизм вызывается вторичным спектром. В настоящее время гауссово условие в астрономических объективах не выполняется, так как выполнение условия апланатизма имеет гораздо большее значение. Только в апохроматических объективах микроскопа, где изображение точки на оси системы должно быть безупречным, условие Гаусса должно быть удовлетворено с возможной точностью. В современных фотографических объективах с большой светосилой также необходимо считаться с этим условием, но не следует придавать ему излишнего значения по примеру Рудольфа, высказавшего предположение, что уничтожение хроматической разности сферических аберраций увеличивает глубину резкости объектива; это предположение, по-видимому, ни на чем не основано.

Хроматическая разность увеличений высших порядков

Хроматическая разность увеличений, согласно формуле (II.195), пропорциональна расстоянию l' от изображения точки до оптической оси системы. Строго говоря, формула (II.195) верна только в параксиальной области, а при переходе к конечным значениям углов она становится только приближенной.

Точное значение хроматической разности увеличений может быть получено только путем тригонометрических расчетов хода главных лучей. Зависимость между точным значением разности $L'_F - L'_C$ и величиной l' может быть представлена в виде ряда

$$L'_F - L'_C = al' + bl'^3 + cl'^5 + \ldots, \qquad (II.225)$$

где коэффициент a соответствует формуле (II.195) для параксиальных лучей, а коэффициенты b, c определяют аберрации того же названия, но более высоких порядков. На практике бывает достаточно ограничиться вторым членом bl'^3; третий член cl'^5 настолько мал, что им всегда можно пренебречь. Знание члена bl'^3 имеет существенное значение, так как он меняет (часто в благоприятную сторону) ожидаемые на основании формулы (II.195) результаты; но воздействовать на него в большинстве известных случаев не оказывается возможным.

Существует еще одна аберрация, родственная предыдущей, но отличающаяся от нее тем, что величина разности $L'_F - L'_C$ зависит от выбора луча, для которого она вычисляется. Может быть такой случай, что для главного луча ($m_1 = 0$) $L'_F - L'_C = 0$, но для лучей с $m_1 \neq 0$ разность $L'_F - L'_C$ отлична от нуля и изображение точки окрашено. Эта окраска пропадает при диафрагмировании зрачка. Она особенно заметна в светосильных фотографических объективах и в биноклях галилеевского типа; в последнем случае достаточно чуть-чуть изменить положение глаза относительно бинокля, чтобы заметить резкое изменение цветной каймы, наблюдаемой на краях поля зрения бинокля. С указанной аберрацией, аналитическое выражение которой никем еще не вычислялось, обычно нет возможности бороться.

Зависимость хроматических аберраций от положения предмета и входного зрачка

Хроматические аберрации как положения, так и увеличений зависят от расстояний до системы плоскостей объекта и входного зрачка. Этот вопрос изучен А. И. Тудоровским [1] на основании инвариантов Аббе Q_s и Q_x; мы его здесь решим с помощью формул Ньютона, относящихся к кардинальным точкам оптической системы.

Хроматическая аберрация положения. Пусть H' и F' — главная точка и фокус в пространстве изображений. Расстояние от последней поверхности системы до задней главной плоскости обозначим через σ'; от фокуса до изображения A' — через t'; соответствующие величины в пространстве предметов — через σ и t (рис. II.46).

Формула Ньютона дает

$$tt' = ff' = -\frac{n}{n'} f'^2.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dt}{t}+\frac{dt'}{t'}=\frac{2df'}{f'}+\frac{dn}{n}-\frac{dn'}{n'}.$$

Обозначим для краткости выражение $\frac{dn'}{n'}-\frac{dn}{n}$ через ∂. Тогда

$$\frac{dt}{t}+\frac{dt'}{t'}=\frac{2df'}{f'}-\partial. \qquad (II.226)$$

Но

$$t=s-\sigma-f;$$

$$t'=s'-\sigma'-f',$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} dt &= ds-d\sigma-df; \\ dt' &= ds'-d\sigma'-df'. \end{aligned}\right\} \qquad (II.227)$$

С другой стороны, t и t' могут быть выражены через фокусное расстояние и увеличение системы. Введем по-прежнему величину $\tau=\frac{1}{\gamma}$, где γ — угловое увеличение системы. На стр. 80 было показано, что

Рис. II.46

$$\Delta=f+t=\frac{f}{n}\,\frac{n\tau-n'}{\tau};$$

$$\Delta'=f'+t'=\frac{f}{n}\,(n\tau-n'),$$

откуда получаем для t и t'

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{f'}{\tau}; \\ t' &= f\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (II.228)$$

Подставив в уравнение (II.226) выражения (II.227), используя (II.228) и учитывая зависимость f от f', получаем после приведения подобных членов

$$ds'-\alpha\,ds=d\sigma'-\alpha\,d\sigma+df'\left(\frac{n'-n\tau}{n'}\right)^2+f'\partial\,\frac{n'-n\tau}{n'}. \qquad (II.229)$$

Здесь α означает продольное увеличение, т. е. $\alpha=\frac{n\tau^2}{n'}$.

Вводя линейное увеличение $\beta=\frac{\tau n}{n'}$, можно (II.229) написать в виде

$$ds'-\alpha\,ds=d\sigma'-\alpha\,d\sigma+(1-\beta)^2\,df'+f'(1-\beta)\beta\partial. \qquad (II.230)$$

Как и следовало ожидать, хроматическая аберрация положения зависит от четырех величин: хроматических аберраций двух

главных плоскостей $d\sigma$ и $d\sigma'$ и хроматических аберраций фокусов $\Delta f'$ и Δf (или df' и ∂).

В частном случае, когда $n = n'$ и $ds = 0$, имеем

$$ds' = d\sigma' - \alpha\, d\sigma + (1 - \beta)^2\, df'. \qquad \text{(II.230*)}$$

В еще более частном случае бесконечно тонких систем $d\sigma$ и $d\sigma'$ обращаются в нуль и получаем формулу

$$ds' = (1 - \beta)^2\, df' = \frac{s'^2}{f'^2}\, df', \qquad \text{(II.230**)}$$

которая для простой линзы легко приводится к формуле (II.184*).

Хроматическая разность увеличений. Рассмотрим сначала хроматическую разность увеличений в виде

$$d\left(\frac{l'}{l}\right) = \frac{dl'}{l'} - \frac{dl}{l}.$$

Очевидно, что от положения входного зрачка она не зависит.

Из формулы параксиальной оптики $\frac{l'}{l} = \frac{t'}{t}$ получаем дифференцированием

$$\frac{dl'}{l'} - \frac{dl}{l} = \frac{dt'}{t'} - \frac{df'}{f'} = \frac{ds' - d\sigma' - df'}{f\tau} - \frac{df'}{f'}. \qquad \text{(II.231)}$$

Переходим к более важной для практических целей хроматической разности увеличений $\delta L'$, отнесенной к одной общей плоскости установки. Как это было показано на стр. 182, переход от dl' к dL' происходит по формуле

$$dL' = dl' + ds' w'_D$$

или

$$\frac{dL'}{l'} = \frac{dl'}{l'} + \frac{ds'}{x' - s'}. \qquad \text{(II.232)}$$

Заметим, что здесь, во избежание недоразумений, величина β' заменена величиной w'_D.

Из (II.231) и (II.232) получаем

$$\frac{dL'}{l'} = \frac{dl}{l} + \frac{ds' - d\sigma' - df'}{f\tau} - \frac{df'}{f'} + \frac{ds'}{x' - s'} =$$

$$= \frac{dl}{l} + ds'\left(\frac{1}{f\tau} + \frac{1}{x' - s'}\right) - \frac{d\sigma' + df'}{f\tau} - \frac{df'}{f'}.$$

На стр. 82 было показано, что

$$x - s = f\frac{n'}{n}\,\frac{\tau' - \tau}{\tau\tau'},$$

где $\tau' = \frac{1}{\gamma'}$ — величина, обратная увеличению в зрачках.

Переход к величине $x' - s'$ с помощью инвариантной формулы

$$J = n'l'u' = nlu = n'(x' - s')w'u' = n(x - s)wu$$

дает

$$x' - s' = \frac{n}{n'}(x - s)\tau\tau' = f(\tau' - \tau).$$

Множитель при ds' равен $\frac{1}{f\tau} + \frac{1}{f(\tau' - \tau)} = \frac{1}{f}\frac{\tau'}{\tau(\tau' - \tau)}$. Заменяя ds' его значением из (II.230), производя приведение подобных членов и полагая $dl = ds = 0$, получаем для $\frac{\delta L'}{l'}$

$$(\tau' - \tau)\frac{dL'}{l'} =$$

$$= -\frac{df'}{f'}(1 - \beta)(1 - \beta') + (\beta - 1)\tau\partial + \frac{d\sigma'}{f} + \frac{d\sigma\tau\tau'}{f'}. \quad \text{(II.233)}$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Система в воздухе ($n = n'$):

$$(\tau' - \tau)\frac{dL'}{l'} = -\frac{df'}{f'}(1 - \beta)(1 - \beta') + \frac{1}{f}(d\sigma' - \beta\beta' d\sigma).$$

2. Бесконечно тонкая система в воздухе ($d\sigma = d\sigma' = 0$):

$$(\tau' - \tau)\frac{dL'}{l'} = -\frac{df'}{f'}(1 - \beta)(1 - \beta').$$

3. Симмётричная система в воздухе ($d\sigma = d\sigma'$; $\beta' = \tau' = 1$; $\partial = 0$):

$$(1 - \beta)\frac{dL'}{l'} = \frac{d\sigma'}{f}(1 - \beta);$$

$$\frac{dL'}{l'} = \frac{d\sigma'}{f}.$$

Любопытно, что хроматическая разность увеличений не зависит от положения предмета.

Если симметричная система бесконечно тонка, то $d\sigma' = 0$, а следовательно, $\frac{dL'}{l'} = 0$.

Таким образом, хроматические аберрации параксиальной оптики в самом общем случае зависят от четырех параметров (df', $d\sigma$, $d\sigma'$, $\frac{dn'}{n'} - \frac{dn}{n}$), для систем в воздухе — от трех (отпадает $\frac{dn'}{n'} - \frac{dn}{n}$); для бесконечно тонких систем в воздухе аберрации зависят от одного лишь параметра df'.

Можно ли получить систему, у которой исправлены обе хроматические аберрации параксиальных лучей для любого положения предмета? Из формулы (II.230) видно, что на поставленный вопрос можно ответить утвердительно лишь в том случае, когда

$\partial = \frac{dn'}{n'} - \frac{dn}{n} = 0$. Тогда при $d\sigma = d\sigma' = df' = 0$ аберрация ds' равна нулю для любого положения предмета. Если же показатели крайних сред не одинаковы, аберрация не может быть исправлена для любого положения предмета.

То же заключение можно сделать относительно второй хроматической аберрации параксиальных лучей, как это видно из формулы (II.233). Впрочем, при $\tau' = 0$, когда входной зрачок находится на бесконечности, хроматическая разность увеличений может быть исправлена при любом положении предмета даже для различных показателей крайних сред, если $df' = 0$, $d\sigma' = 0$. Это вытекает из элементарных геометрических соображений.

Вычисление хроматических аберраций кардинальных точек

Как было показано выше, хроматические аберрации параксиальных лучей могут быть получены для любого положения предмета и входного зрачка, если известны величины $\delta s'$, $\delta f'$, $\delta\sigma'$ и $\partial = \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n}$. Последняя может быть вычислена непосредственно. Первые три могут быть вычислены либо с помощью тригонометрического расчета хода двух параксиальных лучей, например лучей, падающих на систему параллельно оси в прямом и обратном ходе, либо на основании сумм $\sum hC$ и $\sum yC$.

1. Вычисление $\delta f'$, $\delta\sigma'$ и $\delta\sigma$ на основании тригонометрического расчета хода параксиальных лучей. Разность величин $s'_F - s'_C = \delta s'$, как вытекает из формулы $s' = \sigma' + f'$, равна

$$\delta s' = \delta\sigma' + \delta f'.$$

Величина $\delta f'$ равна разности $\left(\frac{h_1}{\alpha'_p}\right)_F - \left(\frac{h_1}{\alpha'_p}\right)_C$. Зная $\delta f'$ и $\delta s'$, получаем $\delta\sigma' = \delta s' - \delta f'$.

В обратном ходе можно получить соответственные величины δf и $\delta\sigma$; контролем может служить зависимость

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'},$$

откуда

$$\frac{\delta f'}{f'} - \frac{\delta f}{f} = \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n} = \partial.$$

2. Вычисление $\delta f'$ и $\delta\sigma'$ на основании сумм $\sum hC$ и $\sum yC$. Для продольной хроматической аберрации $\delta s'$ имеем:
при $\alpha'_p = 1$, $h_1 = 1$

$$\delta s' = -\frac{f'}{n'} \sum hC; \qquad \text{(II.234)}$$

при $\alpha_p' = 1$, $\overline{h}_1 = f'$ или $\overline{h}_p = s_p'$

$$\delta s' = -\frac{1}{n}\sum \overline{h}C.$$

Для аберрации фокусов при $y_1 = x_1$ можно использовать формулу (II.192)

$$\frac{\delta l'}{l'} = -\frac{\delta s'}{x' - s'} + \frac{1}{J}\sum yC - \partial. \qquad \text{(II.235)}$$

Замечая, что $J = n_p'\alpha_p' l_p' = n'f$ при $\alpha_p' = 1$ и $\beta_1 = 1$ и что $l' = f\beta_1$ при $\beta_1 = 1$, получаем $\delta l' = \delta f$; следовательно,

$$\frac{\delta l'}{l'} = \frac{\delta f}{f}.$$

Кроме того,

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta f'}{f'} - \partial;$$

с другой стороны,

$$x' - s' = \frac{l_p'}{\beta_p'} = \frac{f\beta_1}{\beta_p'} = f\tau'.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (II.235), получаем

$$n\delta f' = \frac{1}{\tau'}\sum \overline{h}C - \sum \overline{y}C \qquad \text{(II.236)}$$

при $\alpha_p' = 1$, $\overline{h}_1 = f'$, $\overline{y}_1 = x_1$, $\overline{h}_p = s_p'$.

Вычисление $\delta\sigma'$ производится на основании формулы

$$\delta\sigma' = \delta s' - \delta f'.$$

Подставляя вместо $\delta s'$ и $\delta f'$ их выражения из (II.234) и (II.236), получаем

$$n'\delta\sigma' = \frac{n'}{n}\sum \overline{y}C - \left(1 + \frac{n'}{n\tau'}\right)\sum \overline{h}C. \qquad \text{(II.237)}$$

Величина

$$\frac{f}{n}\,\frac{n\tau' + n'}{\tau'} = -\frac{f'}{n'}\,\frac{n\tau' + n'}{\tau'}$$

представляет собой расстояние от передней главной точки системы до центра входного зрачка или, точнее, до точки пересечения с осью вспомогательного луча. В случае, когда $n = n' = 1$, имеем

$$\delta\sigma' = \sum \overline{y}C - (1 + \gamma)\sum \overline{h}C. \qquad \text{(II.238)}$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ АБЕРРАЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ПУТЕМ И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

При расчете оптической системы часто бывает необходимо исследовать более или менее подробно некоторые из промежуточных вариантов как с целью оценки качества, так и с целью сравнения фактических результатов с ожидаемыми. При этом для облегчения сравнения и оценки очень широко пользуются графическим представлением аберраций. Полное и всестороннее исследование качества изображения оптической системы требует расчета такого количества лучей, которое позволило бы вычислить отклонения $\delta g'$ и $\delta G'$ для луча с любыми заранее заданными координатами l_1, m_1 и M_1 (или l'_p, m'_p и M_p). Для некоторых оптических систем с малыми относительными отверстиями отдельных линз и с малыми углами поля бывает достаточно знать только зейделевы суммы и коэффициенты хроматических аберраций, чтобы с достаточной точностью, не имея ни одного расчета хода луча через систему, вычислять отклонения $\delta g'$ и $\delta G'$. Чаще всего при наличии небольших аберраций пятого порядка можно ограничиться расчетом хода нескольких лучей; наконец, в современных светосильных и широкоугольных системах только очень большое число лучей позволяет решить поставленную задачу.

В дальнейших главах о расчете конкретных систем будет указано, как обычно поступают в различных случаях; здесь же будет рассматриваться решение задачи в общем виде. Пусть $2w_1$ — угол поля зрения системы и ω_1 — ее апертурный угол. Качество оптической системы характеризуют, оценивая изображение нескольких точек, отстоящих от оси на расстояниях, соответствующих различным углам поля. Число этих точек зависит от требований, предъявляемых к системе, и от характера изменения аберрации с углом поля. Обычно берут, кроме наклона $w = 0$, еще два наклона, например $w = \frac{w_1}{2}$ и w_1. Если аберрации системы для различных значений углов w сильно отличаются по величине, берут помимо $w = 0$ еще три, а иногда и четыре значения угла w.

Из каждой точки пространства предметов, соответствующей определенному значению w, проводят несколько лучей через различные точки входного зрачка в меридиональной плоскости ($M = 0$) и несколько косых ($M \neq 0$) лучей. Число лучей должно быть такое, чтобы возможно было вычислять путем интерполирования величины $\delta g'$ и $\delta G'$ для любого значения m_1 и M_1. Обычно ограничиваются тем, что удовлетворяют этому условию при $M = 0$, так как расчеты хода лучей в меридиональной плоскости сравнительно просты. При $M \neq 0$ рассчитывают ход нескольких лучей, выбранных обычно так, чтобы их точки пересечения с входным (или выходным) зрачком находились на окружностях

с центрами на оси системы. В случае виньетирования системой можно брать точки на входном зрачке по краям работающей для данного поля w_1 части зрачка; остальные точки подбираются таким образом, чтобы на основании возможно ограниченного их числа получить представление о зависимости $\delta g'$ и $\delta G'$ от m_1 и M_1. Графическое представление аберраций не только дает весьма наглядную картину искомых зависимостей между отдельными отклонениями и координатами лучей, но позволяет также обнаружить ошибки вычислений.

Аберрации для точки на оси ($w = 0$)

В случае, когда точка-предмет находится на оси, аберрации системы могут быть вычислены, если даны расстояние ρ от оси до точки пересечения луча с входным зрачком и длина волны λ или цвет луча. Так как в этом случае картина аберраций симметрична относительно оси, можно принять, что $\rho = m_1$. Рассчитываются тригонометрически ход параксиального луча $m_1 = 0$ и нескольких лучей (от одного до трех в зависимости от сложности кривой), пересекающих входной зрачок на разных расстояниях m_1 и обычно выбранных так, чтобы их квадраты составляли арифметическую прогрессию. Если радиус зрачка ρ, то берут m_1 равным либо $\rho\sqrt{\frac{1}{2}}$ и ρ, либо $\rho\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\rho\sqrt{\frac{2}{3}}$ и ρ и изображают графически зависимость величины $\delta s'$ от m_1 при постоянном λ. Принято откладывать $\delta s'$ по оси абсцисс, а m_1 — по оси ординат. Такие кривые (сплошные линии на рис. II.47) вычерчиваются обычно для трех цветов — C, D, F или C, e, F для «визуальных» систем; для фотографических объективов — в зависимости от их назначения. До 30-х годов нашего столетия, когда преобладали камеры, снабженные матовым стеклом для наводки на фокус, наибольший интерес представляли лучи D, F и G'. Фокусы для цветов D и G' должны были совпадать; коррекция аберраций производилась для цвета D или лучше — F. Для телеобъективов, работающих обычно со светофильтрами (оранжевыми и красными), рассчитывают аберрации для цветов D, C, A'. Дополнительную характеристику дает кривая отступления от отношения синусов, если она наносится на тот же график, что и сферическая аберрация, и в определенном масштабе (штриховая линия на рис. II.47).

Рис. II.47

В случаях, когда величина $\eta = \delta_s \sin u' + \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p}$ как функ-

ция от $\sin u'$ (или h_1, или m_1) быстро меняется, можно ожидать больших значений комы даже при малых углах поля. Необходимо построить график функции

$$\bar{\eta} = \left(\delta_s \sin u' + \frac{\delta s'_p}{x'_{0p} - s'_{0p}} \operatorname{tg} u'\right)$$

при аргументе $\sin u'$, как это было указано на стр. 117 и 152; производная от $\bar{\eta}$ по $\sin u'$, равная $\frac{d\bar{\eta}}{d \sin u'}$, пропорциональна коме согласно формуле

$$K = l' \frac{d}{d \sin u'} \left(\delta_s \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x'_0 - s'_0}\right).$$

Если $s = \infty$, имеем

$$K = l' \frac{d}{d \sin u'} \left(\frac{h_1}{f'} - \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x'_0 - s'_0}\right).$$

Пример. Один из вариантов расчета телеобъектива дал для величины $\eta = \left(\frac{h_1}{f'} - \sin u' + \frac{\delta s' \operatorname{tg} u'}{x'_0 - s'_0}\right) = f(\sin u')$ значения, приведенные в табл. II.14.

Можно графически определить производную $\frac{\partial f}{\partial \sin u'}$ (рис. II.48). В точках $h_1 = 33{,}30$ и $h_1 = 28{,}84$ она равна 0,004 и 0,000. Тригонометрический расчет комы для лучей, пересекающих входной зрачок на высотах $\pm 33{,}30$ и $\pm 28{,}84$, дает соответственно следующие результаты: $\delta g'_K = 0{,}0180$ и $\delta g'_K = 0{,}0001$.

Таблица II.14

h_1	$\sin u'$	$10^6 f(\sin u')$
16,65	0,0578	7
23,55	0,0818	3
28,84	0,1002	1
33,30	0,1155	15
35,30	0,1224	54

Рис. II.48

Умножая угловой коэффициент касательной на $l' = 5$ *мм*, получаем для комы при $m_1 = \pm 33{,}30$ $\delta g' = 0{,}020$, а при $m_1 = 28{,}84$ $\delta g' = 0{,}0$. Совпадение в пределах точности чертежа.

Техника вычисления производной от $f(\sin u')$

Вычисление комы с помощью вычерчивания кривой и построения касательной не всегда удобно; во многих случаях, когда функция $f(\sin u')$ изменяется достаточно медленно, можно использовать вычисления функции f для нескольких заранее определяемых значений. Например, можно условиться о вычислении f для значений m_1, убывающих по закону m, $m\sqrt{\frac{2}{3}}$, $m\sqrt{\frac{1}{3}}$, откуда следует, что и $\sin u'$ будет меняться по такому же закону (с достаточной для определения комы точностью).

Зная эти значения f, можно определить производную этой функции следующим образом.

Разложим $f(\sin u')$ в ряд по степеням $\sin u'$:

$$f(\sin u') = a\sin^3 u' + b\sin^5 u' + c\sin^7 u'.$$

Вместо $\sin u'$ введем отношение $\frac{\sin u'}{\sin u'_к} = s(u')$, где $u'_к$ — угол крайнего луча с осью в пространстве изображения. Тогда

$$\frac{df(\sin u')}{d(\sin u')} = 3as^2(u') + 5bs^4(u') + 7cs^6(u').$$

Зная величину $f(\sin u')$ для трех вышеупомянутых лучей, можно определить коэффициенты a, b и c. Обозначим для краткости $s(1)$, $s(^2/_3)$ и $s(^1/_3)$ величину $s(u')$ в случаях, когда отношение $\frac{\sin^2 u'}{\sin^2 u'_к}$ принимает соответственно значения 1, $^2/_3$ и $^1/_3$.

Не приводя промежуточных вычислений, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\sin u'_к\left[\frac{df(\sin u')}{d(\sin u')}\right]_{1/3} &= -\frac{1}{3}p_1 + 2p_2;\\
\sin u'_к\left[\frac{df(\sin u')}{d(\sin u')}\right]_{2/3} &= \frac{4}{3}p_1 + 3p_2 - 4p_3;\\
\sin u'_к\left[\frac{df(\sin u')}{d(\sin u')}\right]_{1} &= 12p_1 - 18p_2 + 9p_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (II.239)$$

где

$$p_1 = f(\sin u'_к);$$

$$p_2 = f\left(\frac{\sin u'_к}{\sqrt{^2/_3}}\right),$$

$$p_3 = f\left(\frac{\sin u'_к}{\sqrt{^1/_3}}\right).$$

Формулами (II.239) следует пользоваться только при плавном ходе функции $f(\sin u')$.

Степень применяемости упрощенной формулы для комы

Эта формула имеет вид

$$\bar{K}_m = 3l'\left(\delta_s + \frac{\delta s'}{x' - s'}\right).$$

Оценить ее погрешность можно следующим образом. Разлагаем в ряд величины $\delta s'$ и δ_s, удерживая два члена в разложении:

$$\frac{\delta s'}{x' - s'} = A \sin^2 u' + B \sin^4 u';$$

$$\delta_s = A_1 \sin^2 u' + B_1 \sin^4 u'.$$

Составим $f(u') = \left(\frac{\delta s'}{x' - s'} \operatorname{tg} u' + \delta_s \sin u'\right)$. Подставляя вместо $\frac{\delta s'}{x' - s'}$ и δ_s их значения, получаем

$$f(u') = (A + A_1)\sin^3 u' + \left[B + B_1 + \frac{1}{2}(A - A_1)\right]\sin^5 u';$$

$$K_m = l'\left\{3(A + A_1)\sin^2 u' + 5\left[B + B_1 + \frac{1}{2}(A - A_1)\right]\sin^4 u'\right\} =$$

$$= l'\left\{3\left(\frac{\delta s'}{x' - s'} + \delta_s\right) + 2\left[B + B_1 + \frac{5}{4}(A - A_1)\right]\sin^4 u'\right\};$$

$$K_m - \bar{K}_m = 2l'\left[B + B_1 + \frac{5}{4}(A - A_1)\right]\sin^4 u'. \qquad (II.240)$$

Из последней формулы следует, что приближенная формула, выведенная без учета влияния членов высшего порядка, учитывает бóльшую часть — примерно 3/5 — этих членов. Тем не менее пользоваться ею можно только в тех случаях, когда по виду кривой можно судить о том, что производная от функции $f(\sin u')$ не может принять больших значений. Приведенный в качестве иллюстрации пример выбран специально потому, что в нем явно заметна тенденция функции к быстрому изменению на краю отверстия. Системы, обладающие такими свойствами, имеют большую кому высших порядков по отверстию.

Рассмотрим в качестве иллюстрации к графическому изображению аберраций для точки на оси пример одного из промежуточных расчетов фотообъектива с $f' = 100$; $1:2$; $x' - s' = 107{,}5$. Цифровой материал приведен в табл. II.15.

График, соответствующий таблице, представлен на рис. II.49. На нем изображены сплошными линиями две кривые продольной сферической аберрации для лучей D и G' (началом считается параксиальное изображение для D) и штриховой линией — кривая $\delta f'$ для линии D.

Таблица II.15

m_1	s'_D	$\delta s'$	$\frac{m_1}{\sin u'}$	$\delta f'$	$100\,\frac{\delta f'}{f'}$	$100\,\frac{\delta s'}{x'-s'}$	η в %	$s'_{G'}$
0	62,102	0	100,363	0	0	0	0	62,236
12,55	61,988	—0,114	100,185	—0,178	—0,178	—0,106	—0,072	62,180
17,7	62,241	+0,139	100,365	+0,002	+0,002	+0,130	—0,128	62,496
26,1	62,504	+0,402	100,885	+0,522	+0,522	+0,374	+0,148	62,188

Из графика можно сделать следующие выводы.

1. Для желтых лучей (D), а также для фиолетовых (G') кривые сферической аберрации имеют две точки перегиба; следовательно, коэффициенты при членах различных порядков сферической аберрации имеют различные знаки.

Рис. II.49

2. Хроматическая аберрация положительна, или, как принято иногда говорить, она переисправлена, так как простые линзы всегда дают отрицательную аберрацию. Хроматическая разность сферических аберраций отрицательна, что является большой редкостью, так как эта аберрация обычно положительна.

Для контроля хроматической аберрации увеличений полезно применить формулу (II.198):

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn'_p}{n'_p} + \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} - \frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p},$$

которая позволяет на основании результатов тригонометрического расчета параксиальных лучей C и F или других цветов, рассчитанных для точки на оси, вычислить хроматическую разность увеличений, не рассчитывая главных лучей.

Аберрации для точки вне оси ($w \neq 0$)

Для графического представления степени сходимости лучей, излучаемых точкой, находящейся на некотором линейном или угловом расстоянии от оси, можно использовать прием, аналогичный тому, который применялся в этой же главе для характеристики отдельных аберраций. Делим плоскость входного зрачка на кольца одинаковой площади, описывая несколько окружностей с центром O на оси (рис. II.50). Квадраты их радиусов OC_1, OB_1, OA_1 образуют геометрическую прогрессию. Из центра проводим несколько прямых OA_1, OA_2, OA_3, . . ., $OA_к$, образующих между собой равные углы, например 15, 30 или 45°, и разделя-

ющих полуокружность на целое число частей, и через все точки пересечения прямых с окружностями $A_1, A_2, \ldots, A_к$; $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_к$; $C_1, C_2, \ldots, C_к$ проводим лучи из точки объекта. Вычисляем ход этих лучей через систему и находим отклонения $\delta g'_p$ и $\delta G'_p$ для каждого луча. Выбрав систему декартовых координат, откладываем в условном масштабе $\delta g'$ по оси ординат, $\delta G'$ — по оси абсцисс. Соединяя кривой все точки, соответствующие одной окружности в плоскости входного зрачка, при обязательном соблюдении порядка номеров получаем несколько кривых, расположение которых дает некоторое представление о характере распределения лучей: места, где точки располагаются гуще, указывают на те области в плоскости изображения, где освещенность будет наибольшая.

Рис. II.50

К сожалению, описанное графическое представление требует громадной работы вследствие большого числа косых лучей (на рис. II.50 их девять) и потому на практике может быть осуществлено только в весьма редких случаях; однако оно весьма желательно для изучения качества изображения точек, близких к краю

Рис. II.51

поля зрения, в системах с большими апертурными углами, где могут встретиться непредвиденно большие аберрации.

В качестве примера на рис. II.51 изображены точки пересечения шестнадцати лучей (четырех меридиональных и двенадцати косых) с плоскостью изображения, даваемого фотографическим объективом с относительным отверстием 1 : 4,5 и фокусным расстоянием 210 *мм*, для объекта-точки, расположенного в меридиональной плоскости на угловом расстоянии $w_1 = -15°$ от оси.

В правой части рисунка нанесены те точки входного зрачка, через которые проходят лучи. Точки соединены кривыми, одна из которых проходит через край действующей части входного зрачка, вторая подобна первой с коэффициентом подобия 0,7. В левой части рисунка даны кривые в плоскости изображения. Эти кривые сложны по очертаниям вследствие заметного влияния аберраций высших порядков.

Рис. II.52

Чаще всего работу ограничивают, изучая подробно отклонения $\delta g'$ меридиональных лучей, пересекающих плоскость входного зрачка в определенных точках, которые рационально расположить по закону корней квадратных (например, точки A_1, B_1, C_1, . . ., A_5 на рис. II.50). Число точек выбирается таким, чтобы можно было чертить с уверенностью кривую зависимости $\delta g'$ от m_1. Обычно требуется от трех до семи точек: три точки в обычных телескопических системах, пять — в фотографических объективах средних и больших апертур, семь — в микроскопах большой апертуры. Пример такого графического изображения зависимости величины $\delta g'$ (или l') от m_1 показан на рис. II.52. Можно на тот же рисунок нанести такие же кривые $\delta g'$ для тех же лучей, но с другой длиной волны, что даст представление о хроматической разности увеличений в зависимости от m_1.

Аберрации главных лучей и бесконечно тонких пучков, направленных вдоль этих лучей

Существует группа аберраций, зависящих только от угла поля зрения и не зависящих от апертуры системы: это астигматизм бесконечно тонких пучков и кривизна изображений этими пучками, дисторсия и хроматическая разность увеличений.

Следует представлять графически в виде кривых зависимость каждой из этих четырех аберраций от угла поля или от расстояния предмета (или изображения) от оси, откладывая аберрации по оси абсцисс и углы поля — по оси ординат. Для всех углов w, для которых уже сделаны тригонометрические расчеты хода главных лучей, рассчитывают положения фокусов бесконечно тонких астигматических пучков, осью которых служат главные лучи ($m_1 = M_1 = 0$).

Расстояния x'_m и x'_s этих двух фокусов (меридионального и сагиттального) от гауссовой плоскости наносятся на координатную сетку как функции от w_1, l_1 или l'_p. На рис. II.53 даны кривые, полученные таким образом для анастигмата типа триплет. Расстояние между кривыми, обозначенными сплошной и штрихпунктирной линиями, отсчитываемое параллельно оси абсцисс, дает астигматическую разность, а кривая (на чертеже — штриховая линия), проходящая посередине между ними, — так называемую среднюю кривизну изображения.

Рис. II.53

Пользуясь этими кривыми, можно исследовать аберрации высших порядков, определив несколько коэффициентов в разложениях поперечных аберраций — из числа тех коэффициентов, которые содержат одну из величин m или M в первой степени, например коэффициенты S_{III} и S_{IV} аберраций третьего порядка в формуле (II.58), b_1 и b_7 — аберраций пятого порядка в формуле (II.163). Характер кривых, приведенных на рис. II.53, указывает на наличие в разложении величины x'_s членов высших порядков с положительными коэффициентами, обусловливающих быстрое приращение величин x'_s в положительную сторону при возрастании угла w. Еще сложнее обстоит дело с кривой x'_m: два перегиба показывают, что среди коэффициентов разложения имеется не менее двух со знаком минус и одного — со знаком плюс.

Таким же образом можно изображать графически поперечную дисторсию $\delta g'_D$ или относительную дисторсию $\Delta = 100\dfrac{\delta g'_D}{l'_p}$, выраженную в процентах, как функцию от w_1 или l'_p (сплошная линия на рис. II.54). На тот же чертеж можно наносить и хроматическую разность увеличений $\dfrac{\delta L'_p}{l'_p}$, которую можно также выражать в процентах (штриховая линия на рис. II.54).

До сих пор не существует единообразия в выборе величины, откладываемой по оси ординат. В большинстве случаев этот выбор безразличен. Если предмет на бесконечности, откладывают обычно h_1, которое совпадает с m_1; иногда откладывают u', выраженное в радианах и помноженное на 100. Более рационально откладывать $\sin u'$, так как с этой величиной связано значение

потока, прошедшего через систему. Известно, что для точки на оси поток Ф, прошедший через систему с круглым входным зрачком и падающий на некоторый элемент поверхности ds, равен

$$\Phi = \pi B k ds \sin^2 u',$$

где B — яркость источника; k — коэффициент прозрачности; u' — апертурный угол со стороны изображения.

Аргумент $\sin u'$ имеет еще то удобство, что он не связан с фокусным расстоянием системы; кроме того, если откладывать величину η (см. стр. 213), определяющую кому при аргументе $\sin u'$, значение производной позволяет точно вычислить кому для любого малого угла поля.

Аргумент $\sin u'$ может применяться и в том случае, когда предмет находится на конечном расстоянии. Однако, как будет показано в следующем параграфе, аргумент $\operatorname{tg} u'$ также имеет преимущества и в некоторых случаях должен быть предпочтен.

Рис. II.54

Выбор плоскости наилучшего изображения

Продольные аберрации обычно отсчитываются от гауссовой плоскости изображения. Однако во многих случаях наименьший кружок рассеяния поперечной аберрации оказывается не в гауссовой плоскости. Выше рассматривалось изменение величины аберрационного кружка с изменением плоскости установки в том случае, когда сферическая аберрация определяется исключительно членом третьего порядка; наименьший кружок рассеяния тогда получается в плоскости, находящейся от гауссовой на расстоянии $^3/_4\Delta s'$, где $\Delta s'$ — величина продольной сферической аберрации крайнего луча пучка.

В общем случае, когда помимо члена третьего порядка имеются еще и члены пятого, седьмого и более высоких порядков, вопрос о нахождении наилучшей плоскости установки уже не может быть решен аналитически, но графически решается просто.

Пусть $\delta g'$ — поперечная сферическая аберрация для определенного луча, составляющего с осью угол u' после выхода из системы; Δ — расстояние от гауссовой плоскости до некоторой плоскости установки. Ясно, что в новой плоскости установки высота $\delta g'_\Delta$ точки пересечения луча с плоскостью равна

$$\delta g'_\Delta = \delta g' - \Delta \operatorname{tg} u'.$$

Если величина $\delta g'$ нанесена на график (рис. II.55) как функция от $\operatorname{tg} u'$, то, проводя на этом графике прямую, уравнение которой

$y = -\Delta \operatorname{tg} u'$, и измеряя по горизонтали расстояние между кривой $\delta g'$ и прямой, равное $\delta g'_\Delta$, получаем картину изменения $\delta g'_\Delta$ от угла u'. Подбирая наклон прямой OD таким образом, чтобы расстояние между кривой и прямой оказалось минимальным, что легко выполнить на глаз, получаем как положение наилучшей плоскости установки, так и значение остаточной поперечной аберрации в этой плоскости. На рис. II.55 наилучшая плоскость установки соответствует прямой OD.

Рис. II.55

Контроль результатов расчетов

При расчете хода лучей часто встречаются ошибки, не настолько грубые, чтобы сразу обратить на себя внимание, но все-таки несколько изменяющие картину аберраций и потому направляющие конструктора на неверный путь; поэтому ни одна из аберраций, полученных в результате расчета хода лучей, не должна остаться без контроля. Из многих возможных способов контроля остановимся только на интерполяционных способах и способах, основанных на применении теории аберраций.

Интерполяционные способы основаны на изучении при помощи графиков изменений функции при малых изменениях аргумента; все графики аберраций должны давать достаточно плавные кривые. При всей произвольности понятия о «плавности» этот способ в опытных руках является одним из более надежных. Для начинающего этот метод мало пригоден, так как он не исключает ошибок, в особенности систематических, и мало поучителен. Но в сомнительных случаях добавление одной «точки», т. е. результата расчета нового луча, может оказаться весьма полезным.

Применение теории аберраций для контроля результатов тригонометрических расчетов может быть удобным и весьма полезным во многих случаях. Для примера рассмотрим несколько приемов.

1. Зная первую сумму S_{I}, определяющую сферическую аберрацию третьего порядка, можно проверить ход кривой продольной сферической аберрации $\delta s'$ как функции от координаты на входном зрачке m_1 или от угла падающего луча с осью ω_1 в области, близкой к оси. Пользуясь формулой для продольной сферической аберрации третьего порядка

$$\delta s' = -\frac{\omega'^2}{2n'_p\alpha'^2_p} S_{\mathrm{I}}, \qquad (\mathrm{II}.241)$$

следует произвести вычисления для нескольких лучей, пересекающих входной зрачок на небольших высотах, и построить кривую зависимости $\delta s'$ от ω_1. Сравнивая ее с кривой, построенной на основании тригонометрических расчетов, можно судить о правильности последних.

2. Расчет положения фокуса бесконечно тонкого меридионального пучка может быть проверен, если имеются кривые, дающие зависимость между величиной меридионального отклонения $\delta g'$, полученной путем расчета хода луча через оптическую систему, и ординатой m_1 точки пересечения луча с плоскостью входного зрачка.

Рис. II.56

Предположим, что график составлен таким образом (см. рис. II.52), что по оси абсцисс отложены $\delta g'$ (или ординаты l' точек пересечения луча с гауссовой плоскостью изображения), а по оси ординат — величины m_1. Для составления такого графика требуется расчет хода от трех до пяти лучей.

Угловой коэффициент t касательной к кривой в точке (см. рис. II.52), для которой $m_1 = 0$, равен $t = \frac{d(\delta g')}{dm_1}$. С другой стороны, пусть (рис. II.56) $P'\bar{P}'$, $S'\bar{S}'$ — линии пересечения меридиональной плоскости с плоскостями выходного зрачка и изображения; Δ_m — расстояние от плоскости изображения до фокуса бесконечно тонкого меридионального пучка; $P'S' = s' - x'$. Рассмотрим два бесконечно близких меридиональных луча M_1N_1 и M_2N_2, пересекающихся в фокусе F бесконечно тонкого меридионального пучка; du' — угол между лучами M_1N_1 и M_2N_2; $d(\delta g') = N_1N_2$ — приращение l'_p при изменении угла u' на du'; $dm' = M_1M_2$ — приращение величины m' при том же изменении угла u'. Тогда из свойств подобия получаем

$$\frac{S'H}{P'H} = \frac{N_1N_2}{M_1M_2},$$

или

$$\frac{\Delta_m}{s' - x' + \Delta_m} = \frac{d(\delta g')}{dm'}.$$

Пренебрегая Δ_m по сравнению с $s' - x'$, можно написать

$$\Delta_m = (s' - x')\frac{d(\delta g')}{dm'}.$$

С другой стороны, полагая $dm' = dm_1 \frac{m'}{m_1}$, где $\frac{m'}{m_1}$ — увеличение в зрачках, имеем с достаточной степенью точности

$$\Delta_m = (s' - x') \frac{d(\delta g')}{dm_1} \frac{m_1}{m'}.$$

Но так как $\frac{d(\delta g')}{dm_1} = t$ — угловой коэффициент касательной, то

$$\Delta_m = (s' - x') t \frac{m_1}{m'}. \qquad (II.242)$$

Все величины: Δ_m, $s' - x'$, t, $\frac{m_1}{m'}$ — известны. Если равенство (II.242) не удовлетворяется, имеется ошибка либо в вычислении меридионального пучка, либо в вычислении хода одного из лучей, служивших для вычерчивания кривой $\delta g' = f(m_1)$.

Рис. II.57

Указанная проверка необходима, когда изучается новая система. Практика показывает, что ошибки в вычислениях положения фокусов меридиональных лучей встречаются сравнительно часто. Величину t, т. е. $\frac{d(\delta g')}{dm_1}$, определяют следующим образом. Проводится касательная к кривой $\delta g'$ в точке $m_1 = 0$ (рис. II.57), и определяются две точки пересечения этой касательной с двумя горизонтальными линиями, разность ординат которых равна круглому числу для Δm. Измеряют соответствующую разность абсцисс, учитывая, конечно, масштаб. Отношение $\frac{\Delta(\delta g')}{\Delta m'}$ представляет собой величину t.

3. Кому можно проверить, пользуясь формулой (II.92), приведенной на стр. 117. В наиболее часто встречающихся случаях, когда величина η мала и мало меняется, удобнее пользоваться более простой формулой

$$K = 3l'_p \left(\delta + \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} \right).$$

Напоминаем, что под K понимается величина

$$K = \frac{l'_{+m} + l'_{-m}}{2} - l'_0,$$

где l'_0 — высота, на которой луч с координатой $m_1 = 0$ пересекает плоскость изображения; l'_{+m} и l'_{-m} — такие же высоты для двух других лучей. Эту формулу можно написать еще и так:

$$K = \frac{\delta g'_{+m} + \delta g'_{-m}}{2} - \delta g'_0, \qquad (II.243)$$

поскольку

$$l'_{+m} = l'_0 + \delta g'_{+m}; \quad l'_{-m} = l'_0 + \delta g_{-m}.$$

Величину комы можно также проверить, используя второй член формулы (II.58), из которого получаем

$$\delta g'_к = K = -\frac{3}{2n'_p}\omega'^2_p w_1 S_{II} \quad (\alpha'_p = 1). \qquad (II.244)$$

4. Те же приемы сравнения аберраций, полученных тригонометрическим путем, с теми, которые вычисляются на основании сумм Зейделя, применимы для дисторсии, для хроматических аберраций положения и увеличений. К этому вопросу вернемся в гл. VI.

Все перечисленные способы контроля должны обязательно применяться при исследовании новых типов оптических систем, особенности которых еще мало известны. Только всестороннее их применение позволяет с достаточной степенью вероятности судить о правильности результатов тригонометрического расчета хода лучей, обнаруживать малейшие ошибки в этих расчетах. Начинающему конструктору необходимо приобрести привычку не использовать ни одного расчета хода лучей, не проверив так или иначе правильность результатов. Если перечисленные методы окажутся в каком-нибудь случае недостаточными, следует выработать иной способ контроля, отдавая предпочтение тем способам, которые основаны на теории аберраций, так как они являются наилучшими для изучения свойств системы. Наиболее популярный и часто применяемый, вследствие своей простоты, интерполяционный метод (расчет хода добавочных лучей) часто менее надежен и, во всяком случае, мало поучителен.

4. СВОДКА ВАЖНЕЙШИХ ФОРМУЛ

Формулы, связывающие координаты двух произвольных параксиальных лучей, проходящих через одну и ту же оптическую систему

Координаты первого луча: s и s' — абсциссы точек пересечения луча с осью до и после преломления, отсчитываемые от вершины соответствующей поверхности; h — высота пересечения луча с поверхностью; x, x' и y — те же координаты для второго луча; α и β — углы первого и второго луча с осью до преломления;

$$Q_s = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right);$$

$$Q_x = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'}\right);$$

$$J = nl\alpha; \quad \overline{J} = nm\beta; \quad n_к l_к \alpha_к = n_p l_p \alpha_p$$

при любых κ и p;

$$h_\kappa y_\kappa (Q_{x\kappa} - Q_{s\kappa}) = J = -\overline{J} \tag{II.50}$$

при любом κ.

Величины h и y связаны формулами

$$\frac{y_\kappa}{h_\kappa} = \frac{y_1}{h_1} + J\sigma_\kappa; \qquad \sigma_\kappa = \sum_2^\kappa \frac{d_{\nu-1}}{h_{\nu-1}h_\nu n_\nu}; \tag{II.52}$$

по аналогии

$$\frac{h_\kappa}{y_\kappa} = \frac{h_1}{y_1} + \overline{J}\overline{\sigma}_\kappa; \qquad \overline{\sigma}_\kappa = \sum_2^\kappa \frac{d_{\nu-1}}{y_{\nu-1}y_\nu n_\nu};$$

$$\overline{J} = n_1 y_1 h_1 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{s_1}\right).$$

В системах без отражающих поверхностей или с четным числом таковых

$$J = n'_p\alpha'_p l'_p = n'_p\alpha'_p\beta'_p (x'_p - s'_p) = n_1\alpha_1\beta_1 (x_1 - s_1).$$

Если предмет на бесконечности, то при $\alpha'_p = 1$; $n'_p = 1$; $f = -1$; $\beta_1 = 1$

$$J = -1 \ (\text{так как } l'_p = f\beta_1,\ J = n'_p f\beta_1).$$

Если в оптической системе имеется нечетное число отражающих поверхностей, то для предмета на бесконечности при $\alpha'_p = 1$; $n'_p = 1$; $\beta_1 = 1$

$$J = +1 \ (\text{так как } l'_p > 0).$$

Формулы для проекций поперечных аберраций третьего порядка в переменных x и s

Формулы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{n'_p\delta g'_p\alpha'_p}{h_1} &= \frac{m_1(m_1^2 + M_1^2)}{(x_1 - s_1)^3} s_1^3\overline{S}_{\mathrm{I}} - \frac{3m_1^2 + M_1^2}{(x_1 - s_1)^3} l_1 s_1^2 x_1 \overline{S}_{\mathrm{II}} + \\
&+ \frac{m_1 l_1^2}{(x_1 - s_1)^3} s_1 x_1^2 (3\overline{S}_{\mathrm{III}} + \overline{S}_{\mathrm{IV}}) - \frac{l_1^3}{(x_1 - s_1)^3} x_1^3 \overline{S}_{\mathrm{V}}; \\
2\,\frac{n'_p\delta G'_p\alpha'_p}{h_1} &= \frac{M_1(m_1^2 + M_1^2)}{(x_1 - s_1)^3} s_1^3\overline{S}_{\mathrm{I}} - \frac{2m_1 M_1}{(x_1 - s_1)^3} l_1 s_1^2 x_1 \overline{S}_{\mathrm{II}} + \\
&+ \frac{M_1 l_1^2}{(x_1 - s_1)^3} s_1 x_1^2 (\overline{S}_{\mathrm{III}} + \overline{S}_{\mathrm{IV}});
\end{aligned}\right\} \tag{II.48}$$

при этом

$$\left.\begin{aligned}
\bar{S}_{\mathrm{I}} &= \sum \left(\frac{h_к}{h_1}\right)^4 Q_{sк}^2 \Delta_к \frac{1}{ns};\\
\bar{S}_{\mathrm{II}} &= \sum \left(\frac{h_к}{h_1}\right)^3 \frac{y_к}{y_1} Q_{xк} Q_{sк} \Delta_к \frac{1}{ns};\\
\bar{S}_{\mathrm{III}} &= \sum \left(\frac{h_к}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_к}{y_1}\right)^2 Q_{xк}^2 \Delta_к \frac{1}{ns};\\
\bar{S}_{\mathrm{IV}} &= -\sum \left(\frac{h_к}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_к}{y_1}\right)^2 (Q_{xк} - Q_{sк})^2 \frac{1}{r_к} \Delta_к \frac{1}{n};\\
\bar{S}_{\mathrm{V}} &= \sum \left(\frac{h_к}{h_1}\right) \left(\frac{y_к}{y_1}\right)^3 Q_{xк} \times\\
&\times \left[(Q_{xк} - Q_{sк}) \frac{1}{r} \Delta_к \frac{1}{n} + Q_{xк}^2 \Delta_к \frac{1}{nx} \right].
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.49)$$

В этих формулах $\delta g'$ и $\delta G'$ проекции на меридиональную и экваториальную плоскости отклонения точки пересечения луча с плоскостью изображения, определяемого координатами l_1, m_1, M_1, от положения, соответствующего гауссовой оптике. Величина в числителе левой части инвариантна (она представляет собой инвариант Лагранжа—Гельмгольца) и позволяет перебросить аберрацию в любую среду. В случае, если переброска не нужна, лучше написать левую часть формул (II.48) в виде

$$\frac{2n'_p \delta g'_p \alpha'_p}{h_1} = \frac{2n'_p \delta g'_p}{s'_p} \frac{h_p}{h_1}$$

и аналогично для $\delta G'_p$.

Аберрации в переменных α

Переход от переменных x и s к переменным α и β производится с помощью формул

$$hQ_s = -\frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}}; \qquad h\Delta \frac{1}{ns} = \frac{\alpha'}{n'} - \frac{\alpha}{n}; \qquad \frac{h}{r} = \frac{n'\alpha' - n\alpha}{n' - n}.$$

Если принять условно $\alpha_1 = 1$, а следовательно, $h_1 = s_1$; $y_1 = x_1$, т. е. $\beta_1 = 1$, откуда вытекает $J = n_1 (x_1 - s_1)$, и помнить, что

$$\omega_1 = -\frac{m_1}{x_1 - s_1}; \qquad \Omega_1 = -\frac{M_1}{x_1 - s_1}; \qquad w_1 = \frac{l_1}{x_1 - s_1},$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}
-2n'_p \delta g'_p \alpha'_p &= \omega_1 (\omega_1^2 + \Omega_1^2) S_{\mathrm{I}} + (3\omega_1^2 + \Omega_1^2) w_1 S_{\mathrm{II}} +\\
&+ \omega_1 w_1^2 (3S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}) + w_1^3 S_{\mathrm{V}};\\
-2n'_p \delta G'_p \alpha'_p &= \Omega_1 (\omega_1^2 + \Omega_1^2) S_{\mathrm{I}} + 2\omega_1 \Omega_1 w_1 S_{\mathrm{II}} +\\
&+ \Omega_1 w_1^2 (S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}});
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.47)$$

при этом

$$\left.\begin{aligned}
&S_{\mathrm{I}} = \sum hP; \quad S_{\mathrm{II}} = \sum yP - J\sum W; \quad S_{\mathrm{IV}} = \sum \frac{\Pi}{h};\\
&S_{\mathrm{III}} = \sum \frac{y^2}{h} P - 2J \sum \frac{y}{h} W + J^2 \sum \frac{1}{h} \Delta \frac{\alpha}{n};\\
&S_{\mathrm{V}} = \sum \frac{y^3}{h^2} P - 3J \sum \frac{y^2}{h^2} W +\\
&+ J^2 \sum \frac{y}{h^2} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \Pi\right) - J^3 \sum \frac{1}{h^2} \Delta \frac{1}{n^2},
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.57)$$

где

$$W = \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\alpha}{n}; \quad P = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}}\right)^2 \Delta \frac{\alpha}{n}; \quad \Pi = \frac{\Delta\alpha n}{nn'}.$$

Разложение аберраций по координатам на выходном зрачке

В некоторых случаях, например, если предмет находится на бесконечности, а изображение на конечном расстоянии, удобнее пользоваться величинами m', M'.

При этом полагаем $\alpha'_p = 1$; $h_p = s'_p$; $y_1 = x_1$; $J = n_1\alpha_1 (x_1 - s_1) = n'_p (x'_p - s'_p)$.

Тогда получаем

$$-2n'_p\delta g'_p = \omega'_p (\omega'^2_p + \Omega'^2_p) S_{\mathrm{I}} + (3\omega'^2_p + \Omega'^2_p) w_1 S_{\mathrm{II}} +$$

$$+ \omega'_p w_1^2 (3S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}) + w_1^3 S_{\mathrm{V}}$$

и аналогично для $\delta G'$.

В случае, когда $s_1 = \infty$, $J = -n'_p F'$, где F' — заднее фокусное расстояние системы. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда $n' = 1$.

Удобно принять за единицу длины $F' = 1$. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned}
&-2\delta g'_p = \omega'_p (\omega'^2_p + \Omega'^2_p) S_{\mathrm{I}} + (3\omega'^2_p + \Omega'^2_p) w_1 S_{\mathrm{II}} +\\
&+ \omega'_p w_1^2 (3S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}) + w_1^3 S_{\mathrm{V}};\\
&-2\delta G'_p = \Omega'_p (\omega'^2_p + \Omega'^2_p) S_{\mathrm{I}} + 2\omega'_p \Omega'_p w_1 S_{\mathrm{II}} +\\
&+ \Omega'_p w_1^2 (S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}).
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.45)$$

В данном случае точка-объект лежит в меридиональной плоскости, причем

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= \sum hP; \quad S_{\mathrm{II}} = \sum hP\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}; \\ S_{\mathrm{III}} &= \sum hP\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2; \\ S_{\mathrm{IV}} &= -\sum\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n}\left(\text{или } S_{\mathrm{IV}} = \sum\frac{1}{h}\frac{\Delta\alpha n}{nn'}\right); \\ S_{\mathrm{V}} &= \sum\left[hP\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2 - J^2\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n}\right]\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.44)$$

при $\alpha_p' = 1$; $\beta_1 = 1$; $y_1 = x_1$.

Величины h вычисляются по формуле

$$h_{\kappa+1} = h_\kappa - \frac{d_\kappa}{F_\kappa'}\alpha_{\kappa+1},$$

причем $h_1 = 1$.

Если меридиональная плоскость повернута на угол $\psi = \frac{L_1}{l_1}$, то формулы (II.45) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -2n_p'\delta g_p' &= \omega_p'\left(\omega_p'^2 + \Omega_p'^2\right)S_{\mathrm{I}} + \left(3w_p'\omega_p'^2 + w_p'\Omega_p'^2 + \right. \\ &\left. + 2W_p'\omega_p'\Omega_p'\right)S_{\mathrm{II}} + \left(3w_p'^2\omega_p' + \omega_p'W_p'^2 + 2w_p'W_p'\Omega_p'\right)S_{\mathrm{III}} + \\ &+ J^2\omega_p'\left(w_p'^2 + W_p'^2\right)S_{\mathrm{IV}} + w_p'\left(w_p'^2 + W_p'^2\right)S_{\mathrm{V}}; \\ -2n_p'\delta G_p &= \Omega_p'\left(\omega_p'^2 + \Omega_p'^2\right)S_{\mathrm{I}} + \left(3W_p'\Omega_p'^2 + W_p'\omega_p'^2 + \right. \\ &\left. + 2w_p'\omega_p'\Omega_p'\right)S_{\mathrm{II}} + \left(3W_p'^2\Omega_p' + \Omega_p'\omega_p'^2 + \right. \\ &\left. + 2w_p'W_p'\omega_p'\right)S_{\mathrm{III}} + J^2\Omega_p'\left(w_p'^2 + W_p'^2\right)S_{\mathrm{IV}} + \\ &+ W_p'\left(w_p'^2 + W_p'^2\right)S_{\mathrm{V}}, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.46)$$

где $W_p' = \frac{L'}{x' - s'}$.

Если $\alpha_{\kappa+1} = \alpha_\kappa$, вычисление S_{III} и S_{V} может быть упрощено. В этом случае соответствующий член $S_{\mathrm{III}\kappa}$ равен $+J^2\frac{1}{r}\Delta\frac{1}{n}$ и $S_{\mathrm{V}\kappa} = -J\left(\beta_{\kappa+1}^2 - \beta_\kappa^2\right)$.

Влияние асферичности поверхностей

При наличии в системе асферических поверхностей вычисление сумм производится по обычным формулам с добавлением к величине P члена B, зависящего от деформации поверхности:

$$B = b\left(\frac{n'\alpha' - n\alpha}{n' - n}\right)^3(n' - n),$$

где b — коэффициент деформации; для асферических поверхностей второго порядка

$$b = -e^2.$$

Выражения для сумм и поперечных аберраций имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}}^* &= \sum h_\kappa (P_\kappa + B_\kappa);\\
S_{\mathrm{II}}^* &= \sum y_\kappa (P_\kappa + B_\kappa) - J \sum W_\kappa;\\
S_{\mathrm{III}}^* &= \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa} (P_\kappa + B_\kappa) - 2J \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa} W_\kappa +\\
&\quad + J^2 \sum \frac{1}{h_\kappa} \Delta_\kappa \frac{\alpha}{n};\\
S_{\mathrm{IV}} &= \sum \frac{1}{h_\kappa} \Pi_\kappa;\\
S_{\mathrm{V}}^* &= \sum \frac{y_\kappa^3}{h_\kappa^2} (P_\kappa + B_\kappa) - 3J \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa^2} W_\kappa +\\
&\quad + J^2 \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa^2} \left(3\Delta_\kappa \frac{\alpha}{n} + \Pi_\kappa\right) - J^3 \frac{1}{h_\kappa^2} \Delta_\kappa \frac{1}{n^2};
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.75)$$

$$-2n'\delta g' = S_{\mathrm{I}}^* \omega' (\omega'^2 + \Omega'^2) + S_{\mathrm{II}}^* (3\omega'^2 + \Omega'^2) w +$$
$$+ (3S_{\mathrm{III}}^* + JS_{\mathrm{IV}}) \omega' w^2 + S_{\mathrm{V}}^* w^3;$$

$$-2n'\delta G' = S_{\mathrm{I}}^* \Omega' (\omega'^2 + \Omega'^2) + 2S_{\mathrm{II}}^* \omega' \Omega' w + (S_{\mathrm{III}}^* + J^2 S_{\mathrm{IV}}) \Omega' w^2.$$

Телескопические системы

В телескопических системах нельзя применить ни одну из приведенных формул, так как нельзя принять за единицу ни $\alpha_1 = 0$, ни $\alpha_p' = 0$. В этом случае единице нужно приравнять какой-нибудь из промежуточных углов — лучше всего тот, который первый вспомогательный луч (т. е. луч, идущий из точки предмета на оси системы) образует с осью перед окуляром — или угол после объектива (если в системе имеется еще оборачивающая часть).

Изменение сумм при перемещении предмета и входного зрачка

Определим коэффициенты b_{-1}; b_0; b_1; b_2; b_3; b_4.

Рассмотрим случай, когда предмет находится на бесконечности, а входной зрачок совпадает с передним фокусом системы. Вычисляем суммы S_{I}; S_{II}; S_{III}; S_{IV}; S_{V} при условии, что $\alpha' = 1$

и $\beta_1 = 1$, и сумму $\overleftarrow{S}_{\mathrm{I}}$ для параксиального луча, рассчитанного в обратном ходе из бесконечности.

Тогда (см. стр. 83) имеем

$$\left.\begin{aligned} b_4 &= -\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{I}}; \quad b_{-1} = -\frac{J^2}{6}S_{\mathrm{IV}}; \\ b_3 &= -\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{II}}; \quad b_1 = -\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{V}} - \frac{1}{2}f'n; \\ b_2 &= -\frac{1}{2}\left(\widetilde{S}_{\mathrm{III}} + \frac{J^2}{3}S_{\mathrm{IV}}\right); \quad b_0 = -\frac{1}{2}\overleftarrow{S}_{\mathrm{I}}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.34)$$

Суммы $\widetilde{S}_{\mathrm{I}}, \ldots, \widetilde{S}_{\mathrm{V}}$ при любом положении предмета и входного зрачка выражаются с помощью формул II.31:

$$-\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{I}} = b_4 + 4b_3\tau + 6b_2\tau^2 + 4b_1\tau^3 + b_0\tau^4 + \frac{1}{2}f'n\tau(1+\tau^2);$$

$$-\frac{\tau'}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{II}} = b_4 + 3b_3\tau + 3b_2\tau^2 + b_1\tau^3 + \tau'(b_3 + 3b_2\tau + 3b_1\tau^2 + b_0\tau^3) + \\ + \frac{1}{2}f'n\tau(1+\tau\tau');$$

$$-\frac{\tau'^2}{2}\left(\widetilde{S}_{\mathrm{III}} + \frac{J^2}{3}S_{\mathrm{IV}}\right) = b_4 + 2b_3\tau + b_2\tau^2 + 2\tau'(b_3 + 2b_2\tau + b_1\tau^2) + \\ + \tau'^2(b_2 + 2b_1\tau + b_0\tau^2) + \frac{1}{2}f'n\tau(1+\tau'^2);$$

$$-\frac{\tau'^3}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{V}} = b_4 + b_3\tau + 3\tau'(b_3 + b_2\tau) + 3\tau'^2(b_2 + b_1\tau) + \\ + \tau'^3(b_1 + b_0\tau) + \frac{1}{2}f'n\tau\left(1 + \frac{\tau'^3}{\tau}\right);$$

$$-\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\mathrm{IV}} = \frac{3b_{-1}}{(n'f)^2}.$$

Вычисление комы на основании отступления от отношения синусов

Для бесконечно малых углов поля и больших относительных отверстий имеем формулы:

для сагиттальной комы K_s

$$K_s = -l'\left(1 - \frac{\sin u_1}{\tau \sin u'}\,\frac{s_0' - x'}{s' - x'}\right) = l'\delta_s\left(1 - \frac{\delta s'}{s' - x'}\right); \qquad (\mathrm{II}.94)$$

для меридиональной комы K_m

$$K_m = l'\frac{d}{d\sin u'}\left(\delta_s \sin u' - \frac{\delta s'}{s_0' - x_0'}\operatorname{tg} u'\right). \qquad (\mathrm{II}.92)$$

Величину K_m следует понимать так:

$$K_m = \frac{l'_+ + l'_-}{2} - l_0,$$

причем величины l'_+, l'_0, l'_- соответствуют трем лучам, которые после выхода из системы образуют с осью системы углы u'_+, u'_0 и u'_-, определяемые соотношениями

$$\sin u'_+ = \sin \omega' + \sin u_0;$$

$$\sin u'_- = -\sin \omega' + \sin u'_0.$$

При плавных изменениях величины $\delta_s = \frac{\sin u - \tau \sin u'}{\tau \sin u'}$ можно считать, что в системе преобладают аберрации третьего порядка, а в этом случае

$$K_m = 3l' \left(\delta_s + \frac{\delta s'}{x'_p - s'_p}\right). \qquad (II.96)$$

Если предмет на бесконечности,

$$\delta_s = \left(\frac{h_1}{\sin u'} - f'\right) \frac{1}{f'}. \qquad (II.131)$$

Приводим несколько полезных соотношений, верных для области третьих порядков:

$$\frac{\delta_s}{\omega'^2} = \frac{S_I - \tau' S_{II}}{2n'(x' - s')} = \frac{S_I - \tau' S_{II}}{2n' f' (\tau - \tau')}; \quad \tau = \frac{\alpha}{\alpha'}; \quad \tau' = \frac{\beta}{\beta'};$$

$$S_{II} = \frac{2n'(x' - s')}{\tau' \omega'^2} \left(\delta_s + \frac{\delta s'}{x' - s'}\right); \quad x' - s' = f'(\tau - \tau').$$

В случае, когда $\alpha = 0$ ($\tau = 0$),

$$S_{II} = \frac{2n' f'}{\omega'^2} \eta = -\frac{2n'^2 f}{\omega'^2 n} \eta; \quad \eta = \delta_s + \frac{\delta s'}{x'_p - s'_p}.$$

Приведенные соотношения могут быть получены из формул (II.120) и последующих путем простых преобразований.

Аберрации третьего порядка простой бесконечно тонкой линзы

1. Случай, когда предмет на бесконечности ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_3 = 1$). Суммы $S_I, \ldots, S_V$ определяются формулой (II.156)

$$
\left.\begin{aligned}
&S_{\mathrm{I}} = P; \qquad S_{\mathrm{II}} = yP + W;\\
&S_{\mathrm{III}} = y^2P + 2yW + 1; \qquad S_{\mathrm{IV}} = \nu;\\
&S_{\mathrm{V}} = y^3P + 3y^2W + y(3+\nu),\\
&\text{где}\\
&P = \frac{1}{(1-\nu)^2}\left[1-(2+\nu)\alpha_2 + (2\nu+1)\alpha_2^2\right];\\
&W = \frac{1}{1-\nu}\left[1-(1+\nu)\alpha_2\right];\\
&y = \frac{x_1}{f'}; \quad \nu = \frac{1}{n}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.156)
$$

2. Случай, когда предмет на конечном расстоянии ($\alpha_1 \neq 0$). В этом случае пользуются формулами (II.57); формулы принимают вид

$$
\left.\begin{aligned}
&S_{\mathrm{I}} = s_1P; \quad S_{\mathrm{II}} = x_1P - (x_1 - s_1)W;\\
&S_{\mathrm{III}} = \frac{x_1^2}{s_1}P - 2(x_1 - s_1)\frac{x_1}{s_1}W + \frac{(x_1-s_1)^2}{s_1}(\alpha_3 - 1);\\
&S_{\mathrm{IV}} = \frac{\nu}{f};\\
&S_{\mathrm{V}} = \frac{x_1^3}{s_1^2}P - 3(x_1 - s_1)\left(\frac{x_1}{s_1}\right)^2 W + (x_1 - s_1)^2 \times\\
&\times \frac{x_1}{s_1^2}(3+\nu)(\alpha_3 - 1),
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}.143)
$$

где

$$
P = \frac{\alpha_3 - 1}{(1-\nu)^2}\left[\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1 - (2+\nu)(\alpha_3+1)\alpha_2 + (2\nu+1)\alpha_2^2\right];
$$

$$
W = \frac{\alpha_3 - 1}{1-\nu}\left[\alpha_3 + 1 - (1+\nu)\alpha_2\right];
$$

при этом

$$
\alpha_1 = 1; \quad \alpha_3 = \alpha_1\frac{s_1}{s_2'}; \quad \nu = \frac{1}{n}.
$$

Для продольной сферической аберрации линзы при конечном расстоянии до предмета имеем

$$
\delta s' = -\frac{h^2}{2f'}\frac{1}{(1-\nu)^2}\left[1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 - (2+\nu)(1+\alpha_1)\alpha_2 + \right.
$$
$$
\left. + (2\nu+1)\alpha_2^2\right].
$$

Здесь положено $\alpha_3 = 1$.

Поперечные аберрации $\delta g'$ получаются умножением сумм S_{I}', S_{II}', . . ., S_{V}', рассчитанных при $\alpha_1 = 1$, на соответствующие коэффициенты:

для сферической аберрации

$$-\frac{1}{2\alpha_3}\omega_1^3 S_1';$$

для комы

$$-\frac{1}{2\alpha_3}3\omega_1^2 w_1 S_{II}'; \quad w_1=\frac{l_1}{x_1-s_1}; \quad \omega_1=-\frac{m_1}{x_1-s_1};$$

для астигматизма

$$-\frac{1}{2\alpha_3}3\omega_1 w_1^2 S_{III}';$$

для кривизны

$$-\frac{1}{2\alpha_3}J^2\omega_1 w_1^2 S_{IV}'; \quad J=(x_1-s_1);$$

для дисторсии

$$-\frac{1}{2\alpha_3}w_1^3 S_V'.$$

3. Предмет и изображение находятся на близком расстоянии друг от друга. Пусть линейное увеличение $\beta=\frac{s'}{s}=\frac{\alpha}{\alpha'}=1+\varepsilon$. Предположим, что ε малая величина. Тогда, пользуясь формулами (II.149) и (II.150) и полагая, что входной зрачок находится далеко от линзы ($x_1=\infty$; $y=f'$), получаем

$$\left.\begin{aligned} S_I &= (3+2\pi)\,\varepsilon^2 f';\\ S_{II} &= -(1+\pi)\,\varepsilon f';\\ S_{III} &= (1+2W)\,\varepsilon f';\\ J^2 S_{IV} &= f'\pi;\\ S_V &= (W-1)\,f'. \end{aligned}\right\} \qquad (II.151)$$

В разложениях удержан член, содержащий ε в низшей степени.

4. Предмет и изображение совпадают ($\alpha_3=\alpha_1=1$). Формулы для сумм принимают вид $S_I=0$; $S_{II}=0$; $S_{III}=0$; $S_{IV}=\nu$;

$$\delta g'_{дист}=\frac{1}{2}\frac{l_1^3}{y_1 f}\frac{[(1+n)\beta_2-\beta_1-\beta_3]}{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{l_1^3}{f}\left(\frac{1}{r_1 n}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{n x_1}\right). \qquad (II.148^*)$$

5. Линза дает изображение при увеличении — 1. Полагая $\alpha_1=1$, $\alpha_3=-1$, $s=-2f$ и используя формулу (II.153), имеем

$$S_I=-2fP;$$

$$S_{II}=x_1P-(2f'-x_1)W;$$

$$S_{\mathrm{III}} = -\frac{x'^2}{2f'}P + \frac{x_1(2f'+x_1)}{f'}W + \frac{(2f'+x_1)^2}{f'};$$

$$S_{\mathrm{IV}} = \frac{\nu}{f'};$$

$$4f'^2 S_{\mathrm{V}} = x_1^3 P - 3x_1^2(x_1+2f')W - 2x_1(2f'+x_1)^2(3+\nu),$$

где

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{2}{(1-\nu)^2}\left[1+(2\nu+1)\alpha_2^2\right]; \\ W &= \frac{2}{1-\nu}(1+\nu)\alpha_2. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.152)$$

Если $x_1 = 0$, т. е. отверстие линзы служит входным зрачком, то

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= \frac{4f'}{(1-\nu)^2}\left[1+(2\nu+1)\alpha_2^2\right]; \\ S_{\mathrm{II}} &= -\frac{4f'}{(1-\nu)}(1+\nu)\alpha_2; \\ S_{\mathrm{III}} &= 4f'; \\ S_{\mathrm{IV}} &= \frac{\nu}{f'}; \\ S_{\mathrm{V}} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}.154)$$

Для вычисления аберраций третьего порядка необходимо знать следующее правило: если параметрами луча являются координаты на входном зрачке, то единице следует приравнять α_1; если координаты на выходном зрачке, за единицу следует брать α'_p. Если система телескопическая, координаты следует брать в среде перед окуляром, и за единицу принимать угол, образуемый лучом с осью перед падением на первую поверхность окуляра.

За единицу β нужно всегда принимать $\beta_1 = 1$. Но если $\beta_1 = 0$ (телецентрическая система), можно использовать общие формулы, принимая за единицу любой из $\beta_к$, но вместо w_1 надо в формуле писать $w_к$. Следует помнить, что величина J зависит от выбора единиц и она равна произведению $n\alpha l = n\alpha\,(x - s)\,\beta$, которое можно вычислить в любой среде, принимая во внимание выбор единиц. Удобнее всего вычислить J в той среде, в которой величина α принята за единицу.

Определение коэффициентов сферической аберрации высших порядков на основании тригонометрического расчета хода лучей

Нахождение двух коэффициентов по двум лучам не представляет затруднений. Для нахождения трех коэффициентов по формуле

$$\delta s' = a\sin^2 u' + b\sin^4 u' + c\sin^6 u'$$

определяют по чертежу кривой сферической аберрации значения $\delta s'$, соответствующие углам u_1' и u_2'. Угол u_1' определяется из условия $\frac{\sin^2 u_1'}{\sin^2 u_3'} = \frac{1}{3}$ и угол u_2' — из условия $\frac{\sin^2 u_2'}{\sin^2 u_3'} = \frac{2}{3}$, где u_3' — угол, соответствующий какой-нибудь определенной зоне выходного зрачка (чаще всего краю его).

Пусть $\delta s_1'$, $\delta s_2'$ и $\delta s_3'$ — соответствующие аберрации. Обозначая для краткости

$$\frac{\delta s_1'}{\sin^2 u_3'} = y_1; \quad \frac{\delta s_2'}{\sin^2 u_3'} = y_2; \quad \frac{\delta s_3'}{\sin^2 u_3'} = y_3,$$

получаем для коэффициентов a, b, и c следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a &= y_3 - \frac{9}{2} y_2 + 9y_1; \\ b &= \frac{-\frac{9}{2} y_3 + 18y_2 - \frac{45}{2} y_1}{\sin^2 u_3'}; \\ c &= \frac{\frac{9}{2} y_3 - \frac{27}{2} y_2 + \frac{27}{2} y_1}{\sin^4 u_3'} \end{aligned}\right\} \qquad (II.175)$$

Коэффициент a связан с первой суммой Зейделя S_I. Если эта сумма рассчитана в предположении, что $\alpha_p' = 1$, $h_p = s_p'$, $y_1 = x_1$, $J = n_1\alpha_1 (x_1 - s_1)$, то

$$a = -\frac{S_I}{2n_p'}.$$

Если сумма S_I вычислена для случая $s_1 = \infty$ при $\alpha_p' = 1$, $h = 1$, $y_1 = \frac{x_1}{F'}$, то

$$a = -\frac{F'S_I}{2n_p'}.$$

Последние формулы служат для контроля, и их применение обязательно, так как вычисления по формуле (II.175) могут очень легко привести если не к ошибкам, то к большим погрешностям.

Хроматические аберрации

1. Хроматическая аберрация положения. Продольная хроматическая аберрация положения определяется по формуле

$$\delta s_p' = \frac{1}{n_p' \alpha_p'^2} \sum_1^p h_\kappa \frac{\Delta\alpha_\kappa}{\Delta \frac{1}{n_\kappa}} \Delta \frac{\delta n_\kappa}{n_\kappa}, \qquad (II.183)$$

пригодной для любой системы единиц, в которых выражена величина α, при соблюдении условия, связывающего h и α (т. е. $h_1 = s_1\alpha_1$).

В этой формуле δn — разность показателей, соответствующих двум длинам волн, выбранным для определения хроматической аберрации; α и n берутся для некоторой средней длины волны, лучше всего — для средней арифметической.

Для простой бесконечно тонкой линзы имеем

$$\delta s' = -\frac{s'^2}{f'\nu}, \qquad \text{(II.184*)}$$

где $\nu = \frac{n-1}{\delta n}$ — коэффициент дисперсии Аббе.

Для бесконечно тонкой системы получаем

$$\delta s' = -s'^2 \sum \frac{\Phi_i}{\nu_i}, \qquad \text{(II.185)}$$

где Φ_i — оптическая сила линзы с номером i.

2. Хроматическая разность увеличений. Эта аберрация, определяемая разностью расстояний точек пересечения лучей двух цветов с одной и той же плоскостью установки ($\delta L' = L'_F - L'_C$), выражается формулой

$$\frac{\delta L'}{l'} = \frac{1}{J} \sum y \frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}} \Delta\frac{\delta n}{n} + \left(\frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'}{n'}\right). \qquad \text{(II.195)}$$

Если $n_1 = n'_p$, то

$$\frac{\delta L'}{l'} = \frac{1}{J} \sum y \frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}} \Delta\frac{\delta n}{n}, \qquad \text{(II.196)}$$

где l' — высота пересечения с плоскостью установки для луча среднего цвета; y и $J = n'_p\alpha'_p l'_p = n_1\alpha_1 l_1$ выражены в одних и тех же единицах.

Если $s_1 = \infty$, то

$$y_1 = \frac{x_1}{F'}; \quad J = -n'_p.$$

Для бесконечно тонкой линзы

$$\frac{\delta L'}{l'} = -\frac{s'x'}{x'-s'}\frac{1}{f'\nu} = -\frac{sx}{x-s}\frac{1}{f\nu}. \qquad \text{(II.199)}$$

Если система состоит из нескольких простых линз, то

$$\frac{\delta L'}{l'} = -\frac{s'x'}{x'-s'} \sum_1^t \frac{\Phi_i}{\nu_i}. \qquad \text{(II.200)}$$

Условие ахроматизма для системы из двух простых бесконечно тонких линз, расположенных на бесконечно близком расстоянии:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} = 0; \\ \varphi_1 + \varphi_2 = \Phi, \end{aligned}\right\}$$

где Φ — оптическая сила системы.

3. Вторичный спектр. Величина вторичного спектра для двухлинзовой бесконечно тонкой системы, ахроматизованной в отношении лучей двух длин волн C и F, определяется расстоянием плоскости изображения для лучей третьего цвета e от плоскости, соответствующей лучам C и F, и вычисляется по формуле

$$m\delta s'_{eF} = \frac{s'^2}{f} \frac{(p_{eF})_2 - (p_{eF})_1}{\nu_2 - \nu_1}, \qquad \text{(II.204)}$$

где p_{eF} — частная относительная дисперсия, равная отношению

$$P_{eF} = \frac{n_F - n_e}{n_F - n_C}.$$

Индексы 1 и 2 указывают порядковый номер линзы.

Определим остаточный хроматизм двухлинзового объектива (при условии применения обычных сортов стекла).

Пусть s'_λ — расстояние точки пересечения параксиального луча с осью от объектива для длины волны λ; s'_0 — то же для длины волны λ_0, для которой s'_λ имеет минимальное значение. Полагаем

$$l = \frac{1000}{\lambda - 200} \ (\lambda \text{ в } нм).$$

Тогда

$$s'_\lambda = s'_0 + \frac{s'^2}{f'} 0{,}00120 \, (l_\lambda - l_0)^2. \qquad \text{(II.206)}$$

Определим хроматическую аберрацию двухлинзового объектива для линий C и F, если лучи для линий K и L создают хроматическую аберрацию $\frac{s'^2}{f'} C_{LK}$:

$$s'_F - s'_C = \frac{s'^2}{f'} \left[0{,}0089 - 0{,}00156 \, (l_K + l_L) + 1{,}303 \frac{C_{LK}}{l_L - l_K}\right]. \qquad \text{(II.208*)}$$

Случай, когда $C_{LK} = 0$, приведен на рис. II.43.

Вторичный спектр систем, состоящих из нескольких бесконечно тонких линз, выражается формулой

$$\frac{f'}{s'^2} \delta s'_{DF} = -\sum h_i^2 \frac{\varphi_i}{\nu_i} (p_i - p_0), \qquad \text{(II.210)}$$

где $p_i = \frac{n_F - n_D}{n_F - n_C}$; p_0 — произвольное число; $\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$.

4. Зависимость хроматических аберраций параксиальных лучей от положения предмета и входного зрачка. Пусть $\delta s'$ — продольная хроматическая аберрация изображения; $\delta\sigma'$ — продольная хроматическая аберрация задней главной точки; $\delta\sigma$ — продольная хроматическая аберрация передней главной точки; $\delta f'$ — продольная хроматическая аберрация фокусного расстояния; $\alpha = \tau^2 \frac{n}{n'}$ — продольное увеличение; $\partial = \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n}$.

Имеем для $\delta s'$ следующее выражение:

$$\delta s' - \alpha\delta s = \delta\sigma' - \alpha\delta\sigma + (1-\beta)^2\delta f' + f'(1-\beta)\beta\partial, \quad \text{(II.230)}$$

где $\beta = \tau\frac{n}{n'}$.

Хроматическая разность увеличений $\frac{\delta L'}{l'}$, где $\delta L'$ — разность высот пересечения цветных лучей с одной и той же плоскостью установки (для луча со средней длиной волны), определяется из формулы

$$(\tau' - \tau)\frac{\delta L'}{l'} = -\frac{\delta f'}{f'}(1-\beta)(1-\beta') + (\beta - 1)\tau\partial + \\ + \frac{\delta\sigma'}{f} + \frac{\delta\sigma\tau\tau'}{f'}, \quad \text{(II.233)}$$

где $\beta' = \frac{\tau' n}{n'}$.

Если крайние среды одинаковы, получаем

$$f'(\tau' - \tau)\frac{\delta L'}{l'} = \beta\beta'\delta\sigma - \delta\sigma' - (1-\beta)(1-\beta')\delta f'.$$

Если система симметрична и бесконечно тонка, то

$$\frac{\delta L'}{l'} = 0.$$

Вычисление $\delta s'$ производится по известной формуле

$$\delta s' = \frac{1}{n'_p}\sum \bar{h}C$$

при $\alpha_1 = 0$, $\alpha'_p = 1$, $\bar{h}_p = s'_p$ или $\bar{h}_1 = f'$.

Вычисление $\delta\sigma'$ производится следующим образом:

$$\delta\sigma' = \delta s' - \delta f'$$

или

$$n'\delta\sigma' = \frac{n'}{n}\sum \bar{y}C - \frac{n\tau' + n'}{n\tau'}\sum \bar{h}C. \quad \text{(II.237)}$$

Величина $\frac{f}{n}\frac{n\tau' + n'}{\tau'} = -\frac{f'}{n'}\frac{n\tau' + n'}{\tau'}$ представляет собой расстояние от передней главной точки до центра входного зрачка (или до точки пересечения с осью вспомогательного луча).

Если $n = n' = 1$, то

$$\delta\sigma' = \sum \bar{y}C - (1+\gamma)\sum \bar{h}C. \qquad \text{(II.238)}$$

Вычисление $\delta f'$ производится по формуле

$$n\delta f' = -\sum \bar{y}C + \frac{1}{\tau'}\bar{h}C \qquad \text{(II.236)}$$

при $\bar{y}_1 = x_1$, $\bar{h}_p = s'_p$, $\alpha'_p = 1$ или, с исключением величины y,

$$\frac{\delta f'}{f'} = \left(\frac{1}{n'_p h_p} - \sigma_p\right)\sum \bar{h}C + \sum_2^p \sigma\bar{h}C,$$

где

$$\sigma_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=\kappa-1} \frac{d_\nu}{n_{\nu+1}h_\nu h_{\nu+1}}.$$

Первая формула более удобна, но требует расчета вспомогательного луча, впрочем, произвольного. Рассчитывая параксиальные лучи в обратном ходе, можно получить соответственные величины δf и $\delta\sigma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. Т. 1. Изд. 2-е. М.—Л., АН СССР, 1948.
2. Слюсарев Г. Г. Методы расчета оптических систем. Л.—М., Гостехиздат, 1937.
3. Слюсарев Г. Г. Труды ГОИ. Т. 8. Вып. 130, 1947.
4. Conrady A. E. Applied Optics. London, Milford, 1929.
5. Kohlschütter A. Die Bildfeher fünfter Ordnung Optischer Systeme auf Grund des Eikonal — begriffes. Dissert. Göttingen, 1908.
6. Von Rohr M. Die Theorie d. optischen Instrumente. Berlin, Springer, 1904.
7. Рабинович Г. Д. Опт.-мех. пром. Т. 2, 1934.
8. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. М., Изд. иностр. лит., 1962.
9. Слюсарев Г. Г. Изв. АН СССР, Сер. матем. и естест. наук, 1937, № 6.
10. Слюсарев Г. Г. Труды ГОИ. Т. 14, 1941.
11. Гальперн Д. Ю. ЖТФ. Т. 15. Вып. 6, 1945.
12. Гальперн Д. Ю. Опт.-мех. пром., 1946, № 5 и 6.
13. Schwarzschild K. Untersuchungen für geometrichen Optik. 1, Berlin, 1905.
14. Слюсарев Г. Г. Труды ГОИ, Т. 8. Вып. 7, 1932.
15. Czapski S., Eppenstein O. Grundzüge d. Theorie der Optischen Instrumente. Leipzig, Barth, 1924.

ГЛАВА III

АБЕРРАЦИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СИСТЕМ ИЗ БЕСКОНЕЧНО ТОНКИХ ЛИНЗ

Большинство оптических систем, встречающихся на практике, в особенности телескопических, состоит из нескольких отдельных компонентов, каждый из которых обладает толщиной, составляющей небольшую часть (обычно меньше 1/10) его фокусного расстояния. Такие компоненты в отношении аберраций третьего порядка очень мало отличаются от бесконечно тонких систем и могут быть с достаточно хорошим приближением заменены последними. Эта замена очень удобна, так как бесконечно тонкие системы рассчитываются значительно проще, чем системы конечной толщины. Главная причина, обусловливающая упрощение вычислений, заключается в том, что все аберрации третьего порядка бесконечно тонкой системы линз зависят от трех параметров, в то время как для систем конечной толщины аберрации зависят от шести параметров. Такое уменьшение от шести до трех дает возможность подобрать параметры таким образом, чтобы один из них оказался практически постоянным.

1. АБЕРРАЦИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА БЕСКОНЕЧНО ТОНКОГО КОМПОНЕНТА

Выше было изложено, что аберрации третьего порядка центрированной системы, вообще говоря, зависят от шести коэффициентов b_4, b_3, . . ., b_0, b_{-1}. Покажем, что это число коэффициентов уменьшается до трех, когда толщины линз и воздушных промежутков уменьшаются до нуля.

Рассмотрим формулу (II.37) для оптического пути W_H, соответствующего главным плоскостям:

$$W_H = \frac{r}{8(n'-n)}\left[(n'\varepsilon' - n\varepsilon)^2 - \frac{n^2 n'^2}{(n'-n)^2}(\varepsilon + \varepsilon' - 2\delta)^2\right],$$

где

$$\varepsilon = \mu^2 + \nu^2;$$

$$\varepsilon' = \mu'^2 + \nu'^2;$$

$$\delta = \mu\mu' + \nu\nu',$$

а μ, ν, μ', ν' — направляющие косинусы луча до и после преломления через систему.

Преобразуем выражение в квадратных скобках, представляющее собой разность двух квадратов $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$. Приведя его к виду произведения, получаем

$$W_H = \frac{r}{8(n' - n)^3}[(n'^2 - 2nn')\varepsilon' + (n^2 - 2nn')\varepsilon + 2nn'\delta] \times$$

$$\times (n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta).$$

Преобразуем выражение, стоящее во втором множителе:

$$n'^2\varepsilon' + n^2\varepsilon - 2nn'\delta = (n'\mu' - n\mu)^2 + (n'\nu' - n\nu)^2 = \frac{H^2(n' - n)^2}{r^2},$$

так как H представляет собой высоту точки пересечения луча с поверхностью преломления.

Поэтому

$$W_н = \frac{H^2}{8(n' - n)r}[(n'^2 - 2nn')\varepsilon' + (n^2 - 2nn')\varepsilon + 2nn'\delta].$$

Переходим к вычислению эйконала для системы p поверхностей с общей вершиной; при этом все толщины и воздушные промежутки равны нулю. Он является суммой всех эйконалов, относящихся к отдельным поверхностям. Начало отсчета общее для всех поверхностей, и высота H точки пересечения луча со всеми поверхностями с точностью, достаточной для вычисления аберраций третьего порядка, одна и та же. Вынесем ее за знак суммы, получим

$$W_H = \frac{H^2}{8}\sum_{\kappa=1}^{\kappa=p}\frac{(n_\kappa'^2 - 2n_\kappa n_\kappa')\varepsilon_\kappa' + (n_\kappa^2 - 2n_\kappa n_\kappa')\varepsilon_\kappa + 2n_\kappa n_\kappa'\delta_\kappa}{(n_\kappa' - n_\kappa)r_\kappa}. \qquad \text{(III.1)}$$

Из этой формулы вытекает, что бесконечно тонкая система определяется лишь тремя коэффициентами.

Действительно, если заменим величины ε_κ, ε_κ' и δ_κ, находящиеся под знаком суммы, их выражениями через μ и μ', то получим выражения второй степени относительно этих величин. Но, согласно правилу для расчета углового эйконала, нужно исключить промежуточные μ_κ и μ_κ', ν_κ и ν_κ' и оставить лишь μ, ν, относящиеся к первой среде, и μ' и ν', относящиеся к последней среде. Так как соотношения, связывающие последующие значения μ_κ и $\mu_{\kappa+1}$ или ν_κ и $\nu_{\kappa+1}$, линейны, а именно:

$$n_{\kappa+1}\mu_{\kappa+1} - n_\kappa\mu_\kappa = \frac{H}{r_\kappa}(n_{\kappa+1} - n_\kappa);$$

$$n_{\kappa+1}\nu_{\kappa+1} - n_\kappa\nu_\kappa = \frac{H}{r_\kappa}(n_{\kappa+1} - n_\kappa),$$

то после исключения промежуточных величин выражение для W_H представит собой функцию, содержащую μ и ν, μ' и ν' во второй степени, вида

$$\sum = A_1(\mu^2 + \nu^2) + B_1(\mu'^2 + \nu'^2) + C_1(\mu\mu' + \nu\nu'), \quad \text{(III.2)}$$

вытекающего из симметричности оптической системы.

Окончательно выражение для W_H может быть представлено в виде

$$W_H = \frac{H^2}{8}(A\varepsilon + B\varepsilon' + C\delta)$$

и зависит от трех коэффициентов A, B, C.

Из приведенного вывода становится ясной причина уменьшения числа параметров с шести до трех. Она заключается в том, что в бесконечно тонкой системе высота H точки пересечения луча с системой является общей для всех поверхностей.

Рассмотрим формулы (II.42) и (II.57):

$$-2n'\delta g' = S_{\mathrm{I}}\omega'(\omega'^2 + \Omega'^2) + S_{\mathrm{II}}(3\omega'^2 + \Omega'^2)w +$$
$$+ (3S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}})\omega' w^2 + S_{\mathrm{V}} w^3;$$
$$-2n'\delta G' = S_{\mathrm{I}}\Omega'(\omega'^2 + \Omega'^2) + 2S_{\mathrm{II}}\omega'\Omega' w +$$
$$+ (S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}})\Omega' w^2,$$

где

$$S_{\mathrm{I}} = \sum h_\kappa P_\kappa;$$
$$S_{\mathrm{II}} = \sum y_\kappa P_\kappa - J\sum W_\kappa;$$
$$S_{\mathrm{III}} = \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa} P_\kappa - 2J\sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa} W_\kappa + J^2 \sum \frac{1}{h_\kappa}\Delta\frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa}.$$
$$S_{\mathrm{IV}} = \sum \frac{\Pi_\kappa}{h_\kappa};$$
$$S_{\mathrm{V}} = \sum \frac{y_\kappa^3}{h_\kappa^2} P_\kappa - 3J\sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa^2} W_\kappa + J^2 \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa^2} \times$$
$$\times \left(3\Delta_\kappa \frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa} + \Pi_\kappa\right) - J^3 \sum \frac{1}{h_\kappa^2}\Delta\frac{1}{n_\kappa^2}.$$

Напоминаем, что

$$P_\kappa = \left(\frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{\dfrac{1}{n_{\kappa+1}} - \dfrac{1}{n_\kappa}}\right)^2 \left(\frac{\alpha_{\kappa+1}}{n_{\kappa+1}} - \frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa}\right);$$

$$W_\kappa = \left(\frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{\dfrac{1}{n_{\kappa+1}} - \dfrac{1}{n_\kappa}}\right)\left(\frac{\alpha_{\kappa+1}}{n_{\kappa+1}} - \frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa}\right);$$

$$\Pi_\kappa = \frac{\alpha_{\kappa+1} n_{\kappa+1} - \alpha_\kappa n_\kappa}{n_\kappa n_{\kappa+1}}.$$

Для краткости обозначим сумму выражений $P_к$ и $W_к$, относящуюся ко всем поверхностям i-го компонента, через P_i и W_i; высоты h и y точек пересечения обоих вспомогательных лучей с компонентом i обозначим через h_i и y_i.

Покажем, что сумма выражений $\Pi_к$, относящаяся ко всем поверхностям компонента i, может быть написана в более удобном для дальнейших вычислений виде

$$\sum \Pi_к = \sum \frac{\alpha' n' - \alpha n}{nn'} = \sum \frac{h}{r} \frac{n' - n}{nn'} =$$

$$= \sum \frac{h}{r} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right). \qquad \text{(III.3)}$$

Для простой тонкой линзы, находящейся в воздухе, имеем

$$\Pi_1 + \Pi_2 = h \left[\frac{1}{r_1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] =$$

$$= h \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{h\Phi}{n}, \qquad \text{(III.4)}$$

где Φ — оптическая сила линзы.

Всякий компонент i состоит из t бесконечно тонких линз, разделенных между собой бесконечно малыми промежутками. Поэтому для компонента i имеем

$$\sum \Pi_к = h \sum \frac{\Phi}{n}.$$

Величина Φ имеет размерность обратной длины L^{-1}.

Удобно ввести величины нулевой размерности. С этой целью вводим величину $\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_i}$, причем φ представляет собой приведенную оптическую силу. Это дает возможность писать

$$\sum \Pi_к = h\Phi \sum \frac{\varphi}{n}.$$

Обозначим безразмерное выражение: $\sum \frac{\varphi}{n}$ через π. Тогда для компонента i

$$\sum \Pi_к = h_i \Phi_i \pi_i,$$

где

$$\pi_i = \sum_{u=1}^{u=t} \frac{\varphi_u}{n_u}. \qquad \text{(III.5)}$$

В дальнейшем будет показано, что величина π_i в большинстве систем, встречающихся на практике, мало отличается от 0,6—0,7. Поэтому во многих случаях, когда не требуется большой точности, можно принять $\pi = 0{,}65$.

Член $\sum \frac{1}{h^2} \Delta \frac{1}{n^2}$, входящий в выражение для пятой суммы, пропадает, так как крайние среды, в которые погружен компонент, одинаковы.

Выражение $\frac{1}{h} \Delta \frac{\alpha}{n}$, ввиду сокращения внутренних значений $\frac{\alpha}{n}$, принимает вид $\frac{1}{h}(\alpha_i' - \alpha_i)$, где α_i — угол α в среде перед компонентом; α_i' — тот же угол в среде после компонента. Но

$$\frac{1}{h_i}(\alpha_i' - \alpha_i) = \Phi_i. \tag{III.6}$$

Выражения для пяти сумм Зейделя теперь принимают вид

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= \sum h_i P_i; \\ S_{\mathrm{II}} &= \sum y_i P_i - J \sum W_i; \\ S_{\mathrm{III}} &= \sum \frac{y_i^2}{h_i} P_i - 2J \sum \frac{y_i}{h_i} W_i + J^2 \sum \Phi_i; \\ S_{\mathrm{IV}} &= \sum \Phi_i \pi_i; \\ S_{\mathrm{V}} &= \sum \frac{y_i^3}{h_i^2} P_i - 3J \sum \frac{y_i^2}{h_i^2} W_i + J^2 \sum \frac{y_i}{h_i} \Phi_i (3 + \pi_i). \end{aligned}\right\} \tag{III.7}$$

Рассмотрим три частных случая.

1. Плоскость изображения на конечном расстоянии ($\alpha_p' \neq 0$). В этом случае полагаем $\alpha_p' = 1$, $h_1 = s_1\alpha_1$, $y_1 = x_1$ при конечном расстоянии от предмета до системы и $h_1 = F'$ при бесконечно удаленной плоскости предметов.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} -2\delta g' &= \omega_p' (\omega_p'^2 + \Omega_p'^2) S_{\mathrm{I}} + (3\omega_p'^2 + \Omega_p'^2) w_{\mathrm{I}} S_{\mathrm{II}} + \\ &\quad + \omega_p' w_1^2 (3S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}) + w_1^3 S_{\mathrm{V}}; \\ -2\delta G' &= \Omega_p' (\omega_p'^2 + \Omega_p'^2) S_{\mathrm{I}} + 2\omega_p' \Omega_p' w_{\mathrm{I}} S_{\mathrm{II}} + \\ &\quad + \Omega_p' w_1^2 (S_{\mathrm{III}} + J^2 S_{\mathrm{IV}}). \end{aligned}\right\} \tag{III.7*}$$

При этом, если $s_1 = \infty$, $J = -F'$; если $s_1 \neq \infty$, $J = l' = \alpha_1 (x_1 - s_1) = (x' - s') \beta'$.

2. Плоскость изображения на бесконечности ($\alpha_p' = 0$). В этом случае поперечные аберрации становятся бесконечно большими и их выражения теряют смысл. Кроме того, вычисление сумм не может быть выполнено, поскольку $\alpha_p' = 0$ и не может быть приведено к единице. Проще всего систему перевернуть или выполнить расчет сумм в обратном ходе.

3. Телескопические системы. В этом случае одновременно $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_p' = 0$. Можно поступить следующим образом: поперечные

аберрации заменить угловыми $[\delta g']$, представляющими собой предел, к которому стремится отношение $\frac{\delta g'}{s'}$; этот предел взят с обратным знаком для соблюдения принятых правил знаков в случае, когда s' стремится к бесконечности.

Пусть

$$-\left[\delta g'_p\right] = \lim_{s'=\infty} \frac{\delta g'}{s'};$$

$$-\left[\delta G'_p\right] = \lim_{s'=\infty} \frac{\delta G'}{s'}.$$

За единицу нельзя принять ни α_1, ни α'_p, так как они равны нулю. Можно принять в качестве единицы один из углов α'_q, где q — номер среды (обязательно воздух), разделяющей два компонента системы. Удобнее всего, если система имеет окуляр, считать за единицу угол с осью первого вспомогательного луча в среде, отделяющей окуляр от всей части системы, стоящей впереди. Обозначая через F' заднее фокусное расстояние этой последней системы, через f' — заднее фокусное расстояние окуляра, через $\gamma = -\frac{F'}{f'}$ — увеличение телескопической системы, получаем для $\left[\delta g'_p\right]$ и $\left[\delta G'_p\right]$ следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} +\frac{2}{\gamma}\left[\delta g'_p\right] &= \omega'_q\left(\omega'^2_q + \Omega'^2_q\right) S_{\mathrm{I}} + \left(3\omega'^2_q + \Omega'^2_q\right) w_{\mathrm{I}} S_{\mathrm{II}} + \\ &\quad + \omega'_q w_1^2 \left(3S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}\right) + w_1^3 S_{\mathrm{V}}; \\ +\frac{2}{\gamma}\left[\delta G'_p\right] &= \Omega'_q\left(\omega'^2_q + \Omega'^2_q\right) S_{\mathrm{I}} + 2\omega'_q \Omega'_q w_{\mathrm{I}} S_{\mathrm{II}} + \\ &\quad + \Omega'_q w_1^2 \left(S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}.8)$$

При этом

$$\alpha'_q = 1; \quad h_1 = 1; \quad y_1 = \frac{x_1}{F'}; \quad J = -1.$$

При раскрытии выражений сумм необходимо обратить внимание на следующее: величины P_i и W_i, относящиеся к компонентам, следующим за средой с номером q, должны быть вычислены в обратном ходе. При этом следует брать $\alpha_1 = 0$, $h_1 = 1$, последнее α в среде q равным единице, если вторая часть собирательна. В противоположном случае, если система после q-й среды обладает отрицательной силой, например при оборачивающем окуляре, следует брать $h_1 = -1$ для того, чтобы последнее α в обратном ходе было равным единице. Подставляя полученные значения P_i и W_i в выражения для сумм, надо менять их знаки на обратные.

Величины π_i и Φ_i, имеющие вполне определенный смысл независимо от направления света, подставляются в эти выражения без изменения знака.

Высоты h_i и y_i вычисляются по обычным правилам в прямом ходе независимо от того, относятся ли они к первой или второй части телескопической системы.

Практически формулой (III.8) приходится мало пользоваться, так как расчет обычно разбивается на две или больше частей, которые выполняются независимо друг от друга, и лишь в конечной стадии расчета производится окончательная подгонка аберраций таким образом, чтобы аберрации всей системы были минимальны. Однако формула (III.8) представляет интерес для выяснения ряда вопросов, связанных с наилучшими условиями расчета телескопических систем, например вопроса о расчете труб Галилея с малым увеличением, где разделение на части нерационально. Применение этой формулы требует большой осторожности ввиду необычных условий, при которых вычисляются коэффициенты третьего порядка для второй части оптической системы.

2. ХРОМАТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ

Хроматическая аберрация положения

Обозначая по-прежнему через $\delta s'_p$ расстояние между гауссовыми плоскостями изображения для лучей двух цветов, условно названных буквами C и F, получаем для определения величины $\delta s'_p$ формулу, выведенную в гл. II:

$$n'_p \alpha'^2_p \delta s'_p = \sum h \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n}.$$

Введем для краткости обозначение

$$\overline{C} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n}.$$

Тогда можно написать эту формулу в виде

$$n'_p \alpha'^2_p \delta s'_p = \sum h_i \overline{C}_i. \qquad \text{(III.9)}$$

Для бесконечно тонкого компонента с номером i выражение под знаком суммы принимает вид:

$$h_i \sum \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n}.$$

Для одной линзы имеем

$$\sum \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n} = \frac{\alpha' - \alpha}{1 - n} \delta n = -\frac{\alpha' - \alpha}{\nu},$$

где ν — показатель дисперсии; α и α' — углы первого параксиального луча с осью до и после преломления;

$$\alpha' - \alpha = h\Phi,$$

где Φ — оптическая сила линзы.

Итак, для бесконечно тонкой линзы

$$\sum \frac{\Delta\alpha}{\Delta \frac{1}{n}} \Delta \frac{\delta n}{n} = -\frac{h\Phi}{\nu}. \qquad \text{(III.10)}$$

Пусть оптическая сила компонента с номером i равна Φ_i. Если компонент составлен из t линз с оптическими силами, равными соответственно $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_t$, то $\sum\limits_1^t \Phi = \Phi_i$. Обозначим отношение $\frac{\Phi}{\Phi_i}$ через φ_i. Тогда коэффициент $\bar{C}_i$ для компонента i может быть написан в виде

$$\bar{C}_i = -h_i \sum \frac{\Phi}{\nu} = -h_i\Phi_i \sum \frac{\varphi}{\nu}.$$

Безразмерную величину $-\sum \frac{\varphi}{\nu}$, распространенную на все линзы компонента t, обозначим через C_i. Эта величина не зависит ни от положения предмета, ни от положения зрачка. Для хроматической аберрации всей системы из бесконечно тонких компонентов имеем

$$\alpha_p'^2 \delta s_p' = \sum h_i^2 \Phi_i C_i. \qquad \text{(III.11)}$$

Хроматическая разность увеличений

В гл. II (стр. 180) была приведена следующая формула для хроматической разности увеличений:

$$\frac{L_F' - L_C'}{l'} = \frac{1}{J} \sum y\bar{C} + \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n_p'}{n_p'}.$$

Для случая, когда крайние среды одинаковы и, в частности, когда $n_1 = n_p = 1$, имеем:

$$\frac{L_F' - L_C'}{l'} = \frac{1}{J} \sum y\bar{C}.$$

Воспользуемся только что выполненными для бесконечно тонкой системы преобразованиями, в результате которых было получено

$$\bar{C}_i = h_i\Phi_i C_i,$$

где

$$C_i = -\sum \frac{\varphi_t}{\nu_t}.$$

Применяя эти формулы для хроматической разности увеличений, получаем

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = \frac{1}{J} \sum h_i y_i \Phi_i C_i, \qquad \text{(III.12)}$$

где суммирование распространяется на все элементы системы.

Напомним, что $J = n\alpha l$ имеет ту же размерность, что $h_i y_i \Phi_i$. Для вычислений удобно принимать $\alpha'_p = 1$; $y_1 = x_1$ (т. е. $\beta_1 = 1$); $h_1 = s_1 \alpha_1$. Тогда

$$J = \alpha_1 (x_1 - s_1) = (x'_p - s'_p) \beta'_p.$$

Можно, введя величину $\tau = \frac{\alpha_1}{\alpha'_p}$, написать

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = \frac{1}{\tau (x_1 - s_1)} \sum h_i y_i \Phi_i C_i. \qquad \text{(III.13)}$$

При этом $h_1 = s_1 \tau$; $y_1 = x_1$; $\alpha'_p = 1$. Если предмет на бесконечности ($\tau = 0$; $\alpha'_p = 1$; $h_1 = F'$; $J = -1$), получаем

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = -\sum y_i h_i \Phi_i C_i. \qquad \text{(III.14)}$$

Величина C_i в простейших компонентах

Рассмотрим два случая.

1. Бесконечно тонкая простая линза. Как было показано выше, в бесконечно тонкой линзе

$$\overline{C}_i = -\frac{\alpha'_i - \alpha_i}{\nu_i} = -\frac{h\Phi_i}{\nu_i}; \quad C_i = -\frac{1}{\nu_i}.$$

2. Бесконечно тонкая двухлинзовая склеенная система. Рассмотрим общий случай, когда $\alpha_1 \neq 0$. Фокусное расстояние Φ и высоту h принимаем равными единице. Тогда $h\Phi = \alpha_4 - \alpha_1 = 1$.

Вычислим $C = -\left(\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}\right)$ при $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. Имеем

$$\varphi_1 = (n_2 - 1)(\rho_1 - \rho_2);$$

$$\varphi_2 = 1 - \varphi_1.$$

Но

$$\rho_1 = \frac{\alpha_2 n_2 - \alpha_1 n_1}{n_2 - n_1} = \frac{\alpha_2 n_2 - \alpha_1}{n_2 - 1};$$

$$\rho_2 = \frac{n_3 \alpha_3 - \alpha_2 n_2}{n_3 - n_2}.$$

После подстановки

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\alpha_2 n_2 (n_3 - 1) - \alpha_3 n_3 (n_2 - 1)}{n_3 - n_2} - \alpha_1;\\ C &= -\left(\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}\right) = -\varphi_1\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right) - \frac{1}{\nu_2} = \\ &= -\left[\frac{\alpha_2 n_2 (n_3 - 1) - \alpha_3 n_3 (n_2 - 1)}{n_3 - n_2} - \alpha_1\right] \times \\ &\times \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right) - \frac{1}{\nu_2}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(III.15)}$$

Если не делать предположения о том, что $\alpha_4 - \alpha_1 = 1$, то для C получаем следующее выражение:

$$C = \frac{1}{\alpha_4 - \alpha_1}\left\{\frac{\alpha_1}{\nu_1} - \frac{\alpha_4}{\nu_2} - \left(\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\alpha_3 n_3 (n_2 - 1) - \alpha_2 n_2 (n_3 - 1)}{n_3 - n_2}\right]\right\}. \quad \text{(III.15*)}$$

В часто встречающемся случае, когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_4 = 1$, получаем

$$C = -\frac{1}{\nu_2} - \left(\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1}\right)\left[\frac{\alpha_3 n_3 (n_2 - 1) - \alpha_2 n_2 (n_3 - 1)}{n_3 - n_2}\right].$$

3. ТЕОРИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Из формул (III.7) вытекает, что коэффициенты S всех пяти аберраций третьего порядка монохроматического луча для системы из бесконечно тонких компонентов могут быть написаны в таком виде:

$$S = \sum (m_i P_i + n_i W_i + p_i \pi_i + q_i), \quad \text{(III.16)}$$

причем коэффициенты m_i, n_i, p_i, q_i зависят только от y_i, h_i, Φ_i, т. е. от величин, связанных исключительно с внешними элементами системы — фокусными расстояниями отдельных компонентов, от их взаимного расположения, от положения плоскости объекта и входного зрачка. Действительно, если все перечисленные элементы даны, то можно рассчитать ход обоих вспомогательных лучей на основании формул гауссовой оптики (подробнее см. гл. V) и получить последовательно все h_i и y_i. Существует категория оптических систем, к которым, в частности, относится большинство телескопических систем, для которых величины h_i и y_i могут быть заранее определены (например, из требований габарита). В этом случае они непригодны в качестве переменных, с помощью которых можно исправлять аберрации, и поэтому по характеру своему они совершенно отличны от величин P_i, W_i.

Последние являются функциями α и n, т. е. углов первого вспомогательного луча с осью и показателей преломления всех

сред компонента. В свою очередь, величины α зависят от радиусов кривизны системы, от ее показателей и от положения точки пересечения вспомогательного луча с осью, как это видно из рекуррентных формул, определяющих последовательно все значения α:

$$\left.\begin{aligned} n_{i+1}\alpha_{i+1} &= n_i\alpha_i + \frac{h_i}{r_i}(n_{i+1} - n_i); \\ n_{i+2}\alpha_{i+2} &= n_i\alpha_i + h_i\left(\frac{n_{i+1} - n_i}{r_i} + \frac{n_{i+2} - n_{i+1}}{r_{i+1}}\right); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_{i+t}\alpha_{i+t} &= n_i\alpha_i + h_i \sum_{i}^{i+t} \frac{\Delta n}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.17)}$$

Величины $\pi_i = \sum \frac{\varphi}{n}$ зависят только от радиусов кривизны и показателей преломления.

Таким образом, величины P_i, W_i зависят от «внутренних» конструктивных элементов системы — радиусов кривизны поверхностей и показателей преломления — и еще от положения точки пересечения первого вспомогательного луча с осью оптической системы до преломления через компонент. Последняя зависимость значительно затрудняет систематическое изучение свойств бесконечно тонких компонентов, так как она вводит еще одну лишнюю переменную, также влияющую на свойства указанных величин. Однако [1] можно исключить последнюю переменную и получить величины P_i, W_i в виде функций следующего вида

$$\left.\begin{aligned} P &= r\mathbf{P} + s\mathbf{W} + t\pi; \\ W &= \quad + s'\mathbf{W} + t'\pi, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.18)}$$

где $\mathbf{P}$, $\mathbf{W}$ и π зависят только от внутренних элементов, а r, s, t зависят от положения точки пересечения с осью первого вспомогательного луча. Такой процесс разделения параметров, входящих в выражение для аберраций третьего порядка оптической системы, с одной стороны, на параметры, зависящие только от внешних элементов, и, с другой стороны, на параметры, зависящие только от внутренних элементов, возможен только в системах из бесконечно тонких компонентов и в высокой степени упрощает расчеты. Это вытекает из формул, данных в гл. II (см. стр. 83), связывающих значения коэффициентов аберраций третьего порядка с положением предмета. Для бесконечно тонких компонентов зависимости величин P и W от положения предмета могут быть получены непосредственно гораздо проще, чем в результате применения формул гл. II для частного случая, когда толщины обращаются в нуль. Приводим здесь вывод этих формул.

---

[1] Г. Г. Слюсарев. Труды ГОИ, Т. 8. Вып. 76, 1932.

Основные параметры бесконечно тонкого компонента

Задача преобразования выражений P и W к виду (III.18) может быть решена следующим образом.

Рассмотрим частный случай, когда бесконечно тонкий компонент изображает предмет, находящийся на бесконечности. Вычислим первую сумму **P** и вторую **W**, приняв величину α_s', где s — номер последней поверхности компонента, за единицу. Далее вычислим выражения P и W в общем случае, когда плоскость изображаемого предмета находится на конечном расстоянии. Заметим, что величины α для второго случая связаны линейно с величинами α, соответствующими первому случаю. Чтобы различить углы α в обоих случаях, условимся обозначать величины α, соответствующие бесконечно большому удалению предмета, той же буквой α, но с черточкой наверху.

Выражения P и W являются однородными функциями третьей и второй степени относительно переменных α. Но и выражения **P**, **W** и π являются также однородными полиномами относительно переменных $\bar{\alpha}$ соответственно третьей, второй и первой степени. Поэтому должно существовать соотношение вида (III.18). Определим теперь коэффициенты r, s, t, s' и t'.

Имеем исходные полиномы

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \left(\frac{\Delta_\nu \bar{\alpha}}{\Delta_\nu \frac{1}{n}}\right)^2 \Delta_\nu \frac{\bar{\alpha}}{n}; \\ \mathbf{W} &= \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \left(\frac{\Delta_\nu \bar{\alpha}}{\Delta_\nu \frac{1}{n}}\right) \Delta_\nu \frac{\bar{\alpha}}{n}; \\ \pi &= \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \frac{\Delta_\nu \bar{\alpha} n}{n_\nu n_\nu'}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.19)}$$

где суммирование распространяется на все s поверхностей компонента; так как плоскость предмета на бесконечности, $\bar{\alpha}_1 = 0$; по условию $\bar{\alpha}_s' = 1$. Высоту падения луча на компонент примем за единицу, если фокусное расстояние системы положительное, и за —1, если оно отрицательное.

Параксиальный луч AM (рис. III.1), проходящий параллельно оси на высоте h, после преломления пересекает ось в точке F. Рассмотрим другой параксиальный луч A_1MF_1, пересекающий компонент в той же точке M. Он пересекает ось в точке S до преломления и в точке F_1 после преломления. Если угол MFO принят

за единицу и угол A_1MA обозначен буквой α_1, то угол MF_1O равен $1 + \alpha_1$.

Определим положение плоскости предмета отношением $\frac{OS}{OF_1}$:

$$\frac{OS}{OF_1} = \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1},$$

которое обозначим через $\frac{1}{\varepsilon}$.

Рис. III.1

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}; \\ \alpha_s' &= \frac{1}{1-\varepsilon}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.20)}$$

где α_s' — угол, образованный лучом с осью после преломления; $\alpha_s' - \alpha_1 = 1$.

Вычислим теперь P и W. Если выразить величину радиуса поверхности с номером ν двумя способами через α и $\bar{\alpha}$, придем к соотношению

$$\bar{\alpha}_{\nu+1}n_{\nu+1} - \bar{\alpha}_\nu n_\nu = \alpha_{\nu+1}n_{\nu+1} - \alpha_\nu n_\nu$$

или

$$\alpha_{\nu+1}n_{\nu+1} - \bar{\alpha}_{\nu+1}n_{\nu+1} = \alpha_\nu n_\nu - \bar{\alpha}_\nu n_\nu.$$

Таким образом, разность $\alpha_\nu n_\nu - \bar{\alpha}_\nu n_\nu$ является инвариантом, сохраняющим свою величину для данной пары лучей при всех значениях ν. Для первой поверхности $\nu = 1$ и $\bar{\alpha}_1 = 0$; поэтому для поверхности с номером κ можно написать

$$\alpha_\kappa - \bar{\alpha}_\kappa = \frac{\alpha_1 n_1}{n_\kappa}. \qquad \text{(III.21)}$$

Выражение для P и W составляются из множителей:

$$\left(\frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{\frac{1}{n_{\kappa+1}} - \frac{1}{n_\kappa}}\right) \text{ и } \left(\frac{\alpha_{\kappa+1}}{n_{\kappa+1}} - \frac{\alpha_\kappa}{n_\kappa}\right).$$

После подстановки вместо α_κ и $\alpha_{\kappa+1}$ их выражений через $\bar{\alpha}_\kappa$ и $\bar{\alpha}_{\kappa+1}$ получаем

$$\left(\frac{\bar{\alpha}_{\kappa+1}-\bar{\alpha}_\kappa}{\frac{1}{n_{\kappa+1}}-\frac{1}{n_\kappa}}+\alpha_1 n_1\right) \text{ и}$$

$$\left[\frac{\bar{\alpha}_{\kappa+1}}{n_{\kappa+1}}-\frac{\bar{\alpha}_\kappa}{n_\kappa}+\alpha_1 n_1\left(\frac{1}{n_{\kappa+1}^2}-\frac{1}{n_\kappa^2}\right)\right]. \qquad \text{(III.22)}$$

Если эти выражения подставим в формулы для P и W, произведем все выкладки и сокращения, введя, где это окажется возможным, величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$, заменим n_1 его значением, равным 1, и α_1 — его выражением $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, то получим

$$\left.\begin{aligned}(P)_{\frac{1}{1-\varepsilon}} &= \mathbf{P}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(4\mathbf{W}-1)+\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}(3+2\pi);\\ (W)_{\frac{1}{1-\varepsilon}} &= \mathbf{W}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(2+\pi).\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.23)}$$

Индекс $\frac{1}{1-\varepsilon}$ означает, что величины P и W вычислены при значении α_s' равном $\frac{1}{1-\varepsilon}$.

Формулы (III.23) выведены в предположении, что луч A_1MS преломляется сложной линзой с номером i в точке M на той же высоте, что и луч AM. Проведем через точки S и F_1 параксиальный луч, преломляющийся через компонент с номером i не в M, а в какой-нибудь другой точке и являющийся первым вспомогательным параксиальным лучом системы. Обозначим буквами α и α' углы этого параксиального луча с осью до и после преломления у исследуемого компонента. Очевидно, что

$$\frac{\alpha_s'}{\alpha_1}=\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Заменяя ε в формулах (III.23) его выражением через α и α', получаем для $(P)_{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ и $(W)_{\frac{1}{1-\varepsilon}}$

$$\left.\begin{aligned}(P)_{\frac{1}{1-\varepsilon}} &= \mathbf{P}+\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}(4\mathbf{W}-1)+\frac{\alpha^2}{(\alpha'-\alpha)^2}(3+2\pi);\\ (W)_{\frac{1}{1-\varepsilon}} &= \mathbf{W}+\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}(2+\pi).\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.24)}$$

Чтобы получить значения величин P_1 и W_1, соответствующие параксиальному лучу, для которого α_s' равно α', нужно умножить полученные выражения соответственно на $\alpha'^3(1-\varepsilon)^3$ и на $\alpha'^2(1-\varepsilon)^2$ или, что то же самое, на $(\alpha'-\alpha)^3$ и $(\alpha'-\alpha)^2$. Это

следует из того, что каждый угол α указанного параксиального луча больше соответственного угла луча, проходящего через точку M, в $\frac{\alpha'}{\alpha_s'}$ раз, т. е. в $(1-\varepsilon)\alpha'$ раз.

В результате получаем окончательно

$$\left.\begin{aligned} P &= (\alpha'-\alpha)^3\mathbf{P} + 4\alpha(\alpha'-\alpha)^2\mathbf{W} + \\ &+ \alpha(\alpha'-\alpha)[2\alpha(2+\pi)-\alpha']; \\ W &= (\alpha'-\alpha)^2\mathbf{W} + \alpha(\alpha'-\alpha)(2+\pi). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.25)}$$

В некоторых случаях желательно иметь выражение $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ через P и W. Из формул (III.25) получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{(\alpha'-\alpha)^3}\{P - 4\alpha W + \alpha(\alpha'-\alpha)[(4+2\pi)\alpha+\alpha']\}; \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{(\alpha'-\alpha)^2}[W - \alpha(\alpha'-\alpha)(2+\pi)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.25*)}$$

В более общем случае, когда n_1 и n_p' не равны, формулы для P, W и π принимают вид

$$\left.\begin{aligned} n'^3P &= (n'\alpha'-n\alpha)^3\mathbf{P} + nn'\alpha(n'\alpha'-n\alpha)^2(4\mathbf{W}-1) + \\ &+ n^2n'^2\alpha^2(n'\alpha'-n\alpha)\left(\frac{3}{n} - 2h\sum\frac{\Delta\nu}{r}\right) = \\ &= (n'\alpha'-n\alpha)^3\mathbf{P} + 4nn'\alpha(n'\alpha'-n\alpha)^2\mathbf{W} + \\ &+ nn'\alpha(n'\alpha'-n\alpha)\left[2n\alpha\left(2 - n'h\sum\frac{\Delta\nu}{r}\right) - n'\alpha'\right] = \\ &= h^3\varphi^3\mathbf{P} + 4nn'\alpha h^2\varphi^2\mathbf{W} + nn'\alpha h\varphi \times \\ &\times [2n\alpha(2+n'\pi) - n'\alpha']; \\ n'^2W &= (n'\alpha'-n\alpha)^2\mathbf{W} + \alpha nn'(n'\alpha'-n\alpha)\left(\frac{2}{n'} + \pi\right); \\ \pi &= h\sum\left(-\frac{\Delta\nu}{r}\right) = \sum\frac{\alpha'n'-\alpha n}{nn'}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.25**)}$$

При этом $\alpha_1 = 0$; $\alpha' = 1$.

Формула (III.25) позволяет, зная $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{W}_i$ и π_i получить величины P_i, W_i и π_i и обратно.

Таким образом, величины $\mathbf{P}$, $\mathbf{W}$ и π, зависящие только от внутренних элементов компонента (от радиусов поверхностей и от показателей преломления стекол), являются параметрами, полностью определяющими все аберрации третьего порядка монохроматического луча при любом положении предмета и любом положении входного зрачка. В дальнейшем мы будем называть эти величины *основными параметрами* оптической системы; они определяют, как показывают вычисления, не только аберрации третьего

порядка, но в значительной степени и аберрации более высокого порядка.

Зависимость всех аберраций третьего порядка от трех величин характерна для бесконечно тонких систем, состоящих из единственного сложного компонента, и является их главным отличием от систем с конечной толщиной линз, у которых аберрации зависят от пяти параметров $S_{\mathrm{I}}, \ldots, S_{\mathrm{V}}$, совершенно друг от друга не зависящих. Другими словами, у бесконечно тонких систем, не имеющих конечных расстояний между линзами, пять аберраций зависят только от трех величин так, как будто они связаны между собой двумя соотношениями, т. е. две из пяти аберраций вполне определены и не могут быть по произволу изменены, если только заданы остальные три.

То же самое происходит с хроматическими аберрациями положения и увеличений. В то время как у системы конечной толщины эти две аберрации независимы друг от друга, у бесконечно тонких компонентов они зависят от одной и той же величины C_i; поэтому если одна из них задана, то вторая тем самым определена.

Естественно, что переход от свойств бесконечно тонкой системы к свойствам системы с конечными толщинами при непрерывном увеличении толщин происходит не скачком, а постепенно. Если в первой системе две любые аберрации Зейделя вполне определяются заданием остальных трех, то у систем сравнительно тонких линз существует некоторая, уже не такая тесная, но все же вполне ощутимая, связь между двумя заданными аберрациями и тремя остальными — связь, выражающаяся обычно в том, что при заданных трех суммах остальные две могут изменяться только в узких границах. По мере увеличения толщины системы эти границы все более и более расширяются, и при достаточно больших толщинах может наступить полная независимость сумм друг от друга. Это обстоятельство чрезвычайно важно и всегда должно быть принято во внимание при расчете; в противном случае желание придать во что бы то ни стало некоторым аберрациям определенные значения, удерживая и остальные в узких границах, приводит к многочисленным попыткам, заранее обреченным на неудачу.

Еще раз подчеркиваем, что эта взаимная зависимость аберраций третьего порядка существует только у бесконечно тонких систем, состоящих из одного компонента. Наличие нескольких компонентов совершенно меняет дело, если только параметры h и y, зависящие от взаимного расположения и оптических сил отдельных компонентов, могут быть изменяемы в достаточно больших пределах и могут служить добавочными параметрами. Но если эти величины связаны какими-нибудь добавочными условиями, например габаритными требованиями, что часто встречается на практике, то общий закон о зависимости двух аберраций от остальных трех (для монохроматического луча) и второй хроматической аберрации от первой остается в силе.

Ниже даны численные примеры применения формул (III.25).

Пример 1. Рассмотрим случай плоско-выпуклой простой линзы, обращенной плоскостью к предмету. Пусть ее показатель преломления равен 1,5. Определим величины P и W при увеличении — 1. С этой целью можно сначала найти величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ и затем перейти при помощи формулы (III.25) к величинам P и W.

Когда предмет на бесконечности, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ вследствие того, что первая поверхность линзы плоская, и α_3 равно единице по условию. Имеем следующие значения для $\mathbf{P}$, $\mathbf{W}$ и π:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} 1 = 3;$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} 1 = 9;$$

$$\pi = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

Для перехода к величинам W и P надо сначала условиться относительно выбора формул для вычислений аберраций, так как в нашем распоряжении имеются две формулы (II.45) и (II.47) гл. II. В данном случае воспользуемся формулой (II.45), в которой α'_p принимается равным единице. Так как увеличение нашей линзы — 1, то величина $\alpha = \alpha_1$ равна — 1, а величина $\alpha' = \alpha_3$ равна $+1$.

Итак, в формуле (III.25) $\alpha = -1$; $\alpha' = +1$; $\alpha' - \alpha = 2$. Тогда

$$P = 2^3\mathbf{P} - 4 \cdot 2^2\mathbf{W} - 1 \cdot 2\,[-2\,(2{,}67) - 1] =$$

$$= 8\mathbf{P} - 16\mathbf{W} + 12{,}67;$$

$$W = 4\mathbf{W} - 2 \cdot 2{,}67 = 4\mathbf{W} - 5{,}33.$$

Подставляя вместо $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ их значения 9 и 3, получаем

$$P = 72 - 48 + 12{,}67 = 36{,}67; \quad W = 12 - 5{,}33 = 6{,}67.$$

Для контроля вычислим непосредственно P и W через величины α и n. Для этого надо определить величину α_2; вследствие того, что первая поверхность плоская, $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{n} = -0{,}667$.

Результаты, приведенные в табл. III.1, совпадают с ранее полученными.

Пример 2. Вычислить сферическую аберрацию сложной линзы, апланатической для бесконечно удаленного предмета, в том случае, когда источник находится на расстоянии тройного фокусного расстояния от линзы. У этой линзы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ должны равняться нулю, так как она должна быть апланатической, т. е. не иметь ни

Таблица III.1

α	$\frac{\alpha}{n}$	$\Delta\alpha$	$\frac{1}{n}$	$\Delta\frac{1}{n}$	$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}$	$\Delta\frac{\alpha}{n}$	W	P
—1,000	—1,000	—	1,000	—	—	—	—	—
—0,667	—0,444	+0,333	0,667	—0,333	—1,0	+0,556	—0,556	+0,556
+1,000	+1,000	+1,667	1,000	+0,333	+5,0	+1,444	+7,222	+36,111
							+6,666	+36,667

сферической аберрации, ни комы при бесконечно удаленном предмете. Третий основной параметр π для большинства тонких линз равен 0,70. Из условия, что предмет находится на расстоянии $-3F'$ от линзы, можно определить α и α'. Формула

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{F'}$$

дает

$$\frac{1}{s'} = \frac{2}{3F'}.$$

При этом $s' = 1{,}5F'$; $s = -3F'$; $\frac{s}{s'} = -2$; следовательно,

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{s'}{s} = -\frac{1}{2}.$$

Принимая $\alpha' = 1$, получаем $\alpha = -0{,}5$; $\alpha' - \alpha = 1{,}5$. Тогда

$$P = -0{,}5 \cdot 1{,}5\,(-5{,}4 \cdot 0{,}5 - 1) = +2{,}78;$$

$$W = -0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}7 = -2{,}02.$$

Поперечную сферическую аберрацию вычисляем по формуле (II.45):

$$-2\delta g'_p = \omega'^3_p S_{\mathrm{I}};$$

$$S_{\mathrm{I}} = hP = 1{,}5F' \cdot 2{,}78 = 4{,}17F'.$$

Таким образом,

$$\delta g'_p = -2{,}08F'\omega'^3.$$

Пример 3. Вычислить основные параметры бесконечно тонкой системы, апланатической для увеличения —1. Из условий $S_{\mathrm{I}} = S_{\mathrm{II}} = 0$ вытекает, что величины P и W данной системы должны равняться нулю. Но при увеличении —1 имеем $\alpha = -1$, $\alpha' = +1$, а следовательно (см. пример 1),

$$P = 8\mathbf{P} - 16\mathbf{W} + 12{,}67 = 0;$$

$$W = 4\mathbf{W} - 5{,}33 = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{W} = 1{,}33;$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{8}(16\mathbf{W} - 12{,}67) = 1{,}08.$$

Ввиду важности формулы (III.25) рассмотрим еще ряд ее применений.

Некоторые свойства бесконечно тонких компонентов, вытекающие из теории основных параметров

Устранение сферической аберрации бесконечно тонкой системы для нескольких положений предмета. Продольная сферическая аберрация $\delta s'$ для точки на оси системы связана с поперечной аберрацией $\delta g'$ формулой

$$\delta s' = \frac{\delta g'}{\omega_p'},$$

где ω_p' — угол луча в пространстве изображений с осью.

Поперечную аберрацию $\delta g'$ вычисляем по формуле (II.45), полагая, что $n_p' = 1$; $w_1 = 0$; $\Omega_p' = 0$; сумму S_I определяем по первой из формул (III.7), причем для бесконечно тонкой системы все h_i равны между собой.

Положим, что угол α' первого параксиального луча с осью после преломления через систему равен единице; тогда в выражении для P все h_i равны s' — расстоянию от системы до плоскости изображения. Так как

$$\omega_p' = \frac{h}{s'},$$

где h — расстояние от оси до точки пересечения луча с системой, то по выполнении всех подстановок для продольной сферической аберрации бесконечно тонкой системы получим

$$\delta s' = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{s'}P. \qquad \text{(III.26)}$$

Как нетрудно проверить,

$$s' = F'\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha'} = F'(1 - \alpha),$$

где F' — фокусное расстояние системы. Подставляя в формулу (III.26) вместо P его выражение из формулы (III.25) и помня, что $\alpha' = +1$, получаем

$$\delta s' = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{F'}\{(1-\alpha)^2\mathbf{P} + 4\alpha(1-\alpha)\mathbf{W} +$$

$$+ \alpha[2\alpha(2+\pi) - 1]\}.$$

Располагая выражение в фигурных скобках по степеням α, получаем

$$\delta s' = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{F'}[\mathbf{P} - (2\mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 1)\alpha + $$

$$+ (\mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 4 + 2\pi)\alpha^2]. \qquad \text{(III.27)}$$

Требование уничтожения сферической аберрации для любого расстояния предмета, т. е. для любого α_1, приводит к уравнениям

$$\mathbf{P} = 0;$$

$$2\mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 1 = 0;$$

$$\mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 4 + 2\pi = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\mathbf{P} = 0; \quad \mathbf{W} = 0{,}25; \quad \pi = -1{,}5. \qquad \text{(III.28)}$$

Третье из этих условий практически невыполнимо, так как у всех известных тонких систем величина π колеблется между 0,3 и 0,8. Однако, если ограничиться условием, чтобы сферическая аберрация была достаточно мала при расстояниях предмета, не превосходящих 10-кратного фокусного расстояния, то условия $\mathbf{P} = 0$ и $\mathbf{W} = 0{,}25$ решают задачу достаточно удовлетворительно. Действительно, α^2 меньше 0,01, так что третьим членом формулы (III.27) можно пренебречь. С другой стороны, условие $\mathbf{W} = 0{,}25$ сравнительно мало отличается от условия $\mathbf{W} = 0$, выполнение которого необходимо для устранения аберрации комы в рассматриваемой системе.

Обращение хода луча в бесконечно тонкой системе. Аберрации третьего порядка при обращении хода. Если перевернуть бесконечно тонкую систему таким образом, чтобы первая поверхность ее оказалась последней, то значения параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ в новом положении и при прежнем направлении луча, вообще говоря, не совпадают.

Чтобы получить новые значения, выраженные через старые, поступим следующим образом. Оставив систему в первоначальном положении, рассмотрим луч, проходящий через передний фокус системы и выходящий из нее параллельно оси; при этом примем, что $\alpha = 1$; тогда α' будет равняться 0. Применив формулы (III.25) для этого случая, получим для P и W следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} P &= -\mathbf{P} + 4\mathbf{W} - 4 - 2\pi; \\ W &= \mathbf{W} - 2 - \pi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.29)}$$

Когда система переворачивается, нетрудно видеть, что величины P и W для перевернутой системы равны соответственно только что вычисленным величинам P и W, но с обратным знаком.

Таким образом, если обозначить параметры **P** и **W** перевернутой системы буквами $\overleftarrow{\mathbf{P}}$ и $\overleftarrow{\mathbf{W}}$, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\overleftarrow{\mathbf{P}} &= \mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 4 + 2\pi;\\ \overleftarrow{\mathbf{W}} &= -\mathbf{W} + 2 + \pi.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.30)}$$

Для того чтобы система не изменяла аберрации третьего порядка при переворачивании, мы должны, очевидно, иметь $\overleftarrow{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$ и $\overleftarrow{\mathbf{W}} = \mathbf{W}$, следовательно,

$$\mathbf{W} = 1 + \frac{\pi}{2}; \ \mathbf{P} \text{ — произвольное.} \qquad \text{(III.31)}$$

Это приводит к любопытному свойству бесконечно тонких систем. Все бесконечно тонкие системы, у которых $\mathbf{W} = 1 + \frac{\pi}{2}$ (т. е. примерно 1,35), не меняют своих аберраций, когда их переворачивают. Что же касается величины **P**, то, оказывается, она никакой роли не играет, так что достаточно только одного условия (а не трех, как следовало бы ожидать) для достижения указанного результата. Отсюда вытекает другое свойство бесконечно тонких симметричных систем: каково бы ни было число линз, их радиусы и сорта стекол, из которых они изготовлены, величина **W**, относящаяся к ним, всегда равна $1 + \frac{\pi}{2}$, т. е. приближенно 1,35. Это свойство действительно оправдывается в случаях простой симметричной и тройной симметричной линзы.

Таким образом, бесконечно тонкий симметричный объектив (или практически достаточно тонкий объектив) имеет всегда значительную кому, если входной зрачок совпадает с ним.

Случай, когда *n* и *n'* не равны единице. Рассмотрим важный для ряда приложений (зеркально-линзовые системы, гидроперископы и др.) случай, когда показатели крайних сред не равны единице, а равны соответственно n и n'.

С помощью выкладок, аналогичных тем, которые были приведены на стр. 252, получаем для P следующее выражение:

$$n'^3 P = (n'\alpha' - n\alpha)^3 \mathbf{P} + nn'\alpha (n'\alpha' - n\alpha)^2 (4\mathbf{W} - 1) +$$
$$+ n^2 n'^2 \alpha^2 (n'\alpha' - n\alpha) \left(\frac{3}{n} - 2h \sum \frac{\Delta \frac{1}{n}}{r} \right)$$

или еще

$$n'^3 P = (n'\alpha' - n\alpha)^3 \mathbf{P} + 4nn'\alpha (n'\alpha' - n\alpha)^2 \mathbf{W} +$$
$$+ nn'\alpha (n'\alpha' - n\alpha) \left[2n\alpha \left(2 - n'h \sum \frac{\Delta \frac{1}{n}}{r} \right) - n'\alpha' \right].$$

Если заметить, что $n'\alpha' - n\alpha$ представляет собой произведение $h\varphi$, то можно написать для $n'^3 P$

$$n'^3 P = h^3\varphi^3\mathbf{P} + 4nn'\alpha h^2\varphi^2\mathbf{W} +$$

$$+ nn'\alpha h\varphi\,[2n\alpha\,(2 + n'\pi) - n'\alpha'].$$

Аналогично для π и W получаем следующие формулы:

$$\pi = -h\sum\frac{\Delta\frac{1}{r}}{n} = \sum\frac{\alpha' n' - \alpha n}{nn'};$$

$$n'^2 W = (n'\alpha' - n\alpha)^2\,\mathbf{W} + \alpha nn'\,(n'\alpha' - n\alpha)\left(\frac{2}{n'} + \pi\right),$$

причем $\alpha = 0$; $\alpha' = 1$.

Коэффициенты C_i, от которых зависят хроматические аберрации положения и увеличений, не зависят ни от положения предмета, ни от положения входного зрачка. Поэтому C_i можно рассматривать как основной параметр компонента i.

4. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В ПРОСТЕЙШИХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Возвращаясь к формулам (III.7) и (III.25), замечаем, что можно при помощи формул (III.25) исключить величины P и W из выражений сумм (III.7) и после исключения получить новые выражения для сумм в таком виде:

$$S_t = \sum\,(m_{t,\,i}\mathbf{P}_i + n_{t,\,i}\mathbf{W}_i + p_{t,\,i}\pi_i), \qquad \text{(III.32)}$$

где S_t обозначает какую-нибудь из пяти сумм третьего порядка с порядковым номером t. Коэффициенты m, n и p зависят только от внешних элементов компонентов (фокусные расстояния линз, расстояния между ними, положение плоскости предмета и входного зрачка); основные параметры $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{W}_i$ и π_i зависят только от радиусов кривизны и показателей преломления стекол отдельных компонентов. Таким образом, произошло разделение переменных на две группы, позволяющие делить расчет системы на две независимые части; в первой части вычисляют все внешние элементы системы, основываясь на габаритных требованиях. В большинстве телескопических систем требования габарита определяют внешние элементы системы однозначно. Зная все коэффициенты m, n и p, можно составить для всех аберраций, подлежащих исправлению, ряд выражений для сумм Зейделя и, подставив вместо левых частей уравнения (III.32) нуль или определенные числа, связанные с условиями исправлений,[1] получить уравнения,

[1] Вопрос об определении численных значений величин S_t будет рассмотрен в гл. V.

которым должны удовлетворять значения конструктивных элементов системы.

Пусть исправлению подлежат r аберраций. Составляются уравнения вида (III.32), содержащие $3s$ неизвестных $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{W}_i$ и π_i, где s — число компонентов; однако, вследствие того, что величина π колеблется всегда в очень узких пределах и практически постоянна, число независимых переменных равно всегда только $2s$; поэтому рационально брать $r = 2s$.

Решая систему r линейных уравнений с r неизвестными, получаем для параметров $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ всех компонентов определенные значения. Следующей задачей является расчет компонента, удовлетворяющего полученным для его параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ значениям. Для этого надо изучить связь между основными параметрами системы и ее внутренними элементами. Эта связь в большой степени зависит от сложности компонента. В дальнейшем она будет изучена для случая простой линзы, потом для случая двух и трех склеенных линз.

В бесконечно тонкой простой линзе величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ зависят только от одного параметра, например α_2 — угла с осью системы первого параксиального луча во второй среде (в стекле); α_3 примем, как было условлено ранее, за единицу. Таким образом, α_2 вполне определяет форму линзы при условии, что показатель стекла известен.

Выражая $\mathbf{W}$ и $\mathbf{P}$ как функции от α_2, получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\right)^2 \Delta\frac{\alpha}{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\left[1-\left(2+\frac{1}{n}\right)\alpha_2 + \right. \\ &\qquad \left. + \left(1+\frac{2}{n}\right)\alpha_2^2\right]; \\ \mathbf{W} &= \sum\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\,\Delta\frac{\alpha}{n} = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{n+1}{n}\,\alpha_2\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.33)}$$

Укажем на одно важное соотношение, связывающее величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$. Напишем $\mathbf{P}$ в виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + q(\alpha_2 - \alpha_0)^2, \quad \text{(III.34)}$$

где α_0 — то значение α_2, при котором величина $\mathbf{P}$ достигает своего минимального значения. При этом

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2n+1}{n+2}\,\frac{1}{2}; \\ \mathbf{P}_0 &= \frac{(4n-1)\,n}{4\,(2+n)\,(n-1)^2}; \\ q &= \frac{n\,(2+n)}{(n-1)^2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.35)}$$

Из уравнения, связывающего **W** и α_2, находим α_2; это дает

$$\alpha_2 = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1}\mathbf{W};$$

исключая α_2 из выражения для **P**, получаем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]\left[\mathbf{W} - \frac{1}{2(2+n)}\right]^2. \qquad \text{(III.36)}$$

Численное значение коэффициента перед вторыми квадратными скобками и значение **W**, при котором **P** достигает минимума, т. е. $\frac{1}{2(2+n)}$, практически постоянны, как показывает табл. III.2.

Таблица III.2

n	$1-\frac{1}{(n+1)^2}$	$\frac{1}{2(2+n)}$	$\mathbf{P}_0$	n	$1-\frac{1}{(n+1)^2}$	$\frac{1}{2(2+n)}$	$\mathbf{P}_0$
1,50	0,840	0,143	2,14	1,80	0,872	0,132	1,15
1,55	0,846	0,141	1,88	1,85	0,877	0,130	1,06
1,60	0,852	0,139	1,67	1,90	0,881	0,128	0,99
1,65	0,858	0,137	1,50	1,95	0,885	0,127	0,93
1,70	0,863	0,135	1,36	2,0	0,889	0,125	0,87
1,75	0,868	0,133	1,24				

Из таблицы видно, что величина $\mathbf{P}_0$ меняется значительно и потому не может считаться постоянной. Таким образом, можно для **P** написать следующую формулу, являющуюся достаточно точной в широкой области изменения величин **P** и **W**:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + 0{,}85(\mathbf{W} - 0{,}14)^2. \qquad \text{(III.37)}$$

Это соотношение имеет чрезвычайно важное значение, и потому на нем следует остановиться, тем более что, как будет доказано впоследствии, оно сохраняет значение для всех бесконечно тонких склеенных линз, но только оно становится менее точным. Из формул (III.35)—(III.37) можно сделать следующие выводы:

1. Величина **P** принимает минимальное значение, когда **W** равно числу 0,14.

2. Минимальное значение **P** всегда положительно и меняется в пределах от 1,3 до 2.

3. Форма кривой и ее расположение относительно оси $\mathbf{W} = 0$ не зависят от значения показателя преломления. Это следствие того, что коэффициенты $\frac{1}{2(2+n)}$ и $1 - \frac{1}{(1+n)^2}$ практически постоянны.

График зависимости **P** от **W** для различных показателей преломления стекол представлен на рис. III.2.

Для предварительного подсчета аберраций тонких линз часто бывает полезным знать, как меняются основные параметры **P** и **W** при изменении формы линзы (показатель преломления линзы принят $n = 1{,}5$):

Линза	W	P
Плоско-выпуклая с первой поверхностью плоской	3,00	9,00
Равносторонняя	1,33	3,33
Плоско-выпуклая с первой поверхностью выпуклой	—0,33	2,33

Принимая во внимание уравнения (III.33) и замечая, что отрицательным значениям параметра α_2 соответствуют отрицательные кривизны поверхностей линзы, приходим к заключению, что менискам с отрицательными радиусами кривизны соответствуют большие положительные значения **W** и **P**.

Рис. III.2

Для плоско-выпуклой линзы с плоскостью, обращенной к предмету, основные параметры принимают значения **W** = 3 и **P** = 9. Когда линза становится двояковыпуклой и переходит к выпукло-плоской форме, величины **P** и **W** продолжают уменьшаться. Они достигают минимума, когда первый радиус кривизны приблизительно в 6 раз больше второго (при противоположных знаках); при этом **W** = 0,14; **P** = 2,14. Дальше **W** принимает отрицательные значения с увеличивающейся абсолютной величиной, а **P** снова возрастает. Параметр π практически постоянен, меняясь от 0,60 до 0,67.

В общем случае, т. е. когда $\alpha \neq 0$ и $\alpha' \neq 1$, связь между W и P выражается с помощью соотношений, которым в целях облегчения вычислений придан такой же вид, как в формуле (III.36). Эту формулу можно написать в таком же виде, как при $\alpha = 0$, а именно:

$$P = a(W - W_0)^2 + P_0,$$

где

$$a = \frac{n(2+n)}{(n+1)^2(1-\beta)\alpha'}; \quad W_0 = \frac{(1-\beta^2)\alpha'^2}{2(2+n)};$$

$$P_0 = \frac{n}{(n-1)^2}(1-\beta)\alpha'\left[\frac{(4n-1)(1+\beta)^2\alpha'^2}{4(2+n)} - n\beta\right]; \quad \beta = \frac{\alpha_1}{\alpha'}.$$

Рис. III.3

Рис. III.4

Если $\alpha' = 1{,}0$, то

$$a = \frac{n(2+n)}{(n+1)^2(1-\beta)}; \quad W_0 = \frac{(1-\beta^2)}{2(2+n)};$$

$$P_0 = \frac{n}{(n-1)^2}(1-\beta)\left[\frac{(4n-1)(1+\beta)^2}{4(2+n)} - n\beta\right].$$

В табл. III.3 показана зависимость P_0 от β для различных значений n. На рис. III.3 и III.4 даны кривые зависимости P_0 от β (на рис. III.4 показана центральная часть кривых рис. III.3 в более крупном масштабе).

Таблица III.3

β	Показатель преломления			
	1,5	1,6	1,7	2,0
—10,0	1943	1673	1495	1224
—5,0	372,7	309,3	268,2	204,5
—2,0	57,2	45,7	38,3	26,6
—1,0	18,0	14,2	11,8	9,76
—0,6	8,91	7,09	5,90	4,06
—0,4	5,59	4,48	3,78	2,69
—0,2	2,98	2,47	2,15	1,63
0	1,07	1,0	0,95	0,88
0,2	—0,21	0,02	0,15	0,38
0,4	—0,90	—0,53	—0,30	0,07
0,6	—1,06	—0,68	—0,44	—0,06
1,0	0	0	0	0
2,0	8,37	5,22	3,25	0,08
5,0	25,9	—1,80	—18,80	—46,72
10,0	—355,2	—449,1	—503,6	—598,3

5. АФОКАЛЬНЫЕ БЕСКОНЕЧНО ТОНКИЕ КОМПОНЕНТЫ

В ряде оптических систем, главным образом зеркальных и зеркально-линзовых, в которых из-за малого числа параметров оказывается затруднительным исправлять достаточное количество аберраций, применяются для коррекции оставшихся неисправленных аберраций афокальные компоненты малой толщины, не имеющие общего хода лучей в системе. Наиболее простыми являются однолинзовые (менисковые) компенсаторы, предложенные Габором и Максутовым соответственно в 1940 и 1941 годах (а может быть,

и еще ранее Бауерсом). Однако, поскольку коррекционные свойства менисковых компенсаторов обусловливаются их толщиной совместно с радиусами кривизны, они в этой главе рассматриваться не будут.

Двухлинзовые бесконечно тонкие компоненты

Эти компенсаторы, предложенные еще Ценгером в XIX в., бывают двух родов: для линз применяется один и тот же материал либо разные. В первом случае афокальный компенсатор идеально исправлен в отношении хроматических аберраций положения и увеличения, во втором появляется возможность исправлять одну

Рис. III.5

из хроматических аберраций системы, но при этом появляется вторичный спектр.

Рассмотрим двухлинзовые афокальные компенсаторы из одного материала, поскольку они значительно чаще применяются. Вычислим значения основных параметров бесконечно тонкого афокального компенсатора W, P, π и C. Положим $\alpha_1 = \alpha_5$ (рис. III.5); $n_1 = n_3 = n_5 = 1$; $n_2 = n_4 = n$.
Тогда

$$W = \frac{n+1}{n-1}(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1);$$

$$P = \frac{n}{(n-1)^2}(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)[(2n+1)(\alpha_3 + \alpha_1) -$$

$$-(2+n)(\alpha_4 + \alpha_2)];$$

$$\pi = 0;$$

$$C = 0.$$

Отмечая, что

$$\frac{P}{W} = \frac{n}{n^2-1}[(2n+1)(\alpha_3 + \alpha_1) - (2+n)(\alpha_4 + \alpha_2)],$$

и решая предыдущие уравнения относительно α_2 и α_4, получаем

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_2 &= \frac{2n+1}{2+n}(\alpha_3+\alpha_1) - \frac{n^2-1}{n(2+n)}\frac{P}{W} - \frac{(n-1)W}{(n+1)(\alpha_3-\alpha_1)}; \\ 2\alpha_4 &= \frac{2n+1}{2+n}(\alpha_3+\alpha_1) - \frac{n^2-1}{n(2+n)}\frac{P}{W} + \frac{n-1}{n+1}\frac{W}{\alpha_3-\alpha_1}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.38)}$$

В частном случае, когда $n = 1{,}5163$ (стекло К8 для $\lambda = 589{,}3$),

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= +0{,}573(\alpha_3+\alpha_1) - 0{,}1215\frac{P}{W} - 0{,}1025\frac{W}{\alpha_3-\alpha_1}; \\ \alpha_4 &= +0{,}573(\alpha_3+\alpha_1) - 0{,}1215\frac{P}{W} + 0{,}1025\frac{W}{\alpha_3-\alpha_1}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.38*)}$$

Заметим, что α_1 может равняться любой величине, в том числе и нулю. В этом случае компенсатор находится в параллельном пучке, например перед объективом. Если компенсатор находится между объективом и изображением, то $\alpha_1 = \alpha_5$ обычно равно единице.

Любопытно, что P содержит вторые степени от α_4 и α_2, а W — лишь первые степени, в то время как у обычных бесконечно тонких компонентов (неафокальных) P есть функция третьей степени, а W — второй степени относительно α_2 и α_4. Отсутствие оптической силы ($\alpha_5 = \alpha_1$) понизило степень уравнений на единицу, в результате этого при заданных P, W и α_3 решение для α_2 и α_4 получается единственным. Параметр $\alpha_3 - \alpha_1$, характеризующий оптическую силу каждой составляющей, теоретически может принимать любые значения.

Из предыдущих формул ясно, что с помощью афокального двухлинзового компенсатора можно исправить две аберрации монохроматических лучей, поскольку можно придать параметрам P и W любые значения, кроме $W = 0$ при $P \neq 0$; π равно нулю. Обычно при применении компенсатора в параллельных пучках исправляют сферическую аберрацию и кому всего объектива. Когда компенсатор находится недалеко от плоскости изображений, рационально его использовать для исправления астигматизма и кривизны или одной из этих аберраций и дисторсии.

Замена двух линз тремя, четырьмя и более не увеличивает коррекционных возможностей компонента, но позволяет добиться меньших остаточных аберраций, поскольку путем применения нескольких двухлинзовых компенсаторов можно распределить между ними величины P и W. Например, с помощью двух двухлинзовых компенсаторов можно добиться того, чтобы каждый из них обладал значениями P и W в два раза меньшими, чем в случае одного компенсатора, а это приводит к заметному уменьшению кривизны поверхностей (но не вдвое).

Параметр α_3 не увеличивает коррекционных возможностей компенсатора в области зейделевых аберраций, но может заметно

влиять на аберрации высших порядков. Если величина α_3 близка к α_1, оптические силы обеих линз малы и для получения значительных P и W приходится давать поверхностям линз большие кривизны: линзы принимают вид сильных менисков, что приводит к большим аберрациям высших порядков. Если, наоборот, брать α_3 далеким от α_1, оптические силы линз велики; это приводит к появлению крутых поверхностей, а следовательно, и больших высших порядков. Наилучшее решение получается в промежуточной области, которую следует искать путем проб. Как правило, лучшие результаты сопутствуют наименьшим кривизнам; поэтому при выборе α_3 следует довести вычисления до расчета радиусов кривизны и в первом приближении выбрать то α_3, при котором все поверхности обладают достаточно малой кривизной. Далее нужно вычислять суммы Зейделя на всех поверхностях и более точный выбор произвести на основании частичных значений этих сумм, обращая главное внимание на те аберрации, которые надлежит исправить с помощью компенсатора. Опыт показывает, что при $\alpha_1 = \alpha_5 = 1$ надо брать α_3 около 0,5—0,3 (отрицательная линза впереди) или 1,5—2 (положительная линза впереди). При $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$ следует брать α_3 в области 0,5—1. Однако многое зависит от значений P и W.

Двухлинзовые афокальные компенсаторы из различных материалов в принципе позволяют исправить три аберрации в монохроматических лучах и одну хроматическую, поскольку выбором параметров α можно добиться получения любых значений P, W, π и C. Практика показывает, что величина π мало отличается от нуля; по этой причине имеет смысл использовать такие афокальные компенсаторы лишь в том случае, когда нужно исправить одну из хроматических аберраций.

Предел коррекционных возможностей афокальных бесконечно тонких компенсаторов и способы их расширения

Коррекционные возможности двухлинзовых афокальных компенсаторов невелики, хотя значительно больше, чем однолинзовых менисковых. Эти возможности ограничены появлением аберраций высших порядков, обязательно сопутствующих аберрациям третьего порядка. Чем больше значения параметров P и W, тем круче поверхности и тем сильнее сказываются аберрации высших порядков.

В светосильных зеркально-линзовых системах допустимы значения P, не выходящие из пределов $-1 \div +1$, а W не должно превышать 0,2—0,5, но при этом следует отметить, что одновременное требование малого W (меньше 0,1—0,2) и даже не очень большого значения P приводит к большим кривизнам, так как в выражения для α_2 и α_4 входит отношение $\frac{P}{W}$, а большие отношения $\frac{P}{W}$

приводят к крутым поверхностям. В каждом частном случае необходимо «играть» указанным отношением, изменяя значения параметров P и W на других поверхностях системы.

Для сравнения можно указать, что менисковые компенсаторы не выдерживают значений P, превосходящих по абсолютной величине 0,2, т. е. оказываются в несколько раз хуже двухлинзовых.

Коррекционные возможности афокальных компенсаторов могут быть усилены следующими способами:

1) увеличением числа компонентов, так как при этом каждый компонент может иметь меньшие значения P и W, что приводит к уменьшению кривизны поверхностей и остаточных аберраций;

2) умелым подбором параметра α_3 и отношения $\frac{P}{W}$ (путем перераспределения аберраций между компонентами оптической системы);

3) применением асферических поверхностей, позволяющих при тех же кривизнах в параксиальной области получать меньшие значения аберраций высших порядков.

Эти способы применимы одинаково к компенсаторам, работающим в параллельных пучках (до первой отражающей поверхности) и в сходящихся пучках (после отражающих поверхностей), но в первом случае преследуется цель исправления сферической аберрации и комы (иногда и хроматической аберрации), а во втором — исправления аберраций наклонных пучков. Во втором случае требуются обычно большие значения параметров P и W, что приводит к большим кривизнам, затрудняющим получение больших значений углов поля зрения; отсюда — уместность применения указанных способов, особенно последнего, основанного на применении асферических поверхностей.

Поскольку коррекционные возможности афокальных компенсаторов сильно ограничены, следует принять необходимые меры к тому, чтобы основная система была наилучшим образом исправлена и требования к компенсатору в отношении значений параметров P и W были сведены к минимальным.

6. СВОДКА ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

Аберрации третьего порядка бесконечно тонкого компонента

В телескопической системе поперечные аберрации можно заменить угловыми, представляющими собой предел, к которому стремится отношение $-\frac{\delta g'}{s'}$ при s', стремящемся к бесконечности:

$$-\left[\delta g'_p\right] = \lim_{s'=\infty} \frac{\delta g'}{s'};$$

$$-\left[\delta G'_p\right] = \lim_{s'=\infty} \frac{\delta G'}{s'}.$$

За единицу принимают угол в среде, отделяющей окуляр от впереди стоящей системы. Если F' — заднее фокусное расстояние этой системы, f' — заднее фокусное расстояние окуляра, $\gamma = -\frac{F'}{f'}$ — увеличение телескопической системы, то получаем для $[\delta g']$ и $[\delta G']$ следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} +\frac{2}{\gamma}\left[\delta g'_p\right] &= \omega'_q\left(\omega'^2_q + \Omega'^2_q\right) S_{\mathrm{I}} + \left(3\omega'^2_q + \Omega'^2_q\right) w_1 S_{\mathrm{II}} + \\ &+ \omega'_q w_1^2 \left(3S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}\right) + w_1^3 S_{\mathrm{V}}; \\ +\frac{2}{\gamma}\left[\delta G'_p\right] &= \Omega'_q\left(\omega'^2_q + \Omega'^2_q\right) S_{\mathrm{I}} + 2\omega'_q \Omega'_q w_1 S_{\mathrm{II}} + \\ &+ \Omega'_q w_1^2 \left(S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}.8)$$

При этом

$$\alpha'_q = 1; \quad h_1 = 1; \quad \dot{y}_1 = \frac{x_1}{F'}; \quad J = -1.$$

Основные параметры бесконечно тонкого компонента

Выражения для P и W, соответствующие произвольному положению предмета, через основные параметры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} P &= (\alpha' - \alpha)^3 \mathbf{P} + 4\alpha(\alpha' - \alpha)^2 \mathbf{W} + \\ &+ \alpha(\alpha' - \alpha)\left[2\alpha(2 + \pi) - \alpha'\right]; \\ W &= (\alpha' - \alpha)^2 \mathbf{W} + \alpha(\alpha' - \alpha)(2 + \pi) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}.25)$$

Если n_1 и n'_p не равны единице, то формулы принимают вид

$$\left.\begin{aligned} n'^3 P &= (n'\alpha' - n\alpha)^3 \mathbf{P} + nn'\alpha(n'\alpha' - n\alpha)^2 (4\mathbf{W} - 1) + \\ &+ n^2 n'^2 \alpha^2 (n'\alpha' - n\alpha)\left(\frac{3}{n} - 2h\sum\frac{\Delta\nu}{r}\right) = \\ &= (n'\alpha' - n\alpha)^3 \mathbf{P} + 4nn'\alpha(n'\alpha' - n\alpha)^2 \mathbf{W} + \\ &+ nn'\alpha(n'\alpha' - n\alpha)\left[2n\alpha\left(2 - n'h\sum\frac{\Delta\nu}{r}\right) - n'\alpha'\right] = \\ &= h^3\varphi^3\mathbf{P} + 4nn'\alpha h^2\varphi^2\mathbf{W} + nn'\alpha h\varphi\left[2n\alpha(2 + n'\pi) - n'\alpha'\right]; \\ n'^2 W &= (n'\alpha' - n\alpha)^2 \mathbf{W} + \alpha nn'(n'\alpha' - n\alpha)\left(\frac{2}{n'} + \pi\right); \\ \pi &= h\sum\left(-\frac{\Delta\nu}{r}\right) = \sum\frac{\alpha' n' - \alpha n}{nn'}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}.25^{**})$$

При этом $\alpha_1 = 0$; $\alpha' = 1$.

Выражение для сферической аберрации третьего порядка при произвольном положении предмета, определяемом отношением α/α' ($\alpha' = 1$), имеет вид

$$\delta s' = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{F'}[\mathbf{P} - (2\mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 1)\alpha + (\mathbf{P} - 4\mathbf{W} + 4 + 2\pi)\alpha^2]. \tag{III.27}$$

Основные параметры бесконечно тонкой простой линзы

Зависимость $\mathbf{P}$ от α_2

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + q(\alpha_2 - \alpha_0)^2, \tag{III.34}$$

где α_0 — то значение α_2, при котором величина $\mathbf{P}$ имеет минимальное значение. При этом

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2n+1}{n+2}\,\frac{1}{2}; \\ \mathbf{P}_0 &= \frac{(4n-1)\,n}{4\,(2+n)\,(n-1)^2}; \\ q &= \frac{n\,(2+n)}{(n-1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{III.35}$$

Если исключить α_2 из выражения для $\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]\left[\mathbf{W} - \frac{1}{2\,(2+n)}\right]^2. \tag{III.36}$$

Приближенная формула для $\mathbf{P}$ имеет вид:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + 0{,}85\,(\mathbf{W} - 0{,}14)^2. \tag{III.37}$$

Афокальные бесконечно тонкие компоненты

Для двухлинзового афокального компенсатора из одного стекла, полагая $\alpha_1 = \alpha_5$; $n_1 = n_3 = n_5 = 1$; $n_2 = n_4 = n$, имеем

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_2 &= \frac{2n+1}{2+n}(\alpha_3 + \alpha_1) - \frac{n^2-1}{n\,(2+n)}\,\frac{P}{W} - \frac{(n-1)\,W}{(n+1)\,(\alpha_3 - \alpha_1)}; \\ 2\alpha_4 &= \frac{2n+1}{2+n}(\alpha_3 + \alpha_1) - \frac{n^2-1}{n\,(2+n)}\,\frac{P}{W} + \frac{(n-1)\,W}{(n+1)\,(\alpha_3 - \alpha_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{III.38}$$

В частном случае, когда $n = 1{,}5163$ (К8), уравнение принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= +\,0{,}573\,(\alpha_3 + \alpha_1) - 0{,}1215\,\frac{P}{W} - 0{,}1025\,\frac{W}{\alpha_3 - \alpha_1}; \\ \alpha_4 &= +\,0{,}573\,(\alpha_3 + \alpha_1) - 0{,}1215\,\frac{P}{W} + 0{,}1025\,\frac{W}{\alpha_3 - \alpha_1}. \end{aligned}\right\} \tag{III.38*}$$

ГЛАВА IV

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ИЗОБРАЖЕНИЕ, ДАВАЕМОЕ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о влиянии температуры, или, точнее, изменений температуры, на качество изображения, даваемого оптическими системами, стал в последнее время предметом ряда исследований как теоретического, так и экспериментального характера. Среди работ теоретического характера следует отметить статьи А. Крюгера [1], А. Зоннефельда [2], Д. Д. Максутова [3] и в особенности Ж. Перри [4] и Д. С. Волосова [5], в которых рассматривается влияние на координаты изображения точки-объекта изменения температуры в предположении, что в каждый момент температура всех элементов оптической системы (стекла и оправ) является одинаковой. Эти вычисления производятся для параксиальной области с помощью приемов, весьма близких к тем, которыми пользуются при определении хроматических аберраций положения и увеличения. В частном случае двухлинзового объектива Д. Д. Максутов вывел формулу изменения положения фокуса при изменении температуры. Д. С. Волосов [5] развил работу Перри и рассчитал ряд объективов, исправленных в отношении термооптических аберраций.

При повышении температуры показатель преломления оптических сред, как правило, растет; растут и линейные размеры оптической системы, а именно: радиусы кривизны и толщины линз и зеркал. Растут также размеры оправ линз и труб, соединяющих отдельные оптические детали. В результате всех перечисленных изменений перемещается плоскость изображения оптической системы, изменяется ее фокусное расстояние, а следовательно, и увеличение системы, или масштаб изображения, изменяются также и аберрации. Если система короткофокусная или если колебания температуры невелики, можно пренебречь этими изменениями, так как они не влияют на качество изображения. Если оптическая система предназначена для визуальных наблюдений (зрительные и астрономические трубы), эти изменения могут быть скомпенсированы соответствующим перемещением окуляра при условии, что в оптических средах не появляется заметного градиента температуры.

Если рассматриваемая система представляет собой фотографический объектив с фиксированным положением пленки или

пластинки, то здесь компенсация не всегда возможна, и необходимо принимать специальные меры, чтобы изображение попадало на светочувствительный слой при любой температуре и чтобы при этом размер изображения оставался постоянным.

С этой целью необходимо исследовать изменение положения изображения и увеличения системы при изменении температуры.

В дальнейшем рассмотрим два случая.

В первом случае будем полагать, что температура всех сред одинакова, но отличается от той, для которой выполнен расчет оптической системы.

Во втором случае будем считать, что температура отдельных элементов различна, т. е. существует градиент температуры.

2. ТЕРМООПТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

При изменении температуры показатель преломления оптической среды меняется по закону

$$n = n_0 + \beta(t - t_0), \tag{IV.1}$$

где n_0 — показатель преломления при температуре t_0, а β — коэффициент приращения показателя преломления.

Эта формула справедлива лишь при небольших изменениях температуры, не превышающих нескольких десятков градусов Цельсия. Линейные параметры оптических деталей (толщины, радиусы кривизны) меняются по закону

$$\left.\begin{aligned} d &= d_0[1 + \alpha(t - t_0)]; \\ r &= r_0[1 + \alpha(t - t_0)], \end{aligned}\right\} \tag{IV.2}$$

где d_0 и r_0 — значения толщины и радиуса кривизны при температуре t_0; α— коэффициент расширения материала линзы.

Эти формулы верны также только при небольших изменениях t, не превышающих одного-двух десятков градусов. Для больших интервалов (50—60°) коэффициенты α и β принимают равными некоторой средней величине, но при этом в значениях n, r и d возникают погрешности, достигающие нескольких единиц шестого знака для n и нескольких процентов для d и r. Изменения воздушных промежутков вызываются изменением температуры оправ линз и труб, соединяющих оптические детали. Если конструкция оправы сложна и определение этого изменения представляет известные трудности, а воздушные промежутки малы (по абсолютной величине), можно пренебречь их изменениями. При больших величинах этих промежутков оправы выполняются обычно из одного материала (медь, сталь, инвар и др.) и температурные изменения могут быть определены, более того, они могут быть использованы для компенсации температурных изменений оптических деталей. Ко всем перечисленным выше причинам по-

грешностей при определении температурного эффекта можно добавить еще следующие:

1) условие постоянства температуры на всех элементах оптических деталей никогда строго не соблюдается, так как при изменении температуры наружных сред оптические детали нагреваются неравномерно и лишь особые меры предосторожности (например, применение изоляционных футляров) могут в какой-то степени устранить эту неравномерность;

2) когда две или более линз, обладающих разными значениями коэффициента расширения α, склеены, изменение радиуса кривизны склейки не может быть вычислено по приведенным выше формулам, так как слой клея препятствует свободному расширению.

Таким образом, не представляется возможным без специальных экспериментальных исследований определить точные значения температурного эффекта. Правда, наличие слоя клея, соединяющего две соседние поверхности, приводит к тому, что влияние изменения радиусов кривизны невелико и в первом приближении можно им пренебречь.

Вследствие всех указанных причин, расчеты изменения положения плоскости установки и масштаба изображения носят лишь приближенный характер и нет смысла применять излишне сложные формулы, получающиеся при строгом учете влияния толщин линз, тем более что исследование термооптических свойств оптических систем оправдано лишь для длиннофокусных объективов, в которых отношение $\frac{d}{F'}$ всегда мало. Поэтому при выводе основных формул, характеризующих влияние температуры на положение и величину изображения, можно всегда считать линзы бесконечно тонкими; в большинстве случаев можно считать и объектив в целом бесконечно тонким, за исключением систем, в которых расстояния между компонентами сравнимы с фокусным расстоянием, что имеет место в телеобъективах. Естественно, что выполненные при таких предположениях расчеты лишь приближенны. Для получения точных величин смещения и масштаба нужно произвести расчет хода лучей с помощью точных тригонометрических формул, после чего можно ввести необходимые поправки в конструктивные элементы согласно обычно принятым приемам (см. гл. II).

Изменение фокусного расстояния бесконечно тонкой линзы

Из формулы $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ дифференцированием по n, r_1 и r_2 получаем $\frac{df'}{f'^2} = dn\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + (n-1)\left(\frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{dr_2}{r_2^2}\right)$.

Заменяя dn через $\beta\Delta t$, dr_1 через $r_1\alpha\Delta t$ и dr_2 через $r_2\alpha\Delta t$

и помня, что $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{f'(n-1)}$, получаем

$$\frac{df'}{f'} = \left(\alpha - \frac{\beta}{n-1}\right)\Delta t, \qquad \text{(IV.3)}$$

где $\Delta t = t - t_0$ — разность температур.

Напомним, что хроматическая аберрация простой бесконечно тонкой линзы определяется формулой

$$\frac{df'}{f'} = -\frac{1}{\nu},$$

где ν — коэффициент Аббе — равен $\frac{n-1}{\Delta n}$, а Δn — разность показателей, соответствующих спектральным линиям C и F.

Таким образом, величина

$$\left(\alpha - \frac{\beta}{n-1}\right)\Delta t$$

на изменение фокусного расстояния при изменении температуры на Δt оказывает то же влияние, что величина $\frac{1}{\nu}$ на хроматическую аберрацию линзы. Поэтому для расчета изменения df', вызванного изменением температуры Δt, можно использовать уже известные для сложных, но бесконечно тонких оптических систем формулы для хроматической аберрации положения и увеличения, заменив в них ν через $\frac{1}{\left(\frac{\beta}{n-1} - \alpha\right)\Delta t} = \frac{1}{V\,\Delta t}$ и обозначив через V величину $\frac{\beta}{n-1} - \alpha$.

Рассмотрим случай, когда компонент в воздухе. Поступая, как было указано выше, получаем для бесконечно тонкого компонента в воздухе

$$\Delta s' = -s'^2\,\Delta t \sum \varphi_i \left(\frac{\beta_i}{n_i - 1} - \alpha_i\right); \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\Delta \bar{l}' = s'y\,\Delta t \sum \varphi_i \left(\frac{\beta_i}{n_i - 1} - \alpha_i\right), \qquad \text{(IV.5)}$$

где $\Delta s'$ — смещение плоскости изображения, вызываемое изменением температуры Δt; i — номер линзы в компоненте; $\Delta l'$ — смещение точки пересечения главного луча с плоскостью изображения, вызываемое изменением температуры Δt; y — высота пересечения главного луча с бесконечно тонким компонентом (величина y выражается в тех же единицах, что и величина l' — высота пересечения главного луча с плоскостью изображения).

Системы с большими воздушными промежутками

Пусть α_i — коэффициент расширения материала оправы (трубы), соединяющей два последующих бесконечно тонких компонента i — 1 и i рассматриваемой оптической системы, разделенных воздушным промежутком d_i (рис. IV.1). Если изменение температуры равно Δt, то изменение промежутка d_i равно $d_i\alpha_i\Delta t$; обозначим через β_i линейное увеличение всей системы, стоящей за промежутком d_i. Смещение плоскости изображения относительно компонента i — 1 будет равно $d_i\alpha_i\Delta t\beta_i^2$.

Смещение относительно плоскости изображения, соответствующее температуре t_0, может быть определено только в том случае, если известна конструкция всей оправы оптической системы, причем каждый конкретный вариант должен быть рассчитан особо, с учетом влияния температуры на все последующие компоненты. Поэтому не существует общей формулы, которая может быть применена в любом случае, а целесообразно поступать следующим образом.

Рис. IV.1

1. Вычислить аберрации положения и увеличения в предположении, что при изменении температуры воздушные промежутки остаются постоянными. С этой целью применяются формулы, аналогичные известным формулам для хроматических аберраций положения и увеличения системы бесконечно тонких компонентов, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \Delta s_p' &= -s_p'^2\,\Delta t \sum \frac{h_i^2}{h_p^2}\varphi_i V_i; \\ \frac{\Delta l_p'}{l_p'} &= -s_p'\,\Delta t \sum \frac{h_i}{h_p}\frac{y_i}{l_p'}\varphi_i V_i, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.6)}$$

где l_p' — расстояние от оптической оси точки пересечения луча с плоскостью изображения (при начальной температуре); h_p — высота пересечения первого параксиального (апертурного) луча с последним компонентом; y_i — высота пересечения второго параксиального (полевого) луча с компонентом i.

Во второй из приведенных формул в знаменатели с обеих сторон введена величина l_p', что приводит к следующим преимуществам: а) в левой части термическая аберрация увеличения выражена в процентах, т. е. в том виде, в котором принято ее определять; б) в правой части появляется отношение $\frac{y_i}{l_p'}$; это дает возможность углы второго параксиального луча с осью выбрать произвольно.

2. После того, как вычислены величины $\Delta s'_p$ и $\Delta l'_p$, зависящие только от параметров отдельных линз (или зеркал), следует принять во внимание изменение положения плоскости изображения из-за действия температуры на воздушные промежутки, учитывая, что каждый воздушный промежуток с номером i претерпевает изменение $d_i\alpha_i\ \Delta t$. Пусть β_i — увеличение всей части системы, стоящей за компонентом i. Смещение компонента i вызывает смещение изображения относительно этого компонента на величину $\beta_i^2\ d_i\alpha_i\Delta t$ и на $(\beta_i^2 - 1)\ d_i\alpha_i\Delta t$ относительно предыдущего компонента $i - 1$. Если имеется несколько компонентов, то смещение изображения относительно его первоначального положения равно сумме отдельных перемещений, т. е. $\Delta t \sum (\beta_i^2 - 1)\ d_i\alpha_i$.

3. Принять во внимание смещение плоскости приемника световой энергии, равное некоторой величине $\delta\ \Delta t$, вызываемое изменением температуры Δt; величина δ может быть определена из конструкции прибора. Общее смещение изображения, вызываемое всеми рассмотренными выше причинами, равно

$$\Delta s' = \left[-s_p'^2 \sum \frac{h_i^2}{h_p^2} \varphi_i V_i + \sum (\beta_i^2 - 1)\, d_i\alpha_i + \delta \right] \Delta t. \quad \text{(IV.7)}$$

Рассмотрим теперь аберрацию увеличения. Для простоты ограничимся случаем двух бесконечно тонких компонентов, разделенных воздушным пространством d.

Перепишем выражение для части этой аберрации, не связанной с изменением воздушного расстояния:

$$\frac{\Delta l'_p}{l'_p} = -s'_p\, \Delta t \sum \frac{h_i}{h_p} \frac{y_i}{l'_p} \varphi_i V_i\,.$$

В нашем частном случае двух компонентов получим

$$\frac{(\Delta l'_2)_1}{l'_2} = -s'_2\, \Delta t \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{y_1}{l'_2} \varphi_1 V_1 + \frac{y_2}{l'_2} \varphi_2 V_2 \right).$$

Теперь следует добавить к величине $\Delta l'$ величину $\overline{\Delta l'}$, причиной появления которой является косвенный температурный эффект, а именно изменение хода главного луча вследствие изменения расстояния d, а следовательно, и изменение величины l' — высоты точки пересечения этого луча с плоскостью изображения и с плоскостью слоя. Вычислим изменение l' в предположении, что приемник световой энергии связан с последним компонентом системы трубой, изготовленной из материала с коэффициентом расширения α_3. Пусть l_2 — изображение предмета, полученное после первой линзы; s_1 — его расстояние от компонента L_2 (рис. IV.2). Последний под влиянием температуры смещается на величину $\delta = d\alpha_2\ \Delta t$, где α_2 — коэффициент расширения материала трубы, соединяющей компоненты L и L_2. Тогда изображение объекта,

т. е. $l_2 = A'A_1'$, смещается на величину $\beta^2\, d\alpha_2\, \Delta t$ по отношению к линзе L_2. Величина l_2' до изменения температуры была равна $l_2\beta = l_2 \frac{s_2'}{s_2}$, после изменения — $l_2 \frac{s_2' + \Delta s_2'}{s_2 - \delta} = l_2 \frac{s_2' - \delta\beta^2}{s_2 - \delta}$. Считая δ малым по сравнению с s_2 и s_2' и произведя некоторые преобразования, получим

$$\frac{(\Delta l_2')_2}{l_2'} = -\frac{\delta\beta(\beta - 1)}{s_2'} = -\frac{d\alpha_2\beta(\beta - 1)\,\Delta t}{s_2'}.$$

Выраженная этой формулой величина $(\Delta l_2')_2$ относится к новой, смещенной плоскости изображения, но еще не к светочувствительной поверхности приемника. Последняя тоже перемещается под влиянием изменения температуры и уходит от второго компонента на величину $s_2'\alpha_3\, \Delta t$. Таким образом, расстояние δ_2 от новой плоскости изображения до нового положения слоя

$$\delta_2 = s_2'\alpha_3\, \Delta t - \beta^2\, d\alpha_2\, \Delta t = \Delta t \times$$
$$\times\, (s_2'\alpha_3 - d\alpha_2\beta^2).$$

Рис. IV.2

Точка пересечения главного луча при переходе от одной плоскости к другой изменяет свое положение на величину $-w'\delta_2$, где w' — угол главного луча с осью в пространстве изображений (изменением угла w', вызванным перемещением линзы L_2, можно пренебречь, так как оно вводит погрешность не ниже второго порядка). Угол w' равен отношению $-\frac{l_2' - y_2}{s_2'}$, следовательно, изменение l_2', вызываемое последней причиной, равно

$$(\Delta l_2')_3 = (s_2'\alpha_3 - d\alpha_2\beta^2)\, \Delta t\, \frac{l_2' - y_2}{s_2'}.$$

Складывая все три полученных выше приращения l', получаем

$$\frac{\Delta l_2'}{l_2'} = -s_2'\, \Delta t \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{y_1}{l_2'} \varphi_1 V_1 + \frac{y_2}{l_2'} \varphi_2 V_2 \right) -$$
$$- \frac{d\alpha_2\beta(\beta - 1)\,\Delta t}{s_2'} + (s_2'\alpha_3 - d\alpha_2\beta^2)\, \frac{l_2' - y_2}{s_2'}\, \Delta t. \qquad \text{(IV.8)}$$

Обобщить полученные формулы не представляет никакой трудности, но поскольку исправление указанных температурных аберраций необходимо лишь для длиннофокусных систем, работающих

в условиях значительных изменений температуры и по этой причине требующих простой конструкции, в этом обобщении надобности нет.

К причинам, вызывающим изменение положения изображения, относится также изменение диаметров оправ линз, косвенно влияющее на воздушные расстояния.

Помимо двух рассмотренных термооптических аберраций положения и увеличения, аналогичных хроматическим аберрациям тех же названий и относящихся к параксиальной области, существуют и температурные изменения всех аберраций третьего и более высокого порядков; но они настолько малы, что ими можно пренебречь. Впрочем, выражения для этих аберраций настолько сложны, что если все же возникает необходимость в их исправлении, то оно выполняется на основании исследования результатов тригонометрических расчетов хода лучей; этот вопрос здесь рассматриваться не будет.

Исправление термооптических аберраций гауссовой области достигается путем подбора, с одной стороны, сортов стекла, обладающих необходимыми значениями коэффициентов V, а с другой — подбором материалов для оправ оптической системы с использованием широких возможностей выбора коэффициентов расширения α (в том числе и отрицательных — при специальных конструкциях оправ, напоминающих по идее схемы компенсированных маятников часов).

Коэффициент V оптических стекол

На рис. IV.3 приведен график значений коэффициентов V для наиболее применяемых сортов оптического стекла. Коэффициенты V заимствованы из ГОСТа 3514—57 (см. табл. IV.1). На графике по оси абсцисс отложены значения коэффициентов дисперсии $\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \nu$, по оси ординат — усредненные величины V, относящиеся к области $-60 \div +40°$, для основной длины волны 589 *нм* (линия D). Поскольку коэффициент V зависит довольно заметно от длины волны, то при расчетах, выполняемых для спектральных областей, отличных от видимой, необходимо обратиться к указанной выше нормали или иным справочникам.

Наиболее употребительные кристаллы приведены в табл. IV.2.

График показывает большое разнообразие значений V у оптических стекол, выпускаемых нашей промышленностью, что, несомненно, является благоприятным обстоятельством, облегчающим расчет оптических систем, не расстраивающихся при изменениях температуры. Особенно достойно внимания наличие как положительных, так и отрицательных значений коэффициента V; у многих сортов этот коэффициент близок к нулю, как, например, у ТФ3, Ф2, ОФ3, ОФ1, БФ7, КФ1, ТК8, БФ1, БК10,

V_c 10^6
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
30
40
50
60
70
ν
ЛК5
ЛК7
БФ28
БФ26
ТФ10
ЛК4
ТФ5
ТФ4
ТК4
КФ6
К14
Ф13
Ф1
ТФ3
ТФ8
ТФ2
Ф4
Ф7
БФ24
ЛФ5
БФ21
БФ25
БФ13
БФ11
ОФ1
БФ7
ТК8
БК10
К20
КФ4
К18
ТК3
БК8
К2
Ф2
ЛФ7
ОФ3
КФ1
БФ1
ТК1
ТК12
Ф6
БФ27
ЛФ11
БФ18
БФ19
ТК9
БК9
ТК2
БК11
К5
КФ8
БК13
КФ3
БФ23
БФ4
ТК7
ТК13
К8
К1
К15
ЛФ10
ОФ2
ТК21
БК12
ТК14
ТК19
К3
ТФ7
ТФ1
БФ8
БФ6
ТК20
ТК16
БФ12
БК4
БК6
БФ16
ЛФ1
Ф8
ЛК6
ЛК3

Рис. IV 3

Таблица IV 1

Сорт стекла	$\beta_D \cdot 10^6$	$\alpha \cdot 10^6$ (−60÷+20°)	$V \cdot 10^6$	ν
ЛК3	−0,9	8,6	−10,7	70
ЛК4	3,9	5,0	2,8	65,1
ЛК5	6,5	3,3	9,7	65,6
ЛК6	−0,2	8,0	−8,6	66,8
ЛК7	5,4	4,0	7,0	66,3
К1	2,2	6,2	−2,0	65,1
К2	3,4	5,8	0,6	66,0
К3	2,2	7,4	−3,3	63,4
К5	2,8	6,7	−1,4	64,3
К8	2,8	7,2	−2,2	64,1
К14	4,2	6,5	1,5	60,6
К15	3,1	8,1	−2,6	55,5
К18	3,6	6,4	0,4	60,4
К19	2,6	7,4	−2,8	61,7
К20	4,0	6,9	0,2	60,1
БК4	2,1	7,4	−3,8	60,5
БК6	1,8	7,4	−4,4	59,7
БК8	3,6	5,6	0,6	62,8
БК9	3,3	6,8	−1,3	55,8
БК10	3,9	6,5	0,0	56,0
БК11	2,8	6,0	−1,1	63,3
БК12	2,5	7,1	−3,0	58,3
БК13	2,7	6,2	−1,7	61,1
ТК1	3,0	5,9	−0,7	60,8
ТК2	3,3	6,4	−1,0	57,5
ТК3	3,5	5,4	0,2	61,2
ТК4	4,8	5,9	1,7	55,8
ТК7	2,9	6,7	−2,3	56,3
ТК8	4,0	6,2	0,2	55,1
ТК9	3,7	7,1	−1,4	54,0
ТК12	2,9	5,8	−0,9	62,9
ТК13	2,5	6,1	−2,3	60,6
ТК14	2,1	6,3	−3,0	60,6
ТК16	2,1	6,8	−3,5	58,3
ТК20	2,3	6,8	−3,4	56,7
ТК21	3,4	7,4	−2,7	51,1
КФ1	3,5	6,3	0,1	54,5
КФ3	3,4	8,3	−2,2	51,0
КФ4	3,7	6,4	0,6	58,9
КФ5	3,3	5,9	0,5	62,1
КФ6	4,3	6,3	1,9	57,2
КФ8	3,2	7,3	−1,7	52,0
БФ1	3,6	6,6	−0,1	54,9
БФ4	2,9	7,1	−2,1	53,9
БФ6	2,8	7,6	−3,2	49,4
БФ7	4,1	6,8	0,0	53,9
БФ8	2,9	7,8	−3,3	46,5
БФ11	4,5	6,4	0,5	53,1
БФ12	3,1	8,3	−4,0	39,1
БФ13	4,6	6,1	0,7	48,3
БФ16	2,5	7,8	−4,5	47,3
БФ18	3,5	7,2	−1,3	50,9
БФ19	3,7	7,1	−1,1	51,1
БФ21	4,9	7,2	0,3	40,0
БФ23	2,8	7,0	−2,4	52,4
БФ24	5,4	7,4	0,5	36,8
БФ25	5,0	6,9	0,7	46,1
БФ26	6,7	6,4	3,5	38,5
БФ27	4,2	7,5	−1,2	44,0
БФ28	8,6	6,0	6,3	35,4
ЛФ1	1,7	8,0	−5,4	47,2
ЛФ5	4,4	6,6	0,6	41,3

Сорт стекла	$\beta_D \cdot 10^6$	$\alpha \cdot 10^6$ (—60÷+20°)	$V \cdot 10^6$	ν	Сорт стекла	$\beta_D \cdot 10^6$	$\alpha \cdot 10^6$ (—60÷+20°)	$V \cdot 10^6$	ν
ЛФ7	4,3	7,1	—0,4	41,1	ТФ1	3,4	8,3	—3,8	33,9
ЛФ10	2,6	7,2	—3,0	45,9	ТФ2	6,2	7,9	0,7	32,2
ЛФ11	3,5	7,1	—1,2	46.8	ТФ3	6,8	7,8	0,4	29,5
					ТФ4	7,9	8,0	1,6	28,2
Ф1	5,2	7,1	0,9	36,9	ТФ5	8,0	7,9	1,6	27,5
Ф2	4,9	7,4	0,0	36,6	ТФ7	4,9	9,3	—3,5	28,3
Ф4	5,4	7,4	0,7	35,9	ТФ8	6,4	7,7	0,6	31,1
Ф6	4,1	7,1	—1,1	37,9	ТФ10	9,7	8,1	2,8	25,4
Ф7	5,0	7,1	0,3	36,9					
Ф8	1,2	9,5	—8,4	35,6	ОФ1	3,5	5,9	0,4	51,8
Ф13	5,5	7,1	1,0	36,3	ОФ2	2,6	7,2	—3,0	48,6
					ОФ3	3,1	4,9	—0,3	44,1

Таблица IV.2

Кристалл	β_D 10^6	α 10^6	$V \cdot 10^6$	ν	n_D
Фтористый натрий NaF	—16	33 (—79÷+250°)	—82	85	1,32549
Фтористый литий LiF	—12,7	31 (—60÷+20°)	—64	99	1,39205
Фтористый кальций (флюорит) CaF_2	—10,4	17,8 (—60÷+20°)	—42	95	1,43384
Фтористый барий BaF_2	—15,5	17,8 (—60÷+20°)	—51	82	1,47443
Иодистый цезий CsJ	—99,2	48,6 (22÷36°)	—176	24	1,78694
Кварц кристаллический SiO_2 (для обыкновенного луча)	—5,3	7,0 (—30÷+70°)	17	70	1,54421
Кварц плавленый SiO_2	9,8	0,2 (—60÷+20°)	22	68	1,45860
Сапфир Al_2O_3 (для обыкновенного луча)	13,1	6,7 ∥ оси (20÷50°) 5,0 ⊥ оси (50°)	10	51	1,76825

Примечание. Содержащиеся в таблице величины взяты из различных источников и должны рассматриваться как приближенные. Следует обратить внимание на весьма большие значения коэффициентов α и β кристаллических сред — обстоятельство, затрудняющее применение их в приборах, подвергающихся значительным изменениям температуры.

К20, ТК3, К2. Все эти стекла весьма значительно отличаются друг от друга в отношении коэффициентов частных дисперсий, а следовательно, можно из комбинаций этих сортов рассчитать ахроматическую систему с независящим от температуры положением фокуса. Впрочем, в большинстве случаев следует учесть расширение оправы и трубы, и целесообразнее так подобрать сорта стекол, чтобы изображение не смещалось с плоскости приемника, прикрепленной к концу трубы.

Пример. Рассмотрим двухлинзовый астрономический объектив с фокусным расстоянием $f' = 1000$ *мм*. Требуется добиться совпадения изображения бесконечно удаленного объекта с плоскостью приемника при изменении температуры на 30°.

Сначала, с целью определения порядка величины смещения фокуса, целесообразно исходить из наиболее часто употребляемых сортов стекла К8 и Ф2. Оптические и термооптические свойства этих стекол приведены в табл. IV.3.

Таблица IV.3

Сорт стекла	n_D	$\frac{n_D}{n_F - n_C}$	α	β_D	V
К8	1,5163	64,1	$7{,}2\cdot10^{-6}$	$2{,}8\cdot10^{-6}$	$-2{,}10^{-6}$
Ф2	1,6164	36,6	$7{,}4\cdot10^{-6}$	$4{,}9\cdot10^{-6}$	0

Из условия исправления хроматической аберрации имеем

$$\varphi_1 = \frac{64{,}1}{64{,}1 - 36{,}6} = 2{,}30.$$

Для бесконечно тонкого компонента при объекте на бесконечности смещение фокуса при изменении температуры на 1° равно

$$\delta s' = -f' \sum \varphi_i V_i = -1000\,(-2{,}30\cdot2\cdot10^{-6}) = 0{,}0046 \text{ мм/град}.$$

Нужно найти материал для корпуса объектива, который дал бы такое же смещение приемника. Длину трубы прибора можно принять равной 1000 *мм*. Если в качестве материала трубы взять латунь, то при коэффициенте расширения $\alpha = 10\cdot10^{-6}$ смещение приемника окажется равным 0,010 *мм/град*, т. е. примерно в два раза больше, чем нужно; изображение будет отставать от плоскости приемника на 0,0054 *мм/град*. При изменении температуры на 30° величина дефокусировки достигнет 0,16 *мм*. Если эта величина слишком велика, можно искать или другую комбинацию стекол, для которой смещение будет больше (например, комбинацию К3—Ф1), или другие материалы для трубы (например, сплав стали с никелем). Можно еще составить трубу из двух частей —

одну из латуни, вторую на основе инварных стержней, — причем длину каждой части подобрать так, чтобы получить общий коэффициент расширения необходимой величины. В астрономическом объективе, являющимся входным зрачком системы (а следовательно, $y = 0$), влияние температуры на термооптическую аберрацию увеличения отсутствует.

Один из приемов, предназначенных для исправления термооптических аберраций (в том случае, когда приемник не меняет своего положения при изменении температуры), заключается в следующем: сорта стекол подбираются так, чтобы их коэффициенты V были пропорциональны коэффициентам ν. Очевидно, что при соблюдении этого условия исправление хроматических аберраций автоматически сопровождается исправлением термооптических. Поскольку разброс величин V велик, то при наличии большого количества сортов стекла можно почти всегда удовлетворить указанному условию, если не точно, то по крайней мере приближенно; даже приближенное выполнение условия пропорциональности сильно помогает исправлению термооптических аберраций. К сожалению, этот прием хорош тогда, когда приемник энергии остается на месте, что требует применения инварных трубок или весьма сложных компенсационных устройств.

Влияние изменения температуры на аберрации третьего порядка, как уже было указано выше, ничтожно мало, и в большинстве случаев им можно пренебречь. Если все же коррекция этих аберраций необходима, то приходится применять обычную методику исправления аберраций высших порядков монохроматических лучей, т. е. изучать влияние отдельных параметров, например конструктивных элементов системы, и главным образом влияние термооптических характеристик сортов стекол.

3. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ГРАДИЕНТА СТЕКЛА НА КАЧЕСТВО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В оптических системах больших размеров, как астрономические рефракторы, рефлекторы, зеркально-линзовые системы, невозможно добиться того, чтобы температура всех частей оптики, оправ и труб была одна и та же. Температура среды, в которую погружены оптические детали астрономических и других больших инструментов, неравномерна. Эти неравномерности вызывают внутри материала линз и зеркал особое распределение температуры, иногда весьма сильно отличающееся от идеально равномерного.

Вопрос о влиянии неравномерного распределения температуры внутри линз очень мало освещен в литературе, и то только с точки зрения эксперимента.

Неравномерный нагрев оптической детали приводит к двум последствиям: 1) изменению формы оптической детали, что вызывает

отклонение луча на некоторый угол ε; 2) появлению градиента показателя преломления в материале детали, что, в свою очередь, вызывает искривление траектории луча и отклонение хода луча. Эти два весьма малых отклонения складываются согласно закону сложения дифференциалов.

Изменение формы оптической детали и вызванное им отклонение луча

Для упрощения расчетов делаем следующие предположения.

1. В оптической детали установился определенный температурный режим, не меняющийся со временем.

2. При достижении определенного температурного режима отсутствуют упругие натяжения в материале оптических деталей; поэтому деформация оптической детали вычисляется единственно на основании линейного закона расширения.

Рис. IV.4

Это предположение не может вызвать серьезных возражений для большинства оптических деталей, как линзы и зеркала, толщина которых невелика по сравнению с диаметром, в особенности если приняты меры, чтобы расширение детали происходило свободно.

3. Градиент температуры направлен перпендикулярно оси симметрии оптической детали, если у последней имеется таковая. Если оси симметрии нет, направление градиента будет каждый раз оговорено.

4. Луч распространяется таким образом, что угол u, образуемый им с осью, невелик и косинус этого угла можно принять равным единице.

Пусть $AB = e(h)$ (рис. IV.4) — толщина детали на расстоянии h от оси (или от выбранной прямой, которая при нагревании не подвергается смещению). Условно будем считать, что на уровне оси OO' температура равна нулю. На высоте h температура равна $t(h)$. Удлинение de отрезка $\overline{AB}$ будет

$$de = \alpha e(h)\, t(h).$$

Одновременно с этим отрезок AB перемещается по высоте. Каждый отрезок dh удлиняется на величину $\alpha\, dh t(h)$. Общее перемещение Δh равно $\Delta h = \alpha \int_0^h t(h)\, dh$. Таким образом, элемент AB одновременно расширяется на величину $de = \alpha e(h)\, t(h)$ и смещается вверх на величину $\Delta h = \alpha \int_0^h t(h)\, dh$.

Луч, падающий на оптическую деталь на определенной высоте h, который при отсутствии нагревания упал бы на элемент AB, на самом деле через этот элемент не пройдет, так как из-за изменения температуры элемент AB занял положение A_1B_1, и кроме того, изменил свою толщину. Разность толщин $e(h)$, вызываемая разностью высот Δh, равна

$$e(h) = \frac{de(h)}{dh}\Delta h,$$

где $\Delta h = \alpha \int\limits_0^h t(h)\,dh$, поэтому изменение толщины Δe следует считать равным

$$\Delta e = \alpha e(h)t(h) - \alpha \frac{de}{dh}\int\limits_0^h t(h)\,dh = \alpha\left[e(h)t(h) - \frac{de}{dh}\int\limits_0^h t(h)\,dh\right].$$

Отклонение луча от своего первоначального направления может быть вычислено следующим образом.

Пусть e — толщина оптического элемента (рис. IV.5). Соответствующее изменение положения фронта волны, вызываемое этим элементом, равно $(n-1)e$ и направлено влево. Предположим, что при переходе от высоты h к высоте $h+dh$ толщина элемента изменяется на de. Тогда поверхность волны изменяет свой наклон на $(n-1)\frac{de}{dh}$, причем луч отклоняется вверх.

Рис. IV.5

Таким образом, отклонение луча вверх ε_1 определяется формулой

$$\varepsilon_1 = (n-1)\frac{de}{dh},$$

откуда

$$\varepsilon_1 = (n-1)\frac{de}{dh} = (n-1)\alpha\frac{d}{dh}\left[e(h)t(h) - \frac{de}{dh}\int\limits_0^h t(h)\,dh\right].$$

Производим дифференцирование выражения в квадратных скобках

$$\frac{d}{dh}[\cdots] = \frac{de}{dh}t(h) + \frac{dt}{dh}e(h) - \frac{d^2e}{dh^2}\int\limits_0^h t(h)\,dh - \frac{de}{dh}t(h) =$$

$$= \frac{dt}{dh}e(h) - \frac{d^2e}{dh^2}\int\limits_0^h t(h)\,dh.$$

Окончательно получаем

$$\varepsilon_1 = (n-1)\alpha\left[\frac{dt}{dh}e(h) - \frac{d^2e}{dh^2}\int_0^h t(h)\,dh\right].$$

Отклонение луча под влиянием градиента в предположении, что форма поверхности не изменилась

Рассмотрим элемент объема изотропной, но неоднородной среды, показатель которой изменяется от точки к точке. Если элемент достаточно мал, можно считать, что изменение показателя по координатам происходит по линейному закону, т. е. можно считать градиент показателя постоянным. В рассматриваемом случае, когда показатель меняется мало и плавно, градиент можно считать постоянным даже на больших протяжениях объема среды, если луч распространяется почти параллельно оси и градиент показателя расположен перпендикулярно оси.

Рис. IV.6

Покажем, как изменение хода луча в среде связано с величиной градиента показателя.

Если среда, в которой распространяется луч, неоднородна, то луч отклоняется от прямой линии и искривляется. Кривизна луча обычно определяется исходя из принципа Ферма, на основании вариационного исчисления. Укажем здесь вполне элементарный вывод формулы для кривизны луча. Рассмотрим (рис. IV.6). три бесконечно тонких слоя толщины dh с показателями преломления $n - dn$, n, $n + dn$. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что нормаль OH к поверхностям раздела находится в плоскости чертежа и что падающий луч, или, точнее, бесконечно малый отрезок падающего луча, также находится в этой плоскости и образует угол i с нормалью.

При переходе через вторую границу луч преломляется по закону $(n - dn)\sin i = n\sin(i - di)$, откуда $di = \frac{dn}{n}\operatorname{tg} i$. Луч повернулся на угол di, равный $\frac{dn}{n}\operatorname{tg} i$.

Достигнув третьей границы, луч претерпевает опять такое же отклонение. При переходе от слоя к слою луч отклоняется на величину $di = \frac{dn}{n}\operatorname{tg} i$. Напомним, что радиус кривизны кривой $R = \frac{ds}{d\alpha}$, где ds — приращение дуги; $d\alpha$ — приращение угла, образуемого нормалью с постоянным направлением.

Если слой имеет толщину dh, то соответствующая этому слою длина дуги BC равна $\frac{dh}{\cos i}$; поэтому $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{dh}{\cos i\, d\alpha} = \frac{dh}{\cos i \frac{dn}{n} \operatorname{tg} i} = \frac{dh}{dn} \frac{n}{\sin i}$. Для кривизны траектории имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{dn}{n\, dh} \sin i. \qquad \text{(IV.9)}$$

Но $\frac{dn}{dh}$ — отношение изменения n к изменению h, отсчитываемому по нормали к поверхностям равных значений n, — есть градиент n. Таким образом, получаем

$$\frac{1}{R} = \frac{\operatorname{grad} n}{n} \sin i = \operatorname{grad}(\lg n) \sin i. \qquad \text{(IV.9*)}$$

Отметим, что если $i = 0$, т. е. луч падает нормально к поверхностям равных значений n, то он не претерпевает отклонения. Наоборот, когда луч падает параллельно этим поверхностям, он отклоняется максимально и кривизна равна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \operatorname{grad} n. \qquad \text{(IV.10)}$$

Рис. IV.7

Пусть $ABCD$ (рис. IV.7) — сечение малого элемента объема меридианной плоскостью; GG' — градиент, который будем считать постоянным; i — угол падающего луча LM с градиентом.

Если градиент параллелен оси h, то $\operatorname{grad} n = \frac{dn}{dh}$, поэтому $\frac{1}{R} = \frac{\sin i}{n} \frac{dn}{dh}$. Как было указано выше, мы будем рассматривать лишь такие лучи, угол которых с осью невелик; это значит, что углы i будут близки к $\pi/2$ и можно положить $\sin i = 1$.

Следовательно,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh}.$$

Если луч пробегает путь e, то он поворачивается на угол δ (рис. IV.8), равный $\frac{e}{R}$, т. е. $\frac{e}{n} \frac{dn}{dh}$. Этот поворот происходит в стекле линзы. При переходе в воздух угол отклонения δ увеличивается в n раз согласно закону преломления и угол отклонения ε_2, вызываемого непостоянством показателя преломления, определяется формулой

$$\varepsilon_2 = e \frac{dn}{dh}.$$

Отношение $\frac{dn}{dh}$ можно написать в виде

$$\frac{dn}{dh} = \frac{dn}{dt} \frac{dt}{dh}.$$

В силу соотношения

$$n = n_0 + \beta(t - t_0),$$

где β — коэффициент, определяющий зависимость изменения показателя преломления от температуры, имеем

$$\frac{dn}{dt} = \beta,$$

а следовательно,

$$\varepsilon_2 = e(h)\beta\frac{dt}{dh}. \qquad \text{(IV.11)}$$

Отклонение происходит в сторону высоких показателей. Общее отклонение луча ε равно сумме $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Рис. IV.8

Если градиент температур направлен вверх, а коэффициенты α и β положительны, как это имеет место для обычных сортов оптического стекла, оба отклонения имеют один и тот же знак: луч отклоняется вверх. Условимся такое отклонение считать отрицательным, поскольку в построениях геометрической оптики принято считать положительным поворот по часовой стрелке (т. е. отклонение, направленное вниз; при этом считается, что свет распространяется слева направо).

Поэтому для $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ получаем

$$\varepsilon = -(n-1)\alpha\left[e(h)\frac{dt}{dh} - \frac{d^2e(h)}{dh^2}\int_0^h t(h)\,dh\right] - e(h)\beta\frac{dt}{dh}.$$

Обозначим для краткости $\frac{dt}{dh}$ буквой g, помня, что эта величина является функцией от h; вместо $e(h)$ и $t(h)$ напишем просто e и t. Тогда имеем

$$\varepsilon = -(n-1)\alpha\left(eg - e''\int_0^h t\,dh\right) - e\beta g$$

или еще

$$\varepsilon = -eg[(n-1)\alpha + \beta] + (n-1)\alpha e''\int_0^h t\,dh. \qquad \text{(IV.12)}$$

Некоторые частные случаи

Несимметричное распределение градиента. Рассмотрим два случая.

1. Случай, когда деталь ограничена плоскими поверхностями (параллельная пластинка и призма с малым преломляющим углом, расположенные так, чтобы их грани образовали с градиентом небольшие углы, косинусы которых можно принять равными единице).

В этом случае $e'' = 0$ и формула (IV.12) принимает вид

$$\varepsilon = -eg[(n-1)\alpha + \beta]. \qquad \text{(IV.13)}$$

Если соблюдено соотношение $(n-1)\alpha + \beta = 0$, что примерно имеет место для некоторых специальных оптических материалов, отклонение ε равно нулю и деталь можно назвать «нерасстраиваемой», так как отклонение отсутствует не только при постоянном (кривизны равны нулю), но и при любом градиенте температур.

Если величина $(n-1)\alpha + \beta$ отлична от нуля, то отклонение ε пропорционально произведению $eg\gamma$, где для краткости положено $\gamma = (n+1)\alpha + \beta$.

Если оптическая деталь представляет собой плоскопараллельную пластинку, e постоянно и отклонение пропорционально градиенту; если последний постоянен, отклонение также постоянно и плоскопараллельная пластинка действует как клин.

Если оптическая деталь является клином, отклонение растет пропорционально толщине. Происходит расфокусировка пучка; если он был параллельным, то становится сходящимся, когда градиент направлен вверх.

Пример 1. Плоскопараллельная пластинка толщиной в 100 *мм* из стекла К8. Примем, что градиент температуры составляет 1° на 1 *см*. Для стекла К8 коэффициент α равен 70×10^{-7} *град*$^{-1}$; коэффициент β равен $28 \cdot 10^{-7}$ *град*$^{-1}$. Имеем $\varepsilon = -100 \cdot 0{,}1 \cdot 70 \cdot 10^{-7} \cdot 206\,000 = -14''$.

Пример 2. Клин диаметром 200 *мм* из стекла К8. Толщина у верхнего края 0, у нижнего — 50 *мм*. Градиент составляет 1° на 1 *см*. Пользуясь вычислениями примера 1, получаем: отклонение на верхнем крае равно 0, на нижнем — 7″. При диаметре 200 *мм* такая разность отклонений соответствует радиусу кривизны поверхности выходящей волны

$$\frac{200\ \text{мм}}{\sin 7''} = 1\ \text{км}.$$

2. Случай, когда деталь ограничена неплоскими поверхностями. Рассмотрим наиболее важный для практики случай линзы. Предположим, что при нагревании температура осевой части линзы не меняется.

Зависимость толщины e от высоты h имеет вид

$$e = e_0 - \frac{h^2}{2(n-1)} \frac{1}{f'},$$

где e_0 — толщина линзы в центре; f' — фокусное расстояние линзы.

Предположим, что градиент g постоянен и направлен перпендикулярно оси. Согласно формуле (IV.12) получим

$$\varepsilon = -\left[e_0 - \frac{h^2}{2(n-1)f'}\right][(n-1)\alpha + \beta] - (n-1)\alpha \frac{h^2}{2(n-1)f'}.$$

После сокращений, производимых вследствие того, что деформация линзы при постоянном градиенте сводится к нулю, получаем

$$\varepsilon = -e_0[(n-1)\alpha + \beta] + \beta \frac{h^2}{2(n-1)f'}. \qquad \text{(IV.14)}$$

Первый член постоянен и очень мал. Практически остается только второй, зависящий лишь от β.

Поскольку ε пропорционально h^2, изображение отягчено комой.

Пусть диаметр линзы 500 *мм*, $f' = 5000$, стекло — К8; разность температур по краям 10°, $g = \frac{1}{50}$; поперечная кома в фокальной плоскости равна 0,004 *мм*, т. е. очень мала.

Хотя кома, вызываемая постоянным градиентом температуры, мала, но в некоторых случаях ее желательно исправить. Это можно сделать подбором сортов стекла. Рассмотрим, например, случай двухлинзового объектива. Кома K, вызываемая системой двух линз, находящихся на бесконечно близком расстоянии друг от друга, определяется величиной

$$K = \beta_1 \frac{h_1^2}{2(n_1-1)f_1'} + \beta_2 \frac{h_2^2}{2(n_2-1)f_2'},$$

где индексы 1 и 2 соответствуют номерам линз. Если $h_1 = h_2$, то условие отсутствия комы выражается уравнением

$$\frac{\beta_1}{(n_1-1)f_1'} + \frac{\beta_2}{(n_2-1)f_2'} = 0.$$

Ввиду того, что в двухлинзовых объективах осуществляется также условие ахроматизма

$$\frac{1}{\nu_1 f_1'} + \frac{1}{\nu_2 f_2'} = 0,$$

где ν_1 и ν_2 — коэффициенты дисперсии стекол, то должно быть соблюдено условие

$$\frac{\beta_1\nu_1}{n_1-1}=\frac{\beta_2\nu_2}{n_2-1},$$

или

$$\frac{\beta_1}{\Delta n_1}=\frac{\beta_2}{\Delta n_2},$$

где Δn — дисперсия стекла.

Обычно применяемые для астрономических объективов сорта стекол удовлетворяют этому условию: отношение дисперсии для стекол К8 и Ф1 около 0,5, а отношение β также близко к 0,5. Происходит автоматическая компенсация искажения изображения.

Распределение градиента, симметричное вокруг оптической оси. Большая теплопроводность металлических оправ по сравнению с теплопроводностью стекла приводит к тому, что оправы быстро воспринимают температуру окружающего воздуха и создают около края стеклянных линз определенную, одинаковую для всего контура температуру, отличную от температуры стекла, вследствие чего внутри последнего образуется более или менее симметричное распределение температур. Этому распределению можно в первом приближении придать вид $t = Ah^2$, где A — некоторая постоянная, а h — расстояние рассматриваемого элемента оптической детали от оптической оси.

Градиент $g=\frac{dt}{dh}$ определяется формулой

$$g=2Ah.$$

Рассмотрим сначала случай деталей, ограниченных плоскими поверхностями (плоскопараллельные пластинки, клинья), нормаль к которым образует с градиентом углы, близкие к 90°.

Из общей формулы (IV.12) вытекает

$$\varepsilon=-eg\,[(n-1)\,\alpha+\beta]=-2Ahe\,[(n-1)\,\alpha+\beta]. \qquad \text{(IV.15)}$$

Для плоскопараллельной пластинки e постоянно и ε пропорционально h. Это соответствует расфокусировке или смещению плоскости изображения.

Для клина $e\,(h)$ меняется по линейному закону, а ε — по квадратичному. Поэтому на оси появляется кома. Рассмотрим численный пример для клина, где e максимальное равно 100 *мм*, $h = 250$ *мм*, $A=\frac{10°}{(250)^2}$ (т. е. разность температур в центре и на краю равна 10°); стекло — К8.

Для вычисления угловой комы надо составить величину

$$K=\frac{\varepsilon\,(250)+\varepsilon\,(-250)}{2}-\varepsilon\,(0).$$

При этом

$$\varepsilon(250) = 0, \quad \text{так как } e = 0;$$

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \text{так как } h = 0,$$

откуда

$$K = \frac{\varepsilon(-250)}{2} = 6''.$$

Как было отмечено выше, применение материала, для которого $(n - 1)\alpha + \beta = 0$, устраняет все последствия неравномерного нагрева.

Рис. IV.9

Для линзы

$$\frac{d^2e}{dh^2} = -\frac{1}{2(n-1)f'}; \quad g = 2Ah;$$

$$\int_0^h t(h)\,dh = \frac{Ah^3}{3}.$$

Если пренебречь толщиной линзы в центре, получаем отклонение ε, пропорциональное h^3; следовательно, в результате неравномерного нагревания, вызывающего параболическое распределение температур, симметричное около оси, возникает сферическая аберрация.

Пусть (рис. IV.9) луч AB отклоняется в точке A на угол ε. Если луч образует с осью угол u', расстояние $OB = s'$, расстояние $OA = h$, то легко получить при малом ε

$$\overline{BB_1} = \delta s' = -\frac{h\varepsilon}{\sin^2 u'}.$$

Итак, продольная сферическая аберрация, вызываемая температурным распределением параболического типа, определяется формулой

$$\delta s' = \frac{Ah^4}{f' \sin^2 u'}\left(\frac{\beta}{n-1} + \frac{2}{3}\alpha\right). \qquad \text{(IV.16)}$$

Отметим, что продольная сферическая аберрация пропорциональна 4-й степени h, как и следовало ожидать.

Предположим, что у линзы диаметром 500 *мм* с фокусным расстоянием 5 *м* разность температур на краю и на оси составляет 10°, стекло — К8. Сферическая аберрация (продольная) на краю согласно выведенной формуле равна 0,5 *мм*.

Формулу (IV.16) можно написать в более кратком виде, если задается разность температур между краем и осью. Пусть Δt есть эта разность. Тогда $A = \frac{\Delta t}{h^2}$ и, ввиду того, что $\sin u' = \frac{h}{f'}$,

формула (IV.16) принимает вид

$$\delta s' = f' \Delta t \left(\frac{\beta}{n-1} + \frac{2}{3} \alpha \right), \qquad \text{(IV.16*)}$$

т. е. сферическая продольная аберрация на краю отверстия зависит только от Δt и от термооптической характеристики стекла.

Этими примерами исчерпаны наиболее простые и интересные на практике случаи распределения температуры в оптических деталях. Влияние более сложных случаев распределения температуры может быть определено с помощью выведенной в этой главе общей формулы (IV.12).

4. СВОДКА ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

Случай, когда градиент температуры отсутствует

Условимся обозначать через V величину

$$\frac{\beta}{n-1} - \alpha,$$

где β — коэффициент температурного приращения показателя преломления; α — коэффициент расширения материала детали.

Изменение фокусного расстояния бесконечно тонкой линзы при изменении температуры Δt определяется формулой

$$\frac{df'}{f'} = -V \Delta t. \qquad \text{(IV.3)}$$

Если бесконечно тонкий компонент находится в воздухе, то

$$\Delta s' = -s'^2 \Delta t \sum \varphi_i V_i; \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\Delta l' = s' y \Delta t \sum \varphi_i V_i, \qquad \text{(IV.5)}$$

где $\Delta s'$ — смещение плоскостей изображения, вызываемое изменением температуры Δt; $\Delta l'$ — смещение точки пересечения главного луча с плоскостью изображения при изменении температуры Δt.

В системах, состоящих из нескольких бесконечно тонких компонентов, величины $\Delta s'$ и $\Delta l'$ складываются из нескольких составляющих, зависящих от влияния изменения температуры на параметры отдельных компонентов, на воздушные промежутки между ними, на положение плоскости приемника. Для изменения s' — положения изображения при любом числе компонентов — имеем

$$\Delta s' = \left[-s_p'^2 \sum \frac{h_i^2}{h_p^2} \varphi_i V_i + \sum (\beta_i^2 - 1) d_i \alpha_i + \delta \right] \Delta t. \qquad \text{(IV.7)}$$

Для изменения l_2 в плоскости изображения при двух компонентах имеем

$$\frac{\Delta l_2'}{l_2'} = -s_2' \Delta t \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{y_1}{l_2'} \varphi_1 V_1 + \frac{y_2}{l_2'} \varphi_2 V_2 \right) - \frac{d\alpha_2 \beta (\beta - 1) \Delta t}{s_2'} +$$

$$+ (s_2' \alpha_3 - d\alpha_2 \beta^2) \frac{l_2' - y_2}{s_2'} \Delta t. \qquad \text{(IV.8)}$$

Здесь β — линейное увеличение второго компонента; α_i — коэффициент расширения материала оправы (трубы), соединяющей два последующих бесконечно тонких компонента, разделенных воздушным промежутком d; $\delta\Delta t$ — смещение приемника.

Влияние температурного градиента

Изменение толщины e оптической детали определяется формулой

$$\Delta e = \alpha \left[e(h) t(h) - \frac{de}{dh} \int_0^h t(h)\, dh \right],$$

где e — толщина на высоте h; $t(h)$ — температура на высоте h.

Отклонение луча ε от первоначального (до изменения температуры) направления равно

$$\varepsilon = -eg\,[(n-1)\alpha + \beta] + (n-1)\,\alpha e'' \int_0^h t\, dh, \qquad \text{(IV.12)}$$

где $g = \frac{dt}{dh}$; $e'' = \frac{d^2 e}{dh^2}$.

Радиус кривизны траектории луча определяется формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} = \frac{1}{n} \operatorname{grad} n.$$

Приведем два частных случая.

1. Несимметричное распределение градиента. Градиент постоянен и направлен перпендикулярно оси. Если деталь ограничена плоскими поверхностями, перпендикулярными оси, то

$$\varepsilon = -eg\,[(n-1)\alpha + \beta]. \qquad \text{(IV.13)}$$

Если деталь ограничена сферическими поверхностями, обладающими общей осью, то

$$\varepsilon = -e_0\,[(n-1)\alpha + \beta] + \beta \frac{h^2}{2(n-1) f'}, \qquad \text{(IV.14)}$$

где e_0 — толщина линзы в центре; f' — ее фокусное расстояние.

2. Симметричное распределение градиента около оптической оси. Для деталей, ограниченных плоскими поверхностями, имеем

$$\varepsilon = -eg\,[(n-1)\,\alpha + \beta] = -2Ahe\,[(n-1)\,\alpha + \beta], \qquad \text{(IV.15)}$$

где $g = \frac{dt}{dh} = 2Ah$.

Для линзы продольная сферическая аберрация, вызываемая температурным распределением параболического типа, определяется формулой

$$\delta s' = \frac{Ah^4}{f' \sin^2 u'} \left(\frac{\beta}{n-1} + \frac{2}{3}\,\alpha \right). \qquad \text{(IV.16)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Krüger A. Astr. Nachr., B. 60, N 1421, 1863.
2. Sonnefeld A. Centr. z. Optik u. Mech., 54, 3, 1933.
3. Максутов Д. Д. Циркуляры ГАО в Пулкове, 1936, № 20.
4. Perry J. W. Proc. Phys. Soc., 55, 1943.
5. Волосов Д. С. Опт. и спектр. Т. 4, 1958.

ГЛАВА V

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. ВВЕДЕНИЕ

Всякий процесс вычисления рационально разделить на отдельные, по возможности не зависящие друг от друга, этапы. Такое разделение значительно упрощает расчет главным образом потому, что в каждом этапе число подлежащих определению неизвестных параметров меньше, чем в общей задаче, а следовательно, и решение каждого этапа может быть получено проще.

Расчет оптических систем также может быть разбит на несколько этапов. На первом этапе устанавливают общую схему оптической системы, т. е. число отдельных узлов (компонентов), решающих ту или другую задачу, их взаимное расположение, примерные размеры — поперечные и продольные — и фокусные расстояния отдельных компонентов. Эта первоначальная стадия расчета называется обычно габаритным расчетом. После него конструктор может приступить к предварительному конструированию, так как ему известны с достаточной точностью все размеры и взаимное расположение отдельных частей, их примерный вес и другие необходимые для конструирования сведения.

Габаритный расчет конструкции оптических систем приобретает особое значение в том случае, когда система сложна, состоит из ряда отдельных сравнительно далеко расставленных компонентов, работающих каждый с не слишком большим значением апертуры. Углы поля могут быть и большими.

Примером оптических систем, для которых габаритный расчет может быть выполнен особенно четко и однозначно, могут служить телескопические системы, особенно типа перископов, геодезических труб, оптических систем для наблюдения внутренних поверхностей полых тел, медицинских инструментов (гастроскопы, цистоскопы и др.), сложные проекционные системы, системы типа микроскопов вместе с осветительной частью и т. д.

2. ОСНОВАНИЯ ДЛЯ ГАБАРИТНОГО РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Каждая оптическая система выполняет определенную задачу и должна удовлетворять различным требованиям сообразно с теми условиями, в которых она применяется. Всех их нельзя перечис-

лить исчерпывающим образом, так как они носят самый разнообразный, подчас неожиданный, характер.

Первая группа требований относится к апертуре или относительному отверстию системы, к величине входного или выходного зрачка, к разрешающей силе инструмента, к полю зрения. Вторая группа требований относится к «габариту» системы, т. е. к ее внешним размерам и к форме; в последнее время, в связи с развитием военной техники, эти требования приобретают все большее и большее значение.

Третья группа касается качества изображения; эти требования также весьма разнообразны в зависимости от назначения системы. Например, в наблюдательных инструментах (бинокли, прицельные трубы, дальномеры) важно иметь очень хорошее качество изображения в центре поля зрения; на краях допускаются довольно значительные искажения, так как изображение рассматриваемого предмета можно всегда привести в центр поля. От фотографических объективов для точных съемок требуется очень хорошее качество изображения по всему полю зрения; в некоторых регистрационных объективах, дающих изображение в определенной небольшой части поля, требуется исправление аберраций только для данной части поля зрения. От некоторых оптических систем требуют, наоборот, того или иного искажения изображения. Например, фотографические объективы — анаморфоты — должны давать различные увеличения в различных направлениях; от объективов для художественной съемки требуется некоторое смягчение контуров изображения. Наконец, встречаются еще трудно поддающиеся классификации требования, относящиеся, например, к «бриллиантности» изображения, т. е. отсутствию фона, уменьшающего контрастность изображения, повышенной прозрачности для некоторых областей спектра и т. д.

3. ПАРАМЕТРЫ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Конструктор и вычислитель оптических систем, поставленные перед задачей выполнения тех или иных требований, в качестве материала могут использовать все сорта оптических стекол, изготовляемых оптическими заводами, и очень ограниченное число прозрачных минералов, как кварц, флюорит, каменная соль и др., часто по тем или иным соображениям мало пригодных. В отношении «геометрии» оптической системы, т. е. выбора формы и положения поверхностей, ограничивающих среды, неограниченное число теоретически мыслимых возможностей на практике весьма ограничено. Первое из встречающихся ограничений — требование применения центрированных систем, хотя невозможно строго доказать, чтобы они представляли какое-нибудь преимущество (с чисто теоретической точки зрения) по сравнению с нецентрированными; но теория нецентрированных систем еще не создана,

а изготовление их с достаточной точностью весьма затруднительно. Второе очень существенное ограничение — применение преимущественно сферических поверхностей. Применяются также и асферические поверхности, но эти случаи редки. Можно надеяться, что с развитием техники производства это ограничение постепенно отпадет и перед конструкторами откроются новые, многообещающие возможности, о которых подробнее будет сказано в гл. IX.

Еще одно ограничение, постепенно исчезающее для целых групп оптических систем, например для фотографических объективов, заключается в том, что оптические системы разделены на отдельные составляющие компоненты, толщины которых малы по сравнению с фокусными расстояниями и с воздушными расстояниями, их разделяющими. Такое разделение особенно часто встречается в телескопических системах (астрономические, геодезические трубы, бинокли, перископы и т. д.) и в старых типах фотографических систем; оно возникло исторически как результат стремления к простоте и оправдано практикой. По мере того, как требования к оптическим системам растут, усложняется их конструкция и компоненты, в свою очередь, разбиваются на отдельные составляющие; их толщина становится значительной (современные светосильные фотообъективы, объективы микроскопов); это усложнение начинает появляться и в конструкции телескопических систем (особенно в окулярах).

4. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВНЕШНИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТРЕБОВАНИЯМИ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫМИ К ОПТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ СИСТЕМЫ

Нельзя дать в общем виде каких-нибудь определенных соотношений, связывающих фокусные расстояния, отверстия компонентов системы, расстояния между компонентами и требования к характеристикам (увеличение, апертура, поле зрения, качество изображения), которым должна удовлетворять оптическая система. Для большинства оптических систем очень недалекого прошлого едва ли приходилось даже ставить этот вопрос; у всех систем были прообразы, из которых они получались путем постепенных изменений и улучшений. Это подтверждает история развития астрономических и геодезических труб, призменных биноклей. С появлением ряда новых оптических приборов, главным образом военного назначения, произошли значительные сдвиги в рассматриваемом направлении; к этим приборам предъявляются жесткие требования в отношении размеров, как поперечных, так и продольных, и оптических характеристик, которым эти приборы должны удовлетворять, давая при этом изображение хорошего качества.

Изложим некоторые общие соображения, лежащие в основе определения внешних элементов оптической системы по заданным ее оптическим характеристикам.

Предположим для простоты, что оптическая система состоит из бесконечно тонких компонентов. Это предположение не нарушает общности рассуждений, так как для системы, состоящей из компонентов конечной толщины, остаются в силе все вычисления, выполненные для бесконечно тонких компонентов, но фокусные расстояния отсчитываются от соответствующих главных плоскостей, которые заменяют слившиеся поверхности бесконечно тонкого компонента. Общая длина «реальной» оптической системы

Рис. V.1

отличается от длины системы с бесконечно тонкими компонентами на величину суммы расстояний между главными плоскостями отдельных компонентов. К этому вопросу мы вернемся в следующей главе.

Допустим, что известны все фокусные расстояния отдельных компонентов, все расстояния между ними; заданы положения плоскостей предмета и входного зрачка. Даны также величина поля зрения (например, поле зрения полного освещения) и диаметр входного зрачка. Требуется определить действующие диаметры линз.

Пусть L_1, L_2, L_3, . . ., L_n (рис. V.1) — данная система линз; BB' — сечение плоскостью входного зрачка плоскости чертежа. Плоскость предмета предполагается здесь на большом расстоянии, так что лучи, идущие из точек предмета, почти параллельны (последнее обстоятельство не ограничивает общность выводов). Рассмотрим сначала пучок лучей, идущих из точки на оси предмета. Сечение этого пучка меридиональной плоскостью ограничивается двумя крайними, можно назвать их *апертурными*, лучами ABC и $A'B'C'$, проходящими через края BB' входного зрачка. Пересечения этих двух лучей с поверхностями отдельных линз (CC', EE', GG') позволяют определить действующие отверстия линз, когда объектом является одна точка в плоскости предмета. Диаметры этих отверстий, очевидно, равны соответственным отрезкам $\overline{CC'}$, $\overline{EE'}$ и $\overline{GG'}$ для первых трех компонентов системы. Высоты пересечения одного из апертурных лучей с последующими

поверхностями могут быть определены на основании расчета хода луча через систему; такой расчет удобнее всего производить по формулам

$$\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa = h_\kappa \varphi_\kappa; \tag{V.1}$$

$$h_{\kappa+1} - h_\kappa = -d_\kappa \alpha_{\kappa+1}, \tag{V.2}$$

где α_κ — угол луча с осью до преломления через k-й компонент; h_κ — высота пересечения луча с k-м компонентом; φ_κ — оптическая сила компонента κ; d_κ — расстояние между компонентами κ и $\kappa + 1$. Формулы (V.1) и (V.2) применяются последовательно ко всем поверхностям.

Рис. V.2

Для определения высоты h_1 точки пересечения апертурного луча с первой поверхностью обратимся к рис. V.2, на котором S — точка предмета на оси; SC — луч, пересекающий плоскость входного зрачка P в точке с высотой m_1; расстояние плоскости входного зрачка от первого компонента O_1 равно $-x_1$, расстояние точки S от того же компонента равно $-s_1$. Очевидно, что

$$h_1 = m_1 - \frac{m_1 x_1}{x_1 - s_1} = -\frac{s_1 m_1}{x_1 - s_1}.$$

Угол α_1 принимается равным $\alpha_1 = -\dfrac{m_1}{x_1 - s_1}$. Если предмет на бесконечности, то $\alpha_1 = 0$ и $h_1 = m_1$.

Рассмотрим теперь (рис. V.1) пучок лучей, исходящих из точки предмета, расположенного на конечном расстоянии от оси (а если предмет на бесконечности, то рассмотрим точку на конечном угловом расстоянии от оси системы). Этот пучок в меридиональной плоскости ограничивается теми же крайними точками B и B' входного зрачка, как и предыдущий пучок; он имеет ту же апертуру, т. е. зрачок виден из любой точки плоскости предмета под тем же углом; при этом, как это обычно делается при расчетах в параксиальной области, пренебрегаем влиянием наклона пучка. Таким образом, все сечения световым пучком отдельных компонентов имеют одинаковые размеры независимо от положения светящейся точки в плоскости объекта. Например, пучок с центральным (главным) лучом $\overline{ABC}$ имеет диаметр сечения C_1C_1', равный диаметру сечения CC'; точно так же $E_1E_1' = EE'$ и т. д. Вместе с тем второй пучок смещен по отношению к первому. Величина этого смещения переменная; нетрудно видеть, что это смещение

для каждой линзы равно расстоянию от оси до точки пересечения с компонентом главного луча наклонного пучка. Чем дальше от оси расположена точка в плоскости предмета, тем дальше и точки $\overline{C}$, $\overline{E}$, . . . пересечения главного луча соответствующего пучка с поверхностями компонентов. Так как главные лучи крайних пучков определяют поле зрения системы, т. е. пределы изображаемой части пространства, то эти лучи можно назвать *полевыми*.

Назовем буквой $y_к$ расстояние от оси точки пересечения полевого луча с поверхностями компонентов.

Если исходить из величины поля зрения полного освещения, действующие отверстия каждой линзы ($\overline{2L_1C_1'}$, $\overline{2L_2E_1'}$, $\overline{2L_3G_1'}$ и т. д.) получаются как удвоенная сумма абсолютных величин высот пересечения h и y с отдельными компонентами двух лучей: главного луча пучка на краю поля зрения, т. е. полевого луча, и апертурного луча из точки предмета на оси. Например, для первой линзы диаметр отверстия $\overline{2L_1C_1'} = D$ определяется из уравнения

$$\overline{L_1C_1'} = \frac{D}{2} = \overline{L_1C} + \overline{CC_1'} = |y_1| + |h_1|. \qquad (V.3)$$

Эта формула правильна и для всех других компонентов. Величина $y_к$ вычисляется аналогично величине $h_к$ на основании расчета хода полевого луча, который удобнее всего производить по формулам, подобным (V.1) и (V.2).

Итак, если известен ход обоих главных лучей, т. е. апертурного и полевого, через систему, легко вычислить размеры линз системы, и наоборот, если известны размеры линз, можно знать, какая часть поля зрения видна с полным освещением. Все то, что сказано о поле зрения полного освещения, может быть обобщено на случай поля с неполным освещением. Для этого достаточно построить чертеж, подобный рис. V.1, но вместо лучей BC_1, $B'C_1'$, проходящих через края входного зрачка, нужно рассматривать лучи с тем же наклоном, но проходящие через другие точки входного зрачка и проследить их ход через всю систему.

Аналитические выражения зависимости между отверстиями линз и другими гауссовыми элементами (фокусные расстояния, расстояния между линзами, положение входного зрачка и окна) вытекают из сказанного выше.

Полученные таким образом соотношения только приближенны, так как предположение о бесконечно малых толщинах компонентов не соответствует действительности. Однако они в большинстве случаев достаточно точны для практических целей, поскольку определение действующих отверстий линз не требует большой точности. Более конкретные указания о соотношениях «габаритного» характера, имеющих место в оптических системах, можно сделать только при разделении систем на отдельные группы, отличающиеся друг от друга числом и расположением составляющих их компонентов.

5. РАЗЛИЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТОНКИХ КОМПОНЕНТОВ И ОБОРАЧИВАЮЩИХ ПРИЗМ

В зависимости от конструкции оптические системы, состоящие из отдельных достаточно тонких компонентов, могут быть разделены на три группы:

1. *Оптические системы из двух частей* — объектива и окуляра (считая последний за одну часть, хотя обычно окуляры состоят из двух компонентов), к числу которых можно отнести астрономические и геодезические трубы, бинокли Галилея, микроскопы слабого увеличения, всякого рода визиры.

2. *Оптические системы из двух частей* (объектива и окуляра) *с добавочной оборачивающей системой призм*: призменные бинокли, стереотрубы, дальномеры, ряд прицельных труб и т. д. Сюда же можно отнести несколько систем с качающимися или вращающимися призмами (буссоли, панорамы).

3. *Оптические системы с оборачивающими линзами*: зрительные трубы, перископы, прицельные трубки.

Оптические системы из двух компонентов

Для систем первой группы предварительный расчет конструкции и габаритов линз чрезвычайно прост.

Основным требованием для них является обеспечение определенной минимальной разрешающей способности, т. е. возможности для наблюдателя отличить друг от друга изображения двух точек или двух объектов определенного вида, находящихся друг от друга на некотором заданном линейном или угловом расстоянии. Одно это требование уже определяет все. Из дифракционной теории изображения известно, что разрешающая сила связана с отверстием объектива и пропорциональна его диаметру; следовательно, диаметр оказывается известным. Длина трубы является функцией отверстия объектива и зависит от сложности его конструкции. На этом простом примере выясняется, что для определения длины нужно знать величины, связанные со второй частью расчета, имеющей целью исправление аберраций системы. Чем сложнее, вообще говоря, конструкция объектива, тем большее относительное отверстие он может иметь и тем короче может быть длина оптической системы.

Опыт и теория показывают, что простые линзы, применявшиеся до открытия Доллондом (1753 г.) способа устранения хроматической аберрации объективов, дают достаточно хорошие изображения только при относительных отверстиях, не превосходящих 1 : 50—1 : 70 (в зависимости от диаметра линз); объективы из двух линз из крона и флинта обычных сортов работают хорошо при относительных отверстиях 1 : 18—1 : 12; появившиеся в по-

следние годы более сложные трех- или четырехлинзовые объективы, применяемые в астрофотографии, позволяют увеличить относительные отверстия до 1 : 9 и 1 : 6 при тех же диаметрах (порядка 20—40 *см*). Аналогичную картину дает история развития геодезических труб, продольные размеры которых уменьшаются благодаря применению лучших типов объективов и окуляров.

Таким образом, выбор типа объектива уже предопределяет длину трубы и все размеры системы, так как окуляр представляет собой в отношении длины слишком малую величину, чтобы принимать ее во внимание.

Оборачивающие призмы

При расчете второй группы оптических систем с отражательными призмами возникает ряд вопросов, связанных с выбором типа призм, с наименьшими возможными размерами последних, с их наивыгоднейшим положением в системе и т. д.; в случае, когда призмы качаются, решение этих вопросов еще более усложняется. Все вопросы, связанные с определением размеров призм, очень просто решаются, когда отражательная призма заменяется эквивалентной ей по своему преломляющему действию плоскопараллельной пластинкой, имеющей тот же ход луча, как и отражательная призма; при этом явление отражения вовсе исключается из рассмотрения. Последнее обстоятельство облегчает все вычисления, так как лучи проходят через пластинку по прямым без тех изломов, которые происходят на отражающих поверхностях. Такое выпрямление хода лучей через отражательную призму называется иногда развертыванием призмы. Несколько примеров развертывания показано на рис. V.3 [1]. Наверху начерчены сечения отражательных призм; отражающие поверхности заштрихованы; внизу — сечения развернутых призм. Изломленный ход лучей на верхних чертежах заменяется прямым ходом на нижних, т. е. призма заменена плоскопараллельной пластинкой, которая преломляет лучи совершенно так же, как и призма, но не имеет никакого отражающего действия. Такая эквивалентная пластинка, где все отражения исключены, иногда называется разверткой призмы. Она получается следующим образом: около каждой отражающей поверхности строится даваемое ею изображение граней призмы и отраженного луча; после построения отражающие поверхности можно на чертеже стереть, так как они не оказывают влияния на ход выпрямленных лучей. Очевидно, что с помощью нижних чертежей нетрудно вычислить положение точек пересечения луча с любой поверхностью призмы. Такие вычисления

[1] Здесь показаны основные типы призм. Более подробная таблица отражательных призм будет дана во второй части книги.

имеют большое значение, так как в призменных биноклях оправы призм могут виньетировать пучки и даже до некоторой степени ограничивать поле зрения.

Вычисления могут быть упрощены в одном частном, практически наиболее часто встречающемся случае, когда преломляющие грани призмы перпендикулярны оптической оси системы. В этом случае можно избежать рассмотрения преломления на гранях призм, если заменить уже развернутую призму эквивалентной «воздушной» пластиной, т. е. слоем воздуха толщиной $d_1 = \frac{d}{n}$,

Рис. V.3

равной геометрическому ходу лучей в призме d, деленному на показатель преломления призмы n.

Нужно заметить, что между первым приемом развертывания и вторым приемом замены стекла воздухом имеется одно принципиальное различие. Первый прием остается законным для любых рассматриваемых лучей, в то время как второй пригоден только в параксиальной области; отражающие призмы на пути сходящихся или расходящихся пучков дают, вообще говоря, аберрации, которые не учитываются при замене стекла воздухом. Второй прием имеет значение только при определении конструктивных элементов призм, степени виньетирования пучков призмами и т. д.

В качестве иллюстрации рассмотрим расчет внешних элементов призменного бинокля со следующими характеристиками: увеличение 8×, поле зрения 6°; диаметр выходного зрачка 4 *мм*. Зная, что объектив служит входным зрачком бинокля и что в телескопических системах отношение диаметров входного и выходного зрачков равно увеличению системы, можно получить для диаметра отверстия объектива величину $4 \cdot 8 = 32$ *мм*.

Выбор типа окуляра определяется требованиями, предъявленными к нему в отношении поля зрения и положения зрачка выхода относительно последней поверхности окуляра. При объективном поле зрения в 6° получаем для поля зрения окуляра величину $2w'$, определяемую из условия

$$\operatorname{tg} w' = 8 \operatorname{tg} \frac{6°}{2} = 8 \operatorname{tg} 3° = 8 \cdot 0{,}0524 = 0{,}419;$$

$$w' = 22°45'; \quad 2w' = 45°30'.$$

Такое поле зрения (см. стр. 332) может быть получено при использовании окуляра Кельнера.

При определении фокусных расстояний объектива и окуляра возникает некоторая неопределенность, так как решений может оказаться несколько в зависимости от выбора типа объектива. Наиболее естественным и традиционным является использование двухлинзового склеенного объектива. При отверстиях порядка 32 *мм* наименьшее возможное фокусное расстояние, обеспечивающее хорошее качество изображения, равно $32 \cdot 4 = 128$ *мм*. При этом фокусное расстояние окуляра должно равняться величине $\frac{128}{8} = 16$ *мм*. У окуляра Кельнера, как правило, выходной зрачок находится на расстоянии x' от последней поверхности, составляющей около 0,5—0,6 фокусного расстояния окуляра; в данном случае $x' = (8 \div 10)$ *мм*, в то время как обычно требуется не менее 10 *мм*. При расчете окуляра в данном случае необходимо небольшое увеличение величины x' по сравнению с обычными значениями этой величины.

Определим теперь размеры отражающих призм, применив наиболее часто встречающуюся систему призм Порро.

Для определения размеров необходимо сначала найти границы всех пучков, проходящих через систему. Решим задачу в двух приближениях. В первом приближении, согласно изложенному в начале главы, вычислим высоту пересечения с объективом и коллективом окуляра двух лучей — апертурного и полевого. Для определенности предположим, что коллектив отстоит от фокальной плоскости объектива на расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ фокусного расстояния окуляра, — обычная величина для окуляров типа Кельнера.

Апертурный луч M_1M_2 (рис. V.4) пересекает объектив на высоте $O_1M_2 = h = 16$ *мм* и после преломления пересекает ось в фокусе F на расстоянии $f = 128$ *мм* от центра O_1 объектива. Угол $\alpha_2 = \angle M_2FO_1 = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$. Высота пересечения $h_2 = \overline{O_2I}$ с коллективом окуляра равна

$$h_2 = \overline{FO_2}\alpha_2 = 5{,}3 \frac{1}{8} = 0{,}7 \text{ мм}. \qquad (V.4)$$

Полевой луч N_1O_1 образует угол $w_1 = 3°$ с осью системы и проходит через центр входного зрачка, совпадающего в данном случае с центром объектива O_1. Высота $\overline{O_2H}$ пересечения луча с коллективом равна $\overline{O_1O_2}$ tg $3° = (128 + 5{,}3)\,0{,}0524 = 7{,}0$ *мм*. Обе высоты пересечения $\overline{O_2H}$ и $\overline{O_2I}$ не меняются после введения системы призм. Предположим, что призмы приняты во внимание и что они заменены в системе некоторым воздушным слоем, высота и толщина которого подлежат определению. Предположим сначала, что поле в 6° должно быть равномерно освещенным, т. е. что в системе не должно быть диафрагмирования. Тогда действую-

Рис. V.4

щее отверстие коллектива равно удвоенной сумме высот $\overline{O_2H} + \overline{O_2I}$, т. е. $2\,(7{,}0 + 0{,}7) = 15{,}4$ *мм*. Для определения действующего отверстия призм рассмотрим развертку одной из призм Порро (второй рисунок вверху на рис. V.3). Ход луча $DEFG$ в призме должен быть равен по крайней мере удвоенной ширине пучка HB, проходящего через систему, так как развертка представляет собой часть квадрата, сторона которого равна удвоенной ширине HB падающего пучка. Таким образом, призмы выгодно поместить в самой узкой части пучка, насколько позволяет конструкция. В данном случае наиболее узкая часть пучка находится в фокальной плоскости объектива, где диаметр сечения пучка равен $2 \cdot FG = 2 \cdot 128 \cdot \text{tg}\ 3° = 13{,}4$ *мм*. Но, имея здесь дело с непараллельными пучками, необходимо принять во внимание угол расхождения пучков, что можно выполнить следующим образом.

Пусть $A'B'$, $A''B''$ (рис. V.5) — сечения пучка крайними гранями воздушной пластинки, эквивалентной одной из призм Порро. Пусть длина хода луча в призме равна d; тогда $AB = DE$ — длина пути в воздушной пластине — равна $\frac{d}{n}$.

Лучи, проходящие через развертку призмы ниже точки C, относятся к нижней половине призмы. Следует отметить, что если угол у вершины C не равен точно 90°, то для лучей, отражающихся сначала от грани HC, а потом от грани CA', существует

другая развертка. При этом, если отступление угла C от прямого равно α, то для развертки «в стекле», т. е. не приведенной к воздуху, угол между крайними гранями равен $+2\alpha$ для одной из разверток, и -2α — для другой. Это приводит к раздвоению изображения при наличии в падающем на призму пучке лучей, проходящих по обеим сторонам от точки C. Это раздвоение, отнесенное к воздушному пространству, равно в угловой мере $4\alpha n$, так как при переходе от стекла к воздуху эквивалентная пластинка сжимается в n раз.

Обозначим через D_1 максимальный размер $A'A''$ сечения, через D_2 — минимальный размер $B'B''$. Пусть $\alpha = \angle HA'B'$ — угол, образуемый крайними лучами $A'B'$ и $A''B''$ со средним лучом AB. Между AB, D_1 и D_2 существуют очевидные соотношения

Рис. V.5

$$D_1 = \overline{A'D} + \overline{DA''} = \frac{d}{2} + \frac{\overline{AB}}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2} + \frac{d}{2n}\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n}\right); \qquad (V.5)$$

$$D_2 = D_1 - \overline{2AB}\operatorname{tg}\alpha = D_1 - \frac{2d}{n}\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{n}\right). \qquad (V.6)$$

Удобнее выражать неизвестную величину d через одну из известных величин D_1 или D_2, т. е.

$$d = \frac{2D_1}{1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n}}; \qquad (V.7)$$

$$d = \frac{2D_2}{1 - \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{n}}. \qquad (V.8)$$

Тангенс угла α — угла расхождения или, вернее, схождения пучка — получается как разность между абсолютными значениями тангенсов апертурного и полевого углов α_2 и w_1, как это видно из рис. V.4. Ввиду того, что угол α невелик, можно принять, что в нашем случае

$$\alpha = \frac{1}{8} - \operatorname{tg} 3^\circ = 0{,}125 - 0{,}052 = 0{,}073.$$

Тогда формула (V.8) дает

$$d = \frac{2D_2}{1 - \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{n}} = 2{,}34D_2.$$

С помощью последней формулы легко вычислить размеры призм. Пусть a — расстояние от фокальной плоскости до последней поверхности призмы (рис. V.4). Из конструктивных соображений величина a не может быть меньше определенной минимальной величины a_m (порядка 10 *мм*). Возьмем в нашем примере $a = 13$ *мм*; ширина пучка D_2 в плоскости $B'B''$ (рис. V.5) будет равна

$$D_2 = \overline{2JK} = 2(\overline{FG} + \overline{G'K}) = 2(f \operatorname{tg} w_1 + a \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= 2(6{,}7 + 0{,}95) = 15{,}3.$$

Таким образом, ход луча в ближайшей к окуляру призме Порро равен

$$15{,}3 \cdot 2{,}34 = 36{,}0 \text{ мм}.$$

Рис. V.6

Вторую призму Порро можно поставить так, чтобы промежуток между призмами был не менее 5 *мм*. Тогда величина a_2 для второй призмы будет

$$13 + \frac{36}{1{,}5} + 5 = 42 \text{ мм}.$$

В этом месте ширина пучка D_2 определяется следующим расчетом:

$$D_2 = 13{,}4 + 42 \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha = 13{,}4 + 84 \cdot 0{,}073 =$$

$$= 13{,}4 + 6{,}1 = 19{,}5 \text{ мм}.$$

Ход луча во второй призме Порро

$$19{,}5 \cdot 2{,}34 = 45{,}6 \text{ мм}.$$

Таким образом, получены следующие длины хода луча через обе призмы Порро: для первой — 36 *мм*, для второй — 45,6 *мм*.

На рис. V.6 изображены воздушные пластинки P_1P_1', P_2P_2', заменяющие обе призмы.

Рассмотрим теперь другой случай, когда допускается виньетирование наклонных пучков. Недавно еще считалось, что на краю поля зрения уменьшение действующей части выходного зрачка не должно превышать 50%. В последние годы, стремясь уменьшить размеры и вес приборов, пошли гораздо дальше в отношении допустимого виньетирования; так, например, в некоторых биноклях одной из первоклассных фирм площадь сечения пучков лучей из точек на краю поля зрения не превышает 15—10% площади сечения центральных пучков; опыт показывает, что такое виньетирование особо вредных последствий не вызывает.

Любопытно, что в случае призменного бинокля и вообще всяких призменных систем существует возможность путем удачного подбора величин отверстий призм и коллектива менять по произволу не только общую величину виньетирования, но еще и положение центрального луча краевого пучка.

Рассмотрим рис. V.7, на котором O_1 — центр объектива; O_2 и O_3 — края действующего отверстия; F — фокус объектива; C_1 — центр коллектива. Пусть L — изображение точки на краю поля зрения; угол LO_1F будет полевым углом системы (в данном случае он равен 3°). Пусть D_1 и D_2 — две диафрагмы, стоящие одна — в плоскости между объективом и коллективом, другая — в плоскости коллектива. В действительности в качестве таковых служат одна из оправ призм и оправа коллектива. Из рисунка видно, что можно подобрать размеры действующих частей диафрагм таким образом, чтобы по произволу закрывать и сверху и снизу любую часть пучка вокруг главного луча. Этим достигается двоякого рода преимущество: с одной стороны, можно уменьшить размеры призм и весь бинокль может быть сделан более компактным и легким, а с другой стороны, качество изображения, благодаря симметричному расположению пучка относительно главного луча, улучшается, но при этом уменьшается освещенность.

Рис. V.7

Качающиеся призмы

Такие призмы ставятся почти всегда впереди объектива. Их оправы имеют ось, перпендикулярную оптической оси объектива; поворотом призмы вокруг этой оси на некоторый угол можно направить в объектив пучки, образующие с его осью те или иные углы. Как и в случае неподвижных призм, можно забыть об отражении и рассматривать только преломления через стеклянную пластинку, получаемую разверткой призмы, вращая при этом пространство предметов на удвоенный угол поворота нормали к отражающей поверхности призмы. Замена стеклянной пластинки воздушной здесь невозможна, так как гауссова оптика неприменима при больших значениях углов наклона призмы, и потому необходим точный расчет хода преломленных лучей. Стеклянный параллелепипед $ABCD$ с центром вращения в точке O (рис. V.8), заменяющий призму, при повороте действует отчасти как трубка и виньетирует пучки, проходящие через призму, даже в центре

поля зрения, если только размеры призмы не взяты специально такими, чтобы пропустить пучки целиком, без ограничения.

Для точного подсчета виньетирования при различных наклонах призмы и для различных углов поля зрения необходимо для каждого наклона призмы начертить положение ее развертки и рассчитать границы пучка. Эти границы определяются положением ребер разверток (на рис. V.8 ребра A и C ограничивают центральный пучок). Кроме того, происходит смещение центрального луча пучка ($EFGH$ на рис. V.8).

Рис. V.8

Оптические системы с оборачивающими системами линз

Земные зрительные трубы с одной оборачивающей системой. Оптическая система трубы состоит из четырех частей: объектива O_1, коллектива O_2, оборачивающей линзы O_3 и окуляра O_4O_5 (рис. V.9).

Назначение коллектива O_2 состоит в том, что он направляет в центр оборачивающей линзы главные лучи наклонных пучков, позволяя тем самым уменьшить до минимума отверстие линзы; это ставит ее в наилучшие условия работы в отношении таких аберраций, как дисторсия, хроматическая разность увеличений и

Рис. V.9

аберрации высших порядков. Коллективная линза O_2 ставится обычно в фокальной плоскости объектива O_1, так что она не оказывает никакого влияния на аберрации системы, за исключением некоторой добавочной кривизны поля и дисторсии (см. гл. II, стр. 130—132).

Оборачивающая линза O_3 дает обычно увеличение — 1, но можно иметь и другие увеличения, от $-\frac{1}{2}$ до —2, —3. Окуляр не отличается от обычных, применяемых в телескопических системах. Иногда систему оборачивающая линза — окуляр назы-

вают земным окуляром. Пусть γ — увеличение системы в предположении, что она телескопическая; $2m'$ — диаметр выходного зрачка; $2w_1$ — поле зрения объектива; f_1, f_2, f_3, f_4 — фокусные расстояния объектива, коллектива, оборачивающей линзы и окуляра. Определим габаритные размеры системы.

Считая, что объектив является входным зрачком системы, находим диаметр его отверстия; он должен равняться $2m_1 = 2\gamma m'$. Фокусное расстояние объектива зависит от выбранного типа и требуемого качества изображения. Для получения резкого изображения в случае двухлинзового склеенного объектива нужно взять фокусное расстояние его по крайней мере в 5 раз больше его отверстия (в призменных биноклях — 4); это необходимо, так как по сравнению с призменными биноклями земная труба имеет более сложную систему, а следовательно, и большее накопление аберраций. Таким образом, имеем $f_1 = 10\gamma m'$. Внешние элементы объектива полностью определены.

Размеры коллективной линзы определяются величиной поля зрения объектива; ясно из рисунка, что величина y_2 равна $f_1 \operatorname{tg} w_1$. Фокусное расстояние этой линзы определяется из условия, что объектив должен изображаться коллективом на оборачивающей линзе. Предположим, что увеличение последней принято равным —1. В таком случае, если f_3 — ее фокусное расстояние, коллективная линза должна быть на расстоянии $2f_3$ от оборачивающей линзы. Тогда фокусное расстояние f_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{2f_3}. \qquad (V.9)$$

Оборачивающая линза должна иметь отверстие, определяемое из подобия треугольников $O_1O_2A_1$, $O_2O_3A_3$, т. е. $h_3 = h_1 \frac{2f_3}{f_1}$. Фокусное расстояние f_3 определяется из условия, чтобы поле зрения оборачивающей линзы было не больше, чем у объектива: $2f_3 \geqslant f_1$.

Из пяти уравнений $h_1 = m'\gamma$; $f_1 \geqslant 10h_1$ (вытекает из условия хорошего исправления при простой конструкции объектива); $2f_3 \geqslant f_1$; $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{2f_3}$; $h_3 = h_1 \frac{2f_3}{f_1}$ получаем все габаритные элементы первой части системы.

Остается определить конструктивные элементы окуляра; они зависят от его типа, на выбор которого влияют величины поля зрения и расстояние выходного зрачка от последней линзы окуляра.

Пример. Пусть $\gamma = +12$; $2m' = 2$ *мм*; поле 3° 30′. Нормальные условия работы для глаза обеспечиваются, если расстояние выходного зрачка от окуляра не менее 10 *мм*. Диаметр объектива $2 \cdot 12 = 24$ *мм*; фокусное расстояние его $24 \cdot 5 = 120$ *мм*.

Тогда

$$f_2 = \frac{3}{4} f_1 = 90 \text{ мм}; \quad f_3 = 1{,}5 f_1 = 180 \text{ мм};$$

$$h_2 = f_1 \operatorname{tg} 1°45' = 120 \cdot 0{,}0306 = 3{,}7 \text{ мм};$$

$$h_3 = 0{,}15 f_1 = 18 \text{ мм}.$$

Фокусное расстояние окуляра $\frac{f_1}{\gamma} = \frac{120}{12} = 10$ *мм*; отношение расстояния от окуляра до зрачка x' к фокусному расстоянию окуляра достигает здесь 1; поле окуляра, определяемое уравнением $\operatorname{tg} w' = \operatorname{tg} w_1 \gamma = 0{,}0306 \cdot 12 = 0{,}37$, равно $2w' = 40°$.

Таким условиям удовлетворяют как ортоскопический, так и симметричный окуляры.

Длина трубы получается весьма значительной. Она равна $f_1 + 4f_3 = 120 + 4 \cdot 180 = 840$ *мм*, не считая окуляра, впрочем, мало влияющего на длину. Этот расчет показывает, насколько подзорные трубы с оборачивающими линзами длиннее труб биноклей с тем же увеличением.

Перископы (с одной или несколькими оборачивающими системами). Существенным отличием перископов от всех остальных оптических систем является их значительная длина, позволяющая наблюдать из-за укрытий, при сравнительно малом диаметре.

Условие малого диаметра вытекает либо из тактических соображений (малая видимость), либо из требований габарита. Увеличение перископов обычно бывает небольшое (1,5—6×), за исключением некоторых типов, увеличение которых доводится до 10.

В настоящее время от перископов требуется несколько увеличений в пределах 1,5—10×; в ряде случаев желательно, чтобы увеличение изменялось плавно, для чего следует применять объектив с переменным фокусным расстоянием. Однако в большинстве случаев фокусное расстояние объектива невелико.

Основная задача оптики перископов — передавать изображение на сравнительно большое расстояние (1—10 *м*) пучками, остающимися все время внутри узкой трубки. Эта задача решается с помощью системы коллективов и оборачивающих линз. Последние передают изображение (обычно в натуральную величину) на некоторое расстояние, а коллективы направляют путь пучков таким образом, чтобы они оставались достаточно близкими от оси.

Схема одного узла системы, состоящего из двух коллективов и оборачивающей двухлинзовой системы, представлена на рис. V.10. Изображение K_1M_1 проектируется оборачивающей системой L_1L_2 на плоскость K_2, где получается следующее изображение K_2M_2. Как первое изображение K_1M_1, так и второе K_2M_2 находятся в плоскости коллективов K_1K_1' и K_2K_2', направляющих пучки в середину S следующих за ними оборачивающих систем.

Присоединяя друг к другу ряд таких узлов, можно теоретически сколь угодно далеко передавать изображение. Если в системе нет никаких иных оборачивающих систем, например призменных, то число узлов должно быть обязательно нечетное: чаще всего один, в более длинных перископах — три. Узлы могут быть неодинаковы. Например, в перископах подводных лодок, выступающих над поверхностью воды, головка должна быть тоньше

Рис. V.10

остальной части перископа; узел или узлы внутри нее всегда значительно меньше по своим размерам, чем находящиеся внутри толстой части трубы. Обычно оптика перископов должна удовлетворять следующим требованиям:

1) длина трубы, соответствующая с достаточной точностью расстоянию от входного зрачка до окуляра, равна некоторой заданной величине l;

Рис. V.11

2) максимальный диаметр линз не должен превышать $2R$ (иногда это условие усложняется тем, что в верхней части задается иная максимальная величина, чем в нижней);

3) увеличение системы равно γ;

4) диаметр выходного зрачка равен $2m'$;

5) поле зрения равно $2w_1$.

Рассмотрим перископ с одной оборачивающей системой.

Пусть на рис. V.11 L_1 — объектив, L_2 — коллектив, L_3 и L_4 — линзы оборачивающей системы, L_5 и L_6 — коллектив и глазная линза окуляра; P_1 — центр входного зрачка; P_2, P_3, P_4, . . . — его изображение, даваемое линзами L_1; L_1 и L_2; L_1, L_2 и L_3 и т. д.; P_7 — центр выходного зрачка системы.

Расстояние от центра L_1 до центра входного зрачка равно x_1 (на рис. V.11 оно отрицательное); от центра L_6 до P_7 равно x_6' (положительное).

Предмет O на бесконечности; O_2, O_3, . . . — его изображения; O_7 — изображение через всю систему — бесконечно удалено.

Пусть коллективная линза L_2 стоит в фокусе первой линзы; такое положение весьма рационально по ряду причин. Оно обязательно, если прибор предназначен для наводки и в поле зрения должен быть крест нитей или иная фигура для прицела.

Допустим, что апертурный луч идет параллельно оси между L_3 и L_4, т. е. что в отдельности система L_1, L_2, L_3 и система L_4, L_5 и L_6 телескопические; это дает некоторые преимущества в смысле простоты расчета, не ухудшая при этом качества системы.

Пусть F_1, F_2, F_3, . . ., F_6 — фокусные расстояния линз L_1, L_2, L_3, . . ., L_6; f — фокусное расстояние окуляра; d — расстояние между линзами L_3 и L_4; h_s — высота пересечения апертурного луча с линзой, порядковый номер которой s; y_s — высота пересечения полевого луча с той же линзой.

Апертурный луч дает следующие соотношения (рис. V.11):

$$\frac{h_1}{h_3} = -\frac{F_1}{F_3}; \quad h_3 = h_4; \; h_6 = \frac{h_1}{\gamma}. \tag{V.10}$$

Для полевого луча имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \operatorname{tg} w_1; \\ y_2 &= -F_1 \operatorname{tg} w_1. \end{aligned}\right\} \tag{V.11}$$

Второе уравнение следует из основного уравнения для бесконечно тонких линз, если применить его для определения зависимости между расстояниями сопряженных точек P_1 и P_2 и принять во внимание, что коллектив находится в фокусе линзы L_1.

Величина y_3 зависит от F_2, которое не входило до сих пор ни в какое уравнение и пока произвольно. Поставим условие, чтобы обе оборачивающие линзы имели одинаковое отверстие, что выгодно в конструктивном отношении. Тогда наиболее рациональное положение для зрачка P_4 — середина между линзами L_3 и L_4, так как при всяком другом положении P_4 будет диафрагмироваться пучок оправой одной линзы либо будет не использована часть поверхности другой линзы. Определим F_2 из условия, чтобы точка P_4 находилась посередине между L_3 и L_4.

Точка P_1 изображается линзой L_1 в точке P_2, причем

$$\overline{O_1P_2} = \frac{-F_1x_1}{F_1 + x_1}; \tag{V.12}$$

центр зрачка P_4 есть изображение точки P_3 линзой L_3 при этом

$$\overline{O_3P_3} = \frac{F_3d}{2F_3 - d}. \tag{V.13}$$

Замечая, что $\overline{O_2O_3} = F_3$ и $\overline{O_1O_2} = F_1$, после некоторых вычислений находим

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{\overline{O_2P_3}} - \frac{1}{\overline{O_2P_2}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_3} + \frac{x_1}{F_1^2} - \frac{d}{2F_3^2}. \qquad (V.14)$$

Величины y вычисляются по формуле

$$y_3 = -y_4 = +\frac{d}{2}\operatorname{tg} w_4,$$

где w_4 — угол полевого луча с осью. Но на основании свойства телескопических систем имеем

$$\operatorname{tg} w_4 = -\operatorname{tg} w_1 \frac{F_1}{F_3}.$$

Окончательно находим

$$y_3 = -y_4 = -\frac{dF_1}{2F_3}\operatorname{tg} w_1. \qquad (V.15)$$

Величина изображения l_5 перед окуляром равна

$$l_5 = -F_4 \operatorname{tg} w_4 = \frac{F_1F_4}{F_3}\operatorname{tg} w_1. \qquad (V.16)$$

Предположим, что окуляр состоит из двух бесконечно тонких линз.

Обозначая рабочее расстояние окуляра $\overline{O_5S_5}$ через s_5, имеем

$$h_5 = s_5\alpha_5,$$

где α_5 — угол апертурного луча с осью.

Ввиду того, что $-\alpha_5 = \frac{h_6}{f}$, получаем

$$h_5 = -s_5\frac{h_6}{f}. \qquad (V.17)$$

Определим теперь высоты пересечения полевого луча с линзами окуляров. В дальнейшем придется использовать углы и их тангенсы. Так как все вычисления производятся в гауссовой области, то можно тангенсы заменять углами и наоборот.

Высота пересечения полевого луча с первым компонентом окуляра y_5 может быть определена из уравнения

$$y_5 = l_5 + s_5 \operatorname{tg} w_5. \qquad (V.18)$$

Применяя формулы преломления (с заменой углов тангенсами) для линзы L_5, находим

$$\operatorname{tg} w_5 - \operatorname{tg} w_4 = \frac{y_4}{F_4}.$$

Заменяя y_4 и $\operatorname{tg} w_4$ их выражениями из формул (V.15) и (V.16), получаем

$$\operatorname{tg} w_5 = \operatorname{tg} w_4 + \frac{dF_1}{2F_3F_4} \operatorname{tg} w_1 = -\frac{F_1}{F_3} \operatorname{tg} w_1 + \frac{dF_1}{2F_3F_4} \operatorname{tg} w_1 =$$

$$= -\frac{F_1}{F_3} \operatorname{tg} w_1 \left(1 - \frac{d}{2F_4}\right). \qquad \text{(V.19)}$$

Поэтому

$$y_5 = l_5 - s_5 \frac{F_1}{F_3} \operatorname{tg} w_1 \left(1 - \frac{d}{2F_4}\right) =$$

$$= \frac{F_1F_4}{F_3} \operatorname{tg} w_1 - s_5 \frac{F_1}{F_3} \operatorname{tg} w_1 \left(1 - \frac{d}{2F_4}\right) =$$

$$= \frac{F_1}{F_3} \operatorname{tg} w_1 \left[F_4 - s_5 \left(1 - \frac{d}{2F_4}\right)\right]. \qquad \text{(V.20)}$$

Высота y_6 в пространстве изображений вычисляется по формуле

$$y_6 = x_6' \operatorname{tg} w_7 = x_6' \operatorname{tg} w_1 \gamma. \qquad \text{(V.21)}$$

Все перечисленные формулы связывают величины F_1, F_2, . . .; f, x_1, s_5 и d с отверстиями линз. Напомним, что для получения действующих отверстий линз нужно сложить удвоенные абсолютные значения высот h и y на каждой линзе. При этом полевой угол берется для поля зрения полной яркости.

Определим теперь неизвестные F_1, F_2, F_3, F_4, f_1, x_1, d из поставленных выше условий.

1. Для определенности будем считать (условно), что длина прибора l равна расстоянию между входным зрачком и передним фокусом окуляра.

Тогда

$$l = -x_1 + F_1 + F_3 + d + F_4. \qquad \text{(V.22)}$$

2. Согласно заданию диаметр первой линзы не должен превышать $2R$; поэтому

$$|2x_1 \operatorname{tg} w_1| + 2|m'\gamma| \leqslant 2R. \qquad \text{(V.23)}$$

Это неравенство устанавливает предел для $|x_1|$.

3. Диаметр второй линзы также должен быть меньше $2R$; поэтому

$$2F_1 |\operatorname{tg} w_1| \leqslant 2R. \qquad \text{(V.24)}$$

Это условие определяет верхнюю границу для F_1. По некоторым соображениям, связанным с качеством изображения, желательно F_1 взять равным верхнему пределу, т. е.

$$F_1 = R |\operatorname{ctg} w_1|.$$

Для того чтобы отверстия третьей линзы и диафрагмы поля $2l_5$ не были больше $2R$, нужно удовлетворить следующим неравенствам:

$$2(|y_3| + |h_3|) = \frac{dF_1|\operatorname{tg} w_1|}{F_3} + \frac{2|m'\gamma|F_3}{F_1} \leqslant 2R; \qquad (V.25)$$

$$l_5 = \frac{F_1F_4}{F_3}|\operatorname{tg} w_1| \leqslant R. \qquad (V.26)$$

Соединяя последнее условие, написанное в виде равенства, что приводит к лучшим результатам, с условием $F_1 = R|\operatorname{ctg} w_1|$, получаем

$$F_3 = F_4, \qquad (V.27)$$

т. е. фокусные расстояния оборачивающих линз F_3 и F_4 равны; так как и отверстия линз равны, то естественно делать их одинаковыми, но с симметрично расположенными радиусами и толщинами.

Уравнение (V.22) принимает вид

$$l = 2F_3 + d - x_1 + F_1. \qquad (V.28)$$

Отбрасывая знак неравенства в выражении (V.23) и решая полученное уравнение, находим

$$-x_1 = R - |m'\gamma|\operatorname{ctg} w_1. \qquad (V.29)$$

Фокусное расстояние третьей линзы F_3 и расстояние d могут быть определены из уравнения (V.28) и неравенства (V.25). Перепишем неравенство (V.25) в таком виде:

$$\frac{dR}{F_3} + \frac{2|m'\gamma|F_3}{F_1} \leqslant 2R,$$

или

$$dRF_1 + 2|m'\gamma|F_3^2 - 2RF_1F_3 \leqslant 0.$$

Введем для краткости обозначения $|m'\gamma| = m$ и $l + x_1 - F_1 = 2a$; тогда выражения (V.25) и (V.28) примут вид

$$dRF_1 + 2mF_3^2 - 2RF_1F_3 \leqslant 0;$$

$$d = 2(a - F_3).$$

Подставляя значение d в первое неравенство, получаем

$$(a - F_3)RF_1 + mF_3^2 - RF_1F_3 \leqslant 0,$$

или

$$mF_3^2 - 2RF_1F_3 + aRF_1 \leqslant 0.$$

Фокусное расстояние F_3 должно находиться в пределах между F_3' и F_3'', которые являются корнями уравнения

$$mF_3^2 - 2RF_1F_3 + aRF_1 = 0;$$

их значения таковы:

$$\left.\begin{aligned} F_3' &= \frac{1}{m}\left[RF_1 - \sqrt{RF_1(RF_1 - am)}\right]; \\ F_3'' &= \frac{1}{m}\left[RF_1 + \sqrt{RF_1(RF_1 - am)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (V.30)$$

Фокусные расстояния всех линз, положение входного зрачка и расстояние между оборачивающими линзами определяются в следующем порядке:

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = R\,|\operatorname{ctg} w_1|; \\ &\frac{1}{m}\left[RF_1 - \sqrt{RF_1(RF_1 - am)}\right] \leqslant F_3 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{m}\left[RF_1 + \sqrt{RF_1(RF_1 - am)}\right]; \\ &d = 2(a - F_3); \\ &\frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_3} + \frac{x_1}{F_1^2} - \frac{d}{2F_3^2}; \end{aligned}\right\} \qquad (V.31)$$

при этом

$$a = \frac{1}{2}(l + x_1 - F_1); \quad m = |m'\gamma|.$$

Пример. Рассмотрим перископ со следующими характеристиками:

$$l = 1800 \text{ мм}; \quad 2R = 50 \text{ мм}; \quad 2m' = 4 \text{ мм};$$
$$\gamma = 6; \quad 2w_1 = 8°.$$

На основании приведенных выше формул получаем

$$F_1 = 25 \operatorname{ctg} 4° = 360 \text{ мм};$$

$$x_1 = -(25 - 12 \operatorname{ctg} 4°) = 148 \text{ мм};$$

$$F_3' = \frac{1}{12}\left[25 \cdot 360 - \sqrt{9000(9000 - 630 \cdot 12)}\right] = 450;$$

$$F_3'' = \frac{1}{12}(9000 + 3600) = 1050 \text{ мм}.$$

Берем $F_3 = 450$ *мм*; тогда $d = 2\,(794 - 450) = 688$ *мм*.

Для определения фокусного расстояния коллектива используем уравнение

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{360} + \frac{1}{450} + \frac{148}{(360)^2} - \frac{688}{2\,(450)^2} =$$

$$= 0{,}00278 + 0{,}00222 + 0{,}00114 - 0{,}00170 = 0{,}00444.$$

Получаем

$$F_2 = 225 \text{ мм}.$$

Систему уравнений (V.31) нельзя применять механически, так как это может привести к нелепым результатам. Нужно помнить, что некоторые из уравнений получены заменой неравенства равенствами (например, уравнения для F_1 и x_1). Знак равенства в указанных уравнениях пригоден для тех случаев, когда длина перископа очень велика по сравнению с диаметром и желательно уменьшить длину с помощью всех элементов, влияющих на нее. При сравнительно коротких перископах, наоборот, желательно подобрать x_1 и F_1 так, чтобы F_3 получилось по возможности большим; это обеспечивает у оборачивающих линз малое относительное отверстие и малый угол поля зрения, а следовательно, и хорошее качество изображения.

Следует отметить, что если увеличение γ перископа мало, то можно решить задачу постепенными приближениями. В первом приближении можно пренебречь длиной объектива и окуляра и считать, что длина перископа определяется оборачивающей системой. Величине x_1 (расстояние от зрачка до объектива) можно дать любое отрицательное значение, не превышающее по абсолютной величине $|x_1| < R \operatorname{ctg} w_1$. Фокусное расстояние F_1 можно также брать любым, не превышающим по абсолютному значению $R \operatorname{ctg} w_1$. Величины x_1 и F_1 в указанных пределах выбираются так, чтобы исправление аберраций системы достигалось возможно простыми средствами и было достаточно хорошим. Во втором приближении, при определении фокусных расстояний F_3 и F_4, учитывается длина, занимаемая объективом и окуляром. Впрочем, наличие отражающих призм и дополнительных приспособлений может ввести значительные коррективы в полученные в первом приближении величины.

После подбора всех фокусных расстояний линз и расстояний между ними необходимо проверить все действующие отверстия линз. При расчете внешних элементов более сложных типов перископа аналитический метод решения настолько усложняется, что становится практически неприменимым. Кроме того, этот метод не обладает достаточной гибкостью; используя его, трудно учесть ряд важных свойств оптических систем, относящихся уже не к внешним элементам системы, а к внутренним, а именно к пределам апертурных и полевых углов отдельных компонентов системы, внутри которых можно получить достаточно малые аберрации и хорошее качество изображений.

Для иллюстрации трудностей, с которыми можно встретиться при решении рассматриваемых задач, вернемся к примеру габаритного расчета перископа. Фокусное расстояние объектива было принято равным его верхней границе — 360 *мм*. Однако его вполне можно уменьшить, например до 250 *мм*. При этом растет относительное отверстие, не делаясь, однако, чрезмерным, и можно полагать, что и при такой увеличенной апертуре аберрации объектива будут достаточно малыми. Кроме того, уменьшится

размер изображения, так как он пропорционален $F_1 \operatorname{tg} w_1$. Фокусные расстояния обеих оборачивающих линз несколько увеличатся за счет укорочения фокусного расстояния объектива, так как вся длина прибора должна остаться без изменения; увеличится значительно апертурный угол оборачивающих линз, так как этот угол имеет одно и то же значение для оборачивающих линз и для объектива; будет иметь место некоторое ухудшение качества изображения на оси, уже более значительное, чем для объектива, так как фокусные расстояния оборачивающих линз больше, чем у объектива. С другой стороны, полевой угол оборачивающей системы уменьшится как из-за уменьшения диаметра изображения в фокальной плоскости объектива, так и вследствие увеличения фокусных расстояний оборачивающих линз. Качество изображения на краю поля может улучшиться, в то время как в центре поля оно ухудшается. Только подробный численный анализ на основе теории аберраций может указать, в каком направлении следует менять те или иные параметры системы для получения наилучшего результата.

6. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НЕ ВХОДЯЩИЕ В ПЕРЕЧИСЛЕННЫЕ ГРУППЫ

Сюда можно отнести довольно многочисленные оптические системы, компоненты которых нельзя считать бесконечно тонкими, расположенными далеко друг от друга. К этой категории относятся большинство фотографических объективов, в особенности светосильных, объективы микроскопов с большой апертурой, широкоугольные окуляры и др. При расчете таких систем предварительное вычисление расположения отдельных частей и размеров внешних элементов становится второстепенным, так как требования в этих случаях предъявляются к разрешающей силе и полю зрения при том или ином качестве изображения. Габариты отходят здесь на второй план; размеры системы являются результатом решения задачи получения изображения требуемого качества.

Все реальные оптические системы находятся между указанными крайними категориями. В случае, когда оптическая система приближается к категории систем, состоящих из бесконечно тонких, относительно далеко расположенных компонентов, расчет делится на две независимые части. В первой части вычисляют внешние элементы по уже указанным правилам и находят фокусные расстояния отдельных компонентов и расстояния между ними. Во второй части, пользуясь методами, изложенными в гл. III, определяют внутренние элементы, т. е. сорта стекол и радиусы кривизны поверхностей, отделяющих среды. Введение конечных толщин, а также наличие остаточных аберраций высших порядков несколько меняют картину, и приходится вводить поправки в первоначально полученные конструктивные элементы.

К системам промежуточного характера можно отнести окуляры, объективы микроскопов среднего увеличения и фотографические объективы малой и средней светосилы со средними значениями углов поля — так называемые универсальные объективы. В этих случаях можно пользоваться для ориентировки приемами расчета систем с бесконечно тонкими компонентами; главная задача расчета состоит в получении достаточно малых аберраций, а вопросы о внешних размерах и об относительном положении линз отходят на второй план.

7. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ОБ АБЕРРАЦИЯХ НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ПРИМЕНЯЕМЫХ КОМПОНЕНТОВ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Имея в виду прежде всего оптические системы, относящиеся к первой рассмотренной выше категории, можно сказать, что уже в стадии определения внешних элементов систем, т. е. в первой части расчета, встречаются затруднения при выборе фокусных расстояний компонентов и их отверстий. Часто требования, предъявленные к габариту системы, приводят к очень большим относительным отверстиям или к очень большим углам поля зрения некоторых компонентов системы. Возникают трудности в выборе типа компонентов, соответствующих условиям, при которых они применяются в системе.

Теоретически всегда можно рассчитать сложную систему с достаточно большим количеством поверхностей, уменьшив все аберрации системы для любого относительного отверстия и любого угла поля до достаточно малых величин; но часто такие комбинации не представляют практического интереса вследствие трудности их расчета, изготовления и сборки, а следовательно, и дороговизны.

Поэтому в оптических системах применяют компоненты, состоящие из небольшого количества линз. В качестве объективов, коллективов и оборачивающих систем используют почти исключительно либо простые линзы, либо двухлинзовые склеенные компоненты, либо, в очень редких случаях, тройные склеенные или двухлинзовые несклеенные объективы (астрономические объективы). Если и встречаются более сложные системы, то только в микроскопах и фотографических объективах, которые будут рассматриваться отдельно.

В окулярах с большим углом поля зрения, достигающим в так называемых широкоугольных окулярах 70—90°, встречаются и сложные компоненты. Окуляры будут подробно исследованы во II части книги; здесь ограничимся общими свойствами наиболее часто употребляемых компонентов.

Простые линзы

Однолинзовые компоненты, как правило, обладают довольно большими значениями основных параметров, и поэтому области их применения ограничены. Они применимы в случаях, когда вследствие благоприятных условий в отношении их размеров или положения аберрации не достигают больших величин.

Во-первых, простые линзы часто употребляют в качестве коллективов в непосредственной близости от плоскости изображения. В этом случае (см. стр. 130) при $s_1 = 0$, т. е. когда плоскость предметов совпадает с плоскостью простой линзы, все аберрации ее равны нулю за исключением кривизны поля и дисторсии, которые имеют сравнительно небольшое значение. В данном случае применение более сложных систем не привело бы к существенному улучшению.

Во-вторых, простые линзы дают хорошее изображение, если они имеют очень малые относительные отверстия, порядка $\frac{1}{15} - \frac{1}{30}$ и меньше; в этом случае аберрации малы вследствие малости множителя, содержащего апертурный угол в квадрате или в кубе. Примеры применения: простые мениски в качестве дешевых фотообъективов; очень длиннофокусные коллиматоры (при условии работы в монохроматическом свете).

Наконец, простыми линзами можно пользоваться в условиях, когда сферическая и хроматическая аберрации играют второстепенную роль, а комбинацией двух простых линз на конечном (сравнительно большом) расстоянии друг от друга можно добиться уничтожения остальных аберраций (комы, астигматизма, дисторсии, хроматической разности увеличений). Пример такого рода систем: окуляры типа Рамсдена и Гюйгенса.

Для грубой оценки продольной сферической аберрации простой линзы при бесконечно удаленном предмете можно пользоваться следующей формулой:

$$\delta s' = -\frac{h^2}{f},$$

где h — высота падения луча на линзу; f — ее фокусное расстояние. Эта формула дает минимальную аберрацию в случае плосковыпуклой линзы с плоскостью, обращенной в сторону изображения.

Для вычисления хроматической аберрации служит формула

$$s'_F - s'_C = -\frac{s'^2}{f}\frac{1}{\nu},$$

где ν — коэффициент дисперсии Аббе; s' — расстояние от линзы до изображения.

Двухлинзовые склеенные системы

Обладая достаточным числом параметров (два радиуса кривизны, два показателя преломления и отношение дисперсий стекол), двухлинзовые склеенные системы могут быть исправлены в отношении любых аберраций третьего порядка, за исключением кривизны поля и иногда астигматизма, если только имеется достаточный набор стекол, из которых можно выбирать нужные сорта. Чаще всего исправляются сферическая аберрация и кома при одновременном исправлении хроматической аберрации. Однако вследствие наличия аберраций высших порядков двухлинзовые склеенные объективы не могут иметь относительные отверстия больше 1 : 4 при фокусных расстояниях менее 150 *мм*, 1 : 5 при фокусных расстояниях до 300 *мм*, 1 : 6 — до 500 *мм*, 1 : 8 — 1 : 10 — до 1000 *мм*.

Поле зрения этих систем не должно превышать 10—12° при малых фокусных расстояниях, 7—10° — при больших. Двухлинзовые склеенные системы особенно пригодны в качестве объективов и оборачивающих систем, когда падающие пучки параллельны. Гораздо худшие результаты получаются при увеличениях близких к —1; в этом случае выгодно применять два близко расположенных объектива с параллельным ходом лучей между ними.

Двухлинзовые склеенные системы могут быть довольно хорошо исправлены в отношении астигматизма, если только входной зрачок не совпадает с оправой системы; в этом случае они могут применяться как половинки симметричных фотографических объективов, как, например, объективы типа апланат; половинки апланатов плохо исправлены в отношении сферической аберрации и кривизны поля.

Трехлинзовые склеенные комбинации

Несмотря на наличие новых параметров, трехлинзовые склеенные системы не только не открывают новых перспектив, но даже не расширяют пределов областей применения двухлинзовых склеенных объективов. Это объясняется следующими причинами. Во-первых, у двухлинзовых объективов можно исправить все аберрации третьих порядков, за исключением тех аберраций, которые связаны с петцвалевой величиной π, но в отношении последней величины тройные системы особых выгод не дают. Во-вторых, аберрации высших порядков, от которых главным образом и зависят пределы апертуры и угла поля зрения объективов, практически одинаковы в тройных и в двойных склеенных системах.

Поэтому замена двойных склеенных объективов тройными, вообще говоря, бесполезна, если исключить тот случай, когда отсутствие выбора стекол не дает возможности с помощью двойного объектива добиться нужных сумм Зейделя. В этом единственном случае проявляется преимущество тройной системы — лишний «полноценный» параметр, т. е. лишний радиус кривизны,— перед двойной.

Несколько иначе обстоит дело, когда такая комбинация используется в качестве окуляра. Она может быть применена как отрицательный окуляр в системе галилеевского типа и дает там возможность уничтожить неустранимые в простой линзе хроматические аберрации. В этом случае двухлинзовая комбинация могла бы дать тот же результат, но при условии применения крутой поверхности склейки, что является неудобным для изготовления. Трехлинзовая склеенная комбинация с успехом может быть применена и в окуляре «ортоскопического» типа, где она приводит к более удобной конструкции (симметричность системы), чем в случае двойной склеенной системы. Впрочем, и здесь преимущество в смысле оптических качеств трехлинзовой комбинации перед двухлинзовой достаточно спорное.

Несклеенные двухлинзовые системы

Двухлинзовые несклеенные объективы, обладающие одним лишним параметром по сравнению со склеенными, могут быть лучше исправлены в отношении сферической аберрации и комы. Однако их широкому применению мешали дополнительные потери вследствие отражения света от двух внутренних поверхностей. В настоящее время, после широкого внедрения просветления, этот недостаток отпадает и двухлинзовые несклеенные объективы используются в качестве астрономических, геодезических, объективов биноклей и других подзорных труб.

При соответствующем выборе стекол можно получить настолько хорошее исправление сферической аберрации, что относительное отверстие несклеенных двухлинзовых систем может быть доведено до 1 : 2,5; к сожалению, хроматическая разность сферических аберраций довольно велика, что ставит предел дальнейшему увеличению апертуры. Аберрация комы этих систем может быть исправлена.

На основании изучения существующих оптических систем можно прийти к выводу, что преимущества тройной склеенной системы обычно переоцениваются, а двухлинзовые несклеенные системы, наоборот, недооценены по достоинству. Однако вопрос о сравнительных достоинствах обоих типов объективов не может до сих пор считаться решенным.

Несколько бесконечно тонких линз, разделенных бесконечно малыми воздушными промежутками

В тех случаях, когда двухлинзовый склеенный объектив не может быть применен из-за требования слишком большого относительного отверстия, его можно заменить системой из нескольких линз, разделенных воздушными прослойками. Если все линзы имеют одинаковые фокусные расстояния, то каждая из них имеет значительно меньшее относительное отверстие, чем вся система в целом, так как фокусное расстояние каждой отдельной линзы в несколько раз больше, чем фокусное расстояние всего компонента. Благодаря этому такой компонент может иметь значительно большие апертуры, чем одна сколь угодно сложная линза. Например, система из двух, для удобства одинаковых, двухлинзовых склеенных компонентов может давать вполне удовлетворительные результаты при относительном отверстии, доходящем до 1 : 2,5—1 : 3.

Однако в наклонных пучках такие сложные компоненты не дают преимущества перед простыми, так как некоторые аберрации третьего порядка (кривизна, астигматизм, иногда дисторсия) остаются неустранимыми.

В качестве компонентов можно использовать и сложные объективы, применяемые для фотографии, проекции. Это необходимо в тех случаях, когда компоненты должны обладать хорошим качеством изображения для больших углов поля зрения. Фотографические объективы обладают углами поля, доходящими до 120—140° (и до 200—210°), при относительных отверстиях, достигающих 1 : 6—1 : 2; при меньших углах поля относительное отверстие растет по эмпирическому закону, согласно которому при постоянном фокусном расстоянии произведение линейного поля на синус апертурного угла есть величина постоянная.

Д. С. Волосовым в его докторской диссертации была предложена эмпирическая формула типа $\sqrt{f}\,\mathrm{tg}\,w_1 \sin \omega' = c$, где f — фокусное расстояние объектива; $2w_1$ — угол поля зрения в пространстве предметов; ω' — апертурный угол в пространстве изображения (предмет предполагается на бесконечности). Коэффициент c, зависящий в какой-то степени от сложности объектива и от некоторых его свойств, например отношения величины заднего отрезка к фокусному расстоянию, дисторсии систем и т. д., равен приблизительно 0,8. При этом качество изображения соответствует разрешающей силе наиболее часто применяемых светочувствительных слоев, т. е. порядка 70—100 линий на миллиметр. При малых углах поля зрения, не превышающих 2—4°, можно применять системы типа однокомпонентных, толщина которых мала по сравнению с фокусным расстоянием. У таких систем, как правило, третья сумма близка к единице, а четвертая —

к 0,7. Относительное отверстие их может быть велико, достигая 1 : 2—1 : 1,5.

При углах в пределах 3—10° пригодны двухкомпонентные системы типа телеобъективов, в которых второй компонент, расположенный приблизительно посередине между первым компонентом и фокусом, обладает отрицательной силой и большой толщиной, благодаря чему исправляет S_{III} и S_{IV} всего объектива. У таких объективов относительное отверстие, даже при сложном многолинзовом первом компоненте, не превышает 1 : 2. Эта задача также может быть решена с помощью двух положительных компонентов, расставленных на сравнительно большое расстояние друг от друга. Весь объектив может быть исправлен в отношении первых трех сумм, но сумма S_{IV} велика и превышает обычно единицу. Поэтому для уменьшения кривизны придают S_{III} отрицательное значение (до —0,3); из-за астигматизма угол поля не может превысить 8—10°, а относительное отверстие может быть близким 1 : 1. Этот тип объектива был предложен Пецвалем более ста лет назад; его конструкция позволяла при относительном отверстии 1 : 3,5 добиться угла поля, близкого к 25° (при посредственном качестве изображения на краю поля).

Углы поля, превышающие 20—25°, требуют применения уже трех компонентов; в простейшем случае в качестве компонентов могут служить простые линзы (триплет). Этот объектив дает относительные отверстия до 1 : 3 при угле поля зрения 45—50°.

Для больших углов существует бесчисленное количество конструкций, в основном исходящих из триплета с отдельными усложненными компонентами, и существенным параметром в них является толщина. Такие объективы («Юпитеры») позволяют при относительных отверстиях 1 : 2—1 : 1,5 добиться углов поля до 40—45°.

Такие же результаты можно получить с конструкциями типа Планар — почти симметричные комбинации, каждая половина которых состоит из одной простой линзы и двухлинзового склеенного компонента.

При углах поля, превышающих 60°, применяются почти исключительно симметричные и близкие к симметричным конструкции.

Существует большое разнообразие широкоугольных объективов с различными значениями угла поля и относительного отверстия (от 60 до 120—140°, причем относительное отверстие падает от 1 : 4 до 1 : 30. Среди них отметим объективы М. М. Русинова с далеко расставленными отрицательными компонентами по краям. Объективы этого типа обладают тем свойством, что падение освещенности плоскости изображения происходит медленнее, чем по классическому закону $\cos^4 w_1$.

Если исправление дисторсии не требуется, можно использовать конструкцию, предложенную Гиллем для исследования неба, состоящую из большого и сильного отрицательного компонента,

на сравнительно большом расстоянии от которого стоит положительный сложный компонент, собирающий световые пучки в плоскости изображения. Эти объективы позволяют получить углы поля до 200° при значительном относительном отверстии (до 1 : 6), но дисторсия очень велика. Расстояние изображения точки от оси определяется законом $y' = f'w_1$ (вместо обычного $y' = f' \operatorname{tg} w_1$).

При необходимости наблюдать или фотографировать область, угол поля зрения которой превышает π, можно использовать схему, показанную на рис. V.12, согласно которой выпуклое сферическое зеркало O_1 перехватывает лучи, идущие из правой части поля, и передает их на положительный компонент O_2, образующий действительное изображение неба. Такие системы могут обладать громадной светосилой (до 1 : 2 и 1 : 1), но масштаб изображения, т. е. фокусное расстояние объектива, весьма мал (десяток миллиметров), несмотря на значительные диаметр зеркала (50 *см* и более) и длину системы (1 *м* и более). Комбинации, состоящие из двух компонентов — одного отрицательного и другого положительного (иногда их называют «обратными» телеобъективами), — обладают значительным свободным расстоянием, что может представить большой интерес; но при этом намного увеличивается длина объектива.

Рис. V.12

В тех случаях, когда нужно получить большой масштаб изображения при небольших размерах (длине) системы, можно использовать телеобъективы, состоящие из двух компонентов — положительного и отрицательного — разделенных воздушным промежутком. При такой схеме длина системы, отсчитанная от первой линзы объектива до фокуса, короче фокусного расстояния. Однако полученное укорочение не может быть доведено до значительных величин. Этому препятствуют вторичный спектр системы и пецвалева кривизна, принимающая отрицательное значение; при хорошем исправлении аберраций общая длина системы (до изображения) составляет около $0{,}8f$. При большем укорочении приходится жертвовать относительным отверстием и углом поля зрения.

Окуляры

Обязательным завершением любой зрительной трубы является окуляр. Условия работы окуляров значительно отличаются от таковых для других частей зрительной трубы, по крайней мере,

в большинстве встречающихся на практике случаев. При общем с объективом относительном отверстии окуляры обладают значительно бóльшим углом поля зрения, лежащим в пределах 50—100°. С другой стороны, малые значения фокусных расстояний окуляров позволяют не обращать внимания на некоторые аберрации, например сферическую и хроматическую (положения), если в фокальной плоскости окуляра нет сетки. В противном случае обе эти аберрации должны быть исправлены.

Окуляр типа Галилея применяется либо с выходным зрачком за окуляром (бинокли, некоторые трубы морских инструментов), либо с выходным зрачком между объективом и окуляром (случай добавочных телескопических систем с небольшим увеличением или уменьшением, которые можно включить перед основной си-

Рис. V.13

Рис. V.14

стемой для изменения ее увеличения). В первом случае поле зрения окуляра весьма мало; если оно не превосходит 15—20°, то вполне применима простая линза. Во втором случае угол поля может быть больше, но хроматическая аберрация увеличений принимает слишком заметное значение, и окуляр приходится составлять из двух или лучше трех склеенных линз.

Среди окуляров с положительным фокусным расстоянием одним из самых простых является окуляр Рамсдена, состоящий из двух плоско-выпуклых линз (рис. V.13), обращенных друг к другу выпуклыми поверхностями. Передний фокус находится впереди первой линзы коллектива. Так как линзы простые, окуляр практически не обладает аберрациями высших порядков и его аберрации с большой точностью могут быть определены на основании формул Зейделя для третьего порядка. У него могут быть вполне исправлены кома и астигматизм; кривизна поля в общем не хуже, чем у более сложных окуляров, но довольно большая хроматическая разность увеличений (порядка 1% для лучей, соответствующих длинам волн 656 и 486 *мкм*) ограничивает поле зрения, которое не может превышать 40°.

Окуляр Гюйгенса (рис. V.14) состоит из двух плоско-выпуклых линз, обращенных плоскостями к глазу. Передняя фокальная плоскость находится между линзами; как и для окуляра Рамсдена, аберрации могут быть определены при помощи формул для третьего порядка. По сравнению с окуляром Рамсдена этот окуляр несколько лучше в отношении хроматизма увеличений, но имеет в 2—3 раза большую сферическую аберрацию. Недостаток обоих

окуляров — близость выходного зрачка к глазной линзе; расстояние $x' = L'P$ (рис. V.13 и V.14) равно приблизительно $^1/_3$ фокусного расстояния окуляра, если в нем хорошо исправлены кома и астигматизм. Так как глаз не может быть помещен ближе 8—10 *мм* от последней поверхности окуляра, то нельзя применять окуляры Гюйгенса и Рамсдена с малыми фокусными расстояниями. При фокусном расстоянии меньше 15—20 *мм* наблюдения затрудняются, так как глаз не охватывает одновременно всего поля зрения.

Рис. V.15

Рис. V.16

Окуляр симметричный (рис. V.15) состоит из двух одинаковых двухлинзовых склеенных компонентов. Присутствие склеенных линз позволяет значительно улучшить аберрации на оси (хроматическую и сферическую). Хроматизм увеличений может быть совершенно устранен. Для поля не более 40° изображение довольно плоско и анастигматично, но наличие поверхностей склейки с крутыми радиусами вызывает появление аберраций высших порядков в наклонных пучках, вследствие чего качество изображения, даваемого окуляром при полях более 40°, весьма быстро ухудшается. Преимуществом этого типа окуляра является большое расстояние выходного зрачка от последней поверхности (немногим меньше фокусного расстояния окуляра). Кроме того, аберрация в зрачках, т. е. изменение положения точки P (пересечения луча с осью при различных углах поля зрения), очень мала. Этот тип окуляра наиболее применим при малых фокусных расстояниях (до 7—5 *мм*).

Рис. V.17

Окуляр «ортоскопический» (рис. V.16) состоит из двух частей: тройного склеенного компонента и стоящей вплотную к нему простой плоско-выпуклой линзы, обращенной плоскостью к глазу. По своим свойствам этот окуляр весьма близок к симметричному; поле зрения его не превышает 40°. От других окуляров он отличается тем, что дисторсия его может быть исправлена в несколько большей степени, что дало повод назвать его ортоскопическим.

Окуляр Кельнера (рис.V.17) отличается от окуляра Рамсдена тем, что первая поверхность коллектива у него не обязательно плоская, а глазная линза состоит из двух склеенных стекол. Благодаря этому аберрации на оси исправлены лучше, чем у окуляра Рамсдена; хроматическая разность увеличений меньше, хотя все-таки достигает 0,5%. Выходной зрачок окуляра

Кельнера может отстоять от последней поверхности на $^1/_2$ фокусного расстояния, т. е. дальше, чем у окуляра Рамсдена, но ближе, чем у симметричного и ортоскопического окуляров. Поле зрения окуляра Кельнера достигает 50°.

Рис. V.18

Рис. V.19

Окуляры широкоугольные составлены из трех линз, из которых одна простая, а две — двойные, благодаря чему высшие порядки аберраций наклонных пучков уменьшены. Существует

Рис. V.20

несколько вариантов широкоугольных окуляров, из которых наиболее удачными нужно считать типы, предложенные Эрфле.

Первый тип Эрфле (рис. V.18) является усложнением окуляра Кельнера путем раздвоения глазной линзы L_2L_3; оба компо-

Рис. V.21

нента L_2 и L_3 одинаковы. Поле зрения достигает 60—65°; при увеличении поля дисторсия и хроматическая разность увеличений превышают допустимые значения (8—10% для дисторсии).

Расстояние зрачка от последней линзы 0,5—0,6 фокусного расстояния, как и в окуляре Кельнера. Второй тип Эрфле (рис. V.19) можно рассматривать как симметричный окуляр с прибавлением третьей линзы в середине, цель которой — уменьшить аберрации высших порядков. Поле зрения не превышает 60°, но расстояние до зрачка достигает фокусного расстояния.

Существуют еще и другие типы окуляров, впрочем, мало применяемые, например окуляры с далеко вынесенным выходным зрачком (бинокли, прицелы и т. д.). Простейшим способом удаления выходного зрачка является введение отрицательного компонента на небольшом расстоянии от переднего фокуса окуляра. Нужно, однако, иметь в виду, что чем дальше отстоит выходной зрачок, тем меньше поле зрения (при одном и том же типе окуляра).

На рис. V.20 и V.21 приведены схемы двух особо широкоугольных окуляров, обладающих углами поля 85°. У первого из них ($f' = 15$, $1 : 4{,}3$, $2\beta = 86°$) выходной зрачок находится на расстоянии, равном фокусному. У второго ($f' = 30$, $1 : 5$, $2\beta = 85°$) расстояние до зрачка равно 1,6 фокусного расстояния, что достигнуто применением параболоидальной поверхности. Несмотря на необычно большие значения угла поля зрения и удаления зрачка выхода, качество исправления аберраций хорошее.

Сообщенные краткие сведения дают возможность составить предварительный проект оптической системы. Однако могут представиться случаи, когда из-за каких-нибудь условий, чаще всего габаритного характера, представляется необходимым перейти через указанные здесь пределы; тогда расчет системы, удовлетворяющий необычным требованиям, делается очень трудным и сложным.

ГЛАВА VI

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассчитать оптическую систему — это значит определить конструктивные элементы (радиусы кривизны или профили сечений преломляющих и отражающих поверхностей, толщины линз, расстояния между оптическими элементами, световые диаметры линз и зеркал, сорта применяемых стекол и т. д.), допустимые отклонения от величин этих элементов и отступления от идеальной центрировки. Могут быть еще и другие элементы расчета в зависимости от назначения и действия прибора, для которого рассчитывается оптика.

Существует несколько основных методов расчета, на выбор которых влияют многие обстоятельства — от личных вкусов конструктора-вычислителя до характеристик оптических систем (например, их относительные отверстия и величина угла поля зрения). Немалую роль играет и наличие или отсутствие тех или иных вспомогательных средств вычисления: арифмометров, быстродействующих электронных машин и т. д.

После довольно длительного периода использования эмпирических методов изготовления первых нашедших применение оптических приборов: луп, очковых стекол, зрительных труб и микроскопов — начались попытки перехода к более обоснованным методам, опирающимся на знание законов преломления и отражения. Неудивительно, что Декарт, сформулировавший впервые точные законы преломления и отражения, стал первым оптиком-конструктором, указавшим на наличие сферической аберрации линз и показавшим, как ее исправлять. Ньютон, открывший дисперсию и хроматическую аберрацию линз, дал и формулы для оценки последней, которые значительно позже позволили Доллонду создать первые ахроматы. Эйлер написал большой трактат о расчете оптических систем («Диоптрика»), в котором была приведена целеустремленная методика расчета, не нашедшая впоследствии применения только потому, что она опиралась на неверную гипотезу о значении дисперсии материалов и не принимала во внимание одну из главнейших аберраций оптических систем — кому, о существовании которой во времена Эйлера никто не знал.

Следующий шаг в направлении разработки методики расчета был сделан австрийским математиком Пецвалем. После того как он получил путем весьма трудоемкого разложения в ряд выражения для аберраций третьего и пятого порядка (а может быть и дальше — все его работы пропали при пожаре), он убедился в невозможности использования плодов своих трудов из-за их слишком большой сложности и создал метод проб, основанный на изучении связи между аберрациями системы, вычисленными с помощью расчета хода лучей, и некоторыми ее конструктивными элементами. С помощью этого метода Пецваль рассчитал первый светосильный фотографический объектив (1840 г.), названный его именем. Впрочем, этот объектив любопытен тем, что в нем так называемое условие Пецваля, т. е. условие отсутствия кривизны изображения, не только не выполнено, но, наоборот, кривизна больше, чем у всех ранее известных объективов.

Несколько позже (1856 г.) Зейделем были выведены и опубликованы формулы для коэффициентов аберраций третьего порядка, но Зейдель, как и Пецваль, пришел к выводу о невозможности использования этих формул для практических вычислений из-за их крайней сложности. Лишь в начале XX в. непрекращающиеся попытки найти применение формулам Зейделя привели к успеху в простейшем случае двухлинзового объектива, который представлял весьма значительный практический интерес, так как являлся основным компонентом подзорных труб любого рода, а также микроскопов слабого увеличения. Двухлинзовые объективы, наиболее часто встречающиеся на практике, обладают малым относительным отверстием, обычно меньше чем 1 : 4—1 : 5; вследствие этого толщины линз малы по сравнению с фокусным расстоянием и аберрации высших порядков намного меньше, чем аберрации третьего порядка; наконец, угол поля зрения мал, а следовательно, для получения хорошего качества изображения достаточно исправить две аберрации — сферическую и хроматическую. Благодаря этому оказалось возможным получить довольно простые формулы для радиусов кривизны поверхностей при известных характеристиках применяемых оптических стекол.

Задача расчета двухлинзовых объективов решалась неоднократно многими исследователями, пользовавшимися различными переменными и принимавшими во внимание большее или меньшее количество дополнительных условий. Более того, решение этой задачи стало своеобразным критерием, позволяющим оценить возможности того или другого предложенного метода. Прошло более 60 лет после опубликования первых работ, посвященных этой задаче, но и в настоящее время поступают в печать новые и новые работы на эту же тему.

Подобные исследования положили начало второму методу расчета оптических систем, который получил у нас название алгебраического метода — в противовес описанному ранее

тригонометрическому, основанному на изучении результатов вычисления с помощью таблиц тригонометрических величин с последующим интерполированием (или экстраполированием).

В этой главе будет рассматриваться лишь алгебраический метод, а метод проб, получивший большое развитие после появления и освоения ЭВМ, будет изложен в гл. VII.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МЕТОДА

Как было изложено выше, алгебраический метод возник после того, как на примере двухлинзового объектива выяснилась полная возможность расчета оптической системы, исходя из формул для коэффициентов аберраций третьего порядка. Нетрудно было распространить этот метод на расчет простых линз, двухлинзовых несклеенных и трехлинзовых склеенных объективов и вообще бесконечно тонких компонентов, хотя при увеличении числа линз растет число неизвестных и простота решения исчезает. Более того, методика алгебраического расчета могла быть без труда распространена на тот случай, когда оптическая система состоит из нескольких компонентов (например, объектива и окуляра или объектива, оборачивающей системы линз и окуляра) или представляет собой зеркальную или зеркально-линзовую систему из нескольких зеркал и линз. Как было показано в гл. III, все поперечные аберрации третьего порядка монохроматических лучей, а также обе хроматические аберрации параксиальных лучей (хроматические аберрации положения и увеличения) центрированной оптической системы могут быть представлены как сумма произведений вида

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= \sum m_i P_i + \sum n_i W_i + \sum p_i \pi_i + \sum q_i; \\ \delta G' &= \sum m'_i P_i + \sum n'_i W_i + \sum p'_i \pi_i + \sum q'_i \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.1)}$$

для аберраций монохроматических лучей и

$$\left.\begin{aligned} s'_F - s'_C &= \sum r_i C_i; \\ \frac{l'_F - l'_C}{l'_D} &= \sum r'_i C_i \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.2)}$$

для хроматических аберраций. При этом величины m_i, m'_i, n_i, n'_i, . . ., r_i, r'_i зависят только от оптических сил компонентов, расстояний между ними, апертуры системы и расстояния точки-объекта от оси, а величины P_i, W_i, π_i, q_i, C_i связаны с конструкцией элемента i, т. е. с его радиусами кривизны, показателями преломления и коэффициентами дисперсии (для C_i), а также с положением объекта относительно компонента i. Однако в гл. III

было показано, что параметры P_i и W_i, зависящие от положения предмета, можно заменить теми же параметрами, связанными только с конструктивными элементами; при этом зависимость P_i и W_i от $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ линейная, и вид уравнений (VI.1) и (VI.2) остается без изменения, но переход от старых P_i и W_i к новым $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ позволяет осуществить полностью разделение параметров на две группы. В первую группу входят внешние величины, связанные с габаритными характеристиками системы, силы отдельных компонентов, расстояния между последними, диаметры их, зависящие от апертурных и полевых углов, как это было показано в гл. V. Поэтому эти величины можно считать известными. Параметры второй группы P, W, π и C получаются из решения системы уравнений (VI.1) и (VI.2), если правые части этих уравнений известны. Определение этих правых частей, а также числа уравнений систем (VI.1) и (VI.2) будет рассмотрено ниже.

Составление уравнений, их решение

Напомним формулы (II.42*) для всех аберраций третьего порядка оптических систем с осевой симметрией:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{1) для сферической аберрации}\\
&\qquad -2n'_p\delta g'_{\mathrm{I}} = \omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)S_{\mathrm{I}};\\
&\qquad -2n'_p\delta G'_{\mathrm{I}} = \Omega'_p\left(\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)S_{\mathrm{I}};\\
&\text{2) для комы}\\
&\qquad -2n'_p\delta g'_{\mathrm{II}} = \left(3\omega'^2_p + \Omega'^2_p\right)w_1S_{\mathrm{II}};\\
&\qquad -2n'_p\delta G'_{\mathrm{II}} = 2\omega'_p\Omega'_p w_1S_{\mathrm{II}};\\
&\text{3) для кривизны поля и астигматизма}\\
&\qquad -2n'_p\delta g'_{\mathrm{III+IV}} = \omega'_p w_1^2\left(3S_{\mathrm{III}} + J^2S_{\mathrm{IV}}\right);\\
&\qquad -2n'_p\delta G'_{\mathrm{III+IV}} = \omega'_p w_1^2\left(S_{\mathrm{III}} + J^2S_{\mathrm{IV}}\right);\\
&\text{4) для дисторсии}\\
&\qquad -2n'_p\delta g'_{\mathrm{V}} = w_1^3S_{\mathrm{V}}; \quad -2n'_p\delta G'_{\mathrm{V}} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.3)}$$

В этих формулах $\delta g'_T$ и $\delta G'_T$ — проекции на меридиональную и экваториальную плоскости отрезка δL, соединяющего точку пересечения луча с гауссовой плоскостью изображения с точкой, изображающей по законам гауссовой оптики рассматриваемую точку-объект, в том предположении, что все аберрации, за исключением T-й, уничтожены.

В особо важном случае, когда плоскость предмета находится на бесконечности, удобнее всего пользоваться формулами (III.7*),

на основании которых можно написать

$$\left.\begin{aligned}
-2n'_p\delta g'_{\mathrm{I}} &= \frac{m_1\left(m_1^2+M_1^2\right)}{F'^2}S_{\mathrm{I}};\\
-2n'_p\delta g'_{\mathrm{II}} &- \frac{3m_1^2+M_1^2}{F'_1}w_1S_{\mathrm{II}};\\
-2n'_p\delta g'_{\mathrm{III+IV}} &= m_1w_1^2(3S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}});\\
-2n'_p\delta g'_{\mathrm{V}} &= F'w^3S_{\mathrm{V}};\\
-2n'_p\delta G'_{\mathrm{I}} &= \frac{M_1\left(m_1^2+M_1^2\right)}{F'^2}S_{\mathrm{I}};\\
-2n'_p\delta G'_{\mathrm{II}} &= \frac{2m_1M_1}{F'}w_1S_{\mathrm{II}};\\
-2n'_p\delta G'_{\mathrm{III+IV}} &= M_1w_1^2(S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}});\\
-2n'_p\delta G'_{\mathrm{V}} &= 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{VI}.4)$$

Эти формулы отличаются от (VI.3) только несколько иной системой единиц для выражения сумм S_{I}, S_{II}, . . ., S_{V}. В первом случае при вычислении P, W и π принимается, что $\alpha'_p = 1$, $h_1 = s_1\alpha_1$, $y_1 = x_1$, $J = \alpha_1(x_1 - s_1)$; во втором случае $\alpha'_p = 1$, $h_1 = 1$, $J = -1$, $y_1 = \frac{x_1}{F'}$. Множители при суммах различаются только наличием или отсутствием величины F', так как при бесконечно удаленной плоскости предмета

$$\omega'_p = \frac{m_1}{F'};\quad \Omega'_p = \frac{M_1}{F'}.$$

Наконец, если система телескопическая и $\alpha'_p = 0$, то поперечные аберрации не могут быть вычислены; вместо них необходимо вводить угловые аберрации $[\delta g'_p]$ и $[\delta G'_p]$, равные пределу $-\frac{\delta g'_p}{s'_p}$ и $-\frac{\delta G'_p}{s'_p}$ при $s'_p \to \infty$. Обозначая увеличение телескопической системы буквой γ, на основании формул (III.8) имеем

$$-\frac{2}{\gamma}\left[\delta g'_1\right] = \frac{m_1\left(m_1^2+M_1^2\right)}{F'^3}S_{\mathrm{I}};$$

$$-\frac{2}{\gamma}\left[\delta G'_1\right] = \frac{M_1\left(m_1^2+M_1^2\right)}{F'^3}S_{\mathrm{I}}$$

и т. д. Эти формулы отличаются от (VI.4) только тем, что справа все множители сумм содержат лишнюю степень F' в знаменателе;

F' в этом случае обозначает фокусное расстояние той части системы, которая остается по исключении окуляра. При определении величин P, W и π за единицу углов α берется угол α_q в среде, отделяющей окуляр от остальной части телескопической системы.

Две хроматические аберрации первого порядка для бесконечно тонких систем могут быть представлены следующими формулами [они приведены в гл. III под номерами (III.11) и (III.14)]:

хроматическая аберрация положения $\delta s'_p$

$$\alpha'^2_p \delta s'_p = \sum h_i^2 \Phi_i C_i; \qquad \text{(VI.5)}$$

хроматическая аберрация увеличений $L'_F - L'_C$

$$\frac{L'_F - L'_C}{l'} = -\sum y_i h_i \Phi_i C_i, \qquad \text{(VI.5*)}$$

где $C_i = \sum_{t=1}^{t=\theta} \frac{\varphi_t}{\nu_t}$; θ — число линз компонента i; φ_t — относительная сила линзы t, т. е. отношение оптической силы линзы t к оптической силе Φ_i всего компонента i.

Для телескопических систем первая из этих аберраций должна быть оценена в угловой мере; обозначим через $[\delta g']_I$ предел отношения $-\frac{\delta s'_p \alpha'_p}{s'_p}$. Тогда, благодаря соотношению $s'_p \alpha'_p = h^p$,

$$[\delta g']_I = -\frac{1}{h_p} \sum h_i^2 \Phi_i C_i = -m'_p \sum \left(\frac{h_i}{h_p}\right)^2 \Phi_i C_i, \qquad \text{(VI.6)}$$

где m'_p — высота пересечения луча с плоскостью выходного зрачка.

Для второй аберрации отношение $\frac{L_F - L_C}{l'}$ при переходе s'_p к бесконечности не теряет смысла и формула (VI.5*) остается в силе.

Нужно помнить, что $y_1 = \frac{x_1}{F'}$, $h_1 = 1$. Оптические силы Φ_i определяются из условия, что $\sum h_i \Phi_i = 1$, причем суммирование распространяется на все компоненты за исключением окуляра. Предположим, что на основании тех условий, которым должны удовлетворять оптические свойства (увеличение, апертура, поле зрения) и габариты оптической системы, получены все фокусные расстояния отдельных линз, расстояния между ними, положение предмета и входного зрачка относительно системы.

Рассчитываем по любому изложенному в гл. II способу ход двух вспомогательных лучей. Первый из них проходит через точку предмета на оси под углом к ней α_1, определяемым из условия, что α'_p или α_q в случае телескопической системы равняется единице. Второй луч проходит через центр входного зрачка под

углом $\beta_1 = 1$ в общем случае и $\frac{1}{F'}$ в случае, когда $s_1 = \infty$. Если $\alpha_1 = 0$, то удобно приводить все отрезки к фокусному расстоянию $F = 1$. Далее вычисляем последовательно все углы α_i и α_i' до и после преломления у компонента с номером i, все высоты h_i и аналогично углы β_i и β_i' и высоты y_i для второго вспомогательного луча (примеры см. в дальнейших главах).

Для расчета хода луча служат следующие формулы, применяемые последовательно ко всем компонентам:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i' - \alpha_i &= h_i \Phi_i; & \beta_i' - \beta_i &= y_i \Phi_i; \\ h_{i+1} &= h_i - d_{i,\,i+1}\alpha_i'; & y_{i+1} &= y_i - d_{i,\,i+1}\beta_i', \end{aligned}\right\} \qquad (\text{VI.7})$$

где Φ_i — оптическая сила компонента i; $d_{i,\,i+1}$ — расстояние между компонентами с номерами i и $i + 1$.

Зная величины h, y, α, можно составить выражения всех сумм $S_{\text{I}}, \ldots, S_{\text{V}}$ по формулам гл. II, а также и двух хроматических сумм S_{I}^{xp} и S_{II}^{xp}.

Выбор аберраций, подлежащих исправлению

При расчете оптических систем одной из наиболее ответственных задач является выбор тех аберраций, которые подлежат исправлению. Казалось бы, естественно стремиться устранить все пять аберраций третьего порядка монохроматического луча и две главные хроматические аберрации, т. е. составить семь выражений аберраций и приравнять их нулю; на самом деле такой способ решения задачи во многих случаях не может быть применен. Некоторые аберрации третьего порядка не поддаются исправлению простыми средствами, т. е. с малым количеством линз и с нормальными сортами оптических стекол. Применения более сложных систем обычно избегают, так как это усложняет и значительно удорожает изготовление прибора и часто приводит к некоторым ухудшениям, как, например, к большей чувствительности прибора к внешним воздействиям и толчкам, легко расстраивающим сборку многочисленных деталей; с другой стороны, применение особых сортов стекла, необходимых для устранения аберраций, но мало устойчивых, приводит к порче линз, к уменьшению прозрачности и т. д.

Вопрос о числе подлежащих исправлению аберраций связан с назначением прибора, с его относительным отверстием, с требуемым качеством изображения. Если оптическая система должна обладать незначительным углом поля зрения (например, объектив астрономической трубы с большим увеличением), то необходимо обратить внимание на исправление сферической аберрации и хроматической аберрации положения. Для объектива зрительной трубы средних увеличений нужно исправить кому или хотя бы

компенсировать ее остальной частью системы (например, оборачивающей системой и окуляром).

Если оптическая система обладает малой апертурой, но значительным углом поля (например, очковые линзы, широкоугольные фотографические объективы типа «Гипергон»), то главное внимание уделяется исправлению астигматизма, а в фотографических объективах исправляются также кривизна поля и дисторсия.

Объективы спектральных систем в ряде случаев могут не быть исправленными в отношении хроматических аберраций и кривизны поля, так как поверхность изображения щели может и не быть плоской. Исправление дисторсии также необязательно, поскольку измерение положения спектральных линий производится обычно сравнением двух спектров, образованных той же оптической системой. Исправление астигматизма обязательно только тогда, когда прибор должен давать резкое изображение каждой точки щели, что не всегда необходимо.

Перечисленных примеров достаточно, чтобы показать, насколько разнообразны могут быть условия, которым должна удовлетворить оптическая система в зависимости от ее назначения.

Помимо требований, предъявляемых к системе в отношении аберраций третьего порядка, может быть и ряд других (например, к размерам, весу, числу линз и т. д.), приводящих к необходимости идти на компромисс или даже на отказ от слишком жестких требований. В этом случае приходится идти на частичное удовлетворение аберрационных требований, т. е. на приравнивание коэффициентов не нулю, а некоторым величинам, более или менее отклоняющимся от нуля.

Можно привести и другие соображения, относящиеся к вопросу о выборе подлежащих исправлению аберраций. Неоднократно делались попытки исправления астигматизма в объективах малой толщины. Естественно, все эти попытки терпели неудачу, поскольку коэффициент астигматизма в бесконечно тонких объективах в наиболее распространенном случае, когда входной зрачок совпадает с оправой объектива, равен постоянной величине, отличной от нуля, независимо от конструктивных элементов Это обстоятельство стало известным лишь после того, как формулы Зейделя научились применять в простых частных случаях.

Таким образом, бесполезно требовать от достаточно тонкого объектива, чтобы его астигматизм был сколько-нибудь заметно уменьшен; то же относится и к пецвалевой кривизне, так как параметр π всегда близок к 0,7.

Остановимся более подробно на перечисленных и на некоторых других трудностях.

К трудно исправляемым аберрациям третьего порядка относятся: кривизна поля, в некоторых случаях астигматизм и дисторсия; особенно трудно устранима хроматическая аберрация второго порядка (вторичный спектр).

Исправление кривизны изображения. Эта аберрация определяется суммой Зейделя S_{IV}, имеющей особенно простой вид

$$S_{IV} = \sum \Phi_i \pi_i.$$

Так как величины Φ_i обычно бывают заданными, то для исправления кривизны можно использовать только величины π_i. Уже ранее было указано, что эти величины практически постоянны и не выходят из пределов 0,6—0,8. Рассмотрим более подробно причины постоянства величины π, от которой зависят многие свойства аберраций оптических систем. В случае однолинзовых компонентов или в эквивалентном случае, когда все стекла компонента имеют один и тот же средний показатель преломления n, величина π для данного компонента равна просто $\frac{1}{n}$. Так как на практике значение показателя преломления остается в пределах 1,50—1,65, то π не выходит из границ, определяемых числами 0,61—0,66.

В наиболее часто встречающемся случае двухлинзовых компонентов параметр π может быть представлен формулой

$$\pi = \frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}, \qquad \text{(VI.8)}$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй линз компонента. Так как относительные оптические силы φ_1 и φ_2 связаны соотношением $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, то выражение для π может еще быть написано в следующем виде:

$$\pi = \varphi_1 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) + \frac{1}{n_2} \qquad \text{(VI.9)}$$

или при исключении φ_1:

$$\pi = \frac{1}{n_2} + \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} (1 + C\nu_2). \qquad \text{(VI. 10)}$$

Множитель $\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$ не превышает 0,05; только очень большие значения φ_1, не менее 10, могут сколько-нибудь значительно повлиять на численную величину π_2, но такие необычные значения φ_1 привели бы к очень большим кривизнам поверхностей компонента, что, в свою очередь, повлекло бы за собой малые поперечные размеры компонента, т. е. малое относительное отверстие.

Устранению кривизны мешает еще одно обстоятельство, обнаружившееся в двухлинзовых склеенных компонентах. В большинстве случаев устранение кривизны должно быть выполнено одновременно с уничтожением сферической и хроматической аберраций, которое приводит к тому, что произведение $\varphi_1 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$ всегда положительно. Требование уничтожения сферической абер-

рации приводит также к тому, что величина показателя преломления отрицательной линзы должна быть больше, чем у положительной. Если $\varphi_1 > 0$, $n_2 > n_1$ и тогда $\varphi_1\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) > 0$; если $\varphi_1 < 0$, то $n_2 < n_1$ и произведение $\varphi_1\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$ опять положительно. Поэтому в двухлинзовых склеенных компонентах, исправленных в отношении сферической и хроматической аберраций, π всегда больше чем 0,65 и обычно лежит в пределах 0,68—0,72. Для компонентов из трех и большего количества линз аналогичные рассуждения приводят к тем же выводам. В фотографических объективах встречаются компоненты, у которых π не превышает 0,3 (половинки анастигматов типа «Дагор» и им подобные компоненты), но это достигается тем, что оптические силы у отдельных линз, входящих в состав этих половинок, достигают громадных величин порядка 10. Эти половинки можно употреблять в качестве фотообъективов с относительным отверстием не больше 1 : 12—1 : 20, что совершенно недостаточно для обычных телескопических систем.

В дальнейшем будем предполагать, что π постоянно и равно 0,70 в склеенных системах и 0,65 в простых линзах.

Условие, что S_{IV} равно нулю, можно написать так:

$$\sum \Phi_i \pi_i = 0 \qquad \text{(VI.11)}$$

или, считая π постоянным,

$$\sum \Phi_i = 0. \qquad \text{(VI.12)}$$

Нетрудно показать, что в телескопических системах из двух компонентов условие (VI.12) не может быть выполнено. Условие, что система из двух бесконечно тонких компонентов с оптическими силами Φ_1 и Φ_2 телескопическая, т. е. имеет бесконечно большое фокусное расстояние, может быть написано в виде

$$\frac{1}{F} = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = 0, \qquad \text{(VI.13)}$$

где F — фокусное расстояние системы. Но условие Пецваля при π постоянном дает

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0. \qquad \text{(VI.14)}$$

Из уравнений (VI.12) и (VI.13) получаем $d\Phi_1\Phi_2 = 0$, что невозможно, так как ни одна из трех величин не может быть приравненной нулю без нарушения свойств телескопичности.

Покажем, что и в системах с положительным фокусным расстоянием, состоящих из двух положительных компонентов, условие отсутствия кривизны не может быть выполнено. Пусть Φ — оптическая сила системы. Тогда уравнение масштаба дает

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2.$$

Условие отсутствия кривизны записывается в виде

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0,$$

откуда

$$\Phi = -d\Phi_1\Phi_2, \qquad \text{(VI.15)}$$

что невозможно, так как все три величины d, Φ_1 и Φ_2 положительны. В случае систем с положительным фокусным расстоянием из трех или более положительных компонентов можно также показать, что кривизна изображения не может быть уничтожена.

Системами, удовлетворяющими условию $\sum\Phi = 0$, являются, во-первых, положительные системы из двух компонентов, у которых один компонент положителен, другой отрицателен. К ним принадлежат объективы типа «телеобъектив», если удовлетворяется условие (VI.13). Во-вторых, более сложные системы из трех или более компонентов, из которых по крайней мере один отрицателен, могут быть построены так, чтобы удовлетворялось условие $\sum\Phi = 0$ (например, фотообъективы типа «триплет»).

Имеется еще одна, чисто теоретическая возможность достижения того же результата: поставить в одной из промежуточных плоскостей изображения отрицательную линзу соответствующей оптической силы, не влияющую на ход апертурных лучей, т. е. лучей, идущих из точки предмета на оси. К сожалению, такие линзы рассеивают пучки лучей, идущих из различных точек поля зрения (вместо того чтобы их собирать, как это делает большинство положительных, так называемых коллективных линз). Они не могут применяться за исключением того случая, когда отрицательная линза ставится непосредственно перед изображением (линза Смита в фотографических системах). Есть еще один случай, когда применение отрицательного компонента возможно и даже полезно, а именно — в окулярах с большим удалением выходного зрачка. Действительно, отрицательный компонент служит для удаления зрачка и одновременно уменьшает кривизну изображения, даваемую системой объектив — окуляр.

Таким образом, исправление кривизны поля (не за счет астигматизма) в телескопических системах простой конструкции невозможно, и при составлении системы уравнений, определяющих систему, условие $S_{IV} = 0$ не может иметь места.

Исправление астигматизма. На практике встречается ряд случаев, когда астигматизм оптических систем не может быть устранен; это обстоятельство также должно быть принято во внимание при составлении уравнений. Например, астигматизм бесконечно тонкого компонента, находящегося в плоскости одного из зрачков системы, определяется исключительно его фокусным расстоянием, как это следует из формулы (III.7), которая может

быть представлена в таком виде:

$$S_{\text{III}} = \sum \frac{y_i^2}{h_i} P_i - 2J \sum \frac{y_i W_i}{h_i} + J^2 \sum \Phi_i. \qquad \text{(VI.16)}$$

Если $y_i = 0$, то сумма S_{III}, относящаяся к компоненту i, равна

$$S_{\text{III}} = J^2 \sum \Phi_i$$

и не зависит совершенно от внутренних элементов компонента. Этот случай встречается довольно часто (объективы телескопических систем), и бесполезно пытаться влиять на значение астигматизма иначе, как изменением положения входного зрачка, да и то только тогда, когда объектив не исправлен одновременно в отношении сферической аберрации и комы. Впрочем, астигматизм всей оптической системы может быть исправлен, если у окуляра третья сумма имеет такое значение, которое компенсирует неустранимую в объективе величину той же суммы.

Исправление вторичного спектра было изучено в гл. II, и здесь важно отметить только то, что его устранение возможно лишь при условии применения специальных сортов оптического стекла, обладающих одинаковыми частными дисперсиями, или с помощью оптических систем с одним или несколькими зеркальными отражениями.

Исправление аберрации по отдельным компонентам. Различные компоненты оптической системы работают каждый в особых условиях: на одни попадают широкие пучки, образующие малые углы с оптической осью системы; другие, наоборот, пересекаются тонкими пучками, сильно наклоненными к оси. В первом случае такие аберрации, как сферическая и кома, зависящие от третьей и второй степеней апертурного угла, могут иметь очень большие значения и должны быть исправлены прежде всего. Во втором случае главную роль играют дисторсия, кривизна и астигматизм, зависящие от третьей и второй степени полевых углов и только от нулевой и первой степени апертурных углов. Возьмем для примера телескопическую систему, состоящую из объектива и бесконечно тонкого окуляра. Предположим, что ее увеличение γ значительно, — случай, когда разделение аберрации происходит особенно наглядно.

Положим, что входной зрачок совпадает с объективом. Вычислим все суммы S_{I}, S_{II}, . . ., S_{V}, соответствующие пяти аберрациям монохроматического луча. Определим величины h и y для обоих компонентов. По условию $h_1 = 1$; тогда по свойству телескопических систем $h_2 = \frac{1}{\gamma}$, $y_1 = 0$. Для определения y_2 заметим, что $y_2 = -\beta_2 d$, где β_2 — угол с осью второго вспомогательного луча между объективом и окуляром; d — расстояние между

компонентами. Угол $\beta_1 = \frac{1}{F}$, где F — фокусное расстояние объектива. Так как $y_1 = 0$, то $\beta_2 = \beta_1 = \frac{1}{F}$. С другой стороны,

$$d = F\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right),$$

откуда

$$y_2 = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Определим теперь суммы S_{I}, S_{II}, S_{III} и S_{V}:

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= h_1P_1 + h_2P_2 = P_1 + \frac{1}{\gamma}P_2;\\
S_{\mathrm{II}} &= y_1P_1 + y_2P_2 + W_1 + W_2 =\\
&= -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)P_2 + W_1 + W_2;\\
S_{\mathrm{III}} &= \frac{y_1^2}{h_1}P_1 + \frac{y_2^2}{h_2}P_2 + \frac{2y_1}{h_1}W_1 + 2\frac{y_2}{h_2}W_2 + \Phi_1 + \Phi_2 =\\
&= \frac{y_2^2}{h_2}P_2 + \frac{2y_2}{h_2}W_2 + 1 - \gamma;\\
S_{\mathrm{V}} &= \frac{y_2^3}{h_2^2}P_2 + 3\frac{y_2^2}{h_2^2}W_2 + \frac{y_2\Phi_2}{h_2}(3 + \pi_2).
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.17)}$$

Рассматривая формулы (VI.17), легко заметить, что сферическая аберрация зависит почти исключительно от первого компонента $\left(\frac{1}{\gamma}\right.$ — малая величина$\left.\right)$; кома зависит в одинаковой степени от первого и от второго компонентов; астигматизм уже зависит только от второго компонента, и влияние первого сказывается исключительно присутствием постоянной 1, представляющей относительную силу первого компонента. Что же касается дисторсии, то последняя аберрация уже исключительно зависит от окуляра.

Если взять выражения для обеих хроматических аберраций у телескопических систем из двух компонентов, то получим

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}}^{xp} &= h_1^2\Phi_1C_1 + h_2^2\Phi_2C_2 = C_1 - \frac{1}{\gamma}C_2;\\
S_{\mathrm{II}}^{xp} &= h_1y_1\Phi_1C_1 + h_2y_2\Phi_2C_2 =\\
&= \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\gamma C_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)C_2.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.18)}$$

Таким образом, первая хроматическая аберрация зависит только от объектива, вторая — от окуляра.

Возможностью распределять исправление аберраций на отдельные компоненты широко пользуются в практике расчета

оптических систем. В некоторых случаях можно рассчитывать отдельные части оптических систем независимо друг от друга; в частности, объективы и окуляры можно, хотя бы в первом приближении, изучать независимо. Объективы исправляются в отношении сферической и хроматической аберраций, окуляры — в отношении комы, астигматизма, второй хроматической аберрации и, поскольку возможно, дисторсии.

Итак, при составлении уравнений надо, с одной стороны, считаться с невозможностью исправить некоторые аберрации и исключать из рассмотрения уравнения, относящиеся к ним; с другой стороны, при более детальном исследовании отдельных частей оптической системы приходится обращать внимание на исправление только тех аберраций, которые играют главную роль в условиях работы этих частей. Например, было бы бесцельно стараться исправить сферическую аберрацию короткофокусного окуляра, так как это помешало бы улучшению его астигматизма и ортоскопии. В таких нерациональных и бесполезных усилиях добиться хороших результатов в исправлении второстепенных аберраций заключается одна из наиболее часто встречающихся ошибок начинающих вычислителей.

Определение свободных членов аберрационных уравнений

После тщательного выбора аберраций, которые при данных условиях работы системы должны быть исправлены, остается невыясненным еще вопрос о тех числах, к которым должны быть приравнены выражения зейделевых сумм, соответствующих исправляемым аберрациям. В первом и самом грубом приближении можно было бы полагать, что эти суммы должны быть равны нулю, если только они выражают величины аберраций всей оптической системы или какой-нибудь ее части, для которой такое исправление должно иметь место. Когда приступают к расчету какой-нибудь новой, еще совсем неизвестной оптической системы, ничего другого не остается, как ставить нуль в правой стороне уравнения, но для уже известных систем часто возможно заранее знать то число, которому должна равняться левая часть уравнения, выражающая одну из сумм Зейделя.

Рассмотрим, на основании чего определяются численные значения правых частей указанных уравнений. Замена бесконечно тонких линз линзами конечной толщины всегда более или менее изменяет численные значения аберраций третьего порядка системы. С другой стороны, влияние аберраций пятого и более высокого порядка может быть отчасти компенсировано некоторым изменением значений коэффициентов (сумм Зейделя) аберраций третьего порядка. В некоторых случаях влияние аберраций высшего порядка может быть определено заранее; мы увидим далее, как можно учитывать влияние сферической аберрации пятого

порядка в двухлинзовых склеенных объективах, хроматическую разность сферических аберраций в системах из двух линз и т. д. В фотографических объективах численное значение третьей и четвертой сумм заранее известно, если тип объектива задан. Тригонометрический расчет хода лучей через оптическую систему позволяет оценивать как влияние толщин, так и влияние аберраций высших порядков и определять величины поправочных свободных членов. Вопрос о влиянии обоих факторов будет более подробно разобран ниже.

Решение уравнений и определение конструктивных элементов в первом приближении

Если правые части уравнений, получаемых приравниванием выражений сумм Зейделя некоторым числам, известны, то решение этих уравнений не представляет никаких затруднений, так как система уравнений линейна относительно неизвестных P_i и W_i.

При решении системы уравнений, определяющих параметры P_i, W_i (и π_i), могут встретиться различные случаи. Во-первых, может оказаться, что число неизвестных меньше, чем число уравнений. Ясно, что в таком случае приходится пренебречь исправлением какой-нибудь из аберраций, причем выбор отбрасываемых аберраций должен быть выполнен с большой осторожностью: необходимо принять во внимание условия применения оптической системы и те цели, для которых она предназначена. Например, при расчете биноклей обычной конструкции не хватает параметров для устранения кривизны поля (см. стр. 342) и еще какой-нибудь одной аберрации; поэтому обычно отказываются от исправления дисторсии, так как небольшое искажение формы предметов и отклонение от их правильного положения не имеют особого значения для системы, не предназначенной для измерительных целей. В астрономических объективах не пытаются исправлять ни астигматизма, ни дисторсии, так как в этом случае важно хорошее качество изображения только на оптической оси системы и в непосредственной близости к центру поля зрения.

Второй возможный случай — это случай, когда число неизвестных больше, чем число уравнений. Это часто бывает у сложных систем, например у зрительных труб с оборачивающими линзами, у перископов и т. д. В таких случаях можно добавить несколько уравнений, частью относящихся к качеству изображения, т. е. выражающих условие уничтожения каких-либо аберраций, частью служащих для облегчения конструкции системы. Можно добавить условие, чтобы промежуточные изображения, даваемые отдельными частями системы, были хорошо исправлены в отношении каких-либо аберраций, например потребовать, чтобы в системе перископа изображение, даваемое объективом, было исправлено на сферическую и хроматическую аберрации;

это может оказаться необходимым, если в плоскости промежуточного изображения должна быть расположена сетка или иное измерительное приспособление. В качестве условий, облегчающих конструкцию, можно потребовать, чтобы оборачивающие линзы были одинаковыми или чтобы отдельные компоненты имели общие конструктивные элементы: сорта стекол, радиусы кривизны и т. д.; наконец, можно идти на упрощение конструкции. Однако, добавляя новые условия, нужно всегда иметь в виду их осуществимость; нельзя, например, в качестве добавочного условия написать уравнение $S_{IV} = 0$. Такое условие, как правило, приводит к неприемлемым результатам. Нужно помнить, что величинами π располагать нельзя; их всегда следует считать постоянными числами, принимая $\pi = 0{,}65$ для простых линз и $\pi = 0{,}70$ для двухлинзовых склеенных компонентов.

Считая π_i постоянным, решают систему уравнений относительно неизвестных величин P_i и W_i; после этого остается решить вопрос о выборе таких конструкций каждого компонента, при которых функции P_i и W_i имеют полученные из уравнений значения. Величины P_i и W_i зависят не только от радиусов кривизны и показателей преломления, но еще и от углов α_i и α_i' первого вспомогательного луча с осью. Пользуясь системой формул (III.18), можно исключить влияние последних величин, и тогда задача о нахождении нужных элементов компонента значительно упрощается.

Обозначим через $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ величины, определяемые выражениями

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \sum \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\right)^2 \Delta\frac{\alpha}{n}; \\ \mathbf{W}_i &= \sum \frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}} \Delta\frac{\alpha}{n}; \\ \pi_i &= \frac{\Delta\alpha n}{nn'}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.19)}$$

где i — номер бесконечно тонкого компонента, в предположении, что $\alpha_i = 0$ и $\alpha_i' = 1$; суммирование распространяется на все поверхности этого компонента. В гл. III были выведены формулы (III.25), связывающие величины P_i и W_i с основными параметрами $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{W}_i$ и π_i; снова выписываем эти формулы (с добавлением индекса i):

$$\left.\begin{aligned} P_i &= (\alpha_i' - \alpha_i)^3 \mathbf{P}_i + 4\alpha_i (\alpha_i' - \alpha_i)^2 \mathbf{W}_i + \alpha_i (\alpha_i' - \alpha_i) \times \\ &\quad \times \left[(4 + 2\pi_i)\alpha_i - \alpha_i'\right]; \\ W_i &= (\alpha_i' - \alpha_i)^2 \mathbf{W}_i + \alpha_i (\alpha_i' - \alpha_i)(2 + \pi_i). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI. 20)}$$

Здесь все величины α_i и α_i' зависят только от внешних элементов системы и, вообще говоря, заранее известны.

Величины P_i и W_i могут быть исключены из основной системы выражений (III.7) с помощью формул (VI.20), и тогда получается ряд выражений с новыми переменными основными параметрами $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$. После исключения функций P_i и W_i выражения для сумм Зейделя в случае бесконечно тонких компонентов принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= \sum h_i^2\varphi_i\left\{h_i^2\varphi_i^2\mathbf{P}_i + 4\alpha_i h_i\varphi_i\mathbf{W}_i + \alpha_i\left[(4+2\pi_i)\,\alpha_i - \alpha_i'\right]\right\};\\
S_{\mathrm{II}} &= \sum h_i\varphi_i\left\{y_i h_i^2\varphi_i^2\mathbf{P}_i + h_i\varphi_i\,(1+4\alpha_i y_i)\,\mathbf{W}_i + \right.\\
&\qquad \left. + \alpha_i\left[(1+2y_i\alpha_i)\,(2+\pi_i) - y_i\alpha_i\alpha_i'\right]\right\};\\
S_{\mathrm{III}} &= \sum \varphi_i\left\{y_i^2 h_i^2\varphi_i^2\mathbf{P}_i + 2y_i h_i\varphi_i\,(1+2\alpha_i y_i)\,\mathbf{W}_i + 1 + \right.\\
&\qquad \left. + 2\alpha_i y_i\,(2+\pi_i) + \alpha_i y_i^2\left[\alpha_i\,(4+2\pi_i) - \alpha_i'\right]\right\};\\
S_{\mathrm{IV}} &= \sum \varphi_i\pi_i;\\
S_{\mathrm{V}} &= \sum \frac{\varphi_i}{h_i}\left\{y_i^3 h_i^2\varphi_i^2\mathbf{P}_i + (3+4\alpha_i y_i)\,y_i^2 h_i\varphi_i\mathbf{W}_i + \right.\\
&\qquad \left. + y_i\,(3+\pi_i) + 3\alpha_i y_i^2\,(2+\pi_i) + \alpha_i y_i^3\left[(4+2\pi_i)\,\alpha_i - \alpha_i'\right]\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI.21)}$$

Приравнивая S_{I}, S_{II}, . . ., S_{V} в формулах (VI.21) нулю или каким-нибудь другим числам, получаем систему уравнений, из которых можно найти численные значения основных параметров $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$. На практике удобнее другой путь, а именно: для составления уравнений использовать основные выражения сумм (III.7), определив из них численные значения величин P_i и W_i. Для нахождения по этим значениям величин основных параметров $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ рассматриваем формулы (VI.21) как уравнения и решаем их относительно $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$. Это дает следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{P}_i &= \frac{1}{(\alpha_i'-\alpha_i)^3}\left\{P_i - 4\alpha_i W_i + \alpha_i\,(\alpha_i'-\alpha_i)\times\right.\\
&\qquad \left.\times\left[(4+2\pi_i)\,\alpha_i + \alpha_i'\right]\right\};\\
\mathbf{W}_i &= \frac{1}{(\alpha_i'-\alpha_i)^2}\left[W_i - \alpha_i\,(\alpha_i'-\alpha_i)\,(2+\pi_i)\right].
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI.22)}$$

Получением численных значений основных параметров $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ заканчивается первая часть поставленной задачи.

Вторая часть содержит выбор типов компонентов и вычисление их внутренних элементов. Зависимость основных параметров $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ от конструкции компонентов была рассмотрена в гл. III для однолинзовых, двухлинзовых, трехлинзовых склеенных и двухлинзовых несклеенных систем. Было показано, что при рациональном выборе оптических стекол двухлинзовый склеенный

компонент может дать с достаточной степенью точности любую пару значений для $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$ при любом заданном значении четвертого основного параметра C_i, определяющего хроматические аберрации компонента. При заданных наперед сортах стекол необходимо применять либо трехлинзовую склеенную систему, либо двухлинзовую несклеенную. Там же было показано, как при заданных значениях **P**, **W** и C вычислить все конструктивные элементы компонента. В частном случае двухлинзового объектива с помощью полуэмпирической формулы $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\min} + 0{,}84\,(\mathbf{W} - 0{,}15)^2$ по заданным **P** и **W** вычисляют значение $\mathbf{P}_{\min}$, по которому при заданной величине C с помощью таблиц и чертежей той же главы находят наиболее подходящую пару стекол, т. е. пару, позволяющую с достаточной точностью получить нужные значения **P**, **W** и C. При заданных стеклах вычисление радиусов не представляет никаких затруднений.

Второе приближение. Учет толщин и аберраций высших порядков

Полученная в первом приближении оптическая система является лишь остовом для дальнейшей постройки. Конструктивные элементы, т. е. радиусы кривизны поверхностей, рассчитаны для бесконечно тонких линз, и потому при замене бесконечно тонких линз линзами конечной толщины необходимо ввести поправки в эти элементы. В этой главе будет рассмотрен только тот случай, когда толщина линз мала по сравнению с их фокусными расстояниями и не превосходит $\frac{1}{10}$ этих последних, что почти всегда имеет место в обширной категории телескопических систем, фотографических объективов с малыми относительными отверстиями и микроскопов с малой апертурой.

Определение толщин линз. Толщина линз задается почти исключительно по конструктивным соображениям и только иногда, но очень редко — с целью исправления той или иной аберрации. Соображения первого рода ограничивают численное значение толщины с обеих сторон. Толщина должна быть такова, чтобы в наиболее тонком месте, т. е. на краю отверстия для положительных и в центре — для отрицательных линз, она не была менее определенной величины $d_{\min}$, обеспечивающей линзе достаточную прочность и облегчающей ее изготовление. Эта минимальная величина зависит от диаметра линз и отчасти от условий применения их. По нормали Госкомитета НО 4728—64 зависимость между отверстием линзы D и величиной $d_{\min}$ определяется таблицами (см. табл. VI.1 для отрицательных линз и табл. VI.2 — для положительных).

В некоторых случаях эти нормы недостаточны, чтобы обеспечить достаточную прочность линзе, если ее радиусы кривизны

Таблица VI.1

Диаметр линзы D в *мм*	Наименьшая толщина линзы по оси d при допуске ΔN (местные ошибки)		
	До 0,5 полосы	Св. 0,5 до 2 полос	Св. 2 полос
До 50	$0{,}12D$	$0{,}1D$	$0{,}08D$
Св. 50	$0{,}1D$	$0{,}08D$	$0{,}06D$

очень велики и по форме она мало отличается от плоскопараллельной пластинки; тогда добавляется условие, чтобы максимальная толщина линзы была бы не менее $\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$ диаметра ее отверстия. Например, плоскопараллельная пластинка диаметром в 100 *мм* должна иметь не меньше 10—12 *мм* толщины. Бывают исключения из норм, приведенных в табл. VI.1 и VI.2. В очень малых линзах в некоторых случаях толщина подбирается так, чтобы на краю отверстия она сводилась на нет, т. е. получался бы острый угол. При изготовлении единичных оптических систем можно допустить отклонение от нормы как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения толщины линзы. Если в этом нет необходимости, лучше придерживаться величин, приведенных в табл. VI.1 и VI.2.

Таблица VI.2

Диаметр линзы D	Наименьшая толщина линзы по краю d	Диаметр линзы D	Наименьшая толщина линзы по краю d
в *мм*		в *мм*	
До 6	0,6	Св. 30 до 50	1,6
Св. 6 до 10	0,8	» 50 » 80	2
» 10 » 18	1,0	» 80 » 120	2,5
» 18 » 30	1,2	» 120	3

На основании данных табл. VI.1 можно вычислить толщину линзы d в центре для случая положительных линз по заданным радиусам кривизны r и r' и диаметру отверстия D. Пусть L (рис. VI.1) — линза, толщина которой подлежит определению. Обозначая через a и a' стрелки, т. е. высоты сегментов, соответствующие первой и второй поверхностям, для высоты $\frac{D}{2}$ имеем

$$d = d_{\min} + a - a'.$$

Приближенно можно написать, что

$$a = \frac{D^2}{8r}; \quad a' = \frac{D^2}{8r'},$$

поэтому

$$d = d_{\min} + \frac{D^2}{8}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

С другой стороны, обозначая через F фокусное расстояние линзы, можно с такой же степенью приближения написать

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

где n — показатель преломления линзы.

Формула для d принимает вид

$$d = d_{\min} + \frac{D^2}{8(n-1)F}. \qquad \text{(VI.23)}$$

Формула (VI.23) может быть еще упрощена, если принять $n = 1{,}5$, что вполне достаточно в обычных условиях. Тогда

$$d = d_{\min} + \frac{D^2}{4F}. \qquad \text{(VI.24)}$$

Рис. VI.1

Формула (VI.24) обладает вполне достаточной точностью, за исключением того случая, когда линза имеет очень большое относительное отверстие; она может быть применена для определения толщин только положительных линз.

Для отрицательных линз толщина в центре определяется из условия

$$d \geqslant d_{\min}. \qquad \text{(VI.25)}$$

Толщина как средство исправления аберраций. В некоторых случаях толщинами пользуются для исправления аберраций; это имеет место главным образом при расчете фотообъективов и объективов микроскопов. Рассмотрим два наиболее важных случая, когда толщины могут иметь значение параметров, действующих на аберрации третьего порядка линз.

1. Влияние толщины на кривизну поля. Для бесконечно тонкой линзы $S_{IV} = \frac{\Phi}{n}$, где Φ — оптическая сила линзы; n — показатель преломления ее стекла. Однако, когда линза имеет вид менисков, этой формулой пользоваться нельзя, так как даже небольшая толщина заметно влияет на значение S_{IV}. Можно даже получить S_{IV} равной нулю, сохраняя заданную заранее оптическую силу, хотя это явно противоречит приведенной формуле. В самом деле, рассмотрим более подробно выражение для оптической силы линзы конечной толщины,

а именно:

$$\Phi = \frac{(n-1)\,[n\,(r_2 - r_1) + (n-1)\,d]}{n r_1 r_2} =$$

$$= (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2 d}{n r_1 r_2}. \qquad \text{(VI.26)}$$

С другой стороны, имеем для четвертой суммы простой линзы формулу

$$S_{\text{IV}} = -\sum \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) = -\left[\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{r_2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{n}(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad \text{(VI.27)}$$

Условие $S_{\text{IV}} = 0$, принятое для формулы (VI.27), приводит к соотношению $r_1 = r_2$. Но уравнение (VI.26) показывает, что равенство радиусов не противоречит возможности получить Φ, отличным от нуля. Вследствие соотношения $r_1 = r_2$ в уравнении (VI.26) исчезает член $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$, и оно принимает вид

$$\Phi = \frac{(n-1)^2 d}{n r_1 r_2}. \qquad \text{(VI.28)}$$

При достаточно малых r_1 и r_2 и не слишком большом d можно получить для Φ любое значение, наперед заданное. Например, при $\Phi = \frac{1}{200}$ (половинка симметричного фотообъектива с фокусным расстоянием 100) имеем при $r_1 = r_2 = 8$ $d = 1{,}92$, т. е. вполне приемлемую толщину для такой линзы.

В качестве другого примера использования толщины для исправления кривизны можно указать на расчет широкоугольного объектива ГОИ. Могут оказаться полезными на практике следующие формулы. Обозначая через ρ_κ отношение $\frac{f'}{r_\kappa}$, где f' — фокусное расстояние линзы, а κ — номер поверхности, имеем

$$\left.\begin{aligned} \rho_1\rho_2 &= \frac{(1 - nS_{\text{IV}})\,n}{(n-1)^2 \frac{d}{f'}}; \\ \rho_1 - \rho_2 &= \frac{S_{\text{IV}}}{1 - \frac{1}{n}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.29)}$$

Эти формулы позволяют определить радиусы кривизны линзы, обладающей заданными значениями f' и S_{IV}.

2. Применение полусферических линз в объективах микроскопов. В гл. II было показано, что в случае преломления через сферическую поверхность

на оси сферы существуют две сопряженные точки, обладающие тем свойством, что одна из них изображается другой апланатично, т. е. малый элемент поверхности, перпендикулярный оси и содержащий первую точку, изображается безаберрационно маленьким элементом поверхности, проходящим через вторую точку. Для случая, когда сферическая поверхность отделяет стекло с показателем n от воздуха, точка-предмет находится на расстоянии $s = r\frac{n+1}{n}$ от вершины, а точка-изображение — на расстоянии $s' = r(n+1)$. Свойство апланатичности может быть использовано следующим образом. Рассмотрим линзу в виде шарового сегмента толщиной $r\frac{n+1}{n}$, т. е. больше полусферы; пусть точка-предмет находится на оси в точке S (рис. VI.2) на границе воздух — стекло на расстоянии $\frac{n+1}{n}r$ от вершины O. Эта точка изобразится апланатично в точке S', находящейся в воздухе на расстоянии $r(n+1)$ от той же точки O; точка S' может служить предметом для последующих линз микроскопа. На практике поступают несколько иначе, но принцип использования свойства толстых линз давать апланатические изображения остается тем же самым.

Рис. VI.2

Можно было бы указать еще несколько случаев использования толщин линз для исправления аберраций; они будут рассмотрены при разборе частных задач.

К простым системам, представляющим интерес для коррекции аберраций, относятся афокальные системы (см. гл. III) и менискообразные линзы.

Переход к системе с конечными толщинами линз. Определив по формулам (VI.24) или (VI.25) толщины всех линз оптической системы, необходимо вычислить новые значения радиусов кривизны всех поверхностей таким образом, чтобы эти радиусы мало отличались от первоначальных значений, чтобы оптические свойства системы (увеличение, величины зрачков и поля зрения, длина прибора и так далее) не изменились и, наконец, чтобы величины аберраций остались достаточно малыми.

Можно указать несколько способов перехода от «тонкой» к «толстой» системе — от самых элементарных и эмпирических до очень сложных; каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки; вопрос о рациональном переходе к толщинам мало разработан.

В основе изложенного ниже метода перехода к толщинам лежит требование сохранения значений фокусных расстояний всех компонентов оптической системы и всех углов обоих вспомогательных лучей с осью в воздушных промежутках между отдельными

компонентами. Расстояние от входного зрачка до передней главной плоскости первого компонента принимается тем же, что и расстояние входного зрачка до первого бесконечно тонкого компонента в первом приближении. Для соблюдения указанных условий необходимо выбрать воздушные расстояния таким образом, чтобы расстояние между задней главной плоскостью любого компонента и передней главной плоскостью следующего компонента было таким же, как и расстояние между двумя соответствующими бесконечно тонкими компонентами в первом приближении.

Главными преимуществами такого метода перехода являются, во-первых, неизменность оптических характеристик системы: увеличения, диаметров зрачков и люков (длина системы меняется при этом на сумму расстояний, отделяющих главные плоскости каждого компонента); во-вторых, возможность исследования каждого компонента независимо от других, так как все величины, нужные для определения сумм Зейделя, относящиеся к одному определенному компоненту, могут быть получены на основании величин, относящихся только к этому компоненту; это свойство будет дальше более подробно изучено.

При других способах перехода к конечным толщинам такая независимость не имеет места. В частности, применяется иногда способ перехода, при котором значения радиусов толстых систем принимаются равными значениям тех же радиусов, рассчитанных для тонкой системы; этот способ удобен, например, в случае линз или компонентов симметричной конструкции или содержащих одну отражающую поверхность (линзы Манжена). Однако при сохранении радиусов изменяются фокусные расстояния и некоторые другие характеристики компонентов, причем эти изменения оказывают влияние и на последующие компоненты. Недостатком такого метода перехода является некоторая сложность формул; впрочем, для большинства встречающихся на практике случаев эта сложность исчезает, когда плоскость предмета находится на бесконечности по отношению к соответствующему компоненту.

Удовлетворение перечисленных требований еще не решает задачу о переходе от тонких к толстым линзам, так как при этом еще нельзя получить правила для вычисления радиусов кривизны. Добавим следующее условие, позволяющее вычислить радиусы кривизны: все углы α с осью первого параксиального луча будем оставлять без изменения. При этом ряд величин, уже вычисленных для бесконечно тонкой системы, остается без изменения после перехода к конечным толщинам. К числу таких величин относятся, во-первых, функции **P** и **W**, зависящие только от углов α и от показателей преломления и являющиеся основными величинами при вычислении сумм Зейделя для толстой системы; во-вторых, величины $\frac{r}{h} = \frac{n'\alpha' - n\alpha}{n' - n}$, необходимые при вычислении радиусов кривизны толстой системы. Таким образом, опи-

санный способ позволяет использовать ряд величин, уже вычисленных для бесконечно тонкой системы.

Однако неизменность функций **P** и **W** еще не обеспечивает неизменности сумм Зейделя, так как в их выражения входят высоты h пересечения луча с поверхностями; эти высоты после перехода к конечным толщинам получают новые значения, вычисление которых производится на основании указанных условий следующим образом. Пусть OO' (рис. VI.3) — линза, определяемая углами α параксиального луча с осью и условием, что высоты h пересечения этого луча с главными плоскостями линзы равны высотам h пересечения того же луча с бесконечно тонким компонентом, заменяющим эту линзу в первом приближении. Пусть H и H' — главные плоскости линзы OO'; σ — расстояние OH от вершины первой поверхности линзы до передней главной плоскости; σ' — расстояние $O'H'$ от вершины последней поверхности линзы до задней главной плоскости; α и α' — углы с осью первого параксиального луча до и после преломления через линзу; α_2 — угол луча с осью в стекле; h_1 и h_p — высоты пересечения луча с первой и последней поверхностью линзы.

Рис. VI.3

Величины h_1, h_p и h связаны следующими соотношениями (рис. VI.3):

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= h + \sigma\alpha; \\ h_2 &= h + \sigma'\alpha' \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.30)}$$

Эти формулы решают поставленную задачу, если σ и σ' известны. Рассмотрим, как вычисляются величины σ и σ' в наиболее часто встречающихся случаях простой линзы и двухлинзовой склеенной системы.

Из гауссовой теории линз конечной толщины известны следующие формулы, связывающие величины σ и σ' со значениями радиусов r и r', с показателем преломления n и толщиной d линзы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= -\frac{rd}{n(r'-r)+(n-1)d}; \\ \sigma' &= -\frac{r'd}{n(r'-r)+(n-1)d}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.31)}$$

Радиусы r и r' неизвестны. Учитывая малость толщин по сравнению с радиусами, заменяем точные значения радиусов их значениями, полученными для бесконечно тонкой системы, а именно:

$$r = h\frac{n-1}{n\alpha_2-\alpha}; \quad r' = h\frac{1-n}{\alpha'-\alpha_2 n}. \qquad \text{(VI.32)}$$

Кроме того, можно в знаменателе пренебречь величиной $(n-1)\,d$ по сравнению с произведением $n\,(r'-r)$. Тогда формулы (VI.31) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{d}{n}\,\frac{\alpha'-n\alpha_2}{\alpha'-\alpha};\\ \sigma_0' &= \frac{d}{n}\,\frac{\alpha-n\alpha_2}{\alpha'-\alpha}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.33)}$$

Значки 0 у величин σ и σ' указывают на то, что в формулу входят приближенные значения этих величин. Применяя далее формулы (VI.30) для определения h_1 и h_2, получаем

$$\left.\begin{aligned}h_1 &= h+\frac{d}{n}\,\frac{\alpha'-n\alpha_2}{\alpha'-\alpha}\,\alpha;\\ h_2 &= h+\frac{d}{n}\,\frac{\alpha-n\alpha_2}{\alpha'-\alpha}\,\alpha'.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.34)}$$

Если точность недостаточна, можно еще раз вычислить радиусы толстой линзы по формулам

$$r = h_1\,\frac{n-1}{n\alpha_2-\alpha}; \quad r' = h_2\,\frac{n-1}{n\alpha_2-\alpha'}. \qquad \text{(VI.35)}$$

Подставив полученные значения в формулу (VI.31), на этот раз со вторым членом в знаменателе, вычисляем более точно отрезки σ и σ'. В большинстве случаев можно ограничиться формулами (VI.34). Если толщина линзы очень значительна, можно вместо вышеизложенного способа постепенных приближений решить относительно h_1 следующее точное квадратное уравнение:

$$h_1^2-(h+\alpha_2 d)\,h_1+\frac{hd}{n}\,\alpha'\,\frac{n\alpha_2-\alpha}{\alpha'-\alpha}=0. \qquad \text{(VI.36)}$$

Это уравнение получается из известного соотношения для фокусного расстояния

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{d}{rr'},$$

если заменить $\frac{1}{F}$ его значением $\frac{\alpha'-\alpha}{h}$, а r и r' — их выражениями (VI.35) через α, α_2 и α'. Впрочем, уравнение (VI.36) удобнее всего решать способом итерации, т. е. постепенными приближениями.

Полагая $h_1-h=\varepsilon=\sigma\alpha$, получим

$$\varepsilon^2+(h-\alpha_2 d)\,\varepsilon+\frac{hd}{n}\,\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}\,(n\alpha_2-\alpha')=0. \qquad \text{(VI.37)}$$

Рассмотрим случай двухлинзового склеенного объектива. Пусть d_1 и d_2 — толщины первой и второй линз; n_2 и n_3 — их по-

казатели преломления. Обозначим буквами φ_κ оптические силы отдельных поверхностей, т. е. отношения $\frac{n'_\kappa - n_\kappa}{r_\kappa}$, где κ — номер поверхности. Рассчитаем ход двух параксиальных лучей из бесконечности на высоте F: первый — в прямом ходе, второй — в обратном. Обозначим углы этих параксиальных лучей с осью буквой u для первого луча и v — для второго. Для первого луча вычисляем последовательно

$$n_2 u_2 = F\varphi_1; \quad h_2 = F - d_1 u_2 = F - \frac{d_1}{n_2} F\varphi_1 = F\left(1 - \frac{d_1\varphi_1}{n_2}\right);$$

$$n_3 u_3 = n_2 u_2 + h_2\varphi_2 = F\varphi_1 + F\left(1 - \frac{d_1\varphi_1}{n_2}\right)\varphi_2 =$$

$$= F\left(\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d_1}{n_2}\varphi_1\varphi_2\right);$$

$$h_3 = h_2 - d_2 u_3 = F\left(1 - \frac{d_1\varphi_1}{n_2}\right) - \frac{d_2}{n_3} F\left(\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d_1}{n_2}\varphi_1\varphi_2\right) =$$

$$= F\left[1 - \frac{d_1\varphi_1}{n_2} - \frac{d_2}{n_3}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{d_1 d_2}{n_2 n_3}\varphi_1\varphi_2\right].$$

Отрезок

$$\sigma' = s' - F = h_3 - F,$$

или

$$\sigma' = F\left[-\frac{d_1\varphi_1}{n_2} - \frac{d_2}{n_3}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{d_1 d_2}{n_2 n_3}\varphi_1\varphi_2\right]. \qquad \text{(VI.38)}$$

Точно таким же образом можно получить отрезок σ. Достаточно заметить, что при переворачивании системы φ_1 превращается в φ_3; φ_3 в φ_1; φ_2 не меняется.

Имея это в виду, получаем

$$-\sigma = F\left[-\frac{d_2\varphi_3}{n_3} - \frac{d_1(\varphi_3 + \varphi_2)}{n_2} + \frac{d_1 d_2}{n_2 n_3}\varphi_2\varphi_3\right]. \qquad \text{(VI.39)}$$

Величины φ_1, φ_2 и φ_3 могут быть заменены их выражениями через α:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{n_2 - 1}{r_1} = \frac{n_2\alpha_2 - \alpha}{F}; \\ \varphi_2 &= \frac{n_3 - n_2}{r_2} = \frac{n_3\alpha_3 - n_2\alpha_2}{h_2}; \\ \varphi_3 &= \frac{1 - n_3}{r_3} = \frac{\alpha' - n_3\alpha_3}{h_3}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.40)}$$

Пренебрегая и здесь малыми величинами второго порядка, т. е. произведениями d_1^2, $d_1 d_2$ и d_2^2, можно положить, что $h_2 = h_3 = F$, заменить φ_1, φ_2 и φ_3 более простыми выражениями

$$F\varphi_1 = n_2\alpha_2 - \alpha; \quad F\varphi_2 = n_3\alpha_3 - n_2\alpha_2; \quad F\varphi_3 = \alpha' - n_3\alpha_3 \qquad \text{(VI.41)}$$

и подставить их в выражения (VI.38) и (VI.39) для σ и σ', пренебрегая при этом последним членом, содержащим произведение $d_1 d_2$; это дает

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= -\frac{d_1}{n_2}(n_2\alpha_2 - \alpha) - \frac{d_2}{n_3}(n_3\alpha_3 - \alpha); \\ \sigma &= \frac{d_2}{n_3}(\alpha' - n_3\alpha_3) + \frac{d_1}{n_2}(\alpha' - n_2\alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.42)}$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$, $\alpha' = 1$, первая из формул (VI.42) приобретает простой и известный вид

$$\sigma' = -d_1\alpha_2 - d_2\alpha_3;$$

вторая формула дает

$$\sigma = \frac{d_2}{n_3}(1 - n_3\alpha_3) + \frac{d_1}{n_2}(1 - n_2\alpha_2). \quad \text{(VI.43)}$$

Любопытно, что расстояние $\overline{HH'}$ между главными плоскостями для двухлинзового объектива определяется простым выражением

$$\overline{HH'} = d_1 + d_2 + \sigma' - \sigma = d_1 + d_2 - (\alpha' - \alpha)\left(\frac{d_1}{n_2} + \frac{d_2}{n_3}\right) \quad \text{(VI.44)}$$

и не зависит от радиусов кривизны системы, а зависит только от толщин и показателей преломления. Действительно, имея в виду соотношения $\alpha' - \alpha = h_1\Phi = 1$, формулу (VI.44) можно написать в таком виде:

$$\overline{HH'} = d_1 + d_2 - \frac{d_1}{n_2} - \frac{d_2}{n_3} = d_1\left(1 - \frac{1}{n_2}\right) + d_2\left(1 - \frac{1}{n_3}\right). \quad \text{(VI.45)}$$

Формула (VI.45), как и все предыдущие, лишь приближенная; однако она может быть полезна в качестве контрольной формулы. Рассмотрим теперь общий случай сколь угодно сложного компонента. Определение величин σ и σ' удобнее всего производить, рассчитывая ход двух параксиальных лучей, падающих на компонент параллельно оси в прямом и обратном ходе. Разности $s' - F$ дают искомые величины σ' и σ (вторая получается с обратным знаком); радиусы кривизны принимаются те же, что и для бесконечно тонкой системы. Если есть необходимость, можно произвести несколько приближений, как и для случая простой линзы.

Вычисление конструктивных элементов системы. Определив, как было указано выше, h_1 и h_p для каждого компонента, можно вычислить последовательно все остальные h по формуле $h_{\kappa+1} = h_\kappa - d_\kappa\alpha_{\kappa+1}$; значение h_p, найденное таким образом, должно совпасть с непосредственно вычисленным по второй формуле (VI. 30); точность совпадения определяет и точность приближения. С помощью известных значений h вычисляют радиусы кри-

визны всех поверхностей по формуле

$$r_\kappa = h_\kappa \frac{n_{\kappa+1} - n_\kappa}{n_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+1} - n_\kappa\alpha_\kappa}. \qquad \text{(VI.46)}$$

Толщины линз уже определены; расстояния между отдельными компонентами определяются по формуле

$$d_\kappa = d_{0,\,\kappa} + \sigma'_\kappa - \sigma_{\kappa+1}, \qquad \text{(VI.47)}$$

где d_κ — расстояние между компонентами κ и $\kappa + 1$; $d_{0,\,\kappa}$ — расстояние между бесконечно тонкими компонентами κ и $\kappa + 1$ в первом приближении.

Можно также определить d_κ по формуле

$$d_\kappa = \frac{h_q - h_{q+1}}{\alpha_{q+1}}, \qquad \text{(VI.48)}$$

где h_q — высота пересечения параксиального луча с последней поверхностью компонента κ; h_{q+1} — высота на первой поверхности компонента $\kappa + 1$.

Расстояния от предмета s_1 и от входного зрачка x_1 до первой поверхности системы отличаются от принятых для первого приближения $s_{0,1}$ и $x_{0,1}$ на величину σ_1 согласно формулам

$$s_1 = s_{0,1} + \sigma_1; \quad x_1 = x_{0,1} + \sigma_1. \qquad \text{(VI.49)}$$

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ

После определения всех конструктивных элементов системы можно приступить к ее исследованию с помощью тригонометрического расчета хода лучей. Целью этого расчета является, с одной стороны, сравнение реальных аберраций, полученных путем расчета хода лучей, с аберрациями, вычисленными на основании теории аберраций третьего порядка для системы из бесконечно тонких компонентов, и с другой стороны — выявление всех особенностей системы, ее аберраций высших порядков, а также влияния толщин на аберрации третьего порядка.

Тригонометрический контроль должен быть направлен главным образом на исследование тех именно аберраций, которые по условиям работы оптической системы должны быть исправлены. Поэтому нельзя установить общую для всех систем методику исследования; к каждому типу систем нужно подходить особо.

В телескопических системах наблюдательного типа (бинокли, стереотрубы и их разновидности) главное внимание обращается на качество изображения в центре поля всей системы в целом;

край поля является здесь второстепенным, так как наблюдатель всегда приводит интересующий его предмет в центр поля. Такие аберрации, как кривизна поля, дисторсия, хроматическая разность увеличения и даже астигматизм, могут быть допущены, если этим путем можно добиться улучшения качества изображения на оси прибора.

В телескопических системах измерительного типа в поле зрения наблюдателя всегда имеются шкала, штрихи или иной рисунок, рассматриваемый одновременно с изображением наблюдаемого объекта. Для избежания параллакса, т. е. перемещения изображения рисунка относительно изображения далеких предметов, не только необходимо совпадение обоих изображений в пределах гауссовой оптики, но желательно также и отсутствие аберраций для обоих изображений. Таким образом, к требованию хорошего качества изображения для системы в целом добавляется требование хорошего качества изображения отдельных частей, между которыми находится сетка или рисунок. Например, если шкала нанесена на пластинку в общем фокусе объектива и окуляра бинокля, то нужно в отдельности исправлять аберрации объектива и окуляра. При этом часто повышаются требования к резкости изображения объектов, находящихся уже не в центре поля, а довольно далеко от оси. К оптическим системам микроскопа требования приблизительно те же, что и к телескопическим системам наблюдательного типа; главное внимание обращается на центр поля.

Для фотографических объективов, как правило, требуется исправление всех аберраций, так как и края поля должны быть резкими. Некоторые послабления могут быть допущены в тех случаях, когда благодаря им можно добиться лучших результатов в других, более важных, отношениях. Например, в телеобъективах допускают некоторую дисторсию, благодаря чему можно уменьшить расстояние от объектива до фокуса; в портретных объективах допускают несколько большие аберрации, увеличивая светосилу; в широкоугольных объективах можно допускать несколько большие аберрации в центре поля, чем в объективах нормальных типов, но требуется лучшее исправление аберраций в остальных частях поля зрения.

В некоторых системах, работающих в монохроматическом свете (спектрографы), можно не обращать внимания на хроматические аберрации.

В таких оптических системах, как конденсоры в проекционных установках, исправление аберраций играет сравнительно второстепенную роль, так как от таких систем требуется не получение каких-либо изображений, а только собирание лучей на площадку определенной величины — обычно на входной зрачок проекционного объектива.

Рассмотрим подробнее каждую аберрацию в отдельности.

Сферическая аберрация

Эта аберрация, вообще говоря, является наиболее важной среди остальных: она единственная из всех (вместе с хроматической аберрацией положения) не уменьшается по мере приближения изображения к оптической оси и понижает резкость системы не только по краю поля зрения, но и в центре его. Поэтому на исправление сферической аберрации следует во всех случаях обратить самое серьезное внимание. Она определяется на основании расчета хода лучей, идущих из точки предмета на оси системы. Расстояние $\delta s'_p = s'_p - s'_{0,p}$ между точкой пересечения луча с осью и плоскостью изображения представляет меру продольной сферической аберрации. Величина $\delta s'$ зависит от угла u_1 падающего луча с осью; она может быть написана в виде ряда

$$\delta s' = au_1^2 + bu_1^4 + cu_1^6 + \cdots, \qquad \text{(VI.50)}$$

который при малых значениях u_1 довольно хорошо сходится. При больших значениях u_1 сходимость ряда становится плохой и с теоретической точки зрения сомнительной. Первый член разложения может быть вычислен, если известна первая сумма Зейделя S_{I}. Чтобы найти соответствующую формулу, воспользуемся соотношением между продольной сферической аберрацией $\delta s'_p$ на оси и поперечной сферической аберрацией $\delta g'_p$, а именно

$$\delta s'_p = \frac{\delta g'_p}{u'_p},$$

где u'_p — угол, образуемый данным лучом с осью по выходе из системы. Имея какую-нибудь из формул, определяющих сферическую аберрацию третьего порядка, находим $\delta s'_p$. Результат был приведен в гл. II в виде формулы (II.111)

$$\delta s'_p = -\frac{\sum hP}{2n'_p u'^2_p}.$$

В разложении аберрации $\delta s'_p$ в ряд можно вместо переменной u_1 взять любой другой параметр, связанный с u_1 соотношением, линейным в пределах гауссовой области, например h_1 (высота пересечения луча с первой поверхностью); m_1 (ордината точки пересечения луча с плоскостью входного зрачка); u'_p — угол луча с осью после преломления и т. д. Коэффициенты a, b и c при этой подстановке конечно изменяются. В зависимости от типа и апертуры оптической системы изменяется также и то наименьшее число членов разложения, которое позволяет с достаточной точностью представить $\delta s'$ как функцию от одной из величин u_1, $\sin u_1$, $\operatorname{tg} u_1$, h_1, m_1, u'_p, . . . В большинстве телескопических

систем (оптика биноклей, геодезических и астрономических труб, перископов и т. д.) можно ограничиться двумя членами; в светосильных фотообъективах, в объективах микроскопов требуется три или четыре члена. Иногда удачный выбор переменной, относительно которой ведется разложение функции $\delta s'$, позволяет уменьшить число членов разложения. Предлагались еще новые виды разложения функции $\delta s'$, например:

$$\delta s'_p = \frac{a u_1^2}{1 + b u_1^2}. \qquad \text{(VI.51)}$$

По этому пути можно идти очень далеко, так как имеется большой простор для всяких попыток аналогичного характера, но едва ли можно надеяться на получение интересных результатов такими чисто эмпирическими способами. Правильно считать ряды (VI.50) или формулы типа (VI.51) чисто интерполяционными формулами, полезными, например, при вычислении волновых аберраций или при вычерчивании кривых сферической аберрации, хотя в последнем случае графическое чутье может иногда подсказать более правильное решение, чем применение разложения в ряд.

Рис. VI.4

Кома

Для определения комы оптической системы при помощи тригонометрического расчета хода лучей существует два различных способа. Первый способ заключается в том, что вычисляется меридиональная кома, определенная формулой (II.125), т. е.

$$\delta g'_K = K = \frac{l'_{+m_1} + l'_{-m_1}}{2} - l'_0, \qquad \text{(VI.52)}$$

где l'_{+m_1}; l'_{-m_1} и l'_0 — ординаты точек пересечения с гауссовой плоскостью трех лучей, из которых первый пересекает плоскость входного зрачка в точке с ординатой $+m_1$, второй — в точке с ординатой $-m_1$, а третий луч — главный, т. е. проходит через центр входного зрачка. Эти три луча представлены на рис. VI.4 тремя прямыми A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3, из которых A_2B_2 — главный луч; следовательно,

$$\overline{B_2S} = l'_0; \quad \overline{B_1S} = l'_{+m_1}; \quad \overline{B_3S} = l'_{-m_1}.$$

Очевидно, что величина K равна отрезку B_0B_2 и является мерой несимметрии хода лучей A_1B_1 и A_3B_3 по отношению к главному лучу A_2B_2; оба луча в пространстве предметов симметричны

по отношению к главному лучу. Практически этот отрезок равен отрезку $\overline{CD}$ — расстоянию между точкой пересечения двух крайних лучей и главным лучом A_2B_2.

Как было указано в гл. II, величина K при отсутствии аберраций высшего порядка пропорциональна первой степени полевого угла w_1 и второй степени апертурного угла ω_1. В присутствии аберраций пятого порядка величина K приобретает более сложный вид и может быть представлена следующей формулой:

$$K = Aw_1\omega_1^2 + Bw_1\omega_1^4 + Cw_1^3\omega_1^2, \qquad \text{(VI.53)}$$

где A, B, C — некоторые коэффициенты; в общем же случае кома характеризуется комбинациями нечетных степеней w_1 с четными степенями ω_1.

Вычислив величину K по формуле (VI.53) на основании результатов тригонометрического расчета хода трех указанных выше лучей, следует сравнить эту величину с величиной, вычисленной по второй из формул (II.129); эта формула была выведена из теории аберраций третьего порядка и дает зависимость между величиной K и суммой S_{II} при отсутствии аберраций высших порядков. Как и в случае сферической аберрации, расхождения между величинами K, вычисленными по обеим формулам, объясняются отчасти присутствием толщин, отчасти аберрациями высших порядков. В системах с большой апертурой полезно рассчитать ход не трех, а пяти лучей, пересекающих входной зрачок либо в равноотстоящих точках, либо в точках, ординаты которых равны следующим величинам: m_1; $\frac{m_1}{\sqrt{2}}$; 0; $-\frac{m_1}{\sqrt{2}}$; $-m_1$.

Величина K для добавочных лучей при сравнении с величиной K, полученной для крайних лучей, дает возможность оценить члены комы высшего порядка апертурного угла, для чего может служить ряд (VI.53). Впрочем, в телескопических системах кома высших порядков обычно не достигает больших величин, так как и апертурные углы, и полевые углы этих систем невелики.

Для того чтобы судить об изменении комы в зависимости от угла поля, следует рассчитать ход еще трех или пяти лучей для нескольких точек предмета — от двух до четырех; последнее главным образом в случаях систем с большими углами поля; таковы фотографические объективы «универсального» типа и широкоугольные. В системах с малыми углами поля ограничиваются часто одним пучком. Влияние угла поля на кому может быть также вычислено с помощью ряда (VI.53), к которому, если появится необходимость, следует добавить члены более высокого порядка. Расчет хода лучей в меридиональной плоскости не может дать исчерпывающих сведений о коме оптической системы.

Кома сказывается также и для лучей, пересекающих входной зрачок в точках с координатами M_1, отличными от нуля, и для

полноты картины необходимо рассчитать ход нескольких косых лучей, причем выбор и число последних зависит от типа исследуемой системы.

В телескопических системах аберрации высших порядков малы, а так как кома третьего порядка внемеридиональных лучей может быть определена на основании комы меридиональных лучей (коэффициент S_{II} — общий для всех членов комы третьего порядка), то вычисление хода косых лучей не обязательно.

В фотообъективах со средними и большими относительными отверстиями расчет нескольких косых лучей необходим для суждения о величине комы высших порядков сагиттальных пучков.

Второй способ определения комы оптических систем не требует тригонометрического расчета хода лучей наклонных пучков. В гл. II были даны формулы (II.97)—(II.133), связывающие кому для любого достаточно малого угла поля w_1 со сферической аберрацией и отступлением от закона синусов.

Согласно этим формулам

$$K = 3l'_p \left(\frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} - \delta_{\sin\omega_1} \right) \qquad \text{(VI.54)}$$

при конечном расстоянии плоскости предмета;

$$K = 3l'_p \left(\frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} + \frac{\delta f'}{f'} \right) \qquad \text{(VI.54*)}$$

при бесконечно удаленной плоскости предмета.

Здесь l'_p — расстояние изображения точки от оси; $\delta s'_p$ — продольная сферическая аберрация, соответствующая в первом случае апертурному углу ω_1, а во втором — высоте m_1 пересечения луча с входным зрачком; $\delta_{\sin\omega_1}$ — отступление от закона синусов, т. е. в первом случае выражение $\frac{\alpha_1}{\alpha'_p} \frac{\sin\omega'_p}{\sin\omega_1} - 1$, а во втором случае $\delta f' = \frac{m_1}{\sin\omega'_p} - f'$; $(x'_p - s'_p)$ — расстояние между плоскостью изображения и плоскостью выходного зрачка. Величина K имеет то же значение, что и в формуле (VI.52); полевой угол w_1 соответствует расстоянию изображения l'_p.

Формулы (VI.54) и (VI.54*) позволяют найти величину комы без всякого тригонометрического расчета наклонного пучка лишь с помощью координат лучей, послуживших для определения сферической аберрации системы. В этом проявляется громадное прикладное значение закона синусов. К сожалению, зависимость (VI.54) точна только для бесконечно малых, а практически для небольших углов w_1; поэтому истинная картина комы для точек, очень удаленных от оси, не может быть получена на основании отступления от закона синусов и требует тригонометрического

расчета хода лучей. В телескопических системах, где полевые углы сравнительно небольшие, кома может быть с достаточной точностью оценена при помощи формул гл. II, аналогичных формуле (VI.54), но все же необходимость расчета хода лучей для точек на конечном расстоянии от оси остается, так как этот расчет нужен еще и для других целей.

Астигматизм и кривизна изображения

Эти аберрации связаны друг с другом согласно теории аберраций третьего порядка, они пропорциональны первой степени апертурного угла и второй степени полевого угла. Эти аберрации мало заметны в середине поля зрения, но играют большую роль для точек предмета, достаточно далеких от оси системы.

Некоторые сведения о рассматриваемых аберрациях может дать кривая зависимости l'_p от m_1 при заданном значении l_1 или w_1 в случае бесконечно удаленного предмета. Действительно, определяя эти аберрации как те составные части разложения отклонений $\delta g'_p$ и $\delta G'_p$, которые пропорциональны первой степени величин m_1 и M_1, можно получить их меру, вычисляя предел отношения $t = \frac{\Delta l_p}{\Delta m_1}$, когда Δm_1 и m_1 стремятся к нулю [см. формулу (II.242) и рис. II.56]. Таким образом, ctg угла α, образуемого касательной к кривой $m_1 = f(l'_p)$ в точке $m_1 = 0$, может служить мерой комбинированной аберрации «астигматизм и кривизна поля» в меридиональной плоскости. Однако более принято характеризовать эту аберрацию расстоянием Δ_m от плоскости изображения до точки, в которой пересекаются меридиональные лучи, образующие с главным лучом бесконечно малый угол $\pm\Delta w_1$. Эта величина Δ_m связана с величиной t соотношением (II.242):

$$\Delta_m = (s' - x')\, t\, \frac{m_1}{m'}, \qquad \text{(VI.55)}$$

где $\frac{m_1}{m'}$ представляет величину, обратную увеличению в зрачках. Сагиттальное отклонение $\delta G'_p$ из расчета хода меридиональных лучей не может быть получено; поэтому для оценки меридионального и сагиттального отклонений Δ_m и Δ_s пользуются расчетами бесконечно тонких пучков. Имея расчет хода главного луча, соответствующего определенной точке предмета на расстоянии l_1 от оси (или на угловом расстоянии w_1 от нее), можно вычислить положение фокусов бесконечно тонких сагиттальных и меридиональных пучков, соответствующих этому главному лучу. Расчет дает расстояния этих фокусов Δ_s и Δ_m от гауссовой плоскости. Такой расчет делается обычно для двух — четырех точек предмета, в зависимости от величины поля зрения системы. Для телескопических систем двух наклонов бывает достаточно. На основании

полученных результатов вычерчивается кривая зависимости величин Δ_s и Δ_m от l_1 или l'_p; полезно также разложить Δ_s и Δ_m в ряд по четным степеням величин l_1, или w_1, или l'_p, например:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_s &= A_s w_1^2 + B_s w_1^4 + C_s w_1^6 + \cdots \\ \Delta_m &= A_m w_1^2 + B_m w_1^4 + C_m w_1^6 + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.56)}$$

Первые члены разложений, зависящие от w_1^2, могут быть вычислены на основании теории аберраций третьего порядка, как это было сказано в гл. II; в соответственных формулах (см. стр. 72) x'_m и x'_s имеют то же значение, что Δ_m и Δ_s в формулах (VI.56), а коэффициенты C_1 и D_1 должны быть выражены в зависимости от Зейделевых сумм S_{III} и S_{IV}. Сравним выражения поперечных аберраций в формулах (II.15) и (II.47); это дает

$$C_1 l_1^2 m'_p = -\frac{1}{2n'_p}\,\omega'_p w_1^2 (3S_{\text{III}} + J^2 S_{\text{IV}});$$

$$D_1 l_1^2 M'_p = -\frac{1}{2n'_p}\,\Omega'_p w_1^2 (S_{\text{III}} + J^2 S_{\text{IV}}).$$

Подставим вместо ω'_p и Ω'_p их значения из формул

$$\omega'_p = -\frac{m'_p}{x'_p - s'_p} \quad \text{и} \quad \Omega'_p = -\frac{M'_p}{x'_p - s'_p}.$$

Тогда формулы гл. II (стр. 88) дают следующие значения первых членов разложений (VI.56):

$$\left.\begin{aligned}x'_m &= A_m w_1^2 = -\frac{1}{2n'_p}\,w_1^2 (3S_{\text{III}} + J^2 S_{\text{IV}}); \\ x'_s &= A_s w_1^2 = -\frac{1}{2n'_p}\,w_1^2 (S_{\text{III}} + J^2 S_{\text{IV}}).\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.57)}$$

Формулы (VI.57) позволяют проверить, насколько суммы S_{III} и S_{IV} для системы с конечными толщинами близки к суммам бесконечно тонкой системы.

Дисторсия

Дисторсия определяется на основании тригонометрического расчета хода главных лучей; она обычно измеряется величиной $l'_p - l'_{0,\,p}$ — разностью между ординатой точки пересечения главного луча с плоскостью изображения и величиной $l'_{0,\,p} = \beta l_1$, где β — линейное увеличение системы. Если плоскость предмета бесконечно удалена, то

$$l'_{0,\,p} = F' \operatorname{tg} w_1.$$

Иногда дисторсию характеризуют отношением разности $l'_p - l'_{0,\,p}$ к $l'_{0,\,p}$, т. е. величиной V, определяемой формулой

$$V = \frac{l'_p - l'_{0,\,p}}{l'_{0,\,p}}. \qquad \text{(VI.58)}$$

Эта величина может быть представлена в виде ряда, расположенного по четным степеням угла w_1, т. е.

$$V = Aw_1^2 + Bw_1^4 + Cw_1^6 + \cdots \qquad \text{(VI.59)}$$

Коэффициент A совпадает с коэффициентом дисторсии в разложении поперечной аберрации по Зейделю и должен быть сопоставлен с коэффициентом S_V тонкой системы; если влияние толщин достаточно мало, то должно иметь место соотношение, легко получаемое из формулы (II.47):

$$S_V = -2n'_p l'_{0,\,p} A_1. \qquad \text{(VI.60)}$$

Хроматическая аберрация положения

Эта аберрация определяется как разность $s'_F - s'_C$, где s'_F и s'_C — расстояния от вершины последней поверхности до точек пересечения с осью параксиальных лучей, длины волн которых условно характеризуются значками C и F; эти расстояния определяются тригонометрическим расчетом хода двух параксиальных лучей C и F из точки предмета на оси системы.

Рассчитывая ход нескольких пар лучей C и F с конечным значением координаты m_1 для той же точки предмета на оси, одновременно с хроматической аберрацией положения определяют и хроматическую разность сферических аберраций $\left[(s'_F - s'_C)_{m_1} - (s'_F - s'_C)_0\right]$, т. е. изменение хроматической аберрации при переходе от параксиальных лучей к лучам, пересекающим входной зрачок на высоте m_1. Эта аберрация может быть представлена графически кривой зависимости ее от высоты m_1, однако такими графиками обычно не пользуются. Больше сведений о поведении оптической системы в отношении хроматических аберраций можно получить из кривых зависимости величины s' (расстояние плоскости установки от последней поверхности системы) от высоты m_1 для различных длин волн. Такие кривые дают одновременно характеристики хроматической аберрации положения, сферической аберрации в различных длинах волн и хроматическую разность сферических аберраций.

Хроматическая разность увеличений

Эта аберрация (как и кома, с которой она имеет много общего) может быть определена двумя различными способами. По первому способу для непосредственного определения разности увеличений

вычисляют для одной или двух точек предмета (обычно для тех точек, для которых рассчитано положение фокусов меридионального и сагиттального бесконечно тонких пучков) расстояния l' точек пересечения главных лучей, соответствующих двум различным длинам волн. Например, для визуальных систем рассчитывают ход лучей для линий C и F; для фотообъективов добавляют к уже рассчитанному лучу D луч G'. Отношение $\frac{l'_L - l'_K}{l'_M}$, где L, K, M обозначают цвета, соответствующие трем длинам волн, причем M лежит между K и L и служит мерой хроматической разности увеличения. Это отношение может быть написано в виде такого ряда:

$$\frac{l'_L - l'_K}{l'_M} = A + Bw_1^2 + \cdots \qquad \text{(VI.61)}$$

Обычно двух членов бывает достаточно, чтобы данную аберрацию представить с достаточной точностью для всего поля зрения системы. Коэффициенты A и B, конечно, зависят от выбора цветов L и K.

Второй способ определения хроматической разности увеличений не требует расчета хода новых лучей. Для него достаточно иметь расчеты тех двух параксиальных лучей для $l = 0$ (точка на оси), которые послужили для определения первой хроматической аберрации. Из соотношения Лагранжа—Гельмгольца

$$n'_p l'_p \alpha'_p = n_1 l_1 \alpha_1 \qquad \text{(VI.62)}$$

получаем

$$\frac{l'_p}{l_1} = \frac{n_1 \alpha_1}{n'_p \alpha'_p}. \qquad \text{(VI.62*)}$$

Дифференцируем уравнение (VI.62), считая l_1 и α_1 постоянными, и получаем

$$\frac{dl'_p}{l'_p} = \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn'_p}{n'_p} - \frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p}. \qquad \text{(VI.63)}$$

Величины l'_p в формулах (VI.62) и (VI.63) отсчитываются в плоскости изображения для данного цвета.

Как уже было выяснено в гл. II, для суждения о влиянии хроматической разности увеличений имеют значение не разности l'_p для различных лучей в различных плоскостях, а разность ординат точек пересечения двух главных лучей с различной длиной волны с какой-нибудь определенной плоскостью установки. Назовем эти ординаты буквами L'_L и L'_K. Пользуясь формулой (II.194)

с несколько измененными индексами, имеем

$$L'_L - L'_K = l'_L - l'_K + \delta s'_p v'_p, \qquad \text{(VI.64)}$$

где v_p — угол с осью главного луча с длиной волны M.

Обозначая разность $l'_L - l'_K$ символом dl'_p, получаем

$$L'_L - L'_K = dl'_p + \delta s'_p v'_p = l'_p \frac{dl'_p}{l'_p} + \delta s'_p v'_p.$$

Заменяя $\frac{dl'_p}{l'_p}$ его выражением (VI.63) и помня, что $v'_p = \frac{l'_p}{x'_p - s'_p}$, получаем

$$\frac{L'_L - L'_K}{l'_p} = \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn'_p}{n'_p} + \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} - \frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p}. \qquad \text{(VI.65)}$$

Формула (VI.65) решает поставленную задачу. В ней $\delta s'_p$ — продольная хроматическая аберрация для цветов L и K, равная $s'_L - s'_K$; $d\alpha'_p$ — разность углов с осью $\alpha'_{pL} - \alpha'_{pK}$ параксиальных лучей, рассчитанных для определения хроматической аберрации положения. В наиболее часто встречающемся случае, когда крайние среды одинаковы, формула (VI.65) принимает вид

$$\frac{L'_L - L'_K}{l'_p} = \frac{\delta s'_p}{x'_p - s'_p} - \frac{d\alpha'_p}{\alpha'_p} = \frac{\delta f'}{f'} - \frac{\delta s'}{s' - x'}. \qquad \text{(VI.66)}$$

Правая часть уравнения (VI.66) должна дать то же самое численное значение, что и коэффициент A формулы (VI.61). Формула (VI.66) не встречается в курсах геометрической оптики, мало известна, хотя имеет очень большое прикладное значение и позволяет обойтись без расчета хода наклонных цветных лучей, если только хроматическая разность увеличений достаточно постоянна и мало зависит от угла v.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АБЕРРАЦИЙ НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫХ КАТЕГОРИЙ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Получив на основании тригонометрического расчета хода лучей численные значения аберраций системы после перехода к конечным толщинам линз, вычислитель должен оценить, насколько полученные значения допустимы и какие изменения системы должны быть сделаны для получения удовлетворительных результатов. Решение этого вопроса представляет настолько серьезные затруднения, что до сих пор нельзя встретить в литературе ни одной статьи, где этот вопрос рассматривался бы с более или менее общей точки зрения; существует несколько в достаточной степени произвольных критериев качества изображения, причем большинство из них применимо только в частных случаях. Откладывая

более подробный разбор этого вопроса до гл. X, в которой рассматриваются вопросы о дифракционной теории изображения и об оценке качества изображения, даваемого оптической системой, ограничимся здесь указаниями, вытекающими из результатов испытаний известных систем как иностранного, так и отечественного производства.

В идеальной оптической системе все аберрации должны были бы быть уничтожены, но полного исправления аберраций, даже в сколь угодно сложных системах, получить невозможно, как это может быть строго доказано на основании геометрической оптики. Как правило, усложняя систему, увеличивая число линз, применяя асферические поверхности и необычные сорта стекол или минералы, можно улучшить качество системы, но далеко в этом направлении идти нельзя, так как стоимость изготовления ставит естественный предел усложнению.

Для каждой категории оптических приборов установился в порядке постепенного улучшения некоторый компромисс между качеством изображения и сложностью системы оптики. Оптические системы для визуального применения могут быть разделены на две группы — телескопические и микроскопические, условия применения которых весьма различны. У приборов первой группы качество оптики в идеальном случае должно быть таким, чтобы наблюдатель, вооруженный данным прибором с увеличением γ, мог различить все те подробности, которые он видел бы невооруженным глазом, находясь от рассматриваемого объекта на расстоянии в γ раз меньшем, чем в действительности. На деле приходится смягчать требования, сводя их к тому, чтобы качество изображения в центре поля было практически неотличимо от идеального в отношении резкости и разрешающей силы, и допускать на краях поля зрения значительное ухудшение.

Приведем краткие сведения о величинах аберраций, выраженных в угловой мере, которыми обычно обладают телескопические системы (призменные бинокли, геодезические трубы и т. д.). Эти аберрации достигают следующих значений: 1—2′ сферической аберрации для всего зрачка; все цветные лучи в пределах спектра от линии C до линии F укладываются в конус с углом у вершины не более 2—3′. При этом качество изображения в центре, при условии идеального изготовления системы из совершенно однородного стекла, настолько хорошее, что наиболее опытный глаз не замечает никакого дефекта в изображении; разрешающая сила прибора остается той же, как и в случае полного отсутствия аберраций.

По мере усложнения системы — с удлинением фокусного расстояния объективов, с прибавлением оборачивающих систем — аберрации в центре поля растут. В морских перископах большой длины и малого диаметра при сравнительно больших диаметрах (4 *мм*) выходного зрачка, вследствие необычайно тяжелых усло-

вий работы отдельных частей перископа, аберрации на оси доходят до 10—12′ для лучей D и до 15—20′ для лучей C и F; вторичный спектр на оси достигает величины нескольких диоптрий. Качество изображения на оси плохое, заметна сильная окраска, резкость заметно понижена. Для средних частей поля зрения, т. е. одинаково далеких от центра и от края, аберрации заметно больше, чем в центре. В меридиональном сечении лучи одного и того же пучка, выходящего через выходной зрачок призменного бинокля, обычно отклоняются от параллельности в пределах 5—10′, причем кома не превышает 2—3′; остальная часть общей аберрации в угловой мере зависит от астигматизма пучка и кривизны поверхности изображения. Вместо угловой меры аберраций лучей одного и того же пучка, выходящих из телескопической системы, иногда определяют расходимость лучей в диоптриях. Так, например, определив положение обоих фокусов астигматического пучка расстояниями их от плоскости выходного зрачка, вычисляют обратные величины этих расстояний и умножают найденные значения на 1000, если расстояние определено в миллиметрах; полученные таким образом числа характеризуют расходимость пучка. Разность диоптрийной меры расходимостей меридионального и сагиттального пучков дает меру астигматизма пучка.

На краю поля аберрации призменных биноклей велики. Непараллельность лучей в меридиональном сечении приближается к 30—40′, несмотря на значительное виньетирование; выраженные в диоптрийной мере кривизна и астигматизм доходят до 3—4 *дптр* для биноклей с нормальным полем зрения (окуляры Кельнера) и до 5—6 *дптр* для биноклей с увеличенным полем зрения или с удаленным зрачком выхода. Лишь в редких случаях удается получить меньше.

Хроматическая разность увеличений обычно не превышает 0,5%, и хотя этот дефект хорошо обнаруживается на краю поля, его исправление стоило бы больших усложнений. Также очень заметна дисторсия, которая на краю поля в нормальных биноклях доходит до 6—7%, а в широкоугольных — до 5—10%. Такие значения надо считать предельными, так как они производят неприятное впечатление, хотя в сущности мало мешают наблюдению.

Такое плохое качество изображения на краю поля отражается очень сильно на разрешающей силе оптической системы, которая на краю поля в 10—15 раз меньше, чем в центре. В более сложных системах, например в перископах, все перечисленные аберрации еще больше, что ведет к значительному ухудшению изображений; в данном случае приходится жертвовать качеством и резкостью изображений, для того чтобы иметь возможность удовлетворить более важным требованиям конструкции прибора.

Важно заметить, что одни величины аберраций, выраженные в минутах или диоптриях, еще не могут дать достаточного основания для суждения о качестве системы.

Кроме всех перечисленных аберраций, существует еще одна не входящая в число ранее рассмотренных аберраций Зейделя, на которую необходимо обратить внимание, так как она может все качества оптической системы свести на нет. Это так называемая *аберрация в зрачках* или, точнее, *сферическая аберрация выходного зрачка*. Лучи, вошедшие в систему через входной зрачок, выходят через его изображение — выходной зрачок. Но главные лучи, т. е. лучи, проходящие через центр входного зрачка, обладают обычно большой сферической аберрацией, так как последняя полностью не исправляется. Вследствие этой аберрации поло-

Рис. VI.5

жение выходного зрачка не является постоянным, а меняется в зависимости от угла поля зрения w_1. Обычно пучки, идущие под большими наклонами w_1, пересекают ось гораздо ближе к окуляру, чем пучки, соответствующие центру поля (рис. VI.5). Если диаметр зрачка глаза приблизительно равен диаметру выходного зрачка, что обычно и бывает, то при наличии большой аберрации в зрачках, как видно на рис. VI.5, нельзя найти такого положения для глазного зрачка, при котором в глаз могли бы попасть *все* лучи *всех* пучков. Например, в положении O в глаз попадают все лучи из края поля зрения (пучок P_1), но лучи из середины поля (пучок P_2) в глаз вовсе не попадут, и только осевой пучок (центр поля зрения) опять целиком заполняет глаз. В результате наблюдатель увидит в поле зрения темное кольцо, соответствующее какой-то средней зоне поля. В положении O_1 в глаз попадут лучи из пучков P_2 и P_3, но пучок P_1 и близкие к нему либо вовсе не попадут, либо попадут только частично. Наблюдатель не увидит края поля. Какое бы место глаз ни занимал, всегда какая-либо часть поля окажется либо вовсе темной, либо отчасти затемненной.

Во избежание этого недостатка необходимо исправить аберрацию в зрачках до такой степени, чтобы ни один из пучков не оказался заметно виньетированным, за исключением краевого пучка,

где виньетирование всегда имеет место и где его не удается избежать в действительности.

В микроскопах, как правило, аберрации после выхода лучей из окуляра значительно больше, чем в телескопических системах. В центре поля зрения нередко можно встретить сферическую и хроматическую аберрации порядка 10′ и более; но именно в случае микроскопов обнаруживается, что для оценки качества системы недостаточно вычислить поперечные аберрации. Переход к волновым аберрациям (см. гл. X) позволяет получить более точный способ оценки.

Аберрации фотографических объективов должны рассматриваться также с точки зрения дифракционной теории изображения, и вопросы о разрешающей силе фотообъективов решаются исключительно на основании этой теории. Однако во многих случаях картина геометрических (продольных и поперечных) аберраций дает вполне достаточный для оценки качества системы материал. Обычно считают, что если изображение точки, даваемое фотографическим объективом, не превышает по своим размерам 0,03—0,05 *мм* для нормальных снимков, не подлежащих дальнейшему увеличению, или 0,01—0,03 *мм* для снимков короткофокусными объективами, подлежащих увеличению, то коррекция объектива доведена до достаточной степени совершенства. Впрочем, весьма малочисленны объективы, удовлетворяющие для всего поля этим условиям. Чаще всего качество изображения быстро убывает с удалением рассматриваемой точки от оси симметрии фотографического объектива.

5. НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Как указывалось, результаты тригонометрического контроля хода лучей через оптическую систему с конечными толщинами обычно не удовлетворяют всем поставленным условиям: величины аберраций получаются не те, которые задавались. Это вызывается приближенностью методов решения аберрационных уравнений, влиянием толщин и пренебрежением аберрациями высших порядков. В каждом отдельном случае можно определить долю каждой из этих причин в полученном расхождении; однако ради экономии времени и труда целесообразно исправить все остаточные аберрации независимо от причин, вызвавших их появление. Условимся понимать под исправлением аберрации не полное их уничтожение, чего достигнуть нельзя, а уменьшение до некоторых заданных величин, вполне определенных для каждого типа системы; всякие стремления к дальнейшему уменьшению приводят к бесполезной потере времени. Такие предельные значения для тех или иных аберраций были отчасти указаны в предыдущем параграфе; более подробные сведения может дать только продолжительный опыт. Исправление аберраций достигается небольшими изменениями конструктивных элементов системы. Можно указать на

два основных метода изменения; кроме того, естественно применять и комбинированные приемы.

Наиболее рациональным нужно считать метод изменения основных параметров без изменения внешних элементов системы; этот метод является естественным продолжением изложенного в гл. III метода расчета. Для определения численных значений необходимых изменений делается предположение, что при небольших изменениях основных параметров (как, впрочем, и всяких других) влияние аберраций высших порядков и толщин остается практически неизменным и что изменяются главным образом аберрации третьего порядка. Сначала определяем разность $\Delta(\delta g')$ между желаемым значением аберрации и тем значением, которое получено из тригонометрического расчета; далее применяем одну из формул (VI.1), (VI.2) или (VI.3), имеющих общий вид

$$\delta g'_{\kappa} = f(m_1;\ M_1;\ w_1)\, S_{\kappa}, \tag{VI.67}$$

где κ условно обозначает название аберрации; S_{κ} — сумма Зейделя бесконечно тонкой системы, соответствующая данной аберрации; $f(m_1,\ M_1,\ w_1)$ — известная функция от координат луча. Дифференцируя формулу (VI.67) и заменяя дифференциалы конечными приращениями, на основании сделанного предположения получаем

$$\Delta\delta g'_{\kappa} = f(m_1;\ M_1;\ w_1)\, \Delta S_{\kappa}. \tag{VI.68}$$

Поступая таким образом для всех аберраций, принятых во внимание в первом приближении, находим все изменения сумм S_{I}, S_{II}, . . ., S_{V} и хроматических сумм S_{I}^{xp} и S_{II}^{xp}.

По новым значениям сумм с помощью формул (II.47) можно вычислить новые значения основных параметров $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{W}_i$, считая π_i постоянным. Переход от основных параметров к конструктивным элементам производится на основании тех соотношений, которые связывают радиусы и показатели преломления стекол с основными параметрами и рассмотрены в гл. III для большинства применяемых комбинаций: простых, двухлинзовых склеенных и несклеенных и трехлинзовых склеенных систем. Например, для двухлинзового склеенного объектива было доказано существование следующих приближенных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_{\min} + 2{,}35\,(Q - Q_0)^2; \\ \mathbf{W} &= 0{,}15 - 1{,}67\,(Q - Q_0), \end{aligned}\right\} \tag{VI.69}$$

позволяющих по новым значениям $\mathbf{P}$ и $\mathbf{W}$ получить новые значения $\mathbf{P}_{\min}$ и Q_0. Если изменения, полученные для $\mathbf{P}_{\min}$, значительны, может оказаться необходимым изменить и сорта стекол.

Использование в качестве переменных, подлежащих изменению, основных параметров, наряду с теоретическими преимуществами, обладает некоторыми недостатками, главным из которых является необходимость заново рассчитывать конструктивные элементы всей системы и производить заново тригонометрический

расчет по совершенно новым данным. Поэтому наравне с этим методом рационально применять для нахождения элементов окончательной системы другой метод, аналогичный по своему характеру упомянутому в начале главы методу проб и служащий естественно его продолжением. Из параметров, определяющих конструктивные элементы системы, подбирается некоторое число таких, которые, с одной стороны, оказывают заметное влияние на аберрации, подлежащие изменению, и, с другой стороны, требуют минимальной дополнительной работы по расчету хода лучей через измененную оптическую систему. Нельзя дать общих указаний относительно выбора этих параметров, так как в каждом отдельном случае требуется особый подход. Лишь большой опыт позволяет с достаточной уверенностью остановиться на тех или иных переменных, причем этот выбор должен по мере возможности опираться на теорию основных параметров.

В качестве практически удобных переменных можно назвать радиусы кривизны (или, лучше, обратные им величины, т. е. кривизны поверхностей), воздушные расстояния, сорта стекол; в случае, когда толщины линз заметно влияют на аберрации, следует и их ввести в число переменных.

Можно, наконец, комбинировать оба метода нахождения окончательной системы. Переменные, подлежащие изменению, делят на две группы. К первой группе относят параметры, связь которых с аберрациями третьего порядка сохраняет простой вид также и для оптических систем с конечными толщинами компонентов, например оптические силы φ, действующие преимущественно на хроматические аберрации. Ко второй группе относят параметры более или менее случайного характера, о влиянии которых на аберрации известно на основании опыта или тригонометрических расчетов хода лучей. Какой бы из трех указанных методов ни был применен, не всегда удается после первого же изменения параметров получить достаточно хорошо исправленные аберрации. Давая переменным новый ряд значений, рассчитывают новые конструктивные элементы оптической системы и вычисляют ее аберрации; сравнивая их с аберрациями первых двух систем, путем интерполяции получают окончательные значения выбранной системы переменных. Иногда приходится рассчитывать довольно большое число промежуточных систем; в этой стадии работы особенно важную роль играют опыт, умение выделять влияние отдельных параметров и комбинировать наилучшим образом их изменения.

Система, давшая удовлетворительные значения аберраций, исследуется весьма подробно в отношении всех ее аберраций; составляется сводка аберраций, и чертятся графики последних согласно общепринятым правилам.

Окончательная оценка может быть произведена только на основании дифракционной теории изображения.

ГЛАВА VII

МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. ВВЕДЕНИЕ

Использование электронных быстродействующих машин для расчета оптических систем обусловило развитие новых методов расчета, учитывающих специфику этих машин. Помимо высокой скорости работы электронные вычислительные машины обладают рядом особенностей, благодаря которым оказывается возможной автоматизация сложнейших научных и инженерных расчетов, в том числе расчетов оптических систем. Важнейшими из этих особенностей являются следующие:

1. Управление машиной в процессе выполнения расчетов осуществляется автоматически с помощью программы. Программа представляет собой последовательность команд, определяющих действия машины в течение некоторого времени.

2. Направление вычислительного процесса можно изменять автоматически в зависимости от получаемых промежуточных результатов.

3. В устройстве, называемом памятью машины, может храниться большой объем чисел, представляющих собой исходные данные, программу и промежуточные результаты вычислений.

При выполнении расчетов хода лучей на современных электронных вычислительных машинах, вообще говоря, могут быть использованы обычные тригонометрические формулы. Однако, как правило, в этом случае на расчет затрачивается больше времени, чем при использовании нескольких преобразованных формул, в которых переход от углов к тригонометрическим функциям и обратно исключен путем введения радикалов. Это объясняется тем, что на нахождение синуса и, главным образом, арксинуса машины тратят больше времени, чем на извлечение квадратного корня. В остальном расчет хода лучей, выполняемый на машине, принципиально не отличается от обычного тригонометрического расчета, выполняемого вручную. Но, несмотря на отсутствие принципиальных трудностей, составление удобной в эксплуатации программы для массового расчета хода лучей является трудоемким и кропотливым делом. Однако затраты на составление программы окупаются чрезвычайно быстро, так как одна и та же программа используется годами и по ней выполняются тысячи расчетов. Выполнение расчетов хода лучей с помощью машин позволяет

ускорить вычисления в сотни и тысячи раз и обеспечивает получение большой экономии. В качестве примера можно указать, что даже обладающая относительно малой скоростью машина «Урал-2» выполняет расчет хода луча через одну поверхность в среднем за одну пятнадцатую долю секунды, в то время как высококвалифицированный вычислитель затрачивает на это около трех минут. Стоимость расчета луча через одну поверхность на этой машине не превышает 0,15 коп., а при ручном выполнении расчетов она составляет около 5 коп.

Передача машинам функций тригонометристов несколько ускоряет процесс разработки оптических систем, но в общем дает незначительный выигрыш во времени. Существенное ускорение может быть достигнуто лишь в случае передачи машине хотя бы части функций конструктора оптической системы, а именно функций по определению численных значений конструктивных параметров системы, обладающей заданными свойствами.

Разработка любой оптической системы в общем случае состоит по крайней мере из двух этапов, первый из которых заключается в определении принципиальной конструкции оптической системы, т. е. в выборе количества линз (зеркал), их формы, взаимного расположения. Второй этап заключается в определении численных значений конструктивных параметров, при которых выбранная на первом этапе система обладает заданными свойствами. До настоящего времени не было сделано серьезных попыток автоматизировать процесс выбора конструкции оптической системы. Этот процесс плохо поддается формализации и пока еще не может быть представлен в виде алгоритма, т. е. в виде системы формальных правил, четко и однозначно определяющих выполнение заданной работы.

Нахождение численных значений конструктивных параметров для выбранной конструкции оптической системы как при неавтоматическом, так и при автоматическом выполнении работы может быть осуществлено двумя принципиально различными путями. Во-первых, могут использоваться методы универсального характера, основанные на различных способах постепенных приближений и применимые к системам любого типа и любой степени сложности. Такие методы, хорошо известные и при неавтоматическом выполнении работы, носят название методов проб. При использовании таких методов необходимо иметь некоторые числовые значения конструктивных параметров оптической системы, принимаемой за исходную. Эти значения могут быть выбраны более или менее произвольно либо определены на основании предварительных расчетов, например расчетов в области аберраций третьего порядка. Во-вторых, могут использоваться методы, основанные на решении систем уравнений, связывающих конструктивные параметры системы с аберрациями. Такого рода уравнения удается составить, к сожалению, только для области третьих порядков

и далеко не для всех типов оптических систем. Поэтому такие методы применимы только для сравнительно небольшого круга задач. Однако по сравнению с методами, основанными на постепенных приближениях, они обладают явным преимуществом, поскольку дают все возможные решения, что практически исключено в первом случае. На практике чаще всего используется сочетание методов первой и второй групп. Среди автоматических методов расчета методы первой группы занимают ведущее место, однако для некоторых часто встречающихся типов оптических систем разработаны программы, основанные на решении уравнений, связывающих конструктивные параметры системы с коэффициентами аберраций третьего порядка.

В дальнейшем под автоматическим расчетом оптической системы будем понимать определение машиной без непосредственного участия человека значений конструктивных параметров, при которых система обладает заданными свойствами. Степень автоматизации определяется той информацией, которая задается машине перед началом расчета. В идеальном случае машине должно задаваться только техническое задание. В настоящее время уровень разработки методов автоматического расчета весьма далек от идеального случая. Поэтому в современном понимании достаточно хорошим методом автоматического расчета можно считать такой метод, который обеспечивает получение хотя бы одного решения в тех случаях, когда решения существуют, или показывает, что выбранный тип системы поставленную задачу не решает. Очевидно, что методы, основанные на решении систем уравнений, связывающих конструктивные параметры системы с коэффициентами аберраций, обеспечивают более высокую степень автоматизации, чем итерационные методы, поскольку при использовании последних помимо типа оптической системы необходимо иметь некоторые исходные значения конструктивных параметров.

В программах, которые предназначены для расчета определенных типов оптических систем и которые могут быть названы специализированными, используются те же формулы и методы, которые применяются при неавтоматическом выполнении работы.

В программах универсального характера, предназначенных для расчета оптических систем любых типов, используются методы, которые при неавтоматическом выполнении работы не применяются. Это объясняется тем, что действия конструктора, рассчитывающего методом проб сложную оптическую систему, зачастую основываются на личном опыте и интуиции и поэтому не поддаются формализации. Методы, используемые при автоматическом выполнении аналогичной работы, требуют значительно большего объема вычислений. Выигрыш от их применения достигается только благодаря высокой скорости работы электронных машин.

2. ПРОГРАММА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

При разработке зрительных труб, а также систем переменного увеличения (фотографических объективов, оборачивающих систем) широко используются элементы, состоящие из двух компонентов малой толщины, разделенных малым воздушным промежутком. В тех случаях, когда эти элементы имеют сравнительно небольшие относительные диаметры (до 1 : 3), для их расчета с успехом может быть применена теория аберраций третьего порядка систем с бесконечно тонкими компонентами. Рассмотрим в качестве примера специализированную программу для автома-

Рис. VII.1

тического расчета четырех типов двухкомпонентных систем, представленных на рис. VII. 1.

Будем полагать, что комбинация стекол задана. Углы первого параксиального луча с осью в пространстве предметов и пространстве изображений и высота луча на первой поверхности также заданы. Тогда для системы *I* (рис. VII.1) будем располагать тремя свободными параметрами α_2, α_3 и α_4 и, следовательно, можем требовать выполнения трех условий, в качестве которых целесообразно принять основные параметры бесконечно тонких систем *P*, *W* и *C*. Воспользуемся зависимостями, связывающими значения основных параметров с углами первого параксиального луча с осью:

$$P = \sum_{i=1}^{i=4} \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\frac{1}{n_{i+1}} - \frac{1}{n_i}} \right)^2 \left(\frac{\alpha_{i+1}}{n_{i+1}} - \frac{\alpha_i}{n_i} \right); \qquad \text{(VII.1)}$$

$$W = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\frac{1}{n_{i+1}} - \frac{1}{n_i}} \left(\frac{\alpha_{i+1}}{n_{i+1}} - \frac{\alpha_i}{n_i} \right); \qquad \text{(VII.2)}$$

$$C = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\frac{1}{n_{i+1}} - \frac{1}{n_i}} \left(\frac{\delta n_{i+1}}{n_{i+1}} - \frac{\delta n_i}{n_i} \right). \qquad \text{(VII.3)}$$

Выражения (VII.1), (VII.2) и (VII.3) представляют собой систему уравнений, которую необходимо решить относительно неизвестных α_2, α_3, α_4. Остальные величины, входящие в эти уравнения, заданы. Путем элементарных преобразований получаем следующие зависимости:

$$\alpha_3 = \frac{C + \alpha_1 \dfrac{\delta n_2}{1 - n_2} - \alpha_5 \dfrac{\delta n_4}{1 - n_4}}{\dfrac{\delta n_2}{1 - n_2} - \dfrac{\delta n_4}{1 - n_4}}; \tag{VII.4}$$

$$A\alpha_2^2 + B\alpha_2 + D = 0, \tag{VII.5}$$

где

$$A = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(2 + n_2) n_2}{(1 - n_2)^2} + d^2 \frac{(\alpha_5 - \alpha_3)(2 + n_4) n_4}{(1 - n_4)^2}; \tag{VII.6}$$

$$B = 2dj \frac{(\alpha_5 - \alpha_3)(2 + n_4) n_4}{(1 - n_4)^2} + \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)(1 + 2n_2) n_2}{(1 - n_2)^2} + \\ + d \frac{(\alpha_3^2 - \alpha_5^2)(1 + 2n_4) n_4}{(1 - n_4)^2}; \tag{VII.7}$$

$$D = j^2 \frac{(\alpha_5 - \alpha_3)(2 + n_4) n_4}{(1 - n_4)^2} + j \frac{(\alpha_3^2 - \alpha_5^2)(1 + 2n_4) n_4}{(1 - n_4)^2} + \\ + \frac{(\alpha_3^3 - \alpha_1^3) n_2^2}{(1 - n_2)^2} + \frac{(\alpha_5^3 - \alpha_3^3) n_4^2}{(1 - n_4)^2} - P; \tag{VII.8}$$

$$d = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(1 + n_2)(1 - n_4)}{(\alpha_5 - \alpha_3)(1 - n_2)(1 + n_4)}; \tag{VII.9}$$

$$j = \frac{W - \dfrac{(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) n_2}{1 - n_2} - \dfrac{(\alpha_3^2 - \alpha_5^2) n_4}{1 - n_4}}{\dfrac{(\alpha_5 - \alpha_3)(1 + n_4)}{1 - n_4}}. \tag{VII.10}$$

Угол α_4 находим из соотношения

$$\alpha_4 = \alpha_2 d + j. \tag{VII.11}$$

При расчете систем типа *II* и *III* количество свободных параметров возрастает до четырех. Поэтому один из углов первого параксиального луча с осью внутри системы должен быть задан конструктором-оптиком. Наиболее разумно задавать угол между компонентами, т. е. α_3 для системы *II* и α_4 для системы *III*. Опыт показывает, что в большинстве случаев решения с наименьшими аберрациями высших порядков получаются тогда, когда общая оптическая сила системы разделяется примерно поровну между компонентами.

Произведя преобразования формул (VII.1), (VII.2), (VII.3) и приняв во внимание условие равенства радиусов кривизны склеиваемых поверхностей, задачу удается свести, как и в первом случае, к решению одного квадратного и двух линейных уравнений.

При расчете систем типа *IV* количество свободных параметров составляет пять. В этом случае помимо угла между компонентами следует задать еще одну величину. В качестве такой величины в программе принято распределение параметра C между компонентами, т. е. при расчете системы типа *IV* конструктор задает значения величины C для каждого компонента, принимая во внимание, что $C = C_1 + C_2$, где C_1 и C_2 — хроматические параметры первого и второго компонента. Произведя преобразования формул (VII.1), (VII.2) и (VII.3), а также приняв во внимание условия равенства радиусов склеиваемых поверхностей, и в этом случае задачу удается свести к решению одного квадратного и трех линейных уравнений. Приводить коэффициенты этих уравнений ввиду их громоздкости не имеет смысла.

В каждом из четырех случаев необходимо решить одно квадратное уравнение. Если при этом подкоренное выражение оказывается отрицательным, то решение отсутствует и машина печатает особый признак. Если подкоренное выражение положительное, то машина выдает оба решения.

Программой предусмотрен переход к конечным толщинам линз и конечным величинам воздушного промежутка. Этот переход осуществляется следующим образом. Зададимся толщинами отрицательных линз d, толщинами по краю положительных линз $d_{кр}$, а также полными диаметрами линз D. Кроме того, зададим минимальное значение воздушного промежутка между линзами $d_{\min}$, т. е. наименьшее расстояние между поверхностями, разделенными воздушным промежутком, которое измерено в направлении, параллельном оптической оси. Все перечисленные величины обозначены на рис. VII.1. Радиусы кривизны оптических поверхностей вычисляются сначала в первом приближении при толщинах линз и величине воздушного промежутка, равных нулю. Затем для каждой из поверхностей вычисляется стрелка и определяется условно сила линзы.

Если толщина по краю у какой-либо линзы оказывается меньше толщины по центру, то линза считается положительной и ее толщина по центру определяется по формуле

$$d = d_{кр} + a_1 - a_2, \qquad \text{(VII.12)}$$

где a_1 и a_2 — стрелки на первой и второй поверхностях линзы соответственно. Формула (VII.12) справедлива в том случае, если знак стрелки принимается совпадающим со знаком радиуса кривизны поверхности.

Если $a_1 - a_2 < 0$, т. е. толщина по краю оказывается больше толщины по центру, то линза считается отрицательной и толщина

по центру принимается равной заданной величине. Аналогично находится величина воздушного промежутка между вершинами поверхностей.

Когда толщина линз и величина воздушного промежутка найдены, вычисляются значения радиусов кривизны поверхностей во втором приближении по известным формулам

$$r_i = h_i \frac{n_{i+1} - n_i}{\alpha_{i+1} n_{i+1} - \alpha_i n_i}, \qquad \text{(VII.13)}$$

где

$$h_i = h_{i-1} - \alpha_i d_{i-1}. \qquad \text{(VII.14)}$$

Новые значения радиусов кривизны принимаются за окончательные, хотя, строго говоря, толщины по краю для положительных линз при этом будут несколько отличаться от заданных за счет разности между точными значениями стрелок и значениями стрелок, вычисленными для радиусов в первом приближении. Опыт показывает, что эти разности, как правило, незначительны. Учитывая эту погрешность, следует задавать несколько завышенные значения толщин по краю.

На этом заканчивается первый этап расчета. Естественно, что за счет наличия конечных толщин значения коэффициентов аберраций третьего порядка в полученной системе будут несколько отличаться от таковых, найденных с помощью формул, связывающих значения основных параметров бесконечно тонких систем с коэффициентами третьего порядка. Такое различие в большинстве случаев не является существенным, поскольку сами коэффициенты третьего порядка позволяют вычислять значения аберраций лишь приближенно. Больший интерес для конструктора представляет получение заданных значений аберраций для точки на оси. Для этого в программе предусмотрена возможность выполнения второго этапа расчета, заключающегося в автоматическом получении заданных значений трех аберраций для осевой точки предмета. В качестве таких аберраций принимаются: $\Delta s'$ — продольная сферическая аберрация для некоторого заданного луча; η' — отступление от условия изопланатизма для того же луча; $s'_{\lambda_1} - s'_{\lambda_2}$ — продольная хроматическая аберрация для любого луча.

На втором этапе выполняются расчет хода лучей и сравнение полученных аберраций с заданными. Если абсолютные значения разностей между полученными и заданными аберрациями больше допусков, которые также задаются конструктором-оптиком, то вычисляются поправки для основных параметров P, W, C. Для расчета поправок необходимо задать коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4,

связывающие изменения аберраций с изменениями основных параметров:

$$\delta(\Delta s') = k_1 \Delta P; \tag{VII.15}$$

$$\delta\eta = k_2 \Delta P + k_3 \Delta W; \tag{VII.16}$$

$$\delta\left(s'_{\lambda_1} - s'_{\lambda_2}\right) = k_4 \Delta C. \tag{VII.17}$$

Расчет поправок для величин P, W и C выполняется по формулам

$$\Delta P = \frac{\delta(\Delta s')}{k_1}; \tag{VII.18}$$

$$\Delta W = \frac{\delta\eta}{k_3} - \frac{\Delta P}{k_3} k_2; \tag{VII.19}$$

$$\Delta C = \frac{\delta\left(s'_{\lambda_1} - s'_{\lambda_2}\right)}{k_4}. \tag{VII.20}$$

После этого повторяется первый этап расчета, причем заданные значения основных параметров равны $P + \Delta P$, $W + \Delta W$, $C + \Delta C$. Расчет в изложенной последовательности продолжается до тех пор, пока значения всех трех аберраций не достигнут заданных интервалов значений.

Формулы для расчета двухкомпонентных систем и программа для автоматического расчета разработаны М. Д. Серегиной под руководством Д. Ю. Гальперна.

Рассмотрим пример расчета объектива, состоящего из двусклеенного компонента и простой линзы. Фокусное расстояние объектива 100 *мм*, относительное отверстие 1 : 2. Предмет расположен на бесконечности.

Задаемся комбинацией стекол. Пусть склеенный компонент будет выполнен из стекол К8 и ТФ1, простая линза — из стекла К8. Полагаем $\alpha_1 = 0$; $\alpha_4 = 0{,}5$; $\alpha_6 = 1$. Входной зрачок совпадает с первой поверхностью объектива. Диаметры линз полагаем равными 50 *мм*. Толщины положительных линз по краю и отрицательной линзы по центру принимаем равными 5 *мм*, воздушный промежуток — 0,1 *мм*.

Продольная сферическая аберрация по краю отверстия должна быть равна $\Delta s' = 0 \pm 0{,}01$ *мм*; отступление от условия изопланатизма для края отверстия должно составлять $\eta = 0 \pm 0{,}05\%$; продольная хроматическая аберрация для лучей с $m = 25\sqrt{\frac{1}{2}}$ должна равняться $s'_F - s'_C = 0 \pm 0{,}005$ *мм*. Принимаем $P = W = C = 0$.

Для автоматической подгонки заданных величин аберраций необходимо рассчитать коэффициенты k_1, k_2, k_3 и k_4, связывающие изменения основных параметров с изменениями аберраций

третьего порядка. Когда предмет расположен на бесконечности, имеем

$$\Delta s' = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{f'}P; \qquad \text{(VII.21)}$$

$$(s'_F - s'_C)_0 = f'C. \qquad \text{(VII.22)}$$

Если при этом зрачок совпадает с бесконечно тонким компонентом, то

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{m^2}{f'^2}W. \qquad \text{(VII.23)}$$

Подставляя в (VII.21), (VII.22) и (VII.23) $f' = 100$, $m = 25$, получаем $\Delta s' = -3{,}13P$; $(s'_F - s'_C)_0 = 100\ C$; $\eta = 0{,}0313W$; следовательно, $k_1 = -3{,}13$; $k_2 = 0$; $k_3 = 0{,}0313$; $k_4 = 100$. Результаты расчета на машине «Урал-2» представлены в табл. VII.1. Нетрудно видеть, что решение, соответствующее первому корню, является лучшим.

Таблица VII. 1

Решение, соответствующее первому корню			
$r_1 = 74{,}05$ $r_2 = -59{,}03$ $r_3 = -5814{,}98$ $r_4 = 116{,}15$ $r_5 = -488{,}45$	$d_1 = 14{,}5$ $d_2 = 5{,}0$ $d_3 = 0{,}1$ $d_4 = 8{,}05$	$m = 25$	$m = 25\sqrt{\frac{1}{2}}$
		$\Delta s' = -0{,}009$ $s'_F - s'_C = 0{,}194$ $\eta = 0$	$\Delta s' = -0{,}238$ $s'_F - s'_C = -0{,}001$ $\eta = 0{,}07\%$
Решение, соответствующее второму корню			
$r_1 = -159{,}95$ $r_2 = -30{,}51$ $r_3 = -54{,}08$ $r_4 = 45{,}92$ $r_5 = 71{,}97$	$d_1 = 16{,}92$ $d_2 = 5{,}0$ $d_3 = 0{,}1$ $d_4 = 8{,}63$	$m = 25$	$m = 25\sqrt{\frac{1}{2}}$
		$\Delta s' = -0{,}007$ $s'_F - s'_C = 0{,}755$ $\eta = -0{,}03\%$	$\Delta s' = -2{,}58$ $s'_F - s'_C = 0$ $\eta = 0{,}35\%$

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Общие соображения

Существующие методы автоматического расчета являются по сути дела развитием традиционного метода проб. Напомним сущность этого метода. В некоторую исходную оптическую систему, заданную численными значениями конструктивных параметров, последовательно вносятся некоторые изменения, в результате чего либо находят значения параметров, при которых система отвечает поставленным требованиям, либо устанавливают, что данный тип оптической системы непригоден для решения задачи.

Изменения конструктивных параметров вносятся в оптическую систему на основании изучения таблицы влияния изменений параметров на аберрации и другие величины, характеризующие свойства оптической системы. При ручном неавтоматическом выполнении работы следят за некоторым по возможности минимальным количеством лучей, ход которых определяет аберрации системы. Так, например, при расчете систем с небольшими и средними значениями числовых апертур бывает достаточно для определения сферической аберрации выполнить расчет двух лучей для осевой точки предмета. Один из этих лучей на выходе из системы образует с осью угол, равный апертурному углу, а другой луч — угол, равный примерно 0,7 от апертурного угла. При этом стремятся к тому, чтобы аберрации в выбранных точках поля зрения и для выбранных лучей не превосходили определенных величин.

Обычно предполагается, что между изменениями параметров и изменениями аберраций существует линейная связь (хотя бы при небольших изменениях параметров). В действительности, как известно, эта зависимость далеко не линейная, причем нелинейность проявляется тем сильнее, чем выше порядок аберраций. Поэтому в процессе расчета конструктор вынужден вносить, как правило, незначительные изменения параметров и улучшать исходную систему постепенно, периодически пересчитывая таблицу влияния изменений параметров на аберрации.

Универсальные методы автоматического расчета оптических систем на электронных вычислительных машинах могут быть разбиты на две группы:

1. Методы, в которых, как и при обычном выполнении расчетов, система характеризуется несколькими величинами, причем задача считается решенной, когда все величины получат заданные значения с заданными допусками.

2. Методы, в которых для упрощения решения задачи система характеризуется одной функцией, имеющей, как правило, следующий вид:

$$F = \sum_{j=1}^{j=k} a_j (\Phi_j - \overline{\Phi}_j)^2, \qquad \text{(VII.24)}$$

где F — оценочная функция; a_j — некоторые весовые коэффициенты; Φ_j — значения некоторых величин, характеризующих оптическую систему, в частности значения ее аберраций; $\overline{\Phi}_j$ — заданные значения тех же функций.

Задача сводится к нахождению конструктивных параметров системы, при которых функция F имеет минимальное значение. Введение в практику расчета оценочной функции, характеризующей в некоторой мере качество изображения, является удобным вспомогательным приемом, упрощающим вычисления и позволяющим оперировать одной единственной величиной.

Рассмотрим задачу расчета оптической системы с помощью вычислительной машины в общем виде. Пусть некоторая исходная оптическая система обладает N параметрами. В качестве параметров примем радиусы оптических поверхностей r_i, расстояния между вершинами поверхностей d_i и оптические постоянные стекол. Часть параметров, которые можно назвать коррекционными, будет автоматически изменяться в процессе расчета. Пусть количество коррекционных параметров равно t. Какие параметры будут использоваться в качестве коррекционных — решает конструктор, выдающий задание на машину.

Оптическая система характеризуется κ функциями Φ_1, Φ_2, . . ., Φ_κ. В качестве функций могут служить аберрации системы, найденные с помощью расчета хода лучей, фокусное расстояние, положение изображения относительно последней поверхности системы и т. п. Какие именно функции будут вычисляться при расчете конкретной системы, также решает конструктор. Задача сводится к отысканию таких значений коррекционных параметров, при которых либо все рассматриваемые функции будут иметь заданные значения с заданными допусками, либо оценочная функция (VII.24) будет иметь минимальное значение. Методы, применяемые при решении, зависят от формы постановки задачи. Если предполагается, что все функции принципиально могут иметь заданные значения, то одновременно будет выполнено и второе требование, т. е. получение минимума оценочной функции. В этом случае оценочная функция обратится в нуль. Если же при постановке задачи заранее известно, что все функции одновременно принципиально не могут иметь заданных значений, то задача решается методами миниминизации оценочной функции. Очевидно, что для выполнения κ условий в общем случае необходимо располагать не менее чем κ параметрами. Поэтому, если количество коррекционных параметров равно количеству условий или превышает его, то можно предполагать, что все функции могут получить заданные значения. В случае, когда количество функций превышает количество параметров, заведомо можно утверждать, что все функции одновременно не могут иметь заданные значения и использование оценочной функции при этом является необходимым. Отсюда вытекает, что соотношение между количеством коррекционных параметров и количеством функций предопределяет использование тех или иных методов автоматического расчета.

Аберрации оптической системы могут быть представлены как функции координат точек пересечения лучей с плоскостью предмета l и с плоскостью входного зрачка m и M. Поэтому при расчете оптической системы важно установить необходимое и достаточное число лучей, а также координаты их пересечения с указанными плоскостями с тем, чтобы в пределах заданного поля зрения и числовой апертуры аберрации системы не превосходили заданных величин.

В случае монотонных зависимостей между аберрациями и координатами точек l, m и M наибольшие значения аберраций будут соответствовать предельным значениям апертуры и угла поля зрения. В более сложных случаях количество лучей, а также их координаты определяются количеством и положением точек перегиба кривых, выражающих зависимость между аберрациями и координатами пересечения лучей с плоскостями предмета и входного зрачка.

В свою очередь, количество точек перегиба на некоторой кривой не может превосходить величины i—1, где i — количество членов в разложении данной аберрации в ряд по степеням одной из координат l, m и M. Величины i на первой стадии расчета оптической системы, строго говоря, неизвестны. Однако на основании имеющегося опыта почти всегда можно сделать правильное предположение относительно величин i и ориентировочно задать количество лучей и соответствующие координаты l, m и M, для которых следует производить определение аберраций.

Количество коррекционных параметров в оптической системе в основном определяется ее конструкцией, т. е. степенью ее сложности. Количество корригируемых аберраций (функций) устанавливается оптиком-конструктором. Если при выборе количества функций конструктор исходит из естественного предположения, что для устранения каждой аберрации необходимо иметь по крайней мере один коррекционный параметр, то количество функций не должно превышать количество параметров. В этом случае, очевидно, аберрации для некоторых точек поля зрения и некоторых значений числовых апертур остаются в процессе автоматического расчета вне контроля.

Средством воздействия на эти неконтролируемые аберрации может служить перераспределение аберраций, т. е. изменение заданных значений контролируемых аберраций с целью получения оптимального качества изображения. Оптик-конструктор, обладающий достаточным опытом, без особого труда получает таким образом систему с наилучшим качеством изображения. Однако для достижения цели процесс доводки иногда приходится повторять несколько раз, изменяя задаваемые значения контролируемых аберраций.

Введение в практику автоматических расчетов оценочной функции вида (VII.24) или какого-либо другого вида отражает попытки избавиться от необходимости многократного повторения автоматических расчетов в процессе доводки системы. При использовании оценочной функции количество составляющих функций Φ_j не зависит от количества коррекционных параметров и может быть выбрано столь большим, что значения неконтролируемых аберраций заведомо будут лежать в пределах, не превышающих значения контролируемых аберраций.

При использовании оценочной функции предполагается, что ее минимум соответствует оптимальному коррекционному состоянию системы. К сожалению, до настоящего времени не найдено выражение для оценочной функции, удовлетворяющее этому условию. Поэтому введение в практику расчетов оценочной функции не может быть оправдано с оптической точки зрения. Однако при этом с математической точки зрения задача значительно упрощается, так как понижается в конечном счете порядок уравнения. Действительно, решение системы из κ нелинейных уравнений, каждое из которых имеет порядок s, равносильно решению одного уравнения с одним неизвестным, но имеющего порядок κs. Причем составление такого уравнения в большинстве случаев практически невыполнимо. При введении оценочной функции вида (VII.24) задача упрощается и сводится к отысканию минимума функции, которая имеет порядок не выше $2s$.

При сравнении различных методов автоматического расчета рационально использовать два следующих критерия:

1. Количество математических операций, необходимых для решения определенной задачи. Поскольку подсчет операций обычно затруднен из-за большого их количества, то сравнение удобнее вести по машинному времени, затраченному на машинах одного и того же типа при решении одной и той же задачи различными методами.

2. Зависимость времени расчета от начального приближения, т. е. от значений функций в исходной оптической системе. В этом отношении некоторые методы дают устойчивые результаты, мало зависящие от параметров начальной точки. В то же время при использовании других методов скорость расчета в значительной степени зависит от значений функций в исходной системе.

Рассмотрим детально ряд методов автоматического расчета оптических систем, нашедших практическое применение.

Метод Ньютона

Пусть оптическая система обладает κ коррекционными параметрами $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_\kappa$. Численные значения коррекционных параметров в исходной оптической системе суть $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_i^{(0)}, \ldots, p_\kappa^{(0)}$. Требуется найти такие значения коррекционных параметров, при которых κ функций этих параметров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots, \Phi_\kappa$, определяемых с помощью заданного алгоритма, будут иметь значения, заключенные внутри интервалов $\overline{\Phi}_1 \pm \delta\Phi_1$; $\overline{\Phi}_2 \pm \delta\Phi_2$; $\ldots$, $\overline{\Phi}_j \pm \delta\Phi_j$; $\ldots$; $\overline{\Phi}_\kappa \pm \delta\Phi_\kappa$. Отметим, что рассматривается случай, когда количество коррекционных параметров равно количеству функций.

Решить поставленную задачу можно с использованием известного метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Приращения функций Φ_j могут быть представлены в виде разло-

жений в ряды Тейлора по степеням приращений p_i. Ограничиваясь в каждом ряду первым членом разложения, можно написать

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 - \Phi_1^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i; \\
\Phi_2 - \Phi_2^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_j - \Phi_j^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_i} \Delta p_i,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.25)}$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots, \Phi_\kappa$ — текущие значения функций; $\Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}, \ldots, \Phi_j^{(0)}, \ldots, \Phi_\kappa^{(0)}$ — значения функций в исходной оптической системе; $\Delta p_i = p_i - p_i^{(0)}$.

Подставив в (VII.25) вместо текущих значений функций заданные значения, т. е. $\Phi_1 = \overline{\Phi}_1$, $\Phi_2 = \overline{\Phi}_2$, ..., $\Phi_\kappa = \overline{\Phi}_\kappa$, можно рассматривать (VII.25) как систему κ линейных уравнений с κ неизвестными. Обозначим неизвестные, удовлетворяющие системе линейных уравнений, через $\Delta p_1^{(1)}, \Delta p_2^{(1)}, \ldots, \Delta p_\kappa^{(1)}$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i^{(1)} = \overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)}; \\
&\sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i^{(1)} = \overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i^{(1)} = \overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_i} \Delta p_i^{(1)} = \overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.26)}$$

Решим систему (VII.26) и найдем значения изменений коррекционных параметров $\Delta p_i^{(1)}$. Внесем эти изменения в исходную систему, произведем расчет значений функций, соответствующих значениям коррекционных параметров, равным $p_1^{(0)} + \Delta p_1^{(1)}$, $p_2^{(0)} + \Delta p_2^{(1)}$, . . ., $p_\kappa^{(0)} + \Delta p_\kappa^{(1)}$. Если значения всех функций окажутся внутри заданных интервалов $\overline{\Phi}_1 \pm \delta\Phi_1$, $\overline{\Phi}_2 \pm \Delta\Phi_2$, . . ., $\overline{\Phi}_\kappa \pm \delta\Phi_\kappa$, то решение задачи окончено. В противном случае система, полученная после первого приближения, принимается за исходную для следующего приближения и процесс повторяется вновь.

Определение частных производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$, необходимых для составления системы линейных уравнений (VII.26), может быть произведено двумя принципиально различными способами. Один способ основывается на применении точных формул для производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$, получаемых путем установления дифференциальных соотношений между конструктивными элементами оптической системы и параметрами, определяющими положение лучей. Другой способ нахождения производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$ основывается на использовании метода конечных разностей. Каждый из коррекционных параметров системы поочередно изменяется на некоторую малую величину δp_i, а затем по точным формулам производится вычисление новых значений функций, соответствующих измененной системе.

С некоторой степенью точности можно принять, что частные производные $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$ равны частным от деления приращений функций на приращения соответствующих параметров:

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i} \approx \frac{\Phi_j' - \Phi_j^{(0)}}{\delta p_i}, \qquad \text{(VII.27)}$$

где Φ_j' — значение функции, соответствующее значениям коррекционных параметров, равным $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, . . ., $p_i^{(0)} + \delta p_i$, $p_{i+1}^{(0)}$, . . ., $p_\kappa^{(0)}$.

Так как при разложении функций Φ_j в ряды были опущены члены, содержащие производные выше первого порядка, область применимости системы линейных уравнений (VII.26) ограничивается малыми изменениями параметров. Однако при решении системы линейных уравнений (VII.26) изменения параметров $\Delta p_i^{(1)}$, вообще говоря, могут получиться сколь угодно большими и их введение в исходную систему приведет к абсурдным результатам. Рассмотрим определитель системы уравнений (VII.26):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_\kappa} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_\kappa} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_\kappa} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_\kappa} \end{vmatrix} = D. \qquad \text{(VII.28)}$$

При следующих условиях определитель может обратиться в нуль:

1. В определителе D имеется хотя бы один столбец, элементы которого представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов каких-либо других столбцов. В частном случае элементы одного столбца пропорциональны элементам другого столбца. Параметры, соответствующие этим столбцам, могут быть названы эквивалентными, поскольку частные производные от функций Φ_j по этим параметрам связаны между собой зависимостью

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial p_l} : \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_m} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_l} : \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_m} = \cdots = \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_l} : \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_m}, \qquad \text{(VII.29)}$$

где p_l и p_m — эквивалентные параметры.

2. В определителе D имеется хотя бы одна строка, элементы которой представляют собой комбинацию соответствующих элементов каких-либо других строк. В частном случае элементы одной строки пропорциональны элементам другой строки; тогда функции, соответствующие указанным строкам, являются взаимно зависимыми.

3. В определителе D имеется хотя бы один столбец, элементы которого равны нулю. В этом случае параметр, соответствующий этому столбцу, не влияет на изменение функций.

4. В определителе D имеется хотя бы одна строка, элементы которой равны нулю. В этом случае функция, соответствующая этой строке, не зависит ни от одного из коррекционных параметров.

На практике, поскольку мы имеем дело с численным методом, ни один из перечисленных случаев в чистом виде не встречается. Однако приближенное выполнение всех, а в особенности первых двух условий, встречается нередко. Это приводит к малым значениям определителя D и большим изменениям параметров $\Delta p_i^{(1)}$. Поэтому метод Ньютона применим только в тех случаях, когда исходная система близка к заданной. Кроме того, при использовании метода Ньютона необходимо осуществлять контроль за сходимостью итерационного процесса. Условия сходимости

исследованы математиками детально, но эти условия весьма сложны, и для проверки их выполнения необходимо произвести большие вычисления. Поэтому в программах, основанных на методе Ньютона, проверка сходимости осуществляется после каждой итерации. Рассмотрим некоторые способы проверки сходимости.

Представим себе пространство функций Φ_j. В этом пространстве исходной оптической системе соответствует некоторая точка, координатами которой являются значения функций $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, . . ., $\Phi_\kappa^{(0)}$. Искомой оптической системе соответствует точка с координатами $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_2$, . . ., $\overline{\Phi}_\kappa$, являющаяся центром многомерного параллелепипеда, грани которого равны удвоенным значениям допусков на значения функций. Так как функции могут в принципе иметь различную размерность, то рационально принять такую метрику пространства, в которой единицами измерения по отдельным координатным осям служат допуски на функции, т. е. величины $\delta\Phi_j$. Тогда искомой оптической системе в пространстве функций будет соответствовать многомерный куб, каждая грань которого равна двум единицам. Для пояснения сказанного служит рис. VII. 2, где представлено пространство, образованное двумя функциями Φ_1 и Φ_2.

Рис. VII.2

Расстояние между заданной и исходной точками может быть вычислено по формуле

$$L = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left(\frac{\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}}{\delta\Phi_j} \right)^2} . \qquad \text{(VII.30)}$$

Изменение этого расстояния после очередного шага постепенных приближений может быть принято в качестве критерия сходимости. Действительно, если с каждой итерацией это расстояние сокращается, то можно утверждать, что процесс не расходится. Если расстояние L начинает расти, то процесс следует прекратить, так как это может означать появление расходимости. Таким образом, после очередного шага постепенных приближений производится вычисление величины $L_s = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left(\frac{\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(s)}}{\delta\Phi_j} \right)^2}$, где s — порядковый номер шага, и сравнение ее с величиной L_{s-1}. Если $L_s < L_{s-1}$, то процесс расчета можно продолжать. Если $L_s \geqslant L_{s-1}$, то расчет следует прекратить.

Другой способ контроля сходимости основывается на рассмотрении пространства коррекционных параметров. В этом пространстве, в отличие от пространства функций, координаты точки, соответствующей искомой системе, заранее никогда неизвестны. Поэтому контроль сходимости в этом пространстве может быть осуществлен по изменению расстояния между точками, соответствующими двум последовательным итерациям. Это расстояние может быть вычислено по формуле

$$P = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=\kappa} (\Delta p_i^{(1)})^2}\,, \qquad \text{(VII.31)}$$

где $\Delta p_i^{(1)}$ — результаты решения системы линейных уравнений (VII.26). Если $P_s < P_{s-1}$ (где P_s и P_{s-1} — значения для итерационных шагов с порядковыми номерами s и $s-1$), то процесс расчета следует продолжать. В противном случае процесс может расходиться и его следует прекратить.

Изложенный метод был реализован в одной из программ, предназначенных для автоматического расчета оптических систем в области аберраций третьего порядка. Программа была составлена В. А. Ефимовым под руководством Н. Н. Губеля. В таких программах в качестве функций Φ_j рассматриваются коэффициенты аберраций третьего порядка S_{I}, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_{V}, S_{I}^{xp}, S_{II}^{xp} и такие параксиальные характеристики системы, как s_0' — расстояние изображения от последней поверхности — и x_0' — расстояние выходного зрачка от последней поверхности. Программы такого рода находят в настоящее время широкое применение, что объясняется двумя причинами. Во-первых, расчет коэффициентов аберраций третьего порядка занимает примерно в три раза меньше времени, чем расчет минимально необходимого количества лучей, с помощью которых могут быть установлены примерные значения аберраций третьего порядка. Это, с одной стороны, позволяет использовать для расчета машины, обладающие невысокими скоростями работы, а с другой стороны, дает возможность в сравнительно короткие сроки и с малыми затратами машинного времени произвести исследования большого количества различных вариантов системы в области аберраций третьего порядка.

Во-вторых, зависимости между коэффициентами аберраций третьего порядка и параметрами системы ближе к линейным, чем зависимости между точными значениями аберраций и параметрами. Поэтому при автоматической подгонке заданных коэффициентов аберраций третьего порядка сходимость итерационного процесса, как правило, оказывается лучшей, чем при использовании в качестве функций точных значений аберраций.

Приведем два примера расчета по рассмотренной методике. Расчеты выполнялись на электронной вычислительной машине

«Урал-2», обладающей скоростью, равной примерно 5000 операций в секунду.

Первый пример представляет собой расчет апохроматического объектива с небольшой числовой апертурой. Объектив состоит из двух двусклеенных компонентов, разделенных значительным воздушным промежутком, т. е. выполнен по схеме Пецваля. Схема объектива представлена на рис. VII.3. Задача состоит в том, чтобы путем замены материалов, из которых выполнены линзы в ранее рассчитанном ахроматическом объективе, получить объектив с апохроматической коррекцией. Исправлению подлежат сферическая аберрация (S_{I}), кома (S_{II}), астигматизм (S_{III}) и хроматизм положения (S_{I}^{xp}).

Рис. VII.3

В качестве коррекционных параметров используются углы первого параксиального луча с осью α_i, а не радиусы оптических поверхностей. Такой выбор параметров не случаен, так как позволяет поддерживать постоянным в процессе расчета фокусное расстояние системы или ее увеличение. Конструктивные параметры исходного ахроматического объектива приведены в табл. VII.2.

Таблица VII 2

α_i	d_i	n_i	Марки стекол
0		1,0	
0,40412	3,5	1,5163	К8
0,30245	2,0	1,6259	БФ12
0,49124	14,0	1,0	
0,66660	3,0	1,5181	КФ4
0,53645	1,5	1,6475	ТФ1
1,0		1,0	
$h_1 = 20$			

Для получения апохроматической коррекции заменим стекла К8 и КФ4 на флюорит. Стекла БФ12 и ТФ1 заменим таким образом, чтобы в каждом компоненте примерно сохранилась разность показателей преломления, а коэффициенты дисперсий ν удовлетворяли бы следующему соотношению:

$$\frac{\nu_к}{\nu_к - \nu_ф} = \mathrm{const}, \quad \text{(VII.32)}$$

где $\nu_к$ — коэффициент дисперсии стекла положительной линзы; $\nu_ф$ — то же стекла отрицательной линзы.

Такое правило подбора стекол позволяет получить в каждом компоненте при параметре $C = 0$ примерно такое же значение параметра $P_{\min}$, какое было в исходной системе, и обеспечивает бóльшую вероятность успеха, чем произвольный выбор, поскольку поставленная задача имеет решение отнюдь не при любых комбинациях стекол.

В результате стекло БФ12 может быть заменено стеклом БФ4, а стекло ТФ1 — стеклом БК10. Обратим внимание также и на то, что стекла БФ4 и БК10 имеют частные относительные дисперсии, близкие к частной относительной дисперсии флюорита. Это поз-

волит получить систему с небольшим вторичным спектром. Зададим $S_{\mathrm{I}} = 0 \pm 0{,}1$; $S_{\mathrm{II}} = 0 \pm 0{,}1$; $S_{\mathrm{III}} = 0 \pm 0{,}1$; $S_{\mathrm{I}}^{xp} = 0 \pm 0{,}005$. Коэффициенты аберраций будем вычислять при нормировке $\alpha'_p = 1$; $h_1 = f' = 20$. В качестве коррекционных параметров используем α_2, α_3, α_5 и α_6. Результаты расчета на машине «Урал-2» приведены в табл. VII.3.

Таблица VII.3

Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	2-я итерация	3-я итерация
α_2	0,40412	0,45957	0,47018	0,47019
α_3	0,32245	0,33034	0,34254	0,34242
α_4	0,49124	0,49124	0,49124	0,49124
α_5	0,66660	0,77404	0,78078	0,78104
α_6	0,53645	0,61142	0,61141	0,61194
S_{I}	8,848	—0,245	0,002	0,000
S_{II}	—4,996	—0,834	0,067	0,000
S_{III}	3,690	1,844	—0,146	0,000
S_{I}^{xp}	—0,048	—0,002	0,000	0,000
L^2	$1{,}19 \cdot 10^4$	$4{,}15 \cdot 10^2$	2,58	0,00

В последней строке таблицы VII.3 даны значения величины L^2 (VII.30), с помощью которой в программе контролируется сходимость итерационного процесса. На решение задачи затрачено около одной минуты машинного времени.

В качестве второго примера рассмотрим расчет фотографического объектива типа триплет. Этот пример позволяет весьма наглядно сравнивать между собой различные методы расчета и поэтому неоднократно использовался в качестве теста при проверке программ.

Конструктивные параметры исходной системы выбраны произвольно. Марки стекол и задаваемые значения коэффициентов аберраций взяты из системы, расчет которой был произведен в 30-х годах.

Как видно из табл. VII.4, итерационный процесс начинает сразу же расходиться, несмотря на то, что решение существует. Для наглядности в таблице приведены два итерационных шага. Пример показывает, что метод Ньютона неприменим в тех случаях, когда значения параметров в исходной системе существенно отличаются от таковых в системе с заданными коэффициентами

Таблица VII.4

	Заданные значения коэффициентов аберраций
	$S_{I} = 1{,}9 \pm 0{,}1$ $S_{II} = 0{,}3 \pm 0{,}05$; $S_{III} = -0{,}2 \pm 0{,}02$; $S_{IV} = 0{,}43 \pm 0{,}01$; $S_{V} = 0 \pm 0{,}01$; $S_{I}^{хр} = 0 \pm 0{,}001$; $S_{II}^{хр} = 0 \pm 0{,}001$
Расстояния между вершинами поверхностей в исходной системе	$d_1 = 0{,}05$; $d_2 = 0{,}1$; $d_3 = 0{,}02$; $d_4 = 0{,}1$; $d_5 = 0{,}05$
Марки стекол	ТК16; БФ12; ТК16

Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	2-я итерация	Система с заданными коэффициентами
α_2	1,0	1,7569	—12,0954	1,7273
α_3	1,5	2,7186	6,5111	2,3887
α_4	0,6	0,4329	14,4977	1,1962
α_5	0,4	—1,2000	—1,4316	—0,4120
α_6	0,7	—3,1721	—1,7104	—0,0182
d_2	0,1	0,1434	0,1610	0,0208
d_4	0,1	—0,3528	—0,1333	0,0579
S_{I}	1,074	61,355	$4{,}2 \cdot 10^4$	1,916
S_{II}	—1,737	—271,35	$-7{,}7 \cdot 10^5$	0,313
S_{III}	0,233	—401,70	$1{,}4 \cdot 10^7$	—0,200
S_{IV}	0,566	—14,612	$-3{,}7 \cdot 10$	0,429
S_{V}	0,635	35247,8	$-2{,}7 \cdot 10^8$	—0,001
$S_{I}^{хр}$	—0,0103	—0,0079	—0,316	0
$S_{II}^{хр}$	0,0037	—0,0057	—5,827	0

$$\alpha_1 = 0; \quad h_1 = 1; \quad \beta_1 = 1; \quad \frac{y_5}{\beta_5} = -0{,}03; \quad \alpha_7 = 1$$

аберраций. Для сопоставления в последнем столбце табл. VII.4 даны значения коррекционных параметров в системе, обладающей заданными коэффициентами аберраций. Расчет производился на машине «Урал-2».

Первая модификация метода Ньютона

Для улучшения сходимости итерационного процесса при использовании метода Ньютона были разработаны и нашли практическое применение несколько модификаций. Рассматриваемая здесь модификация [6—8] была положена в основу одной из программ для автоматического расчета оптических систем в области аберраций третьего порядка. Эта программа, составленная применительно к машине «Урал-2», с успехом эксплуатировалась в течение нескольких лет рядом организаций. Попытки использовать ту же методику для автоматического расчета оптических систем в области точных значений аберраций оказались неудачными из-за медленной сходимости итерационного процесса во многих случаях.

Основная цель модификаций метода Ньютона заключается в предотвращении расходимости итерационного процесса. Сущность этих методов состоит в том, что каждый шаг итерационного процесса разбивается на два этапа, первый из которых представляет собой выбор направления движения (определение соотношения между изменениями параметров), а второй этап — выбор величины шага в этом направлении. Направление движения определяется путем решения системы линейных уравнений (VII.26). Выбор величины шага осуществляется путем анализа изменений функций при движении в найденном направлении.

Введем понятие величины шага ψ. Изменения параметров, соответствующие величине шага ψ, вычисляются путем умножения изменений параметров $\Delta p_i^{(1)}$, полученных в результате решения системы линейных уравнений (VII.26), на ψ, т. е.

$$\Delta p_1 = \psi \Delta p_1^{(1)},\ \Delta p_2 = \psi \Delta p_2^{(1)},\ \ldots,\ \Delta p_i = \psi \Delta p_i^{(1)},\ \ldots,\ \Delta p_\kappa = \psi \Delta p_\kappa^{(1)}.$$

После выбора направления движения функции Φ_j зависят лишь от величины шага, т. е. от переменной ψ. Во избежание расходимости итерационного процесса условимся выбирать ψ таким образом, чтобы после выполнения очередной итерации с порядковым номером s разности $\Phi_j^{(s)} - \overline{\Phi}_j$ убывали по абсолютной величине. В то же время для уменьшения количества итераций необходимо, чтобы каждая из функций Φ_j при каждой итерации максимально приближалась к заданному значению.

Наиболее простой способ определения величины шага по этим правилам заключается в следующем. Выбрав некоторое достаточно малое значение $\psi^{(1)}$ для величины ψ, можно последовательно шаг за шагом вносить в исходную систему изменения параметров,

соответствующие сначала $\psi^{(1)}$, затем $2\psi^{(1)}$, затем $3\psi^{(1)}$ и т. д., и вычислять при этом по точным формулам значения функций Φ_j. В тот момент, когда одна из функций достигнет заданного интервала значений от $\overline{\Phi}_j - \delta\Phi_j$ до $\overline{\Phi}_j + \delta\Phi_j$ или когда какая-нибудь из функций примет экстремальное значение, процесс подбора ψ следует прекратить. Полученная при этом система может использоваться как исходная для следующего приближения.

В целях ускорения определения величины шага используется следующий способ. Разложим приращения функций $\Phi_j - \Phi_j^{(0)}$ в ряды по степеням ψ и ограничимся первыми двумя членами разложения. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 - \Phi_1^{(0)} &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial\psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\psi^2}\psi^2;\\
\Phi_2 - \Phi_2^{(0)} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\psi^2}\psi^2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_j - \Phi_j^{(0)} &= \frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\psi^2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)} &= \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial\psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_\kappa}{\partial\psi^2}\psi^2.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.33)}$$

Очевидно, значения производных, входящих в выражения (VII.33), могут быть определены методом конечных разностей, если известны значения функций Φ_j, соответствующие каким-либо двум значениям ψ. Заметим, что поскольку формулы (VII.33) являются приближенными, то при нахождении производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$ следует пользоваться значениями ψ, соответствующими малым значениям приращений параметров. Один из возможных способов выбора этих значений состоит в следующем.

Пусть $\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_i, \ldots, \delta p_\kappa$ — некоторые достаточно малые приращения параметров, например те, которые используются для определения частных производных от функций по параметрам p_i. Вычислим абсолютные значения отношений

$$\psi_i = \left|\frac{\delta p_i}{\Delta p_i^{(1)}}\right| \qquad \text{(VII.34)}$$

и выберем из них наименьшую величину, которую обозначим через $\psi^{(1)}$. Очевидно, что если положить $\psi = \psi^{(1)}$, то изменения параметров Δp_i при этом не превысят соответствующих величин δp_i.

Вычислим по точным формулам (в частности, с помощью расчета хода лучей) значения функций Φ_j, соответствующие $\psi = \psi^{(1)}$, т. е. для значений параметров $p_1^{(0)} + \psi^{(1)}\Delta p_1^{(1)}$; $p_2^{(0)} + \psi^{(1)}\Delta p_2^{(1)}$,

$\ldots, p_\kappa^{(0)} + \psi^{(1)}\Delta p_\kappa^{(1)}$, и обозначим их через $\Phi_1^{(1,1)}, \Phi_2^{(1,1)}, \ldots, \Phi_\kappa^{(1,1)}$. Вычислим также значения функций Φ_j, соответствующие $\psi = 2\psi^{(1)}$, и обозначим их через $\Phi_1^{(1,2)}, \Phi_2^{(1,2)}, \ldots, \Phi_\kappa^{(1,2)}$. Тогда, воспользовавшись (VII.33), находим, что

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi} = \frac{4\Phi_j^{(1,1)} - \Phi_j^{(1,2)} - 3\Phi_j^{(0)}}{2\psi^{(1)}}; \tag{VII.35}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi_2} = \frac{\Phi_j^{(1,2)} - 2\Phi_j^{(1,1)} + \Phi_j^{(0)}}{((\psi)^{(1)})^2}. \tag{VII.36}$$

После замены в (VII.33) текущих значений функций Φ_j на заданные значения $\overline{\Phi}_j$ каждый из κ рядов можно рассматривать как квадратное уравнение и решать относительно ψ. Обозначим ψ, найденное из j-го уравнения, через ψ_j. Тогда

$$\psi_j = \frac{-\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial\psi} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right)}}{\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}}. \tag{VII.37}$$

Для определения знака перед корнем в выражении (VII.37) установим зависимость между величинами $\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ и $\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}$.

Рассмотрим одно из уравнений системы (VII.26)

$$\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\Delta p_i^{(1)}. \tag{VII.38}$$

Умножим обе части равенства (VII.38) на $d\psi$. Тогда

$$\left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right) d\psi = d\psi \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\Delta p_i^{(1)} \quad \text{и} \quad \left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right) d\psi = d\Phi_j,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi} = \overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}. \tag{VII.39}$$

Поскольку вычисление $\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ и производных $\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$ осуществляется с помощью приближенного метода конечных разностей, то значения $\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ совпадут со значениями приращений $\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}$ лишь приближенно. Несмотря на это, выражение (VII.39) может служить хорошим средством контроля правильности вычислений, а также правильности выбора величин δp_i.

Итак, на основании (VII.39) выражение (VII.37) можно преобразовать к виду

$$\psi_j = \frac{\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}}{\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}}{\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}}} \right), \qquad \text{(VII.40)}$$

откуда видно, что знаку плюс перед квадратным корнем всегда соответствует меньший по абсолютному значению корень квадратного уравнения. Так как ряды (VII.33) справедливы лишь при небольших значениях ψ, то корень, соответствующий знаку минус в выражении (VII.40), как имеющий большее абсолютное значение, вообще не следует принимать во внимание.

Покажем, что выбранный корень всегда положительный. Если $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi} : \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2} > 0$, то подкоренное выражение в (VII.40) больше единицы, а выражение в круглых скобках больше нуля. Следовательно, ψ_j также больше нуля. Если $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi} : \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2} < 0$, то подкоренное выражение меньше единицы, а выражение в круглых скобках меньше нуля. Следовательно, ψ_j снова больше нуля.

В случае отсутствия вещественных корней для какого-либо j-го уравнения, т. е. в том случае, когда $1 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2} : \frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi} < 0$, следует найти величину $\psi_{j\,\mathrm{extr}}$, при которой значение функции Φ_j максимально приближается к заданному значению $\overline{\Phi}_j$. Из (VII.33) нетрудно получить, что

$$\psi_{j\,\mathrm{extr}} = -\frac{\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}}{\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}}. \qquad \text{(VII.41)}$$

Очевидно, что и $\psi_{j\,\mathrm{extr}} > 0$.

Решив все κ квадратных уравнений, получим κ значений ψ_j. Выберем из них наименьшую величину, которую обозначим через $\psi_{нм}$. Нетрудно показать, что при $\psi = \psi_{нм}$ для всех функций будет выполняться следующее соотношение:

$$0 < \frac{\Phi_j^{(1)} - \Phi_j^{(0)}}{\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}} \leqslant 1, \qquad \text{(VII.42)}$$

где $\Phi_j^{(1)}$ — значение функции Φ_j при $\psi = \psi_{нм}$. Для доказательства преобразуем выражение (VII.40), приняв во внимание (VII.41):

$$\psi_j = \psi_{j\,\mathrm{extr}} - \sqrt{1 + \frac{2}{\psi_{j\,\mathrm{extr}}}}. \qquad \text{(VII.43)}$$

Поскольку, как было показано, $\psi_j > 0$, то при $1 + \frac{2}{\psi_{j\,\mathrm{extr}}} > 0$ $\psi_j < \psi_{j\,\mathrm{extr}}$. Если $1 + \frac{2}{\psi_{j\,\mathrm{extr}}} < 0$, то $\psi_j = \psi_{j\,\mathrm{extr}}$. Отсюда сле-

дует, что $\psi_j \leqslant \psi_{j\,\mathrm{extr}}$, а это означает, что в интервале от $\psi = 0$ до $\psi = \psi_j$ функция Φ_j изменяется монотонно. Поэтому, поскольку $\psi_{нм} \leqslant \psi_j$, то все функции в интервале от $\psi = 0$ до $\psi = \psi_{нм}$ изменяются монотонно. Следовательно, на основании (VII.43) можно утверждать, что значение $\Phi_j^{(1)}$ любой функции будет заключено в интервале от $\Phi_j^{(0)}$ до $\overline{\Phi}_j$. Этим самым доказана справедливость выражения (VII.42). Итак, при $\psi = \psi_{нм}$ значения всех функций с точностью, с которой справедливы ряды (VII.33), будут лежать внутри интервалов от $\Phi_j^{(0)}$ до $\overline{\Phi}_j$, т. е. при $\psi = \psi_{нм}$ все функции приближаются к заданным значениям. Внесем в исходную систему изменения коррекционных параметров, соответствующие $\psi_{нм}$, т. е. $\Delta p_1 = \psi_{нм}\,\Delta p_1^{(1)}$, $\Delta p_2 = \psi_{нм}\,\Delta p_2^{(1)}$, ..., $\Delta p_к = \psi_{нм}\Delta p_к^{(1)}$.

Рис. VII.4

Рассчитаем по точным формулам значения функций в системе с измененными значениями коррекционных параметров и проверим, не находятся ли значения всех функций внутри заданных интервалов $\overline{\Phi}_1 \pm \delta\Phi_1$, $\overline{\Phi}_2 \pm \delta\Phi_2$, ..., $\overline{\Phi}_к \pm \delta\Phi_к$. Если это условие выполнено, то расчет прекращается. В противном случае система с измененными значениями коррекционных параметров принимается за исходную для следующего шага постепенных приближений. Новый шаг начинается с вычисления частных производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$. Затем решается система линейных уравнений и повторяются все операции, выполнявшиеся на первом шаге итерационного процесса. Расчет заканчивается тогда, когда все функции окажутся внутри заданных интервалов значений.

Изложенный метод автоматического расчета в некоторых случаях не дает положительного результата. Это может означать, что поставленная задача вообще не имеет решения или что решение существует, однако из-за неудачного выбора исходной системы этот метод оказывается неэффективным. Как в первом, так и во втором случае наступает момент, когда приращения функций Φ_j, получаемые за один итерационный шаг, начинают резко уменьшаться по абсолютным величинам. Вычислительный процесс при этом сходится не к заданным величинам $\overline{\Phi}_j$, а к некоторым предельным значениям функций $\Phi_{j\,пр}$, как это показано на рис.VII.4. Важно правильно установить момент, когда нужно прекратить вычисления, с тем чтобы не загружать машину бесполезной работой. Рассмотрим признак, который позволяет анализировать целесообразность продолжения итерационного процесса.

Обозначим

$$\xi_j^{(s)} = \frac{\Phi_j^{(s)} - \Phi_j^{(s-1)}}{\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(s-1)}}, \qquad \text{(VII.44)}$$

где $\Phi_j^{(s-1)}$ — значение функции Φ_j перед началом выполнения итерационного шага с порядковым номером s; $\Phi_j^{(s)}$ — значение функции Φ_j после выполнения итерационного шага с порядковым номером s.

Нетрудно видеть, что если $\lim\limits_{s\to\infty} \Phi_j^{(s)} = \Phi_{j\,пр}$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \xi_i^{(s)} = 0$.

Найдем предел $\xi_j^{(s)}$ в том случае, когда решение может быть найдено, т. е. тогда, когда $\lim \Phi_j^{(s)} = \overline{\Phi}_j$. В этом случае $\lim\limits_{s\to\infty} (\Phi_j^{(s)} - \overline{\Phi}_j) = 0$, т. е. правые части в системе линейных уравнений (VII.26) стремятся к нулю и, следовательно, приращения коррекционных параметров $\Delta p_i^{(1)}$ также стремятся к нулю. Зависимости между изменениями функций и изменениями параметров в пределе становятся линейными, и поэтому величина $\psi_{нм}$ стремится к единице. Отсюда следует, что $\lim\limits_{s\to\infty} (\Phi_j^{(s)} - \Phi_j^{(s-1)}) = \overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(s-1)}$, а $\lim\limits_{s\to\infty} \xi_j^{(s)} = 1$.

Таким образом, проследив за изменением величины ξ_j для какой-либо одной функции в течение нескольких итерационных шагов, можно установить, удастся ли получить заданные значения функций. Если величина ξ_j непрерывно убывает, то получить заданные значения функций невозможно. Процесс автоматического расчета следует прекратить при выполнении следующего условия для всех функций:

$$\xi_j^{(s)} < \xi_j^{(s-1)} < \varepsilon, \qquad \text{(VII.45)}$$

где ε — некоторая малая величина. В программах, используемых на практике, обычно принято $\varepsilon = 0{,}01$.

Опыт использования программ автоматического расчета оптических систем в области аберраций третьего порядка показал, что в большинстве случаев точность двучленных рядов (VII.33) оказывается достаточной. Если же в качестве функций Φ_j рассматриваются значения аберраций, найденные путем расчета хода лучей, то точность этих рядов зачастую неудовлетворительна. Для повышения точности экстраполяции разработан специальный прием, сущность которого будет изложена ниже.

Перейдем к рассмотрению случая, когда количество коррекционных параметров t превышает количество функций κ. Такое соотношение часто встречается при автоматическом расчете оптических систем в области аберраций третьего порядка, поскольку в системах со значительными числовыми апертурами или полями

зрения общее количество параметров намного превышает количество коэффициентов аберраций третьего порядка, т. е. семь. Наличие как бы избыточных параметров можно использовать для ускорения расчета путем уменьшения количества циклов итераций. Сущность рассматриваемого метода состоит в том, что избыточное количество коррекционных параметров по сравнению с количеством функций используется для получения минимальных значений приращений коррекционных параметров. Если для всех функций Φ_j одновременно имеет место соотношение

$$\left|\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\right| \ll \left|\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}\right|, \tag{VII.46}$$

то функции Φ_j практически линейно зависят от ψ и задача решается за небольшое количество итерационных шагов.

Воспользуемся наличием избыточных параметров с целью максимального уменьшения значений вторых производных $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$. Сопоставим между собой два разложения в ряд приращения функции $\Delta\Phi_j$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Phi_j &= \frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\psi^2; \\ \Delta\Phi_j &= \psi\sum_{i=1}^{i=t}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\Delta p_i + \frac{1}{2}\psi^2\sum_{i=1}^{i=t}\sum_{l=1}^{l=t}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i\,\partial p_l}\Delta p_i\,\Delta p_l. \end{aligned}\right\} \tag{VII.47}$$

На основании теоремы о единственности разложения в ряд из (VII.47) следует, что

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi} = \sum_{i=1}^{i=t}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\Delta p_i; \tag{VII.48}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2} = \sum_{i=1}^{i=t}\sum_{l=1}^{l=t}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i\,\partial p_l}\Delta p_i\,\Delta p_l. \tag{VII.49}$$

Запишем (VII.49) в виде

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2} = \sum_{i=1}^{i=t}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i^2}(\Delta p_i)^2 + \theta_j, \tag{VII.50}$$

где θ_j представляет собой сумму членов, содержащих смешанные производные второго порядка. Учет величин θ_j требует значительного увеличения объема вычислений, связанного с нахождением производных вида $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i\,\partial p_l}$. Несколько нарушая строгость вывода, допустим, что

$$\left|\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\right| \leqslant b\left|\sum_{i=1}^{i=t}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i^2}(\Delta p_i)^2\right|, \tag{VII.51}$$

где b — некоторый положительный коэффициент. Тогда условие (VII.46) на основании (VII.48) и (VII.51) можно преобразовать к виду

$$\left|\overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)}\right| \gg b \left| \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_i^2} (\Delta p_i)^2 \right|$$

$$\left|\overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)}\right| \gg b \left| \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p_i^2} (\Delta p_i)^2 \right| \qquad \text{(VII.52)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}\right| \gg b \left| \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial^2 \Phi_\kappa}{\partial p_i^2} (\Delta p_i)^2 \right|$$

Заменим абсолютные значения сумм, находящихся в правых частях неравенств (VII.52), суммами абсолютных значений, допуская при этом некоторое ужесточение условий (VII.51):

$$\left.\begin{array}{l}
\left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_1^2}(\Delta p_1)^2}{\overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)}}\right| + \left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_2^2}(\Delta p_2)^2}{\overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)}}\right| + \cdots + \left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_t^2}(\Delta p_t)^2}{\overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)}}\right| \ll \dfrac{1}{b}; \\
\left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p_1^2}(\Delta p_1)^2}{\overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)}}\right| + \left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p_2^2}(\Delta p_2)^2}{\overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)}}\right| + \cdots + \left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p_t^2}(\Delta p_t)^2}{\overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)}}\right| \ll \dfrac{1}{b}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_\kappa}{\partial p_1^2}(\Delta p_1)^2}{\overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}}\right| + \left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_\kappa}{\partial p_2^2}(\Delta p_2)^2}{\overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}}\right| + \cdots + \left|\dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi_\kappa}{\partial p_t^2}(\Delta p_t)^2}{\overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}}\right| \ll \dfrac{1}{b}.
\end{array}\right\} \text{(VII.53)}$$

Выберем из всех множителей, стоящих при $(\Delta p_1)^2$, наибольший и обозначим его через

$$a_{1\,нб} = \left| \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi_j}{\partial p_1^2}}{\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}} \right| \qquad \text{(VII.54)}$$

Таким же образом выберем наибольшие множители и для остальных переменных:

$$a_{i\,нб} = \left| \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi_j}{\partial p_i^2}}{\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}} \right| \qquad \text{(VII.55)}$$

Тогда, очевидно, при соблюдении неравенства

$$\sum_{i=1}^{i=t} a_{i\,нб}(\Delta p_i)^2 \ll \frac{1}{b} \tag{VII.56}$$

будут одновременно удовлетворяться все неравенства системы (VII.53) и, следовательно, все неравенства системы (VII.52). Таким образом, условие (VII.46) приводится к неравенству (VII.56). Условие (VII.56) можно трактовать следующим образом: количество итерационных шагов сокращается, если левая часть неравенства (VII.56) минимальна. Поэтому для случая $\kappa < t$ система уравнений дополняется требованием минимизации суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=t} a_{i\,нб}(\Delta p_i)^2$.

Воспользуемся методом Лагранжа для получения минимума этой суммы. Образуем функцию

$$F = \sum_{i=1}^{i=t} a_{i\,нб}(\Delta p_i)^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i - \overline{\Phi}_1 + \Phi_1^{(0)} \right) +$$

$$+ \cdots + \lambda_\kappa \left(\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_i} \Delta p_i - \overline{\Phi}_\kappa + \Phi_\kappa^{(0)} \right). \tag{VII.57}$$

Для соблюдения поставленного условия необходимо, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial p_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial p_t} = 0. \tag{VII.58}$$

Дифференцируя F поочередно по p_1, p_2, . . ., p_t и приравнивая результаты нулю в соответствии с (VII.58), получаем систему уравнений, дополняющую систему (VII.26):

$$\left.\begin{aligned} 2a_{1\,нб}\Delta p_1 + \sum_{j=1}^{j=\kappa} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} &= 0; \\ 2a_{2\,нб}\Delta p_2 + \sum_{j=1}^{j=\kappa} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2a_{t\,нб}\Delta p_t + \sum_{j=1}^{j=\kappa} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{VII.59}$$

Таким образом, в случае, когда $\kappa < t$, система линейных уравнений приобретает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)};\\
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)};\\
&2a_{1\,нб}\Delta p_1 + \sum_{j=1}^{j=\kappa} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} = 0;\\
&2a_{2\,нб}\Delta p_2 + \sum_{j=1}^{j=\kappa} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2a_{t\,нб}\Delta p_t + \sum_{j=1}^{j=\kappa} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.60)}$$

Далее используется методика, разработанная для случая $\kappa = t$. Использование избыточных параметров не только позволяет ускорить процесс вычислений, но и дает бо́льшую вероятность получения решения. Рассмотрим определитель системы уравнений (VII.60):

$$D = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_t} & 0 & \cdots & & 0\\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_t} & 0 & \cdots & & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_t} & 0 & \cdots & & 0\\
\hline
a_{1нб} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_1}\\
0 & a_{2\,нб} & 0 \cdots & 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_2}\\
0 & 0 & a_{3\,нб} & 0 \cdots 0 & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 \cdots a_{t\,нб} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_t} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_t} & \cdots & \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_t}
\end{array}\right| \qquad \text{(VII.61)}$$

Нетрудно видеть, что определитель (VII.61) не может обратиться в нуль из-за пропорциональности или линейной комбинации столбцов матрицы, помеченной штриховыми линиями. Действительно, столбцы определителя (VII.61) с первого по t-й, например с порядковыми номерами l и m, могут образовать линейную комбинацию только в том случае, когда соответствующие этим столбцам величины $a_{l\,нб}$ и $a_{m\,нб}$ равны нулю. Последние могут обратиться в нуль только при условии, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial p_l^2} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial p_l^2} = \cdots = \frac{\partial^2\Phi_\kappa}{\partial p_l^2} = 0; \\ \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial p_m^2} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial p_m^2} = \cdots = \frac{\partial^2\Phi_\kappa}{\partial p_m^2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.62)}$$

Равенства (VII.62) могут иметь место только тогда, когда параметры с порядковыми номерами l и m линейно связаны с изменениями всех функций, что практически исключено.

Таким образом, если в матрице производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$ имеются столбцы, образующие линейную комбинацию (иными словами, имеются эквивалентные параметры), то рассмотренный метод в отличие от метода Ньютона может дать решение. При наличии взаимно зависимых функций (пропорциональных строк в матрице $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$) этот метод, так же как и метод Ньютона, не дает решения.

Вторые производные $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i^2}$, входящие в (VII.60), без особых трудностей вычисляются методом конечных разностей путем поочередного изменения коррекционных параметров системы на малые величины $\pm\,\delta p_1$, $\pm\delta p_2$, . . ., $\pm\delta p_l$ и определения значений функций Φ_j.

Обозначим функцию Φ_j, вычисленную при значениях параметров $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, . . ., $p_i^{(0)} + \delta p_i$, . . ., $p_t^{(0)}$, через $\Phi_j^{(+)}$, а при значениях параметров $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, . . ., $p_i^{(0)} - \delta p_i$, . . ., $p_t^{(0)}$ — через $\Phi_j^{(-1)}$. Тогда получим

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i} \approx \frac{\Phi_j^{(+)} - \Phi_j^{(-)}}{2\delta p_i}; \qquad \text{(VII.63)}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i^2} \approx \frac{\Phi_j^{(+)} + \Phi_j^{(-)} - 2\Phi_j^{(0)}}{(\delta p_i)^2}. \qquad \text{(VII.64)}$$

Рассмотрим пример расчета по изложенной методике. Для сопоставления с методом Ньютона выполним расчет фотографического объектива типа триплет (см. стр. 398).

Таблица VII.5

		Заданные значения коэффициентов аберраций		
		$S_{I} = 1{,}9 \pm 0{,}1$; $S_{II} = 0{,}3 \pm 0{,}05$; $S_{III} = -0{,}2 \pm 0{,}02$; $S_{IV} = 0{,}43 \pm 0{,}01$; $S_{V} = 0 \pm 0{,}01$; $S_{I}^{xp} = 0 \pm 0{,}001$; $S_{II}^{xp} = 0 \pm 0{,}001$		
Расстояние между вершинами поверхностей в исходной системе		$d_1 = 0{,}05$; $d_2 = 0{,}1$; $d_3 = 0{,}02$; $d_4 = 0{,}1$; $d_5 = 0{,}05$		
Марки стекол		ТК16; БФ12; ТК16		
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	6-я итерация	13-я итерация
α_2	1,0	1,0282	1,0751	1,7273
α_3	1,5	1,5455	1,6819	2,3887
α_4	0,6	0,5938	0,5146	1,1962
α_5	0,4	0,3404	—0,0872	—0,4120
α_6	0,7	0,5557	0,0640	—0,0182
d_2	0,1	0,1016	0,0980	0,0208
d_4	0,1	0,0831	0,0485	0,0579
S_{I}	1,074	1,200	1,998	1,916
S_{II}	—1,737	—1,637	—0,977	0,313
S_{III}	0,233	0,222	0,132	—0,200
S_{IV}	0,566	0,559	0,515	0,429
S_{V}	0,635	0,623	0,528	—0,001
S_{I}^{xp}	—0,0103	—0,0100	—0,0079	0
S_{II}^{xp}	0,0037	0,0036	0,0030	0
$\frac{\partial S_j}{\partial \psi}$	0,826 2,037 —0,433 —0,136 —0,637 0,0103 —0,0037	0,700 1,937 —0,422 —0,129 —0,623 0,0100 —0,0036	—0,099 1,278 —0,332 —0,085 —0,528 0,0079 —0,0030	—

Марки стекол		ТК16; БФ12; ТК16		
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	6-я итерация	13-я итерация
$\frac{\partial^2 S_j}{\partial \psi^2}$	125,8	37,54	4,48	—
	35,83	16,44	5,54	
	8,03	0,49	0,43	
	—4,00	—1,19	—0,09	
	17,08	3,69	1,31	
	—0,051	—0,014	0,000	
	0,054	0,011	0,006	
$\alpha_1 = 0;\quad h_1 = 1;\quad \beta_1 = 1;\quad \frac{y_5}{\beta_5} = -0{,}03;\quad \alpha_7 = 1$				

Примечание. Через $\frac{\partial S_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 S_j}{\partial \psi^2}$ обозначены первые и вторые производные от соответствующих коэффициентов аберраций по ψ Значения первых производных $\frac{\partial S_j}{\partial \psi}$ хорошо совпадают на каждом шаге со значениями заданных приращений коэффициентов аберраций.

Результаты расчета по этапам сведены в табл. VII.5. Из сравнения табл. VII.4 и VII.5 видно, что для решения по модифицированному методу расчета требуется тринадцать итерационных шагов, а при использовании метода Ньютона процесс не сходится. Однако скорость сходимости итерационного процесса при расчете изложенным методом в значительной степени зависит от выбора начального приближения. т. е. от исходной системы. В табл. VII.6 приведены результаты расчета того же объектива триплет, но исходная система имеет другие значения коррекционных параметров. Эти коррекционные параметры были получены путем автоматического расчета из исходной системы, приведенной в табл. VII.5, причем в качестве функций рассматривались только три величины, а именно S_{IV}, S_{I}^{xp}, S_{II}^{xp}. Сравнение данных, приведенных в табл. VII.6 и VII.4, показывает, насколько резко может замедлиться сходимость при неудачном выборе начального приближения. Зависимость скорости сходимости от начального приближения является существенным недостатком рассмотренного метода.

Таблица VII.6

		Заданные значения коэффициентов аберраций						
		$S_{I} = 1{,}9 \pm 0{,}1$; $S_{II} = 0{,}3 \pm 0{,}05$; $S_{III} = -0{,}2 \pm 0{,}02$; $S_{IV} = 0{,}43 \pm 0{,}01$; $S_{V} = 0 \pm 0{,}01$; $S_{I}^{хр} = 0 \pm 0{,}001$; $S_{II}^{хр} = 0 \pm 0{,}001$						
Расстояния между вершинами поверхностей в исходной системе		$d_1 = 0{,}05$, $d_2 = 0{,}0445$; $d_3 = 0{,}02$; $d_4 = 0{,}0842$; $d_5 = 0{,}05$						
Марки стекол		ТК16; БФ12; ТК16						
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	15-я итерация	30-я итерация	45-я итерация	60-я итерация	75-я итерация	82-я итерация
α_2	1,0184	1,4339	1,5069	1,5727	1,6197	1,6472	1,6753	1,7212
α_3	2,3572	2,5947	2,6379	2,6916	2,7439	2,7379	2,6218	2,4064
α_4	0,6522	1,1887	1,2576	1,3118	1,3393	1,3335	1,2943	1,2062
α_5	−0,5631	−0,2209	−0,1667	−0,1138	−0,0761	−0,0948	−0,2008	−0,3911
α_6	0,8442	0,9591	0,8961	0,7873	0,6152	0,3844	0,1615	−0,0072
d_2	0,0445	0,0270	0,0249	0,0236	0,0234	0,0234	0,0225	0,0210
d_4	0,0842	0,0979	0,1002	0,1030	0.1044	0,0969	0,0789	0,0590
S_{I}	−2,334	2,206	2,182	2,151	2,110	2,061	2,008	1,982
S_{II}	−5,359	−3,207	−2,676	−2,051	−1,346	−0,663	−0,116	0,300
S_{III}	1,400	0,893	0,728	0,532	0,311	0,099	−0,067	−0,189
S_{IV}	0,430	0,421	0,423	0,424	0,426	0,427	0,429	0,430
S_{V}	0,290	0,207	0,176	0,139	0,097	0,057	0,026	0,004
$S_{I}^{хр}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_{II}^{хр}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Марки стекол		ТК16; БФ12, ТК16						
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	15-я итерация	30-я итерация	45-я итерация	60-я итерация	75-я итерация	82-я итерация
$\frac{\partial S_j}{\partial \psi}$	4,234	—0,306	—0,282	—0,251	—0,210	—0,161	—0,107	—
	5,661	3,508	2,977	2,351	1,646	0,963	0,416	
	—1,597	—1,091	—0,927	—0,732	—0,511	—0,299	—0,132	
	0	0,008	0,007	0,006	0,004	0,003	0,001	
	—0,287	—0,206	—0,176	—0,139	—0,097	—0,057	—0,026	
	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{\partial^2 S_j}{\partial \psi^2}$	37,69	28,89	21,26	13,12	7,139	3,822	1,466	—
	—0,236	—1,213	—1,292	—1,156	—0,608	0,347	0,449	
	1,277	0,253	0,008	—0,093	—0,052	0,052	0,062	
	—0,103	—0,038	—0,035	—0,037	—0,036	—0,019	—0,003	
	0,274	0,016	—0,036	—0,027	0.023	0,073	0,049	
	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	

$\alpha_1 = 0;\ h_1 = 1;\ \beta_1 = 1;\ \frac{y_5}{\beta_5} = -0{,}03;\quad \alpha_7 = 1$

Время расчета около 30 *мин*

Вторая модификация метода Ньютона

Вторая модификация метода Ньютона [14] отличается от первой способом выбора величины шага. В первой модификации метода Ньютона величина шага выбиралась таким образом, чтобы разности $\Phi_j^{(s)} - \overline{\Phi}_j$ непрерывно убывали по абсолютной величине. Это требование гарантирует, что ни одна из аберраций в процессе расчета не может ухудшиться по сравнению с исходной системой, если даже задача не решена до конца. Однако выполнение этого требования, как показала практика многочисленных расчетов, в ряде случаев резко замедляет сходимость итерационного процесса.

Во второй модификации величина шага находится из условия миниминизации вспомогательной оценочной функции, что позволяет во многих случаях заметно ускорить сходимость итерационного процесса по сравнению с рассмотренными выше способами автоматического расчета.

Для определения величины шага введем вспомогательную функцию вида

$$F = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left(\frac{\Phi_j - \overline{\Phi}_j}{\delta\Phi_j} \right)^2, \qquad \text{(VII.65)}$$

где $\delta\Phi_j$ — допустимые отклонения от заданных значений функций $\overline{\Phi}_j$. Пусть, как и раньше, переменная ψ характеризует величину шага. Изменения параметров, соответствующие некоторому значению ψ, вычисляются путем умножения результатов решения системы линейных уравнений (VII.26) или системы линейных уравнений (VII.60) $\Delta p_i^{(1)}$ на ψ. Вспомогательная функция F зависит, очевидно, от ψ. Можно найти такое значение величины шага ψ — $\psi_{\min}$, при котором функция F имеет минимум. Условимся в качестве величины шага при каждой итерации принимать $\psi_{\min}$.

Покажем, что если для каждой из функций Φ_j справедливо соотношение (VII.33), то функция F обязательно имеет по крайней мере один минимум. Продифференцируем F по ψ и примем во внимание, что, как было показано в (VII.39), $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi} = \overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}$. Тогда получим

$$\frac{\partial F}{\partial\psi} = -2F^{(0)}, \qquad \text{(VII.66)}$$

где $F^{(0)}$ — значение функции F перед началом очередной итерации. Поскольку $F > 0$, то $\frac{\partial F}{\partial\psi} < 0$, т. е. при движении из исходной точки, соответствующей $\psi = 0$, в сторону положительных значений ψ функция F убывает. Кроме того, функция F непрерывна и не может асимптотически приближаться к какому-либо значе-

нию, поскольку функции Φ_j предполагаются непрерывными и квадратичными. Следовательно, функция F обязательно должна иметь минимум при положительном значении ψ.

Для пояснения метода воспользуемся графическим представлением. Рассмотрим, как и раньше, пространство функций Φ_1 и Φ_2 (рис. VII.5). Исходной системе на графике соответствует точка O, искомой системе — точка A. Кривая OE является траекторией движения точки в пространстве функций при изменении переменной ψ от нуля в сторону положительных значений. Иными словами, кривая OE представляет зависимость между функциями Φ_1 и Φ_2 при одновременном изменении всех коррекционных параметров в соотношении, найденном путем решения системы линейных уравнений (VII.26) или (VII.60). Точка E на этой кривой расположена на минимальном расстоянии от точки A. Расстояние между этими точками равно $\sqrt{F_{\text{extr}}}$, где F_{extr} — минимальное значение функции F.

Рис. VII.5

Для поиска минимума функции F, т. е. для определения оптимального значения величины шага ψ, могут быть предложены различные приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Наиболее просто минимум может быть найден путем движения с некоторым малым шагом $\psi^{(1)}$. Внося в исходную систему изменения коррекционных параметров, равные сначала $\Delta p_i = \psi^{(1)}\Delta p_i^{(1)}$, затем — $\Delta p_i = 2\psi^{(1)}\Delta p_i^{(1)}$, $\Delta p_i = 3\psi^{(1)}\Delta p_i^{(1)}$ и т. д., и вычисляя каждый раз значения функций Φ_j путем расчета хода лучей, а значения величины F — по формуле (VII.65), нетрудно найти с точностью, не меньшей $\pm\psi^{(1)}$, значение $\psi_{\min}$, соответствующее минимуму F. Такой способ поиска минимума надежен, но требует значительных затрат времени.

Воспользуемся приемом экстраполяции значений приращений функций с помощью двучленов, имеющих вид

$$\Phi_j - \Phi_j^{(0)} = \frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\psi^2. \qquad \text{(VII.67)}$$

Подставим значения Φ_j из (VII.67) в (VII.65), продифференцируем F по ψ и приравняем полученную производную нулю. Тогда получим следующее кубическое уравнение:

$$A + B\psi + C\psi^2 + D\psi^3 = 0, \qquad \text{(VII.68)}$$

которое необходимо решить относительно ψ. В этом уравнении

$$A = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{\left(\Phi_j^{(0)} - \overline{\Phi}_j\right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}}{\delta \Phi_j^2}; \qquad \text{(VII.69)}$$

$$B = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{\left[\left(\Phi_j^{(0)} - \overline{\Phi}_j\right) \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2} + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}\right)^2\right]}{\delta \Phi_j^2}; \qquad \text{(VII.70)}$$

$$C = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}}{\delta \Phi_j^2}; \qquad \text{(VII.71)}$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}\right)^2}{\delta \Phi_j^2}. \qquad \text{(VII.72)}$$

Из вещественных корней уравнения (VII.68) в качестве $\psi_{\min}$ принимается наименьший положительный корень. Это объясняется положением минимума функции F (стр. 415) и приближенным характером двучленов (VII.67).

Решение уравнения (VII.68) проще всего может быть осуществлено путем последовательной подстановки в левую часть уравнения значений $\psi = \psi^{(1)}$, $\psi = 2\psi^{(1)}$, $\psi = 3\psi^{(1)}$ и т. д., где $\psi^{(1)}$ — некоторое малое число, например 0,01. То значение ψ, при котором левая часть оказывается наиболее близкой к нулю, принимается за $\psi_{\min}$. Внесем в исходную систему изменения коррекционных параметров, равные $\Delta p_1 = \psi_{\min} \Delta p_1^{(1)}$; $\Delta p_2 = \psi_{\min} \Delta p_2^{(1)}$; . . .; $\Delta p_\kappa = \psi_{\min} \Delta p_\kappa^{(1)}$, т. е. соответствующие $\psi = \psi_{\min}$. Затем рассчитаем по точным формулам (в частности, путем расчета хода лучей) значения функций в системе с измененными значениями коррекционных параметров и проверим, не находятся ли значения всех функций внутри заданных интервалов $\overline{\Phi}_1 \pm \delta\Phi_1$; $\overline{\Phi}_2 \pm \delta\Phi_2$; . . .; $\overline{\Phi}_\kappa \pm \delta\Phi_\kappa$. Если это условие выполнено, то расчет прекращается. В противном случае система с измененными значениями коррекционных параметров принимается за исходную для следующего шага постепенных приближений. Новый шаг начинается с вычисления частных производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}$. Затем решается система линейных уравнений и повторяются все операции, выполнявшиеся на первом шаге. Расчет заканчивается либо тогда, когда все функции окажутся внутри заданных интервалов значений, либо тогда, когда приращения функции F, получаемые за один итерационный шаг, начинают резко уменьшаться по абсолютной величине.

Как и в первой модификации метода Ньютона, расходимость итерационного процесса в данном случае исключена. Действительно, поскольку на каждом шагу итерационного процесса происходит уменьшение оценочной функции и F не может принимать отрицательных значений, то процесс сходится либо к $F = 0$, либо к какому-то значению $F_{пред}$, которое обязательно меньше значения $F^{(0)}$ в исходной системе.

По аналогии с первой модификацией метода Ньютона введем величину

$$\xi^{(s)} = \frac{F^{(s-1)} - F^{(s)}}{F^{(s-1)}}, \qquad \text{(VII.73)}$$

где $F^{(s-1)}$ — значение функции F перед началом выполнения итерационного шага с порядковым номером s; $F^{(s)}$ — значение функции F после выполнения итерационного шага с порядковым номером s. Как и ранее, при $\lim\limits_{s\to\infty} F^{(s)} = F_{пред}$ $\lim\limits_{s\to\infty} \xi^{(s)} = 0$, а при $\lim\limits_{s\to\infty} F^{(s)} = 0$ $\lim\limits_{s\to\infty} \xi^{(s)} = 1$. Проследив за изменением ξ в течение нескольких итерационных шагов, можно установить, удастся ли получить заданные значения функций $\bar{\Phi}_j$. Процесс автоматического расчета необходимо прекратить при выполнении следующего условия:

$$\xi^{(s)} < \xi^{(s-1)} < \varepsilon, \qquad \text{(VII.74)}$$

где ε обычно принимается равным 0,01.

Характерной особенностью второй модификации метода Ньютона в отличие от первой является возможность ухудшения некоторых аберраций на промежуточных стадиях расчета, когда решение удается найти, или возможность ухудшения некоторых аберраций в окончательной системе по сравнению с исходной, если требуемое решение не найдено. Такое положение иногда вызывает нарекания оптиков-конструкторов и жалобы на «ухудшение» машиной качества исходной системы. Однако этот незначительный недостаток метода полностью окупается большим выигрышем в скорости сходимости. Этот метод с успехом используется не только при расчете систем в области аберраций третьего порядка, но и при расчете в области точных значений аберраций. В последнем случае погрешность двучленных формул (VII.67) вызывает иногда нежелательные последствия, например разрыв функций при значениях коррекционных параметров, соответствующих $\psi = \psi_{min}$. Разрыв функций проявляется физически как непрохождение некоторых лучей через систему в результате полного внутреннего отражения или отсутствия точки, в которой данный луч пересекает поверхность.

Для автоматического устранения разрывов функций может быть рекомендован следующий простой прием. Если разрыв произошел при внесении в систему изменений коррекционных

параметров, соответствующих $\psi = \psi_{\min}$, то значение $\psi_{\min}$ уменьшается машиной, например, в два раза и вновь производится расчет хода лучей. Если в этом случае вновь обнаруживается, что некоторые лучи не проходят, то $\psi_{\min}$ опять уменьшается в два раза и т. д.

Повышение точности двучленных формул (VII.67) достигается путем замены экстраполяции интерполяцией. Если значения производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ были найдены при некотором малом значении $\psi^{(1)}$, а величина $\psi_{\min}$ намного превысила $\psi^{(1)}$, то погрешность экстраполяции при этом может быть сколь угодно большой. В таком случае необходимо повторить вычисление производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$, например при значении $\psi^{(1)} = 0{,}75\psi_{\min}$, и вновь определить значение $\psi_{\min}$. С помощью новых значений $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ ход всех функций на интервале от $\psi = 0$ до $\psi = \psi_{\min}$ будет представлен более точно. Пересчет производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\psi^{(1)} \leqslant \psi_{\min} \leqslant 2\psi^{(1)}, \qquad \text{(VII.75)}$$

где $\psi^{(1)}$ — значение ψ, при котором вычисляются производные $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$; $\psi_{\min}$ — величина, найденная по этим величинам производных.

Условие (VII.75) означает, что значение $\psi_{\min}$, которое определяет величину очередного итерационного шага, будет заключено между $\psi^{(1)}$ и $2\psi^{(1)}$. Тем самым экстраполяция значений функций Φ_j сведена к интерполяции на участке, ограниченном значениями $\psi^{(1)}$ и $2\psi^{(1)}$.

Рассмотренная модификация метода Ньютона с успехом применяется на практике. Приведем три примера автоматических расчетов, произведенных на машине «Урал-2».

В качестве первого примера рассмотрим расчет фотографического объектива типа триплет в области аберраций третьего порядка. Исходной будем считать систему из табл. VII.6. Напомним, что с помощью первой модификации метода Ньютона решение было получено за 82 итерации. Результаты расчета с помощью второй модификации приведены в табл. VII.7. Пример наглядно показывает высокую эффективность метода.

В качестве второго примера рассмотрим расчет двухлинзового объектива со значительным воздушным промежутком. Фокусное расстояние объектива $f' = 168{,}8$, относительное отверстие 1 : 4,4. Требуется исправить аберрации для точки на оси: сферическую, сферохроматическую и хроматизм положения. Так как относительное отверстие объектива сравнительно невелико, то можно

	Заданные значения коэффициентов аберраций
	$S_{I} = 1{,}9 \pm 0{,}1$; $S_{II} = 0{,}3 \pm 0{,}05$; $S_{III} = -0{,}2 \pm 0{,}02$; $S_{IV} = 0{,}43 \pm 0{,}01$; $S_{V} = 0 \pm 0{,}01$; $S_{I}^{хр} = 0 \pm 0{,}001$; $S_{II}^{хр} = 0 \pm 0{,}001$
Расстояния между вершинами поверхностей в исходной системе	$d_1 = 0{,}05$; $d_2 = 0{,}0445$; $d_3 = 0{,}02$; $d_4 = 0{,}0842$; $d_5 = 0{,}05$

Марки стекол		ТК16; БФ12; ТК16		
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	4-я итерация	7-я итерация
α_2	1,0184	1,6115	1,6810	1,7240
α_3	2,3572	2,6962	2,7248	2,3817
α_4	0,6522	1,4181	1,3333	1,1901
α_5	—0,5631	—0,0747	—0,1266	—0,4145
α_6	0,8442	1,0082	0,0903	—0,0195
d_2	0,0445	0,0196	0,0239	0,0210
d_4	0,0842	0,1037	0,0814	0,0575
S_{I}	—2,334	6,151	4,194	1,903
S_{II}	—5,359	—2,259	0,313	0,303
S_{III}	1,400	0,739	—0,116	—0,199
S_{IV}	0,430	0,412	0,416	0,430
S_{V}	0,290	0,193	0,061	0
$S_{I}^{хр}$	0	0	0	0
$S_{II}^{хр}$	0	0	0	0

$$\alpha_1 = 0; \quad h_1 = 1; \quad \beta_1 = 1; \quad \frac{y_5}{\beta_5} = -0{,}03; \quad \alpha_7 = 1$$

Время расчета 2 *мин*

Таблица VII.8

		Заданные значения аберраций	
		$(s'_F - s'_C)_0 = 0 \pm 0{,}01$; $\delta l'_F - \delta l'_C = 0 \pm 0{,}01$ и $\delta l' = 0 \pm 0{,}01$ при $m = 20$; $\delta l' = 0 \pm 0{,}1$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$	
Расстояния между вершинами поверхностей в исходной системе		$d_1 = 3{,}5$; $d_2 = 7{,}885$; $d_3 = 9{,}5$	
Марки стекол		ТФ4; К2	
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	2-я итерация
α_2	0,65412	0,81480	0,84973
α_3	—1,22064	—0,82227	—0,84444
α_4	0,19420	0,40690	0,40994
d_2	7,885	10,300	12,283
$(s'_F - s'_C)_0$	1,270	—0,013	—0,003
$\delta l'$ при $m = 20$	—0,146	—0,088	0,000
$\delta l'$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$	—0,045	—0,029	0,001
$\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20$	0,162	0,002	0,001
$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$	—1,270 0,146 0,045 —0,162	0,013 0,088 0,030 0,000	—
$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$	—0,060 —0,159 —0,054 0,018	—0,003 0,006 0,002 —0,002	—
$\alpha_1 = 0$; $h_1 = 168{,}8$; $\alpha_5 = 1{,}0$			
Время расчета около 30 *сек*			

предполагать, что сферическая аберрация будет изменяться по закону третьих и пятых порядков, а сферохроматическая аберрация — по закону третьих порядков. Это означает, что для получения хорошо исправленной системы достаточно задать сферическую аберрацию для двух значений координаты m на зрачке, а для исправления хроматизма положения и сферохроматической аберрации дстаточно задать хроматическую разность $\delta l'_F - \delta l'_C$ на краю отверстия при $m = m_{\max} = 20$ и хроматизм положения $(s'_F - s'_C)_0$. В качестве коррекционных параметров используем α_2, α_3, α_4 и d_2. Исходная система для этого примера получена следующим образом. Параметры α_i, d_i и марка стекла первой линзы взяты из системы, рассчитанной без применения автоматических методов, а марка стекла второй линзы КФ1 заменена маркой К2. Этот пример используется в дальнейшем для сопоставления между собой различных методов автоматического расчета оптических систем в области точных значений аберраций. Результаты расчета с помощью второй модификации метода Ньютона приведены в табл. VII.8.

Таблица VII 9

m	$\delta l'_D$	$\delta l'_F - \delta l'_C$
$20\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,001	0,001
$20\sqrt{\frac{3}{4}}$	0,002	—0,002
20	0,000	0,001

Значения $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ хорошо совпадают на каждом шаге со значениями заданных приращений аберраций. Интересно также отметить, что хроматизм положения и сферохроматическая аберрация более линейно зависят от ψ, чем сферическая аберрация. Действительно, при первой итерации производная $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ для сферической аберрации соизмерима с $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$, в то же время для хроматизма положения и хроматической разности $\delta l'_F - \delta l'_C$ на краю отверстия $\left|\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}\right| \ll \left|\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}\right|$.

Проверим предположение относительно закона изменения сферической и сферохроматической аберраций, сделанное перед началом расчета. Для этого выполним расчет хода лучей с координатой на зрачке, равной $20\sqrt{3/4}$. Результаты расчета сведены в табл. VII.9. Из таблицы видно, что аберрации системы, полученной в результате автоматического расчета, не превышают заданные значения и выбранное перед началом расчета количество лучей и их координаты являются необходимыми и достаточными.

В качестве третьего примера приведем результаты расчета объектива триплет по точным значениям аберраций. В качестве исходной принята та же система, что и в табл. VII.6. Фокусное расстояние объектива равно 100 *мм*, относительное отверстие —

1 : 4, поле зрения $2\beta = 44°$. В табл. VII.10, где даны результаты расчета, приняты следующие обозначения:

$\delta l'_{кр}$ — поперечная сферическая аберрация на краю отверстия;

$\eta_{кр}$ — отступление от условия изопланатизма для края отверстия;

$(l'_F - l'_C)_э$ — поперечная хроматическая аберрация для точки на оси при $m = 8{,}82$;

$\Delta l'_{кр}$ — дисторсия на краю поля зрения;

$(l'_F - l'_C)_{кр}$ — поперечная хроматическая аберрация на краю поля зрения;

$\delta L'_{кр}$ — сагиттальная составляющая поперечной аберрации на краю поля зрения при $m = 0$; $M = 5{,}6$;

$l'_н - l'_{гл}$ — разность координат l' для края поля зрения у луча с $m = 5{,}6$, $M = 0$ и главного луча.

На рис. VII.6 приведены графики аберраций рассчитанной системы.

На рис. VII.7 представлена блок-схема программы для автоматического расчета оптических систем в области точных значений аберраций с помощью второй модификации метода Ньютона.

Блоки *1* и *2* схемы не требуют пояснений. Блок *3* осуществляет перевод чисел из десятичной системы счисления, в которой они записаны на бланке задания, в двоичную систему, в которой работает машина. Блок *4* совместно с блоком *19* осуществляют расчет хода лучей через исходную оптическую систему. Если луч не проходит через какую либо поверхность (из-за полного внутреннего отражения или отсутствия точки встречи луча с поверхностью), то машина обращается к блоку *5*, который осуществляет печать порядкового номера непрошедшего луча и печать порядкового номера поверхности, через которую не смог пройти луч. Эти сведения необходимы конструктору оптической системы для устранения причины непрохождения луча. Блок *6* осуществляет печать значений функций и коррекционных параметров после каждого приближения. Блок *7* служит для фиксации конца решения задачи.

Когда значения всех функций оказываются внутри заданных интервалов $\overline{\Phi}_j \pm \delta\Phi_j$, машина останавливается. В противном случае управление передается блоку *8*, который осуществляет вычисление производных от функций по параметрам $\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i^2}$. Это вычисление осуществляется с помощью формул (VII.63) и (VII.64). Если при внесении в систему изменения, равного δp_i, произошло непрохождение луча, то это означает, что величина δp_i,

Таблица VII.10

Параметры и функции	Исходные значения	Порядковый номер шага					Заданные величины
		1	3	5	7	9	
$\delta l'_{кр}$	0,251	0,980	—0,138	—0,001	—0,004	0,000	0±0,01
$\eta_{кр}$ в %	—5,47	0,41	—0,21	0,01	—0,01	—0,03	0±0,05
$(l'_F - l'_C)_з$	0,00	0,06	0,00	—0,02	—0,013	0,007	0±0,01
$\Delta l'_{кр}$	0,65	1,20	—0,36	—0,08	—0,03	0,07	0±1,00
$(l'_F - l'_C)_{кр}$	0,00	0,06	—0,04	—0,01	0,00	0,00	0±0,01
$\delta L'_{кр}$	—1,09	—0,66	—0,06	—0,09	—0,09	—0,10	—0,080±0,02
$l'_н - l'_{гл}$	—4,87	—1,72	0,20	0,07	0,09	0,09	0,080±0,02
α_2	1,0184	0,5839	1,1253	1,0723	1,1385	1,7690	—
α_3	2,3572	1,2627	1,8990	1,7900	1,9216	1,9667	
α_4	0,6522	0,0470	0,4782	0,4928	0,5916	0,6200	
α_5	—0,5631	—1,9131	—0,4600	—0,4989	—0,4191	—0,4066	
α_6	0,8442	—0,1103	—0,4049	—0,2521	—0,2493	—0,2652	
d_2	4,45	7,79	2,93	5,47	4,75	4,23	
d_4	8,42	1,00	5,92	7,52	7,18	6,36	
Время расчета около 10 *мин*							

tg б'
D
F
0,125
C
0,09
-0,1
0
0,1
δl'
tg б'
0,125
0,09
-0,5
0
0,5
η, %
tg б₁
x_s
0,4
x_m
0,3
-2
0
2
x_m, x_s
tg б'
0,4
0,3
Δl'/l', %
-1
0
1
tg б₁
0,4
0,3
-0,1
0
0,1
l'_F - l'_C
tg б' - tg б'_гл
0,1
tg б₁ = -0,275
0,05
l' - l'_гл
-0,2
-0,1
0
0,1
-0,05
-0,1
tg б' - tg б'_гл
0,1
tg б₁ = -0,405
0,05
l' - l'_гл
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
-0,05
-0,1
tg δ'
0,1
tg б₁ = -0,405
0,05
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
δL'
tg δ'
0,1
tg б₁ = -0,275
0,05
-0,2
-0,1
0
0,1
δL'

Рис. VII.6

Сравнение $\xi = \left|\frac{\Delta F}{F}\right|$ с ε 21
Ввод программы 1
Ввод задания 2
Перевод чисел 10→2 3
Вычисление функций $\Phi_j^{(0)}$ 4
Печать значений Φ_j и p_i 6
Остановка
Расчет функций Φ_j 20
Стандартная программа расчета хода лучей 19
Непрохождение луча
Печать номера луча и номера поверхности 5
Проверка Φ_j на нахождение внутри интервалов $\overline{\Phi}_j \pm \delta\Phi_j$ 7
Остановка
Остановка
Внесение в систему изменений $\Delta p_i = \Delta p_i^{(1)} \psi_{\min}$ 18
$\psi^{(1)} \leqslant \psi_{\min} \leqslant 2\psi^{(1)}$
Уменьшение соответствующего δp_i в 10 раз 9
Вычисление производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial p_i^2}$ 8
Сравнение $\psi_{\min}$ с $\psi^{(1)}$ 16
$\psi^{(1)} = 0{,}75\psi_{\min}$ 17
Уменьшение $\psi^{(1)}$ в 4 раза 13
Решение кубического уравнения относительно $\psi_{\min}$ 15
Вычисление A, B, C и D 14
Вычисление $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ 12
Нахождение $\psi^{(1)}$ 11
Формирование и решение системы линейных уравнений 10

Рис. VII.7

заданная конструктором, чрезмерно велика. В этом случае управление передается блоку *9*, в котором производится уменьшение величины δp_i в 10 раз. Затем продолжается вычисление производных от функций по параметрам с уменьшенным значением величины δp_i.

Если количество функций равно количеству параметров, то формируется и решается система линейных уравнений вида (VII.26). Если количество параметров превышает количество функций, то формируется и решается система линейных уравнений вида (VII.60). Эти операции осуществляет блок *10*. Затем управление передается блоку *11*, с помощью которого находится значение $\psi^{(1)}$ по формуле (VII.34). Найденное значение $\psi^{(1)}$ используется при численном дифференцировании Φ_j по ψ. Это дифференцирование осуществляет блок *12* по формулам (VII.35) и (VII.36). Если при обращении из блока *12* к стандартной программе расчета хода лучей (блок *19*) возникает непрохождение луча, то управление передается блоку *13*, в котором происходит уменьшение значения $\psi^{(1)}$ в 4 раза, а затем управление вновь передается блоку *12*.

После нахождения $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ вычисляются коэффициенты кубического уравнения (VII.68): A (VII.69), B (VII.70), C (VII.71) и D (VII.72). Эти операции производятся в блоке *14*. Решение кубического уравнения относительно величины $\psi_{\min}$, соответствующей минимуму функции F, осуществляется блоком *15*. В блоке *16* осуществляется сравнение $\psi^{(1)}$ с $\psi_{\min}$. Если значение $\psi_{\min}$ окажется лежащим внутри интервала от $\psi^{(1)}$ до $2\psi^{(1)}$, то управление передается блоку *18*, который вносит изменения в систему. Если значение $\psi_{\min}$ не лежит внутри указанного интервала, то необходимо уточнить значения производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$, для чего управление передается блоку *17*, а затем блоку *12*. Новые значения производных вычисляются при $\psi^{(1)} = 0{,}75\psi_{\min}$. Так как производные $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \psi^2}$ рассчитываются по трем значениям ψ ($\psi = 0$, $\psi = \psi^{(1)}$ и $\psi = 2\psi^{(1)}$), то предварительно найденное значение $\psi_{\min}$ будет лежать точно посередине заданного интервала от $\psi^{(1)}$ до $2\psi^{(1)}$. При повторном вычислении значение $\psi_{\min}$ несколько изменится вследствие того, что значения $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$ будут несколько иными. Если при этом условие, проверяемое блоком *16*, будет выполнено, то управление будет передано блоку *18*. В противном случае вновь производятся изменение величины $\psi^{(1)}$ и вычисление производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \psi^2}$.

После внесения изменений в исходную систему осуществляются расчет хода лучей (блок *19*) и определение значений функций Φ_j (блок *20*). Затем управление передается блоку *21*, в котором проверяется скорость сходимости итерационного процесса. Если эта скорость достаточно велика, то управление передается блоку *6*, осуществляющему печать значений функций и коррекционных параметров. Если скорость сходимости меньше некоторой заранее установленной величины ε, то на данном итерационном шаге она запоминается. При выполнении операции блоком *21* на следующем итерационном шаге осуществляется сравнение скоростей сходимости на текущем шаге и предыдущем шаге. Если скорость сходимости уменьшилась, то машина останавливается. После выполнения операции блоком *6* повторяются все перечисленные операции в прежней последовательности. Если решение найдено, то машина выходит на остановку из блока *7*. Если решение не удается найти, то остановка осуществляется при выходе из блока *21*.

Рассмотрим, какую информацию должно содержать задание для автоматического расчета оптических систем в области точных значений аберраций, составляемое оптиком-конструктором. Задание записывается на специальном бланке. Вид бланка определяется типом применяемой машины. Однако независимо от типа машины задание должно содержать вполне определенные величины.

Прежде всего задание должно содержать конструктивные элементы исходной оптической системы. Исходная система может быть задана либо радиусами кривизны поверхностей r_i, расстояниями между вершинами поверхностей d_i, показателями преломления для основной длины волны $n_{\lambda_{0i}}$ и показателями преломления для двух длин волн $n_{\lambda_{1i}}$ и $n_{\lambda_{2i}}$, для которых производится хроматическая коррекция; либо углами первого параксиального луча с осью α_i и, как и в первом случае, d_i, $n_{\lambda_{0i}}$, $n_{\lambda_{1i}}$, $n_{\lambda_{2i}}$. Первый способ задания исходной системы предпочтителен тогда, когда в процессе автоматического расчета должны сохраниться некоторые радиусы кривизны поверхностей. При этом в качестве коррекционных параметров используются обратные значения радиусов, т. е. кривизны поверхностей $\rho_i = \frac{1}{r_i}$. Как показал опыт, радиусы поверхностей r_i являются весьма нелинейными параметрами и использование их в качестве коррекционных параметров приводит к резкому замедлению сходимости.

Второй способ задания исходной оптической системы удобен тем, что исходное фокусное расстояние f' или увеличение β могут автоматически сохраняться в процессе расчета. Для этого достаточно не использовать в качестве коррекционных параметров α'_p и h_1, когда предмет находится на бесконечности, и α_1 и α'_p, когда предмет находится на конечном расстоянии. При первом способе

задания для сохранения фокусного расстояния или увеличения эти величины должны рассматриваться в качестве функций Φ_j.

Положение плоскостей предмета и входного зрачка следует задавать через α_1 и h_1 для первого параксиального луча и через β_1 и H_1 для второго параксиального луча, где α_1 и β_1 — углы этих лучей в пространстве предметов, а h_1 и H_1 — высоты на первой поверхности системы. Такой способ задания плоскостей предмета и входного зрачка позволяет обойти трудности в тех случаях, когда $s_1 = \infty$ или $x_1 = \infty$.

Для определения аберраций системы необходимо задать начальные координаты для расчета лучей, а также указать, какие именно величины должны быть найдены на основании расчета данного луча, т. е. какие именно аберрации рассматриваются в качестве функций. Опыт показывает, что при автоматическом расчете могут быть использованы следующие аберрации:

1. Меридиальная составляющая поперечной аберрации $\delta l'$. Если $\delta l'$ вычисляется для осевого луча, то эта величина представляет собой поперечную сферическую аберрацию. Если $\delta l'$ вычисляется для главного луча, то, очевидно, $\delta l'$ в этом случае соответствует дисторсии.

2. Сагиттальная составляющая поперечной аберрации $\delta L'$.

3. Отступление от условия изопланатизма $\eta = \frac{\Delta s'}{x' - s'} + \frac{\Delta\beta}{\beta}$. Величина η имеет смысл только для осевых лучей и позволяет ограничиться при расчете меньшим количеством лучей, так как приближенно характеризует кому при небольших углах поля зрения.

4. Хроматическая разность поперечных аберраций $l'_{\lambda_2} - l'_{\lambda_1}$. Если $l'_{\lambda_2} - l'_{\lambda_1}$ вычисляется для осевого луча, то эта величина характеризует сумму хроматизма положения и сферохроматической аберрации. Если $l'_{\lambda_2} - l'_{\lambda_1}$ вычисляется для главного луча, то тогда эта величина характеризует хроматизм увеличения.

5. Разность $l' - l'_{гл}$ между меридиональными координатами точек пересечения данного и главного лучей с плоскостью Гаусса.

Среди перечисленных аберраций отсутствует астигматизм. Опыт использования автоматических программ для расчета оптических систем показал, что коррекция систем по широким наклонным пучкам лучей без учета астигматизма не сказывается отрицательно на качестве изображения, а в некоторых случаях были получены системы, обладающие хорошим качеством изображения при сравнительно большом астигматизме.

Перечисленные функции — аберрации действительных лучей — целесообразно дополнить некоторыми величинами, определяемыми на основании расчета хода параксиальных лучей. В качестве таких величин принимаются:

$f'(\beta)$ — фокусное расстояние или увеличение системы;
s_0' — расстояние плоскости Гаусса от последней поверхности системы;
x' — расстояние плоскости выходного зрачка от последней поверхности системы;
$(s'_{\lambda_2} - s'_{\lambda_1})_0$ — хроматизм положения;
$\frac{1}{x'}$ — величина, обратная расстоянию плоскости выходного зрачка системы от последней поверхности.

При расчете окуляров, а также систем с телецентрическим ходом лучей в пространстве изображения величина x' может стать бесконечно большой, что приведет к прекращению итерационного процесса. В таких случаях необходимо пользоваться обратной величиной.

Начальные данные для расчета хода лучей на электронных вычислительных машинах задаются двумя способами: 1) координатами пересечения луча с двумя фиксированными плоскостями, как правило, с плоскостью предмета и с плоскостью входного зрачка; 2) координатами пересечения луча с одной плоскостью, а также направляющими косинусами луча. Первый способ применим только тогда, когда плоскость предмета расположена на конечном расстоянии от системы. Второй способ универсален, так как в случае, когда предмет расположен на бесконечности, задаются координаты пересечения луча с плоскостью входного зрачка и направляющие косинусы луча.

Если электронная вычислительная машина обладает достаточно большой памятью, то можно применить оба способа задания начальных данных для расчета хода лучей. В этом случае на бланке задания должен быть особый признак, с помощью которого машина определяет, какие именно координаты ей заданы. При первом способе задания машина должна рассчитать направляющие косинусы лучей. При втором способе в этом нет необходимости.

Если оперативная память машины недостаточно велика (например, такого порядка, как у машины «Урал-2»), то приходится использовать только второй способ задания начальных данных. Если при этом предмет находится на конечном расстоянии от системы, то направляющие косинусы приходится вычислять оптику-конструктору.

При расчетах на машине «Урал-2» для задания лучей используются следующие величины: μ — направляющий косинус луча с осью OY, равный $\mu = -\sin\sigma$, где σ — угол луча с оптической осью; ν — направляющий косинус луча с осью OZ, причем за меридиональную плоскость принимается плоскость OXY; y — координата точки пересечения луча с плоскостью предмета; z — координата точки пересечения луча с плоскостью предмета

по оси OZ. Если предмет расположен на бесконечно большом расстоянии от системы, то вместо y задается m — координата точки пересечения луча с плоскостью входного зрачка, а вместо z задается M — координата точки пересечения луча с плоскостью входного зрачка по оси OZ.

В задании указываются величины функций $\overline{\Phi}_j$, которыми должна обладать система, полученная в результате расчета, а также допустимые отклонения функций от заданных значений.

Для расчета производных от функций по коррекционным параметрам должны быть заданы величины приращений коррекционных параметров δp_i.

Параметры системы, являющиеся коррекционными, должны быть отмечены в задании. В программах, составленных для машины «Урал-2», коррекционные параметры помечаются записью на бланке задания номеров ячеек, в которых эти параметры хранятся. В более совершенных машинах имеется возможность с помощью особого признака отмечать числа. Этот признак может быть использован для отметки коррекционных параметров.

Практика использования программ автоматического расчета показала, что во избежание незамеченных ошибок при перфорации, а также для удобства оптиков-конструкторов содержание задания целесообразно выдавать на печать. Значения функций и коррекционных параметров следует печатать после каждого итерационного шага, в том числе и в исходной системе. По окончании решения необходимо отпечатать значения радиусов оптических поверхностей, поскольку в качестве коррекционных параметров используются либо ρ_i (кривизны поверхностей), либо α_i (углы первого параксиального луча с осью).

По окончании автоматического расчета в большинстве случаев возникает необходимость получения более подробных сведений о качестве изображения в системе. С этой целью приходится производить расчет некоторых дополнительных лучей, которые при автоматическом выполнении работы не рассчитывались. Для экономии времени целесообразно предусмотреть в программе автоматического расчета возможность задавать такие дополнительные лучи и рассчитывать их ход по окончании последней итерации.

В случаях, когда в качестве функций служат коэффициенты аберраций, блок-схема программы отличается от приведенной на рис. VII.7 только тем, что блок расчета хода лучей заменяется блоком вычисления коэффициентов аберраций, а блок *5* исключается. Целесообразно, чтобы в полученной системе с заданными коэффициентами аберраций расчет хода лучей производился с помощью той же программы. Это избавляет конструктора от необходимости выписывать лишнее задание для расчета хода лучей, что позволяет заметно сократить затраты времени на выполнение работы и уменьшает вероятность возникновения ошибок.

Метод наименьших квадратов и его модификации

Каждому реальному лучу, прошедшему через оптическую систему, соответствует некоторая геометрическая аберрация, представляющая собой расстояние между точкой пересечения данного луча с плоскостью изображения и той точкой, в которую должен попасть такой же луч, распространяющийся по законам параксиальной оптики. Поскольку через любую оптическую систему проходит бесчисленное множество лучей, то количество аберраций κ, учитываемых при расчете, может быть принято сколь угодно большим, в частности, существенно превышающим количество коррекционных параметров t. При $\kappa > t$ для решения задачи автоматического расчета оптических систем может быть использован известный математический метод, получивший название метода наименьших квадратов. Естественно, что когда количество функций κ превышает количество коррекционных параметров t, нельзя требовать, чтобы все рассматриваемые функции Φ_j приняли заданные значения $\overline{\Phi}_j$. Задача считается решенной, когда сумма квадратов разностей между полученными и заданными значениями функций, взятыми с некоторыми весовыми коэффициентами a_j, минимальна. Иначе говоря, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial p_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial p_i} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial p_t} = 0, \qquad \text{(VII.76)}$$

где

$$F = \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j (\Phi_j - \overline{\Phi}_j)^2. \qquad \text{(VII.77)}$$

Пусть, как и прежде, значения функций в исходной оптической системе со значениями коррекционных параметров $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}, \ldots, p_i^{(0)}, \ldots, p_t^{(0)}$ суть $\Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}, \ldots, \Phi_j^{(0)}, \ldots, \Phi_\kappa^{(0)}$. Представим приращения функций в виде разложений в ряды Тейлора по степеням приращений p_i, ограничившись в каждом ряду первым членом разложения:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 - \Phi_1^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i; \\
\Phi_2 - \Phi_2^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_j - \Phi_j^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_i} \Delta p_i.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.78)}$$

Подставим в (VII.78) вместо текущих значений функций заданные значения $\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_\kappa$. Тогда получим так называемую систему κ условных уравнений с t неизвестными, причем $\kappa > t$:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)};\\
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_2 - \Phi_2^{(0)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial p_i} \Delta p_i = \overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.79)}$$

Очевидно, что система условных уравнений несовместна. Из (VII.77) нетрудно получить, что

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j (\Phi_j - \overline{\Phi}_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}. \qquad \text{(VII.80)}$$

Подставив в (VII.80) значение Φ_i из (VII.78) и приняв во внимание (VII.76), находим

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\Phi_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i - \overline{\Phi}_j \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} = 0 \qquad \text{(VII.81)}$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \left(\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i \right) = \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)} \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}. \qquad \text{(VII.82)}$$

Таким образом, условие (VII.76) сводится к системе t линейных уравнений с t неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \right)^2 + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} + \cdots +\\
&+ \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)} \right);
\end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2}\right)^2 + \cdots + \\
&+ \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} (\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}); \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} + \cdots + \\
&+ \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t}\right)^2 = \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} (\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.83)}
$$

Система уравнений (VII.83) носит название системы нормальных уравнений. Для получения i-го нормального уравнения необходимо каждое условное уравнение умножить на $a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}$ и все уравнения сложить.

В результате решения системы нормальных уравнений (VII.83) получим некоторые изменения параметров $\Delta p_i^{(1)}$. Эти изменения параметров в отличие от таковых, получаемых при решении системы линейных уравнений по методу Ньютона, не могут принимать бесконечно больших значений из-за наличия в матрице производных $\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}$ строк или столбцов, образующих линейную комбинацию. Действительно, $\Delta p_i^{(1)}$ могут быть бесконечно велики лишь в том случае, если определитель системы нормальных уравнений равен нулю, а все определители, получаемые путем замены столбцов системы нормальных уравнений на столбец правых частей этой системы, не равны нулю. Рассмотрим определитель системы нормальных уравнений

$$
\begin{vmatrix}
\sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1}\right)^2 & \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \\
\sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2}\right)^2 & \cdots & \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t}\right)^2
\end{vmatrix} = D. \quad \text{(VII.84)}
$$

Пусть элементы строки с порядковым номером l пропорциональны соответствующим элементам строки с порядковым номером m, т. е.

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_l}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_1}}{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_m}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_1}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_l}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_2}}{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_m}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_l}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_t}}{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_m}\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_t}}. \tag{VII.85}$$

Соотношение (VII.85) может иметь место только в том случае, если

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial p_l} : \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_m} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_l} : \frac{\partial\Phi_2}{\partial p_m} = \cdots = \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_l} : \frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial p_m} = \alpha, \tag{VII.86}$$

т. е. тогда, когда параметры с порядковыми номерами l и m эквивалентны. При соблюдении соотношения (VII.86) свободные члены нормальных уравнений с порядковыми номерами l и m связаны между собой следующей зависимостью:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right) \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_l}}{\sum\limits_{j=1}^{j=\kappa} a_j \left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right) \frac{\partial\Phi_j}{\partial p_m}} = \alpha. \tag{VII.87}$$

В то же время, в силу симметрии матрицы (VII.84), соотношению (VII.85) будут удовлетворять также и столбцы с порядковыми номерами l и m. Поэтому все определители, получаемые путем поочередной замены столбцов определителя D на столбец свободных членов, также будут равны нулю. Это означает, что система нормальных уравнений в таком случае оказывается неполной и имеет бесчисленное множество решений. На практике, где оперируют численными методами, определитель не может быть точно равен нулю. Однако малость определителя системы нормальных уравнений приводит к потере точности при решении уравнений. Сопоставляя определитель системы нормальных уравнений и определитель системы при решении задачи методом Ньютона (VII.28), нетрудно видеть, что элементы определителя системы нормальных уравнений, как правило, больше по абсолютным значениям, чем элементы системы Ньютона. Поэтому при решении системы нормальных уравнений на электронных вычислительных машинах следует использовать методы, обеспечивающие максимальную точность. В то же время решение системы линейных уравнений при использовании метода Ньютона может производиться любыми способами, даже обладающими сравнительно невысокой точностью.

Внесем изменения коррекционных параметров $\Delta p_i^{(1)}$, полученные в результате решения системы нормальных уравнений, в исходную систему и произведем расчет значений функций, соответствующих значениям коррекционных параметров, равным $p_1^{(0)} + \Delta p_1^{(1)}$, $p_2^{(0)} + \Delta p_2^{(1)}$, . . ., $p_t^{(0)} + \Delta p_t^{(1)}$. Система, полученная после первого приближения, принимается за исходную для следующего приближения, и процесс вычислений повторяется. Контроль сходимости итерационного процесса может осуществляться, как и в методе Ньютона, либо с помощью оценочной функции F по формуле (VII.65), либо с помощью функции, связанной с изменениями параметров, вида

$$L = \sum_{i=1}^{i=\kappa} (\Delta p_i^{(1)})^2. \qquad \text{(VII.88)}$$

Если процесс сходится, то значение F, а также и значение L должны убывать от шага к шагу. Процесс вычислений следует прекратить, когда относительное приращение функции F, полученное за один итерационный шаг, окажется по абсолютному значению меньше некоторой малой величины ε, т. е.

$$\left| \frac{F^{(s)} - F^{(s-1)}}{F^{(s-1)}} \right| < \varepsilon. \qquad \text{(VII.89)}$$

Для улучшения сходимости итерационного процесса при расчете методом наименьших квадратов разработаны две модификации этого метода. Цель обеих модификаций — ограничить изменения коррекционных параметров на каждом итерационном шаге.

Первая модификация метода наименьших квадратов предложена Левенбергом [9]. Для автоматического расчета оптических систем эту модификацию впервые применил Жирар [10].

Сущность этой модификации состоит в том, что для ограничения изменений коррекционных параметров система нормальных уравнений дополняется уравнениями вида

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \Delta p_1 = 0; \\ k_2 \Delta p_2 = 0; \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ k_i \Delta p_i = 0; \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ k_t \Delta p_t = 0, \end{array}\right\} \qquad \text{(VII.90)}$$

где k_i — некоторые коэффициенты. От выбора коэффициентов k_i во многом зависит успех расчета. Однако до сего времени не предложен ни один достаточно обоснованный способ выбора k_i. Жирар осуществлял решение системы нормальных уравнений несколько раз, меняя коэффициенты k_i по геометрической прогрессии и сравнивая между собой результаты по значению функции F.

Вторая модификация метода наименьших квадратов заключается в том, что результат решения системы нормальных уравнений рассматривается как направление движения, а величина шага в этом направлении определяется путем поиска минимума функции F. Эта модификация имеет много общего со второй модификацией метода Ньютона, и для определения величины шага ψ здесь используются те же приемы, т. е. движение с малым шагом $\psi^{(1)}$ и экстраполяция значений приращений функций с помощью двучленов (VII.67). Следует отметить, что если число коррекционных параметров принять равным числу функций, то метод наименьших квадратов переходит автоматически в метод Ньютона, а вторая модификация метода наименьших квадратов переходит во вторую модификацию метода Ньютона. Действительно, результаты решения системы линейных уравнений Ньютона удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i^{(1)} - \overline{\Phi}_j + \Phi_j^{(0)} = 0. \qquad \text{(VII.91)}$$

В то же время при соблюдении (VII.91) обращаются в нуль и производные $\frac{\partial F}{\partial p_i}$, т. е. значения $\Delta p_i^{(1)}$ удовлетворяют одновременно и системе нормальных уравнений, что непосредственно видно из (VII.81).

В качестве примера рассмотрим расчет двухлинзового объектива с воздушным промежутком. Данные объектива те же, что и в табл. VII.8. В качестве коррекционных параметров примем, как и ранее, α_2, α_3, α_4 и d_2. Поскольку при использовании метода наименьших квадратов количество функций должно превышать количество параметров, то введем в качестве дополнительных функций следующие поперечные аберрации для точки на оси: $\delta l'$ при $m = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$. Расчет выполнялся на машине «Урал-2» с помощью второй модификации метода наименьших квадратов. Результаты расчета приведены в табл. VII.12.

Сравним результаты расчета в табл. VII.12 с результатами расчета того же объектива, полученными с помощью второй модификации метода Ньютона и приведенными в табл. VII.8 и VII.9. Система в табл. VII.8 и VII.9 была рассчитана скорее, чем система в табл. VII.11, и не уступает последней по качеству. Этот пример показывает, что использование теории аберраций для выбора необходимого и достаточного количества лучей в сочетании с автоматическим расчетом с помощью второй модификации метода Ньютона позволяет получать нужные результаты с относительно малыми затратами машинного времени. Метод наименьших

Таблица VII.11

	Заданные значения аберраций
	$(s'_F - s'_C)_0 = 0 \pm 0{,}01$; $\delta l' = 0 \pm 0{,}01$ и $\delta l'_F - \delta l'_C = 0 \pm 0{,}01$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\delta l' = 0 \pm 0{,}01$ и $\delta l'_F - \delta l'_C = 0 \pm 0{,}01$ при $m = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\delta l' = 0 \pm 0{,}01$ и $\delta l'_F - \delta l'_C = 0 \pm 0{,}01$ при $m = 20$
Расстояния между вершинами поверхностей в исходной системе	$d_1 = 3{,}5$; $d_2 = 7{,}885$; $d_3 = 9{,}5$
Марки стекол	ТФ4; К2

Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	2-я итерация	3-я итерация
α_2	0,65412	0,84509	0,83331	0,79000
α_3	—1,22064	—0,74564	—0,87528	—0,86510
α_4	0,19420	0,44610	0,37760	0,33653
d_2	7,885	10,882	14,007	14,819
$(s'_F - s'_C)_0$	1,270	—0,258	0,045	0,004
$\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,112	—0,020	0,005	0,001
$\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$	0,140	—0,024	0,005	0,001
$\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20$	0,162	—0,028	0,003	—0,001
$\delta l'$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$	—0,045	—0,033	0,009	—0,003

Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	2-я итерация	3-я итерация
$\delta l'$ при $m = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$	—0,086	—0,061	0,016	—0,004
$\delta l'$ при $m = 20$	—0,146	—0,096	0,021	—0,007
$\alpha_1 = 0;\quad h_1 = 168{,}8;\quad \alpha_5 = 1{,}0$				
Время расчета около 2 *мин*				

квадратов, предопределяющий превышение количества аберраций над количеством параметров, может использоваться оптиком-конструктором, не имеющим представления о характере аберраций в рассчитываемой системе и даже не знакомым с теорией аберраций вообще. Но при этом значительно возрастают затраты машинного времени на расчет. Кроме того, качество изображения системы зачастую оказывается заниженным из-за несоответствия между ним и функцией (VII.77), используемой для его оценки. Практика показывает, что метод наименьших квадратов можно рекомендовать только для начальных стадий автоматического расчета, когда исходная система весьма далека от требуемой. Вторая модификация метода Ньютона применима как на начальных стадиях расчета, так и для окончательной коррекции оптических систем.

Методы минимизации функции качества

В рассмотренных ранее методах автоматического расчета оптических систем оценочная функция F имеет вспомогательное значение. Так, во второй модификации метода Ньютона с помощью этой функции определяется величина итерационного шага. При использовании метода наименьших квадратов оценочная функция играет большую роль, однако все операции производятся с функциями Φ_j, а функция F участвует в расчетах неявно.

Как уже отмечалось, существует иной подход к автоматическому расчету оптических систем. При этом подходе функция F рассматривается как некоторая физическая характеристика качества изображения, даваемого системой. Задача автоматического расчета сводится к нахождению значений коррекционных параметров, при которых функция качества F принимает минимальное значение. Чаще всего функция качества F связывается

с аберрациями системы следующей зависимостью:

$$F = \sum_{j=1}^{j=\kappa} a_j (\delta l'_j)^2, \qquad \text{(VII.92)}$$

где $\delta l'_j$ — поперечные аберрации системы; a_j — некоторые весовые коэффициенты, учитывающие влияние каждой из аберраций на качество изображения, причем $a_j > 0$.

При такой постановке задачи соотношение между количеством κ аберраций $\delta l'_j$, входящих в функцию качества, и количеством коррекционных параметров t, естественно, может быть произвольным.

Рассмотрим два метода миниминизации оценочной функции. Первый метод весьма просто осуществим, поскольку он использует простой математический аппарат и не требует при составлении программы большого объема оперативной памяти. Этот метод может быть назван методом миниминизации по эффективнейшему параметру. Сущность его состоит в следующем.

Предположим, что между изменением каждого коррекционного параметра Δp_i и изменением функции ΔF существует квадратичная зависимость вида

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial p_i} \Delta p_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2} (\Delta p_i)^2. \qquad \text{(VII.93)}$$

Найдем путем численного дифференцирования производные $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}$, для чего поочередно изменим коррекционные параметры на некоторые малые величины $\pm\delta p_i$, а затем путем расчета хода лучей найдем новые значения аберраций $\delta l'$ и новые значения функции качества. Используя приближенные формулы численного дифференцирования, получим

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{F^{(+)} - F^{(-)}}{2\delta p_i}; \qquad \text{(VII.94)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2} = \frac{F^{(+)} + F^{(-)} - 2F^0}{(\delta p_i)^2}, \qquad \text{(VII.95)}$$

где $F^{(0)}$ — значение функции F в исходной системе; $F^{(+)}$ — значение функции F при замене параметра $p_i^{(0)}$ в исходной системе на $p_i^{(0)} + \delta p_i$; $F^{(-)}$ — значение функции F при замене параметра $p_i^{(0)}$ в исходной системе на $p_i^{(0)} - \delta p_i$.

Из (VII.93) следует, что приращение параметра $p_{i\,\text{extr}}$, соответствующее экстремуму функции F_{extr}, будет равно

$$\Delta p_{i\,\text{extr}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p_i}}{\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}}, \qquad \text{(VII.96)}$$

а соответствующее приращение функции F составит

$$\Delta F_{\text{extr}} = -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}}. \qquad \text{(VII.97)}$$

Нетрудно видеть, что если соотношение (VII.93) фактически имеет место, то $\Delta p_{i\,\text{extr}}$ соответствует минимуму функции F. Действительно, из (VII.92) следует, что F может принимать значения от 0 до $+\infty$, а из (VII.93) вытекает, что имеется по одному экстремуму от каждого параметра.

Используем приращения функции (VII.97) для сравнения отдельных параметров по их эффективности. Очевидно, что параметр, способный вызвать максимальное уменьшение функции F, является наиболее эффективным. Изменим этот параметр на величину $\Delta p_{i\text{extr}}$. На этом заканчивается первый итерационный цикл. Следующий итерационный цикл начинается с вычисления функции F в системе с измененным значением самого эффективного параметра. Затем выполняется расчет производных $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}$, вновь находится самый эффективный параметр и т. д. Расчет прекращается тогда, когда относительное приращение функции качества за один итерационный шаг станет меньше по абсолютному значению некоторой заданной величины ε, т. е. когда

$$\left|\frac{\Delta F}{F}\right| < \varepsilon \qquad \text{(VII.98)}$$

или когда функция F станет меньше некоторой заданной величины $\bar{F}$.

Для анализа возможностей этого метода воспользуемся графическим представлением. Пусть требуется миниминизировать функцию качества, включающую всего две аберрации $\delta l_1'$ и $\delta l_2'$, причем между изменениями параметров p_i и изменениями аберраций существует линейная связь, т. е. соотношение (VII.93) выполняется точно.

Отложим по координатным осям величины $\sqrt{a_1}\delta l_1'$ и $\sqrt{a_2}\delta l_2'$ (рис. VII.8). Исходной оптической системе на графике соответствует точка A с координатами $\sqrt{a_1}\delta l_{1\,(0)}'$; $\sqrt{a_2}\delta l_{2\,(0)}'$. Значение функции качества в исходной системе равняется квадрату расстояния между точкой A и началом координат. При изменении некоторого коррекционного параметра, например p_1, будут изменяться значения аберраций $\delta l_1'$ и $\delta l_2'$, а точки на графике, соответствующие системе с изменениями, будут располагаться на некоторой прямой линии $I—I$, проходящей через точку A. Минимуму функции качества по параметру p_1 на графике соответствует точка A_{I}, расположенная на минимальном расстоянии от

начала координат. Параметр p_2 на графике характеризуется прямой $II—II$. Точка A_{II} соответствует минимуму функции качества при изменении параметра p_2. Пусть в нашем распоряжении имеются лишь два коррекционных параметра p_1 и p_2. Тогда, поскольку $A_I O < A_{II} O$, на первом итерационном шаге параметр p_1 оказывается наиболее эффективным и после выполнения первого шага осуществляется переход в точку A_I. На втором шаге наиболее эффективным оказывается второй параметр, и поэтому после второго шага перейдем в точку A_2. При зигзагообразном движении по ломаной $A_I A_2 A_3 A_4 A_5$ происходит приближение к началу координат. В рассматриваемом случае можно приблизиться к началу координат сколь угодно близко, причем относительное приращение функции качества, начиная со второго шага, будет иметь постоянное значение, равное $\cos^2 \varphi - 1$, что видно из треугольников $OA_I A_2$ и $OA_2 A_3$, где φ — угол между OA_2 и OA_I, равный углу между прямыми $I—I$ и $II—II$.

Рис. VII.8

Таким образом, скорость сходимости определяется в конечном счете углом между прямыми $I—I$ и $II—II$. В том случае, когда этот угол прямой, скорость сходимости будет максимальной и решение будет достигнуто всего за два итерационных шага. Практически такое положение встречается крайне редко, и в большинстве случаев сходимость оказывается весьма медленной.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример расчета двухлинзового объектива со значительным воздушным промежутком. В качестве исходной возьмем ту же систему, что и в табл. VII.8. Пусть, как и ранее, коррекционными параметрами являются α_2, α_3, α_4 и d_2. Результаты расчета приведены в табл. VII.12. Очевидно, что после третьей итерации процесс сходится крайне медленно и производить дальнейшие вычисления не имеет смысла.

Рассмотренный метод имеет лишь историческое значение и не может быть рекомендован для выполнения ответственных расчетов.

Оригинальное усовершенствование этого метода было предложено Б. М. Цейтлиным и И. Ш. Пинскером [2, 3]. Из рис. VII.8 видно, что после достижения точки A_3 можно попасть в требуемую точку O, двигаясь в направлении $A_I A_3$, т. е. одновременно меняя оба параметра в определенном соотношении. Это соотношение может быть получено следующим образом. Пусть точке A_I

Таблица VII.12

		Заданные значения аберраций				
		$(s'_F - s'_C)_0 = 0 \pm 0{,}01$; $\delta l' = 0 \pm 0{,}01$ и $\delta l'_F - \delta l'_C = 0 \pm 0{,}01$ при $m = 20$; $\delta l' = 0 \pm 0{,}01$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$				
Расстояния между вершинами поверхностей в исходной системе		$d_1 = 3{,}5$; $d_2 = 7{,}885$; $d_3 = 9{,}5$				
Марки стекол		ТФ4; К2				
Параметры и функции	Исходные значения	1-я итерация	2-я итерация	3-я итерация	4-я итерация	5-я итерация
α_2	0,65412	0,65412	0,67381	0,67381	0,67422	0,67422
α_3	—1,22064	—0,80521	—0,80521	—0,80521	—0,80521	—0,80521
α_4	0,19420	0,19420	0,19420	0,19420	0,19420	0,19420
d_2	7,885	7,885	7,885	8,204	8,204	8,234
$(s'_F - s'_C)_0$	1,270	0,0079	0,0045	—0,0026	—0,0027	—0,0034
$\delta l'$ при $m = 20$	—0,146	—0,068	0,006	0,0016	0,0032	0,0028
$\delta l'$ при $m = 20\sqrt{\frac{1}{2}}$	—0,045	—0,036	—0,0121	0,0133	0,0129	0,0130
$\delta l'_F - \delta l'_C$ при $m = 20$	0,162	0,019	0,021	0,020	0,0199	0,0197
$\alpha_1 = 0$; $h_1 = 168{,}8$; $\alpha_5 = 1{,}0$						

соответствуют значения параметров $p_1^{(1)}$, $p_2^{(0)}$, точке A_2 — значения параметров $p_1^{(1)}$, $p_2^{(2)}$ и точке A_3 — $p_1^{(3)}$, $p_2^{(2)}$. Тогда, очевидно, движению в направлении A_1A_3 соответствует следующее соотношение между изменениями первого и второго параметров:

$$q = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{p_1^{(3)} - p_1^{(1)}}{p_2^{(2)} - p_2^{(0)}}. \qquad \text{(VII.99)}$$

Таким образом, после достижения точки A_3 производится одновременное изменение двух параметров в соотношении (VII.99). Более детальные сведения об этом методе можно найти в статье [3].

За рубежом неоднократно делались попытки использовать известный метод градиента для автоматического расчета оптических систем [11, 15]. Рассмотрим основы этого метода.

Пусть значение функции качества в исходной точке (для исходной оптической системы) суть $F^{(0)}$. Значения коррекционных параметров в исходной системе равны $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_i^{(0)}, \ldots, p_t^{(0)}$.

Обозначим через P расстояние в пространстве параметров между исходной точкой и точкой с координатами $p_1^{(0)} + \Delta p_1$, $p_2^{(0)} + \Delta p_2, \ldots, p_i^{(0)} + \Delta p_i, \ldots, p_t^{(0)} + \Delta p_t$, т. е.

$$P = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=t} (\Delta p_i)^2}. \qquad \text{(VII.100)}$$

Дадим коррекционным параметрам некоторые произвольные бесконечно малые приращения dp_i. Тогда дифференциал функции качества будет равен

$$dF = \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_i} dp_i, \qquad \text{(VII.101)}$$

а дифференциал расстояния P составит

$$dP = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=t} (dp_i)^2}. \qquad \text{(VII.102)}$$

Найдем направление в пространстве параметров (соотношение между дифференциалами dp_i), при котором скорость изменения функции F, т. е. величина $\frac{dF}{dP}$, максимальна. Для этого примем величину dF постоянной и определим направление движения, соответствующее минимуму dP. Решение задачи сводится, таким образом, к нахождению относительного минимума функции dP при условии, что $dF = \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = \text{const}$. Воспользуемся

методом Лагранжа и образуем функцию

$$L = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=t} (dp_i)^2} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_i} dp_i - dF \right), \quad \text{(VII.103)}$$

где λ — коэффициент Лагранжа.

Относительный экстремум функции dP имеет место при

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = \frac{\partial L}{\partial p_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial p_t} = 0. \quad \text{(VII.104)}$$

Дифференцируя функцию L по p_s, получим

$$\frac{\partial L}{\partial p_s} = \frac{dp_s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=t} (dp_i)^2}} + \lambda \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_s}, \quad \text{(VII.105)}$$

откуда

$$dp_s = -\lambda \sqrt{\sum_{i=1}^{i=t} (dp_i)^2} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_s}. \quad \text{(VII.106)}$$

Таким образом, экстремум функции $\frac{dF}{dP}$ получается при следующем соотношении между дифференциалами:

$$dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_i : \ldots : dp_t =$$

$$= \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_1} : \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_i} : \ldots : \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_t}. \quad \text{(VII.107)}$$

Это соотношение может иметь место как при совпадении знаков у всех величин dp_i и $\frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_i}$, так и при их несовпадении. Отсюда следует, что функция $\frac{dF}{dP}$ имеет всего два экстремума. Найдем экстремальные значения $\frac{\partial F}{\partial P}$, подставив в (VII.101) и (VII.102) dp_i из (VII.107). Получим $\frac{dF}{dP_{\text{extr}}} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{i=t} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right)^2}$. Если вблизи исходной точки функция F непрерывна вместе со своими первыми производными по p_i, то $\frac{\partial F}{dP}$ также непрерывна и изменяется в ограниченных пределах. Таким образом, один из экстремумов функции $\frac{dF}{dP}$ является максимумом, а другой — минимумом, но обе экстремальные точки соответствуют максимальной скорости изменения функции F по абсолютной величине. Вектор, равный по величине $\frac{dF}{dP}$ и направленный в сторону возрастания

функции F, называется градиентом. Движение в направлении, противоположном градиенту, обеспечивает наибольшую скорость уменьшения функции качества F. На основании (VII.107) изменения параметров, соответствующие этому направлению, могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_1^{(1)} &= -\psi \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_1}; \\ \Delta p_2^{(1)} &= -\psi \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_2}; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta p_t^{(1)} &= -\psi \frac{\partial F^{(0)}}{\partial p_t}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.108)}$$

где $\psi > 0$. Величину ψ следует выбрать таким образом, чтобы $\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$. В этом случае движение в направлении, противоположном градиенту, осуществляется до достижения минимума функции F. Экстремальное значение ψ_{extr} может быть найдено либо путем движения с некоторым малым шагом $\psi^{(1)}$, либо путем экстраполяции изменения функции F с помощью двучлена

$$\Delta F = \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \psi} \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \psi^2} \psi^2. \qquad \text{(VII.109)}$$

Производные $\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \psi}$ и $\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \psi^2}$ находятся без особых трудностей с помощью приема, описанного на стр. 400. После вычисления ψ_{extr} по формуле

$$\psi_{\text{extr}} = -\frac{\dfrac{\partial F^{(0)}}{\partial \psi}}{\dfrac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \psi^2}} \qquad \text{(VII.110)}$$

в исходную систему вносятся изменения коррекционных параметров, равные $\Delta p_i = \psi_{\text{extr}} \Delta p_i^{(1)}$. Полученная таким образом система принимается за исходную для следующего итерационного шага. Скорость сходимости процесса оценивается после каждого шага по формуле

$$\nu = \left| \frac{F^{(s+1)} - F^{(s)}}{F^{(s)}} \right|. \qquad \text{(VII.111)}$$

Если $\nu < \varepsilon$, где ε — некоторая заданная величина, то процесс вычислений прекращается.

Сравним метод градиента с методом наименьших квадратов. Напомним, что в методе наименьших квадратов движение осуществляется в направлении, которое обеспечивает выполнение условия $\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial p_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial p_t} = 0$ в предположении, что

между параметрами p_i и функциями Φ_j существует линейная связь. В методе градиента движение осуществляется в направлении, обеспечивающем максимальную скорость убывания функции качества F. При этом не делается никаких предположений относительно характера зависимостей между параметрами и функцией, качества. Нетрудно убедиться, что направления движения в этих двух методах различны. Если между изменениями параметров и функцией качества имеется зависимость, близкая к квадратичной, то метод наименьших квадратов обладает, как правило, лучшей сходимостью, чем градиентный метод. Действительно, если эта зависимость точно квадратичная, т. е. между функцией F и параметрами p_i существует линейная связь, то метод наименьших квадратов даст решение за одну итерацию. Метод градиента не гарантирует получения решения за один шаг даже в этом случае. Действительно, поскольку как в методе наименьших квадратов, так и в методе градиента движение в течение одного шага осуществляется по прямой линии, то попасть из исходной точки в точку, где $\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$, можно только по одному направлению. Но направление движения в методе наименьших квадратов и направление, противоположное градиенту, могут совпадать лишь в частных, весьма редких случаях. Отсюда и следует, что в рассмотренном случае градиентный метод дает худшую сходимость. Утверждать категорически, что всегда метод градиента дает худшую сходимость, чем метод наименьших квадратов, нет достаточных оснований, хотя в некоторых зарубежных работах [12, 13] высказывается такое мнение.

Важное усовершенствование метода градиента было предложено И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным [4]. Предложенный ими метод носит название метода оврагов и позволяет во многих случаях не только найти минимум функции F, ближайший к исходной точке, но и отыскать минимум, в котором функция F имеет наименьшее значение. Упоминание о попытке использования метода оврагов для автоматического расчета оптических систем имеется в работе [5].

Некоторые трудности, связанные с использованием метода Ньютона

При расчете оптических систем с помощью второй модификации метода Ньютона нередки случаи, когда итерационный процесс сходится недостаточно быстро. На примере расчета двусклеенного объектива рассмотрим причины медленной сходимости процесса.

Пусть требуется рассчитать двусклеенный объектив, состоящий из двух бесконечно тонких линз, выполненных из заданных марок стекол. В качестве функций будем полагать величины P

и C — основные параметры бесконечно тонкого компонента. В качестве коррекционных параметров используем углы первого параксиального луча с осью α_2 и α_3.

Известно, что каждому значению C соответствует определенное минимальное значение P, обозначаемое $P_{\min}$. На рис. VII.9 представлен примерный график зависимости $P_{\min}$ от C в виде кривой линии $I—I$. В то же время эта кривая разделяет на две части пространство функций: в незаштрихованной части пространства находится область существования решений, в заштрихованной — область отсутствия решений. Это означает, что сочетания между P и C, соответствующие заштрихованной области, при заданной комбинации стекол не могут быть получены.

Рис. VII.9

Рассмотрим, какими свойствами обладает некоторая точка A, лежащая на границе $I—I$. Обозначим величины P и C в точке A через P_A и C_A. Дифференциалы P и C могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial P}{\partial \alpha_3} d\alpha_3; \\ dC &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial C}{\partial \alpha_3} d\alpha_3. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.112)}$$

Выберем произвольно $d\alpha_2$ и $d\alpha_3$ и вычислим dP и dC. Значениям $P + dP$ и $C + dC$ будет соответствовать новая точка A'. Изменим знаки у величин $d\alpha_2$ и $d\alpha_3$ на обратные. При этом, очевидно, у величин dP и dC знаки также изменятся на обратные. Значениям $P - dP$ и $C - dC$ соответствует точка A''. Точки A' и A'' обязательно должны лежать на касательной к границе $I—I$ в точке A, поскольку точки A' и A'' должны располагаться в незаштрихованной области симметрично относительно точки A. Отсюда вытекает важное свойство точек, лежащих на границе области существования решений: любые бесконечно малые изменения параметров для этих точек приводят в пространстве функций к движению по касательной к границе. Это означает, что функции P и C для точки, лежащей на границе, оказываются зависимыми, т. е. какому-то изменению функции $P - dP$ всегда соответствует определенное изменение функции $C - dC$.

Зависимость между функциями имеет место только тогда, когда якобиан — определитель, составленный из частных

производных от функций по коррекционным параметрам, — равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial P}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial C}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial C}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(VII.113)}$$

Пусть исходной оптической системе соответствует точка K, расположенная весьма близко от границы $I—I$. Требуется получить систему, соответствующую точке B (рис. VII.9). Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} P_B - P_K &= \frac{\partial P}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \frac{\partial P}{\partial \alpha_3}\Delta\alpha_3; \\ C_B - C_K &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \frac{\partial C}{\partial \alpha_3}\Delta\alpha_3. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.114)}$$

Соотношение между изменениями коррекционных параметров $\Delta\alpha_2$ и $\Delta\alpha_3$, полученными в результате решения уравнений (VII.114), определяет прямолинейную траекторию движения в пространстве параметров. В пространстве функций траектория движения, соответствующая указанному соотношению между изменениями параметров, из-за нелинейной зависимости между параметрами и функцией P будет криволинейной. Представим себе, как будет выглядеть эта траектория. Отметим прежде всего, что прямая KB должна быть касательной к траектории в точке K. Действительно, на основании (VII.39) следует

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = P_B - P_K; \qquad \text{(VII.115)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \psi} = C_B - C_K, \qquad \text{(VII.116)}$$

откуда

$$\frac{dP}{dC} = \frac{P_B - P_K}{C_B - C_K}. \qquad \text{(VII.117)}$$

Отметим также, что траектория не может пересекать границу $I—I$. И, наконец, примем во внимание, что величина C линейно зависит от параметров α_2 и α_3, т. е., что $\frac{\partial^2 C}{\partial \psi^2} = 0$. Тогда можно записать

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial \psi}\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}\psi^2; \qquad \text{(VII.118)}$$

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial \psi}\psi,$$

откуда на основании (VII.115) и (VII.116) получим

$$\Delta P = \frac{P_B - P_K}{C_B - C_K} \Delta C + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} \frac{1}{(C_B - C_K)^2} (\Delta C)^2. \quad \text{(VII.119)}$$

Из (VII.119) следует, что с точностью, соответствующей разложению (VII.33), траектория представляет собой параболу, ветви которой направлены в сторону положительных значений P, так как траектория не может пересекать границу $I—I$. Величина $\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}$ должна быть весьма велика, поскольку касательная к траектории в точке K имеет направление KB, а касательная к границе, проходящей близко к точке K по условию, имеет другое направление. На этом основании можно утверждать, что траектория $II—II$ имеет вид узкой параболы. Из рис. VII.9 видно, что, двигаясь по такой траектории, можно приблизиться к точке B весьма незначительно, т. е. скорость сходимости в рассмотренном случае мала. При уменьшении расстояния между исходной точкой K и границей происходит дальнейшее сужение параболы. В пределе ее ветви сливаются, и траектория превращается в геометрический луч, направленный в сторону положительных значений P. Если угол между этим лучом и направлением KB больше 90°, то при движении по такой траектории расстояние до точки B будет возрастать и, следовательно, скорость сходимости будет равна нулю. Если указанный угол меньше 90°, то имеется возможность приблизиться к заданной точке.

Поясним сказанное на численном примере. Требуется рассчитать двусклеенный объектив из стекол К8 и ТФ1 с $P = -2 \pm 0{,}01$ и $C = 0{,}03 \pm 0{,}0001$. Предмет расположен на бесконечности. Принимаем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $h_1 = 1$. Выберем исходную точку поблизости от границы существования решений, т. е. так, чтобы в исходной системе $P \approx P_{\min}$. Из таблицы, приведенной в работе [1], имеем: при $C = 0{,}0025$ $P_{\min} = -1{,}41$; $Q_0 = 5{,}21$; $\varphi_K = 2{,}302$. Путем расчета на логарифмической линейке находим $\alpha_2 = 0{,}528$; $\alpha_3 = 0{,}2544$. Расчет на машине «Урал-2» дает следующие результаты: в исходной системе $P = -1{,}379$; $C = 0{,}002508$; $\frac{\partial P}{\partial \psi} = -0{,}466$; $\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} = 365\,583{,}9$; $\frac{\partial C}{\partial \psi} = 0{,}0275$; $\frac{\partial^2 C}{\partial \psi^2} = -0{,}0008$; $\xi \approx 0{,}000002$. Итак, действительно, в рассматриваемом случае скорость сходимости чрезвычайно мала. В то же время достаточно выбрать исходную точку, расположенную на некотором расстоянии от границы $I—I$, как скорость сходимости становится достаточно большой и решение будет получено быстро. Сказанное иллюстрируется табл. VII.13.

Функции, подобные P и C, можно назвать локально зависимыми. Действительно, зависимости между такими функциями

Таблица VII.13

Параметры и функции	Исходные значения	Итерации				
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
P	1,501	1,459	—1,881	—2,440	—2,064	—2,000
C	—0,0065	—0,0018	+0,0202	0,0267	0,0304	0,0300
α_2	0,528	0,3216	—0,5077	—0,8413	—1,0567	—1,0340
α_3	0,3544	0,0635	—1,1375	—1,5940	—1,8838	—1,8530

имеют место лишь в определенной области. В рассмотренном примере такой области соответствует граница $I—I$.

При расчете оптических систем встречаются функции, которые зависят друг от друга во всей области существования решений. Такие функции можно назвать абсолютно зависимыми. Примером таких функций могут служить, например, коэффициенты аберраций третьего порядка S_{I}, S_{II}, S_{III} для бесконечно тонкой системы. Напомним, что если заданы значения каких-либо двух коэффициентов из указанных трех, например S_{I} и S_{II}, то значение S_{III} точно определено. В этом примере можно считать, что S_{III} зависит от S_{I} и S_{II}. Поэтому $\frac{\partial S_{\mathrm{III}}}{\partial p_i} = k_1 \frac{\partial S_{\mathrm{I}}}{\partial p_i} + k_2 \frac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial p_i}$ и определитель матрицы производных (якобиан) будет равен нулю. Следовательно, если, не зная о существовании указанной зависимости, попытаться рассчитать методом Ньютона бесконечно тонкую систему с заданными коэффициентами S_{I}, S_{II} и S_{III}, то при любом начальном приближении не удастся сделать ни одного итерационного шага.

Из сказанного можно сделать вывод о неприменимости рассмотренных модификаций метода Ньютона при наличии зависимых функций. Для метода наименьших квадратов и градиентных методов наличие зависимых функций никакой опасности не представляет.

Ускорение сходимости итерационного процесса путем вариации направления

В большинстве методов автоматического расчета каждый итерационный шаг разбивается на два этапа. Первый этап заключается в выборе направления движения, т. е. соотношения между изменениями параметров. Этот выбор производится в большинстве случаев в предположении, что между изменениями параметров и изменениями функций существует линейная связь. В действительности такая зависимость имеет обычно весьма сложный характер. Второй этап расчета заключается в выборе величины

шага в найденном направлении. Естественно, что величина шага в общем случае зависит от направления движения. Поэтому путем изменения направления движения можно воздействовать на скорость сходимости с целью уменьшения количества итераций и сокращения времени расчета.

Рассмотрим метод вариации направления движения в сочетании со второй модификацией метода Ньютона. В таком случае, если скорость сходимости итерационного процесса, оцениваемая величиной (VII.73), достаточно велика, то расчет выполняется по методике, описанной на стр. 414—430. Вариация направления производится только в тех случаях, когда скорость сходимости недостаточна.

Изменим на некоторую величину $\Delta\Phi_1$ правую часть первого уравнения системы (VII.26), если количество коррекционных параметров равно числу функций, или первого уравнения системы (VII.60), если количество коррекционных параметров превышает число функций. Тем самым осуществится изменение направления движения в пространстве функций, причем одновременно произойдут поворот касательной к траектории движения и изменение вида самой траектории. При этом изменятся величины $F_{\min}$, $\psi_{\min}$ и ξ. Подберем величину $\Delta\Phi_1$ таким образом, чтобы ξ оказалось максимальным. Если скорость сходимости ξ при этом стала достаточно большой, то выполняется итерационный шаг. В противном случае следует перейти к поиску поправки для правой части второго уравнения, причем правую часть первого уравнения будем полагать равной $\overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)} + \Delta\Phi_1$. Процесс подбора правых частей продолжается до тех пор, пока величина ξ не станет достаточно большой. Если же после подбора правых частей всех уравнений ξ окажется меньше некоторой заданной величины, то расчет следует прекратить.

Рассмотрим один из возможных методов подбора поправок к правым частям уравнений. При внесении поправки $\Delta\Phi_s$ в правую часть какого-либо s-го уравнения первые производные от функций по переменной ψ на основании (VII.39) будут равны

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\psi} &= \overline{\Phi}_1 - \Phi_1^{(0)};\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial\Phi_{s-1}}{\partial\psi} &= \overline{\Phi}_{s-1} - \Phi_{s-1}^{(0)};\\
\frac{\partial\Phi_s}{\partial\psi} &= \overline{\Phi}_s - \Phi_s^{(0)} + \Delta\Phi_s;\\
\frac{\partial\Phi_{s+1}}{\partial\psi} &= \overline{\Phi}_{s+1} - \Phi_{s+1}^{(0)}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial\Phi_\kappa}{\partial\psi} &= \overline{\Phi}_\kappa - \Phi_\kappa^{(0)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.120)}$$

Найдем зависимости вторых производных от поправки $\Delta\Phi_s$. Для этого запишем изменения параметров в виде

$$\Delta p_i = \sum_{j=1}^{j=\kappa} b_{i,\,j}\left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right),$$

где $b_{i,\,j}$ — элементы обратной матрицы по отношению к матрице, составленной из коэффициентов системы линейных уравнений (VII.26) или (VII.60). При изменении правой части s-го уравнения на величину $\Delta\Phi_s$ изменения параметров Δp_i окажутся равными

$$\Delta p_i = \sum_{j=1}^{j=s-1} b_{i,\,j}\left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right) + b_{i,\,s}\left(\overline{\Phi}_s - \Phi_s^{(0)} + \Delta\Phi_s\right) +$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{j=\kappa} b_{i,\,j}\left(\overline{\Phi}_j - \Phi_j^{(0)}\right). \qquad \text{(VII.121)}$$

Поскольку по формуле (VII.49) $\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2} = \sum\limits_{i=1}^{i=t}\sum\limits_{l=1}^{l=t} \dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial p_i\,\partial p_l}\,\Delta p_i\,\Delta p_l$,

то на основании (VII.121) легко получить, что

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\psi^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\psi^2}\right)_0 + A_{j,\,s}\Delta\varphi_s + B_{j,\,s}(\Delta\varphi_s)^2, \qquad \text{(VII.122)}$$

где $\left(\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\right)_0$ — значение второй производной при $\Delta\Phi_s = 0$. Для определения коэффициентов $A_{j,\,s}$ и $B_{j,\,s}$ достаточно вычислить значения $\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$ при двух значениях правых частей s-го уравнения, например при $\overline{\Phi}_s - \Phi_s^{(0)} + \delta\Phi_s$ и $\overline{\Phi}_s - \Phi_s^{(0)} - \delta\Phi_s$, где $\delta\Phi_s$ — допуски на величины $\overline{\Phi}_s$. Обозначим производные $\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$, соответствующие поправкам $\delta\Phi_s$ и $-\delta\Phi_s$, через $f_j^{(+)}$ и $f_j^{(-)}$ соответственно. Тогда

$$A_{j,\,s} = \frac{f_j^{(+)} - f_j^{(-)}}{2\delta\Phi_s}; \qquad \text{(VII.123)}$$

$$B_{j,\,s} = \frac{f_j^{(+)} + f_j^{(-)} - 2f_j^{(0)}}{(\delta\Phi_s)^2}, \qquad \text{(VII.124)}$$

где $f_j^{(0)}$ — значение $\dfrac{\partial_2\Phi_j}{\partial\psi^2}$ при $\Delta\Phi_s = 0$.

Таким образом, если коэффициенты $A_{j,\,s}$ и $B_{j,\,s}$ найдены, то с помощью экстраполяционной формулы (VII.122) легко вычисляются значения вторых производных $\dfrac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$, соответствующие

определенной величине $\Delta\Phi_s$. Значения первых производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ находим по формулам (VII.120). На основании этих зависимостей процесс подбора поправки к правой части s-го уравнения, соответствующей максимуму скорости сходимости ξ, удается свести к следующим операциям:

1. Изменим правую часть s-го уравнения на величину $\delta\Phi_s$, т. е. примем ее равной $\overline{\Phi}_s - \Phi_s^{(0)} + \delta\Phi_s$. Решим систему линейных уравнений (VII.26) или (VII.60) в зависимости от соотношения между количеством функций и количеством коррекционных параметров. Найдем значения производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$, пользуясь методом, изложенным на стр. 401. По формулам (VII.69)—(VII.72) вычислим коэффициенты A, B, C и D кубического уравнения (VII.68) и решим его относительно $\psi_{\min}$. Значение функции F (VII.65), соответствующее $\psi_{\min}$, определим по экстраполяционной формуле, вытекающей из (VII.33):

$$F_{\min} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left(\frac{\Phi_j^{(0)} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}\psi_{\min} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}\psi_{\min}^2}{\delta\Phi_j} \right)^2. \quad \text{(VII.125)}$$

Найдем скорость сходимости итерационного процесса по формуле

$$\xi = \frac{F^{(0)} - F_{\min}}{F^{(0)}}. \quad \text{(VII.126)}$$

2. Изменим правую часть того же уравнения на величину $-\delta\Phi_s$, т. е. примем ее равной $\overline{\Phi}_s - \Phi_s^{(0)} - \delta\Phi_s$. Затем повторим действия, изложенные в пункте 1.

3. Сравним скорости сходимости ξ, соответствующие поправкам $+\delta\Phi_s$, $-\delta\Phi_s$, и начальную скорость сходимости, когда поправка равна нулю. На основании этого сравнения определим знак поправки, обеспечивающей ускорение сходимости. В том случае, если наибольшее значение скорости сходимости соответствует нулевой поправке, нужно перейти к подбору поправки для правой части следующего уравнения.

4. По данным, полученным в результате выполнения пунктов 1 и 2, определим значения коэффициентов $A_{j,s}$(VII.123) и $B_{j,s}$ (VII.124) экстраполяционной формулы (VII.122).

5. Положим $\Delta\Phi_s = 2\delta\Phi_s$. При этом величине $\Delta\Phi_s$ присваивается знак в соответствии с пунктом 3. По формулам (VII.120) и (VII.122) найдем значения производных $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$, а затем повторим операции, изложенные в пункте 1, т. е. сначала вычислим коэффициенты кубического уравнения, решим его и т. д.

6. Проверим, продолжает ли возрастать скорость сходимости при увеличении абсолютного значения поправки. Если скорость продолжает возрастать, то положим $\Delta\Phi_s = 3\delta\Phi_s$ и повторим действия, изложенные в пункте 5. Процесс подбора продолжается до тех пор, пока скорость ξ возрастает. Поправка, соответствующая максимальной скорости, вносится в правую часть s-го уравнения, а затем решается система линейных уравнений, путем численного дифференцирования определяются производные $\frac{\partial\Phi_j}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\psi^2}$ и повторяются остальные действия, изложенные в пункте 1.

Если скорость сходимости, вычисленная по формуле (VII.126), после внесения поправки в правую часть s-го уравнения оказывается достаточно большой, то выполняется итерационный шаг, т. е. в систему вносятся изменения. В противном случае осуществляется поиск поправки для правой части следующего $s + 1$-го уравнения.

Проиллюстрируем на примере, рассмотренном на стр. 449, какие результаты может дать удачный выбор направления движения.

Исходная система — двусклеенный объектив — имеет $P = -1{,}379 \approx P_{\min}$ при $C = 0{,}0025$. Требуется рассчитать объектив с $P = -2 \pm 0{,}01$ и $C = 0{,}03 \pm 0{,}0001$. Частные производные от функций по параметрам равны

$$\frac{\partial P}{\partial\alpha_2} = -51{,}61; \quad \frac{\partial C}{\partial\alpha_2} = 0{,}104; \quad \frac{\partial P}{\partial\alpha_3} = 44{,}59; \quad \frac{\partial C}{\partial\alpha_3} = -0{,}090.$$

Таким образом, при изменении первого параметра α_2 соотношение между изменениями P и C составляет $\frac{\Delta P}{\Delta C} = -\frac{51{,}64}{0{,}104} = -496$. При изменении второго параметра α_3 $\frac{\Delta P}{\Delta C} = -\frac{44{,}59}{0{,}090} = -494$. Попытаемся осуществить шаг, двигаясь в направлении, среднем между направлениями, которые соответствуют изменениям отдельных параметров, т. е. положим $\frac{\Delta P}{\Delta C} = -495$. Заданное приращение $\Delta C = 0{,}03 - 0{,}0025 = 0{,}0275$. Заданное приращение ΔP составит $\Delta P = -495\ \Delta C = -13{,}61$. В этом направлении сделаем итерационный шаг, обеспечивающий получение минимума оценочной функции $F = \left(\frac{P - \overline{P}}{\delta P}\right)^2 + \left(\frac{C - \overline{C}}{\delta C}\right)^2$. Результаты представлены в табл. VII.14. Очевидно, что в результате первого шага удалось выйти из области локальной зависимости между функциями P и C. Остальные итерации выполнены с помощью второй модификации метода Ньютона без вариации первоначального направления.

Таблица VII.14

Функции и производные	Исходные значения	Итерации					
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
P	—1,379	—2,5588	—1,288	—0,930	—0,706	—2,149	—1,995
C	0,0025	0,0047	0,0052	0,0089	0,0184	0,0288	0,030
$\frac{\partial P}{\partial \psi}$	—13,601	0,544	—0,708	—1,066	—1,291	0,150	—
$\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}$	—28,40	6282,0	40,55	6,803	0,573	0,020	—
$\frac{\partial C}{\partial \psi}$	0,0275	0,0253	0,0248	0,0211	0,0116	0,0012	—
$\frac{\partial^2 C}{\partial \psi^2}$	0	0	0	0	0	0	—

Пример автоматического расчета объектива для микроскопа

Рассмотрим пример расчета объектива для микроскопов с использованием электронной вычислительной машины «Урал-2».

Требуется рассчитать ахроматический объектив с высокопреломляющей йод-метиленовой иммерсией для рудного микроскопа. Эта иммерсия имеет показатель преломления, близкий к показателям преломления пленок окислов, покрывающих поверхностные участки образцов руд, что позволяет значительно повысить контраст изображения структуры. Объектив должен быть исправлен для бесконечно удаленного изображения. За объективом помещается ахроматическая линза с фокусным расстоянием 250 *мм*. Фокусное расстояние объектива должно составлять 4 *мм*, числовая апертура — 0,85. Расстояние предмета от первой поверхности объектива — рабочее расстояние — должно составлять не менее 0,6 *мм*. Линейное поле зрения в пространстве изображения, т. е. в задней фокальной плоскости ахроматической линзы, должно быть равным $2l' = 18$ *мм*. Хроматизм увеличения объектива в относительной мере должен составлять 1,5—2%, поскольку в комплект микроскопа входят компенсационные окуляры, имеющие хроматизм увеличения такого же порядка. С целью упрощения конструкции допускается наличие кривизны изображения.

Из опыта расчета систем с подобными характеристиками известно, что схема, представленная на рис. VII.10, может удовлетворить поставленным требованиям. Конструкции такого типа широко применяются в микроскопии, их свойства довольно

хорошо изучены, и поэтому нет необходимости в предварительной подгонке коэффициентов аберраций третьего порядка. Целесообразно с самого начала воспользоваться программой для автоматической подгонки точных значений аберраций.

Зададимся значениями конструктивных параметров в исходной системе. Фронтальную линзу выполним из стекла СТК9, показатель преломления которого для спектральной линии D близок к показателю преломления йод-метиленовой иммерсии (у СТК9 $n_D = 1{,}7424$, у иммерсии $n_D = 1{,}74129$). Тогда фронтальная линза может быть выполнена апланатической независимо от радиуса первой поверхности, которая в нашем случае для удобства чистки объектива должна быть плоской. Числовая апертура после фронтальной линзы составит в таком случае $\sin\sigma = \frac{\sin\sigma_1}{n_2^2} = 0{,}28$, что позволит получить незначительные аберрации высших порядков в следующих компонентах объектива.

Рис. VII.10

Полагаем угол первого параксиального луча с осью в пространстве предметов равным $\alpha_1 = 1$. После преломления на первой поверхности $\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1 = 0{,}99936$. После фронтальной линзы $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{n_2} = 0{,}574$. Так как изображение после объектива должно располагаться на бесконечности, то $\alpha_{11} = 0$. Распределим величины $\Delta\alpha$ равномерно между последними тремя компонентами объектива. Поскольку $\alpha_3 = 0{,}574$, а $\alpha_{11} = 0$, то

$$\alpha_3 - \alpha_5 = \alpha_5 - \alpha_8 = \alpha_8 - \alpha_{11} = \frac{0{,}574}{3} \approx 0{,}192.$$

Отсюда находим $\alpha_8 = 0{,}192$, $\alpha_5 = 0{,}384$. Угол α_4 примем равным $\alpha_4 = \frac{\alpha_3 + \alpha_5}{2} = 0{,}484$. В качестве материалов для положительных линз принимаем стекло К8, для отрицательных линз — стекло ТФ1. Пусть в исходной системе пятая и восьмая поверхности объектива будут плоскими. Тогда $\alpha_6 = \frac{\alpha_5}{n_6} = 0{,}232$, $\alpha_9 = \frac{\alpha_8}{n_9} = 0{,}117$. Остается выбрать исходные значения для α_7 и α_{10}. Эти углы следует выбрать с учетом двух требований. Во-первых, в положительном склеенном компоненте отрицательная линза должна быть выполнена из флинта, а положительная — из крона, что обеспечивает исправление сферической аберрации и хроматизма положения. В рассматриваемом случае это означает, что r_6 и r_9 должны быть положительными. Поскольку $r = h\frac{\Delta n}{\Delta\alpha n}$, а $h < 0$ и $\Delta n < 0$, то $\Delta\alpha n > 0$. Во-вторых, в исходной системе обязательно должны проходить без полного внутреннего

отражения все лучи. В нашем случае поле зрения невелико и опасность непрохождения существует для крайнего луча точки на оси. Синус угла падения крайнего осевого луча на любую поверхность может быть ориентировочно определен по формуле

$$\sin i_\kappa \approx \frac{1}{n_\kappa} \frac{\alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa}{\frac{1}{n_{\kappa+1}} - \frac{1}{n_\kappa}} \frac{\sin \sigma_1}{\alpha_1}, \qquad \text{(VII.127)}$$

где i_κ — угол падения луча на поверхность с порядковым номером κ; σ_1 — угол крайнего луча с осью в пространстве предметов.

Положим $\alpha_7 = 0{,}3$, $\alpha_{10} = 0{,}2$. Тогда по формуле (VII.127) находим $\sin i_9 = 0{,}456$, $\sin i_6 = 0{,}374$. Такие углы падения вполне допустимы.

Зададимся толщинами линз и величинами воздушных промежутков. Толщины линз могут быть выбраны по аналогии с другими объективами, имеющими подобные характеристики. Воздушные промежутки d_2 и d_4 полагаем равными 0,1 *мм*. Толщины линз принимаем следующими: $d_1 = 2{,}8$ *мм*, $d_3 = 1{,}5$ *мм*, $d_5 = 1{,}2$ *мм*, $d_6 = 2{,}5$ *мм*, $d_8 = 1{,}5$ *мм*, $d_9 = 3$ *мм*. Воздушный промежуток d_7 зададим таким образом, чтобы исходная система имела требуемое фокусное расстояние, т. е. 4 *мм*. Для этого предварительно найдем высоту первого параксиального луча на седьмой поверхности по формуле $h_\kappa = s_1\alpha_1 - \sum_{i=2}^{i=\kappa} \alpha_i d_{i-1}$. Вычисление с помощью логарифмической линейки дает $h_7 = 5{,}25$. Высота луча на последней поверхности h_{10} должна равняться $h_{10} = -n_1\alpha_1 f' = -6{,}965$. Высота луча на восьмой поверхности составит $h_8 = h_{10} - \sum_{i=8}^{i=9} \alpha_{i+1} d_i = -6{,}189$. Нетрудно найти теперь, что $d_7 = \frac{h_8 - h_7}{\alpha_8} = 4{,}89$.

Перейдем к выбору функций. Расчет объектива будем вести в прямом ходе лучей с дополнительной ахроматической линзой с $f' = 250$ *мм*. Конструктивные элементы линзы заданы. Поэтому для сохранения конструктивных элементов линзы в процессе расчета необходимо не только сохранять неизменными соответствующие углы α_i, но и выдерживать постоянным последний отрезок, т. е. расстояние от последней поверхности ахроматической линзы до плоскости Гаусса s_0'. Эта величина является первой функцией. Для исправления сферической аберрации и комы на первом этапе расчета достаточно задать равными нулю значения поперечной сферической аберрации $\delta l'_{\kappa p}$ и отступления от условия изопланатизма $\eta_{\kappa p}$ на краю отверстия. Можно предполагать, что значения этих величин для зоны отверстия будут находиться в допустимых пределах, что гарантируется конструкцией объектива.

С целью исправления хроматизма положения зададим равным нулю значение $(l'_F - l'_C)$ для точки на оси для зоны отверстия, т. е. при числовой апертуре $0{,}85\sqrt{1/2}$. Объектив выбранной конструкции будет обладать значительной кривизной изображения, которая практически не будет изменяться в процессе расчета, если конструктивные параметры фронтальной линзы будут сохраняться постоянными, поскольку кривизна изображения определяется в основном фронтальной линзой. Для исправления астигматизма достаточно задать значение сагиттальной кривизны x'_s для края поля зрения, равной кривизне Пецваля x'_p. Найдем примерное значение кривизны Пецваля. Определим радиус кривизны второй поверхности фронтальной линзы. Для апланатической поверхности имеем

$$r_2 = s_2 \frac{n_2}{n_2 + n_3} \approx (s_1 - d_1)\frac{n_2}{n_2 + n_3} = -(0{,}6 + 2{,}8)\frac{1{,}7424}{2{,}7424} = -2{,}16.$$

Таким образом, для фронтальной линзы $S_{IV} = -\dfrac{\Delta \frac{1}{n}}{r_2} = \dfrac{1 - \frac{1}{1{,}7424}}{2{,}16} = 0{,}195$. Коэффициент Пецваля S_{IV} для остальной части объектива при нормировке $f' = 1$ можно полагать примерно равным $S_{IV} = 1$. Такое значение коэффициента обычно имеют анастигматы, выполненные из двух сравнительно тонких частей, разделенных значительным воздушным промежутком. Фокусное расстояние части объектива, расположенной за фронтальной линзой, в исходной системе составляет $f' = -\dfrac{h_{10}}{\alpha_3} = \dfrac{6{,}965}{0{,}574} = 12{,}1$. Тогда коэффициент Пецваля для всего объектива при $f' = 4$ *мм* составит $S_{IV} = \dfrac{1}{12{,}1} + 0{,}195 = 0{,}278$. Кривизна Пецваля в пространстве изображений составит примерно $x'_p = -\dfrac{1}{2} S_{IV} l'^2 = -\dfrac{1}{2}\, 0{,}278 \cdot 9^2 = -11{,}3$.

Как уже было отмечено, в программе для автоматической подгонки аберраций на машине «Урал-2» не предусмотрен расчет сагиттальной и меридиональной составляющих кривизны изображения. Поэтому вместо величины x'_s зададим сагиттальную составляющую поперечной аберрации $\delta L'$ для косого луча, идущего из края поля зрения и образующего со своей проекцией на меридиональную плоскость угол, соответствующий апертуре объектива. Величина $\delta L'$ для косого луча, лежащего в сагиттальной плоскости, представляет собой сумму трех аберраций: сферической для точки на оси, полевой сферической аберрации и произведения $x'_s \operatorname{tg} \delta'$, где δ' — угол в пространстве изображений между лучом и его проекцией на меридиональную плоскость. В рас-

сматриваемом случае из-за малости поля зрения можно предполагать, что полевая сферическая аберрация будет незначительна. Сферическая аберрация для края отверстия задана равной нулю. Поэтому $\delta L' \approx x_s \operatorname{tg} \delta' = -11{,}3 \frac{0{,}85 \cdot 4}{250} \approx -0{,}15$.

Хроматизм увеличения задан весьма широкими пределами, и поэтому на первой стадии расчета можно не рассматривать его в качестве функции. Таким образом, ограничимся всего лишь пятью функциями.

В качестве коррекционных параметров будем использовать величины α_6, α_7, α_8, α_9, α_{10} и d_7. Толщины линз в такой конструкции, как известно, не являются действенными параметрами. Величины α_4 и α_5 менять нежелательно, так как существует опасность возникновения рефлексов от поверхностей второй линзы, поскольку освещение объекта производится через объектив. При таком способе освещения наибольшие рефлексы возникают от поверхностей, для которых $\Delta\alpha \approx 0$. В исходной системе все значения величин $\Delta\alpha$, включая и вторую линзу, выбраны достаточно большими.

Таким образом, в нашем случае количество коррекционных параметров превышает количество функций. Для автоматического расчета воспользуемся программой, основанной на второй модификации метода Ньютона. Результаты расчета сведены в табл. VII.15.

В табл. VII.16 приведены результаты расчета хода дополнительных лучей в рассчитанной системе, полученные по той же программе и тому же заданию.

Таблица VII.15

Функции и параметры	Исходные значения	Окончательная система	Заданные значения
s_0'	248,89	248,94	248,95±0,01
$\delta l'_{кр}$	2,69	0,004	0±0,005
$\eta_{кр}$ в %	13,02	0,03	0±0,05
$(l'_F - l'_C)_з$	0,345	0,001	0±0,001
$\delta L'_{кр}$	2,53	—0,166	—0,15±0,02
α_6	0,232	0,15149	—
α_7	0,3	0,20986	
α_8	0,192	0,12660	
α_9	0,117	0,09589	
α_{10}	0,2	0,15295	
d_7	4,89	11,42	

Таблица VII.16

Точка на оси	Точка вне оси ($l' = 9$)	
	$n_1(\sin\sigma_1 - \sin\sigma_{1\,гл})$	$l' - l'_{гл}$
$\delta l'_з = -0{,}014$ $\eta_з = -0{,}03\%$ $(l'_F - l'_C)_{кр} = 0{,}094$	$0{,}85$	$-0{,}036$
	$0{,}85\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-0{,}096$
	$-0{,}85\sqrt{\frac{1}{2}}$	$0{,}116$
	$-0{,}85$	$0{,}190$
	$\frac{l'_F - l'_C}{l'_D} = 2{,}85\%$	

В таблице $\delta l'_з$ — поперечная сферическая аберрация для апертуры $0{,}85\sqrt{1/2}$; $\eta_з$ — отступление от условия изопланатизма для апертуры $0{,}85\sqrt{1/2}$; $(l'_F - l'_C)_{кр}$ — поперечная хроматическая аберрация для предельного значения апертуры; $l' - l'_{гл}$ — разность координат l' для меридиональных лучей и $l'_{гл}$ для главного луча; $\frac{l'_F - l'_C}{l'_D}$ — хроматизм увеличения в относительной мере для края поля зрения.

Проанализируем полученные результаты. Сферическая аберрация и отступление от условия изопланатизма весьма незначительны. Аберрации меридиональных лучей на краю поля зрения не превосходят величин, допустимых для обычных ахроматов. Сферохроматическая аберрация удовлетворительна и также не превышает допустимых величин. Вопреки ожиданиям хроматизм увеличения недопустимо велик. Поэтому следует повторить расчет, добавив еще одну функцию — значение хроматизма увеличения. Увеличим одновременно количество коррекционных параметров до семи, добавив к принимавшимся ранее α_4.

Результаты расчета сведены в табл. VII.17. Значения аберраций в окончательной системе весьма велики. На основании двух попыток расчета можно сделать следующий вывод: хроматизм увеличения в системе с предварительно выбранными марками стекол не поддается исправлению. Обычно в системах такого типа фронтальная линза выполняется из простого крона. Хроматизм увеличения объектива в значительной мере определяется

Таблица VII.17

Функции и параметры	Исходные значения	Окончательная система	Заданные значения
s_0'	248,89	249,86	248,95±0,01
$\delta l_{кр}'$	2,69	—0,67	0±0,005
$\eta_{кр}$ в %	13,02	3,27	0±0,05
$(l_F' - l_C')_э$	0,345	0,063	0±0,001
$\delta L_{кр}''$	2,53	—0,832	—0,15±0,02
$\frac{l_F' - l_C'}{l_D'}$ в %	1,96	1,92	2±0,1
α_4	0,484	0,36070	—
α_6	0,232	0,39369	
α_7	0,3	0,39767	
α_8	0,192	0,13425	
α_9	0,117	0,18186	
α_{10}	0,2	0,27184	
d_7	4,89	2,98	

хроматизмом увеличения фронтальной линзы. В рассматриваемом случае фронтальная линза выполнялась из стекла СТК9 с коэффициентом дисперсии $\gamma = 50{,}2$. Если фронтальную линзу выполнить из стекла К8 с коэффициентом дисперсии $\gamma = 64{,}1$, то можно ожидать, что хроматизм увеличения заметно уменьшится. Однако при этом фронтальная линза перестанет быть апланатичной, поскольку первая поверхность линзы для удобства чистки делается плоской. Можно предполагать, что в таком случае возрастут аберрации высших порядков для точки на оси. Но из табл. VII.16 видно, что в системе, где фронтальная линза выполнялась из стекла СТК9, высшие порядки сферической аберрации и отступления от условия изопланатизма были весьма малы. Поэтому можно допустить некоторое увеличение этих аберраций.

Выбор исходных значений α_i произведем так же, как это было сделано выше. Вторая поверхность фронтальной линзы апланатическая. Поскольку увеличение фронтальной линзы при использовании стекла с меньшим показателем преломления заметно уменьшается, то приходится изменять значения всех углов первого параксиального луча с осью. Марки стекол второй, третьей, четвертой, пятой и шестой линз сохраняем прежними. Конструктивные параметры исходной системы представлены в табл. VII.18. В качестве коррекционных параметров используем

Таблица VII.18

α_i	d_i	Марка стекла	
1,0			Объектив
1,14838	2,8	К8	
0,757	0,1		
0,62	1,5	К8	
0,5	0,1		
0,304	1,2	ТФ1	
0,35	2,5	К8	
0,25	4,89		
0,152	1,5	ТФ1	
0,25	3,0	К8	
0	100		
—0,0091379	2,0	Ф4	Ахроматическая линза
—0,0037762	3,0	КФ4	
—0,027856			

Таблица VII.19

Функции и параметры	Исходные значения	Окончательная система	Заданные значения
s_0'	297,31	248,93	248,95±0,01
$\delta l'_{кр}$	4,89	0,003	0±0,005
$\eta_{кр}$ в %	—15,88	0,26	0±0,05
$(l'_F - l'_C)_з$	0,238	—0,002	0±0,001
$\delta L'_{кр}$	4,68	—0,177	—0,15±0,02
$\frac{l'_F - l'_C}{l'_D}$ в %	1,53	1,95	2%±0,1
α_4	0,62	0,53652	—
α_6	0,304	0,26649	
α_7	0,35	0,32980	
α_8	0,25	0,09807	
α_9	0,152	0,00382	
α_{10}	0,25	0,07993	
d_7	4,89	8,44	

α_4, α_6, α_7, α_8, α_9, α_{10}, d_7; в качестве функций — s_0', $\delta l_{кр}'$, $\eta_{кр}$ $(l_F' - l_C')_з$, $\delta L_{кр}'$, $\frac{l_F' - l_C'}{l_D'}$. Результаты расчета представлены в табл. VII.19 и VII.20. Все аберрации, за исключением комы, в рассчитанной системе исправлены хорошо. Поскольку итерационный процесс далее не идет, то следует предположить, что некоторые функции стали зависимыми. Уменьшим количество функций на одну и повторим автоматический расчет, приняв окончательную систему из табл. VII.19 за исходную. Наиболее целесообразно исключить из числа функций величину $\delta L_{кр}'$, требуемое значение которой было найдено путем весьма приблизительного расчета. В качестве коррекционных параметров используем те же величины, что и в табл. VII.19. Результаты расчета представлены в табл. VII.21 и VII.22. Полученная система обладает хорошим качеством изображения. Несмотря на то, что величина $\delta L_{кр}'$ была исключена из числа функций, ее значение практически не изменилось. Неудача предшествующего расчета объясняется, по-видимому, тем, что заданное значение $\delta L_{кр}' = -0{,}15$ при выбранной комбинации стекол принципиально недостижимо. Графики аберраций объектива представлены на рис. VII.11. Предмет располагается на поверхности наилучшей установки, т. е. для различных точек поля зрения аберрации рассчитаны при различных положениях предмета, как это и имеет место при наблюдении внеосевых точек объекта с помощью объектива микроскопа с неисправленной кривизной изображения. Переход от расчетных значений радиусов кривизны оптических поверхностей к стандартным значениям производится обычным способом и не представляет интереса.

Рассмотренный пример дает представление о некоторых приемах работы при современном уровне автоматизации расчета оптических систем.

Таблица VII.20

Точка на оси	Точка вне оси ($l' = 9$)	
	$n_1(\sin\sigma_1 - \sin\sigma_{1гл})$	$l' - l_{гл}'$
$\delta l_з' = -0{,}067$ $\eta_з = 0{,}009\%$ $(l_F' - l_C')_{кр} = 0{,}13$	0,85	0,041
	$0{,}85\sqrt{\frac{1}{2}}$	—0,126
	$-0{,}85\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,214
	—0,85	0,227

Таблица VII.21

Функции и параметры	Исходные значения	Окончательная система	Заданные значения
s_0'	248,93	248,95	248,95±0,01
$\delta l'_{кр}$	0,003	0,00	0±0,005
$\eta_{кр}$ в %	0,26	0,00	0±0,05
$(l'_F - l'_C)_з$	—0,002	0,00	0±0,001
$\frac{l'_F - l'_C}{l'_D}$ в %	1,95	2,00	2±0,1
α_4	0,53652	0,53712	—
α_6	0,26649	0,24618	
α_7	0,32980	0,31088	
α_8	0,09807	0,10029	
α_9	0,00382	0,01065	
α_{10}	0,07993	0,08679	
d_7	8,44	8,66	

Таблица VII.22

Точка на оси	Точка вне оси ($l' = 9$)	
	$n_1(\sin\sigma_1 - \sin\sigma_{1\,гл})$	$l' - l'_{гл}$
$\delta l'_з = -0{,}073$ $\eta_з = -0{,}03\%$ $(l'_F - l'_C)_{кр} = 0{,}14$	0,85	—0,022
	$0{,}85\sqrt{\frac{1}{2}}$	—0,156
	$-0{,}85\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,176
	—0,85	0,144
	$\delta L'_з = -0{,}187$	

$\left(\frac{\sigma'}{\sigma_{кр}}\right)^2$
1
0,75
0,5
0,25
F
D
C
-0,5
0
0,5
$\frac{N}{\lambda}$
tg σ'
0,02
0,01
$l'_0 = 0$
-0,1
0
0,1
l'
tg σ' - tg σ'_гл
0,02
0,01
$l'_{гл} = 8,96$
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
$l' - l'_{гл}$
-0,01
-0,02
tg σ' - tg σ'_гл
0,02
0,01
$l'_{гл} = 6,26$
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
$l' - l'_{гл}$
-0,01
-0,02
tg δ'
0,02
0,01
$l'_{гл} = 8,96$
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
δL'
tg δ'
0,02
0,01
$l'_{гл} = 6,26$
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
δL'
l'
x_m
x_s
9
6
-10
0
10
x_m, x_s
l'
9
6
$\frac{l'_F - l'_C}{l'_D}$, %
-2
0
2

Рис. VII.11

В большинстве случаев полный расчет какой-либо оптической системы на машине представляет собой процесс, состоящий из ряда этапов. Каждый этап характеризуется прежде всего различным набором условий, накладываемых на оптическую систему. Как правило, первоначально конструктор задает относительно небольшое количество условий, а затем постепенно его увеличивает, доводя до требуемого. Причем после каждого этапа происходит обмен информацией между человеком и машиной.

Выбор набора аберраций и их конкретных значений на каждом этапе процесса расчета является творческим моментом деятельности конструктора, активно влияющим на ход коррекции. Поэтому квалификация оптика-конструктора при использовании вычислительных машин не снижается и его роль далеко не ограничивается выбором типа и значений конструктивных параметров исходной системы.

4. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ АВТОМАТИЗАЦИИ РАСЧЕТОВ

В связи с широким внедрением полупроводниковых вычислительных машин, обладающих по сравнению с ламповыми машинами значительно большей надежностью, перед автоматизацией расчета оптических систем открываются новые возможности. Допустимое количество математических операций, приходящихся на одно задание, может быть резко увеличено благодаря повышению скорости работы машин, увеличению объема памяти, а также увеличению времени между сбоями. При этом часть функций, в настоящее время выполняемых конструктором оптической системы, будет передана машине.

Трудно предвидеть заранее, как изменится методика расчета оптических систем в ближайшие годы. Но некоторые проблемы, которые предстоит решить, могут быть сформулированы сегодня.

1. Все известные методы автоматического расчета обладают серьезным и принципиальным недостатком, который заключается в том, что даже при наличии решения не всегда можно найти его путем внесения постепенных улучшений качества изображения исходной системы. Покажем это на простейшем примере. Пусть требуется рассчитать двусклеенный объектив в области аберраций третьего порядка, причем в качестве функций рассматриваются основные параметры системы P и C. На рис. VII.12 представлен график зависимости величины $P_{\min}$ от C. Заштрихованная часть графика соответствует области отсутствия решений. Если исходной оптической системе соответствует точка A, а искомой — точка B, то нельзя построить траекторию, при движении по которой от точки A к гочке B происходило бы непрерывное уменьшение расстояния между ними. Если качество системы характеризуется расстоянием L, то это утверждение справедливо. Если же качество характеризуется не одной вспомогательной функцией, а ве-

личинами P и C по отдельности, то улучшение качества понимается как одновременное уменьшение по абсолютным значениям разностей $\overline{P} - P^{(0)}$ и $\overline{C} - C^{(0)}$. Из рис. VII.12 видно, что переход из точки A в точку B при одновременном уменьшении модулей разностей $\overline{P} - P^{(0)}$ и $\overline{C} - C^{(0)}$ также невозможен. Для нахождения решения в этом примере необходимо каким-то образом обойти заштрихованную область. Один из возможных путей решения проблемы состоит в том, что на некоторый период часть функций исключается и машина оперирует с уменьшенным количеством функций. При этом следует исключать не произвольно выбранные функции, а вполне определенные, зависимые от других.

Рис. VII.12

2. Существующие итерационные методы автоматического расчета позволяют в лучшем случае найти одно решение. Необходимо приступить к разработке методов поиска нескольких решений, что позволило бы осуществлять отбор лучшего решения из возможных. Для поиска нескольких решений можно, например, учитывать вторые производные от функций по параметрам и тем самым свести задачу к решению систем квадратных уравнений. Однако последнее представляет собой также сложную проблему. Может оказаться перспективным дальнейшее развитие методов расчета в области аберраций третьего порядка, позволяющих свести задачу к решению систем алгебраических уравнений.

3. Программы для автоматического расчета оптических систем, существующие в настоящее время, не могут дать конструктору ответ на вопрос, какие причины препятствуют получению системы с заданным качеством изображения. Практика расчета показывает, что в таких случаях некоторые функции (аберрации) оказываются взаимно зависимыми, причем знание этих зависимостей позволило бы конструктору наметить пути дальнейшей работы. Зависимости между функциями, как было показано выше, могут быть либо локальными, т. е. присущими какой-то области значений параметров, либо абсолютными, определяемыми типом системы. В первом случае решение может быть найдено путем выхода из области, где функции зависимы друг от друга. Во втором случае, как правило, необходимо изменить тип системы.

4. Степень автоматизации может быть повышена в значительной мере в том случае, если выбор необходимого и достаточного

количества функций, характеризующих систему, будет осуществляться машиной. Для пояснения сказанного представим себе программу, работающую по следующему принципу. Конструктор задает параметры исходной оптической системы, ее поле зрения, числовую апертуру, а также требования к качеству изображения в виде допусков на отдельные виды аберраций (например, допуск на сферическую аберрацию для осевой точки, на хроматизм положения, на кому в пределах всего поля зрения и т. д.). На первом этапе работы машина исследует качество исходной системы путем расчета значительного количества лучей. На основании этого расчета делается автоматический анализ зависимостей отдельных аберраций от числовой апертуры и угла поля зрения. Если эти зависимости оказываются монотонными, то в качестве функций принимаются лишь аберрации, соответствующие предельным значениям числовой апертуры и поля зрения. Если зависимости не монотонные, то в качестве функций, кроме названных аберраций, принимаются еще и значения аберраций в точках перегиба. После выбора функций машина выполняет первый шаг автоматического расчета. Затем вновь производится анализ зависимостей аберраций от числовой апертуры и угла поля зрения. Устанавливаются новые функции, и выполняется второй шаг расчета.

Таким образом, машина в зависимости от достигнутого качества изображения сама определяет число функций и данные для расчета лучей. Это, с одной стороны, гарантирует, что в рассчитанной системе значения всех аберраций не будут превышать заданных пределов. С другой стороны, такая методика в значительной степени сократит объем вычислений, так как количество функций увеличивается постепенно по мере улучшения качества изображения.

5. Использование оптических констант стекол в качестве коррекционных параметров представляет серьезную проблему. Во-первых, оптические константы стекол, например показатель преломления и средняя дисперсия, не являются абсолютно независимыми. Во-вторых, значения этих констант могут лежать в довольно узких пределах. В-третьих, эти константы могут принимать только дискретные значения. Отсюда вытекает, что использование констант стекол в качестве коррекционных параметров на общих основаниях недопустимо.

6. Необходимо разработать методы, обеспечивающие контроль конструктивной выполнимости рассчитываемой системы. На значения некоторых коррекционных параметров должны накладываться определенные ограничения, обеспечивающие, например, достаточные толщины линз по краю или по центру.

7. Многолетняя практика расчета оптических систем показала эффективность методов, основанных на взаимной компенсации аберраций третьего и более высоких порядков. При таком подходе к решению задачи предполагается, что аберрации высших поряд-

ков изменяются медленнее, чем аберрации третьего порядка.

Программа, реализующая метод взаимной компенсации аберраций, может быть построена по следующему принципу. Как и обычно, задается исходная оптическая система. Если тип системы более или менее исследован, то конструктор может задать примерные значения коэффициентов аберраций третьего порядка, необходимые для компенсации аберраций более высоких порядков. В противном случае заданные значения коэффициентов аберраций принимаются равными нулю. После нахождения итерационным способом конструктивных параметров системы с заданными коэффициентами аберраций производится расчет хода лучей и определяются точные значения аберраций. После автоматического анализа аберраций вычисляются поправки для коэффициентов аберраций третьего порядка, обеспечивающие при неизменных аберрациях более высоких порядков оптимальную коррекцию системы. Затем путем итераций определяются новые значения коррекционных параметров системы с измененными коэффициентами аберраций третьего порядка и вновь производится расчет хода лучей и анализ аберраций. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута оптимальная взаимная компенсация аберраций третьего и высших порядков.

8. В настоящее время при автоматическом расчете оптических систем в области аберраций третьего порядка не принимается никаких мер для миниминизации аберраций высших порядков. Когда количество коррекционных параметров превышает количество функций, вводится дополнительное условие миниминизации величины $\sum a_j \Delta p_i^2$. Напомним, что это условие вытекает из требования уменьшения количества итерационных циклов и никак не оправдано с оптической точки зрения. Целесообразно в дальнейшем заменить указанное условие другим, в какой-то мере отражающим необходимость уменьшения аберраций высших порядков. По известному эмпирическому правилу Берека для получения по возможности малых аберраций высших порядков необходимо стремиться к тому, чтобы углы падения лучей на поверхностях были невелики. Это правило может быть учтено, если в процессе автоматического расчета миниминизировать сумму квадратов синусов углов падения апертурного и главного лучей на поверхностях. При этом нет необходимости рассчитывать ход указанных лучей, поскольку между синусами углов падения лучей и параксиальными значениями углов падения существует примерно линейная связь.

9. В настоящее время любая из известных программ для автоматического расчета оптических систем основывается на одном определенном математическом методе, например методе Ньютона, градиентном методе и т. п. Может оказаться перспективным сочетание нескольких методов в одной программе. При этом в случае неудачи использования одного метода можно предусмотреть автоматический переход к другому методу расчета.

10. Несмотря на то, что с применением вычислительных машин скорость выполнения арифметических операций возросла в десятки и сотни тысяч раз, расчеты оптических систем ускорились лишь в несколько раз. Это обстоятельство наглядно показывает несовершенство используемых алгоритмов. Разработка алгоритмов, принципиально отличных от существующих и обеспечивающих большую скорость расчета новых оптических систем, представляет актуальную задачу будущего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слюсарев Г. Г. Таблицы для расчета двухлинзовых склеенных объективов. Л., ГОИ, 1949.
2. Пинскер И. Ш., Рябова И. А. и Цетлин Б. М. Опт.-мех. пром., 1964, № 1.
3. Пинскер И. Ш. и Цетлин Б. М. Автоматика и телемеханика. Т. 33, 1962, № 12.
4. Гельфанд И. М. и Цетлин М. Л. Успехи математических наук. Т. 22. Вып. 1, 1962.
5. Цено Н. В. Опт.-мех. пром., 1966, № 9.
6. Грамматин А. П. Опт.-мех. пром., 1959, № 7.
7. Грамматин А. П. Опт.-мех. пром., 1959, № 8.
8. Грамматин А. П. Опт.-мех. пром., 1965, № 1.
9. Levenberg K. Quart. Appl. Math., 2, 1944.
10. Girard A. Revue d'Optique, 37, 1958.
11. Feder D. Appl. Opt., vol. 2, N 12, 1963.
12. Hopkins R. and Feder D. Appl. Opt., vol. 2, N 12, 1963.
13. Matsui J. and Hirose R. Japanese Journal of Applied Physics, vol. 4, 1965.
14. Грамматин А. П. Опт.-мех. пром., 1967, № 2.
15. Meiron J. and Loebenstein H. JOSA, 47, 1957.

ГЛАВА VIII

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ДОПУСКОВ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Расчет всякой оптической системы заканчивается вычислением допустимых отклонений конструктивных элементов (радиусов кривизны, толщин линз, воздушных промежутков, коэффициентов, определяющих форму несферических поверхностей, если таковые имеются) от расчетных; допустимых децентрировок отдельных поверхностей и оптических узлов; отклонений значений показателей преломления и дисперсий, требованиями к однородности оптических материалов, из которых должна быть изготовлена оптическая система, и т. д.

Допустимые отклонения должны быть таковы, чтобы условия, которым должна удовлетворить рассматриваемая оптическая система, не были нарушены. Среди этих условий наибольшее значение имеют: 1) габаритные размеры, например длина системы в целом или отдельных ее узлов, положение плоскости установки относительно первой или последней оптической детали, фокусное расстояние системы и т. д.; 2) качество изображения, которое должно оставаться в пределах, определяемых назначением системы и указанных в технических условиях. Кроме того, в зависимости от назначения оптической системы могут появиться добавочные условия самого разнообразного характера, которые заранее не могут быть предусмотрены.

Расчет допусков производится на основании предположения, что каждое отклонение конструктивного элемента от расчетного настолько мало, что его влияние на положение и величину изображения объекта, на любые другие оптические характеристики, а также на любую аберрацию оптической системы пропорционально этому отклонению. При одновременном изменении нескольких элементов результаты их влияний складываются; другими словами, к общему изменению приложима формула дифференцирования по нескольким переменным

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial x_p} dx_p.$$

В этой формуле Y обозначает величины, определяющие габаритные и аберрационные условия; Y является функцией от конструктивных элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$.

Это правило хорошо выполняется для тех параметров, которые не нарушают симметрии оптической системы; в остальных случаях требуется осторожность (подробнее об этом см. п. 6).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Существует два основных пути для определения частных производных. Первый путь — составление этих производных на основании соотношений между параметрами оптической системы и положением изображения, фокусным расстоянием и другими габаритными элементами, выражаемых основными формулами параксиальной оптики, например $\frac{n}{s'} - \frac{n'}{s} = \frac{n'-n}{r}$. Аналогично можно составить дифференциалы коэффициентов аберраций третьего порядка и хроматических аберраций по выбранным конструктивным элементам или еще дифференциалы точек пересечения лучей с плоскостью изображения в зависимости от параметров системы и т. д.

Второй путь — расчет хода лучей через оптическую систему, каждый параметр которой последовательно меняется на некоторую достаточно малую величину.

Зная изменение интересующих нас величин, например положения изображения, фокусного расстояния и других габаритных элементов, а также различных аберраций системы, можно составить отношения $\frac{\Delta Y}{\Delta x_1}$, $\frac{\Delta Y}{\Delta x_2}$ и т. д. и принять, что эти отношения равны искомым частным производным $\frac{\partial Y}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Y}{\partial x_2}$ и т. д. Громоздкость этого метода перестала быть препятствием после появления ЭВМ.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОГО ОТКЛОНЕНИЯ ОТДЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

После того как определено влияние каждого конструктивного элемента на все габаритные и аберрационные свойства рассматриваемой оптической системы, нетрудно определить максимально допустимое отклонение величины каждого элемента (параметра) от расчетной (в предположении, что все остальные параметры сохраняют расчетное значение), исходя из габаритных и аберрационных требований, предъявляемых к оптической системе. Обычно требования к качеству выражаются либо в виде предельной величины диаметра кружка рассеяния, либо в виде минимального значения разрешающей способности, выраженной в линиях на миллиметр, либо в виде величины частотно-контрастной характеристики.

С помощью общих соотношений, приведенных в гл. X, или в результате прямых вычислений ЧКХ, или путем определения зависимости ЧКХ от конструктивных элементов в рассматриваемой системе можно выяснить, каковы максимально возможные изменения каждого в отдельности конструктивного элемента системы.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ПРИ СОВОКУПНОМ ДЕЙСТВИИ ВСЕХ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

После того как определено значение максимально допустимого отклонения каждого в отдельности конструктивного параметра системы в предположении, что он один подвергается изменению, необходимо перейти к определению допуска на него в естественно встречающихся условиях, когда *все* элементы одновременно отличны от расчетных значений. Простое деление допустимого отклонения каждого элемента на общее число n элементов дает гарантию того, что в наихудшем случае, когда значения каждого элемента отличаются от расчетного на максимально возможную величину и все изменения действуют в одну сторону на то свойство системы, которое послужило источником для вычисления допуска, не будут нарушены технические условия. Однако при таком делении допустимые изменения становятся настолько малыми, что их технологически осуществить невозможно или крайне трудно. С другой стороны очевидно, что случай сложения абсолютных значений всех отклонений в одну сторону практически весьма мало вероятен. Поэтому при выборе допусков целесообразно опираться на теорию вероятностей и принимать во внимание также технологию изготовления изучаемой системы.

5. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НА АБЕРРАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как было сказано выше, существуют два пути вычисления частных производных от интересующих нас величин по параметрам системы: прямой расчет на основании формул, связывающих те и другие, и вычисление на ЭВМ конечных приращений этих же величин при конечных, но весьма малых изменениях параметров. Первый метод, разработанный уже давно для отдельных частных случаев, например для определения производных от фокусного расстояния по радиусам, описан еще у М. Рора [1]. Наиболее полно этот метод исследован в статье Н. Н. Губеля [2], формулы которого приведены ниже.

Формулы, выведенные в гл. II для аберраций третьего порядка, можно представить в следующем самом общем виде:

$$-2\frac{n_i\alpha_i\delta g_i'}{h_s}=\frac{\omega_p\left(\omega_p^2+\Omega_p^2\right)}{\alpha_p^3}\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}}+\frac{\left(3\omega_p^2+\Omega_p^2\right)w_q}{\alpha_p^2\beta_q}\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}}+$$

$$+\frac{\omega_p w_q^2}{\alpha_p\beta_q^2}\left(3\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}}+J^2\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}}\right)+\left(\frac{w_q}{\beta_q}\right)^3\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{V}};$$

$$-2\frac{n_i\alpha_i\delta G_i'}{h_s}=\frac{\Omega_p\left(\omega_p^2+\Omega_p^2\right)}{\alpha_p^3}\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}}+2\frac{\Omega_p\omega_p w_q}{\alpha_p^2\beta_q}\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}}+$$

$$+\frac{\Omega_p w_q^2}{\alpha_p\beta_q^2}\left(\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}}+J^2\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}}\right),$$

где

$$\omega_p=-\frac{m_p}{x_p-s_p};$$

$$\Omega_p=\frac{M_p}{x_p-s_p};$$

$$w_q=\frac{l_q}{x_q-s_q};$$

$$\alpha_p=\frac{h_p}{s_p};$$

$$\beta_q=\frac{y_q}{x_q};$$

p и q — номера двух произвольно выбранных сред.

Коэффициенты аберраций имеют следующий смысл:

$$\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}}=\sum_{i=1}^{i=\kappa}\frac{h_i}{h_s}P_i;$$

$$\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}}=\sum_{i=1}^{i=\kappa}\frac{h_i}{h_s}P_i\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i;$$

$$\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}}=\sum_{i=1}^{i=\kappa}\frac{h_i}{h_s}P_i\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i^2;$$

$$\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}}=-\sum_{i=1}^{i=\kappa}\frac{h_s}{r_i}\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_i;$$

$$\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{V}}=\sum_{i=1}^{i=\kappa}\left[\frac{h_i}{h_s}P_i\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i^2+J^2\left(S_{\mathrm{IV}}\right)_i\right]\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i,$$

причем $P_i = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}}\right)_i^2 \left(\Delta\frac{\alpha}{n}\right)_i$; инвариант $J = n_i\alpha_i\beta_i\,(x_i - s_i)\,\frac{1}{h_s}$.

В таком виде формулы обладают наибольшей общностью; каждый из индексов p, q, s может означать любой номер поверхности системы; сама величина h_s может быть любой высотой первого параксиального луча в системе; аберрации $\delta g_i'$ и $\delta G_i'$ могут быть вычислены в любом пространстве оптической системы; формулы пригодны для случаев телескопической системы и для систем с телецентрическим ходом лучей.

При таких же условиях можно вычислять и хроматические суммы:

$$S_{\mathrm{I}}^{xp} = \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{h_i}{h_s}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}\right)_i \left(\Delta\frac{\delta n}{n}\right)_i;$$

$$S_{\mathrm{II}}^{xp} = \sum_{i=1}^{i=\kappa} (S_{\mathrm{I}}^{xp})_i \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i.$$

В формулы для производных, кроме того, входит хроматическая сумма в плоскости зрачка

$$S_{\mathrm{I}x}^{xp} = \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{y_i}{h_i}\,(S_{\mathrm{II}}^{xp})_i$$

и, наконец, первая сумма в плоскости зрачка

$$S_{\mathrm{I}x} = \sum_{i=1}^{i=\kappa} \frac{y_i}{h_s}\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}}\right)_i^2 \left(\Delta\frac{\beta}{n}\right)_i.$$

При расчете фотообъективов удобно положить $h_s = h_1 = f' = 1$, тогда формулы принимают более простой вид; при этом

$$p = \kappa + 1; \quad q = 1; \quad \alpha_1 = 0.$$

Для прочих систем (кроме телескопических) при $\alpha_1 \neq 0$ удобно положить $\alpha_{\kappa+1} = +1$; $h_s = h_\kappa = 1 = s_\kappa'$, а $\beta_1 = +1$; $y_1 = x_1$.

Ниже приводятся все формулы для производных от пяти монохроматических сумм S_{I}, S_{II}, S_{III}, S_{IV} и S_{V}, двух хроматических сумм S_{I}^{xp} и S_{II}^{xp} и, наконец, от фокусного расстояния или увеличения любой оптической системы по параметрам d_i и ρ_i.

Всего получится шестнадцать формул—восемь для производных по d_i и восемь для производных по $\rho_i = \frac{1}{r_i}$. При выводе формул предполагается, что действующая апертурная диафрагма находится перед первой поверхностью системы.

Выражения производных по d_i:

$$1.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial[\beta]}{\partial d_i}=[\beta]\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}}-\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right);$$

$$2.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{I}}}{\partial d_i}=3\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}}-\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}}+4\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}}-$$

$$-4\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}}-J\frac{\alpha_{\kappa+1}^2-\alpha_{i+1}^2}{h_{i+1}};$$

$$3.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial d_i}=2\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}}-\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)+\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)^2\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}}+$$

$$+2\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}}-3\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}}-J^2\frac{1}{h_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{IV}}-J\frac{\beta_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+1}-\beta_{i+1}\alpha_{i+1}}{h_{i+1}};$$

$$4.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{III}}}{\partial d_i}=\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}}-\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}}+2\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)^2\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}}-$$

$$-2\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{V}}-J\frac{\beta_{\kappa+1}^2-\beta_{i+1}^2}{h_{i+1}};$$

$$5.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{IV}}}{\partial d_i}=\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}}-\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}};$$

$$6.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{V}}}{\partial d_i}=\left(3\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}}+J^2\frac{1}{h_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{IV}}\right)\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)^2-$$

$$-2\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{V}}-\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}x};$$

$$7.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{I}}^{xp}}{\partial d_i}=\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}}-\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}{}_{\mathrm{I}}^{xp}+$$

$$+2\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}{}_{\mathrm{I}}^{xp}-2\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}{}_{\mathrm{II}}^{xp}-J\left[\frac{(dn)_{\kappa+1}}{n_{\kappa+1}}-\frac{(dn)_{i+1}}{n_{i+1}}\right];$$

$$8.\ \frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{II}}^{xp}}{\partial d_i}=\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)^2\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}{}_{\mathrm{I}}^{xp}-\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}{}_{\mathrm{I}x}^{xp}.$$

(VIII.1)

Выражения производных по ρ_i:

$$1.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial[\beta]}{\partial\rho_i}=\frac{1}{b_i'}\frac{\partial[\beta]}{\partial d_i}+[\beta]\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}-\frac{y_i}{h_i}\right);$$

$$2.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S_{\mathrm{I}}}{\partial\rho_i}=\frac{1}{b_i'}\frac{\partial S_{\mathrm{I}}}{\partial d_i}+3\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}-\frac{y_i}{h_i}\right)\left(\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}}-\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}}\right)+$$

$$+\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}-\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}}-A_i;$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&3.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{b'_i}\frac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial d_i} + \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right)\left[2\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}} - \right.\\
&\left. - \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right)\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}} - \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}}\right] - \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} + B_i;\\
&4.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S_{\mathrm{III}}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{b'_i}\frac{\partial S_{\mathrm{III}}}{\partial d_i} + \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right)\times\\
&\times\left[\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}} - 2\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} + \frac{y_i}{h_i}\right)\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} + \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}}\right] -\\
&- \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}} + D_i;\\
&5.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S_{\mathrm{IV}}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{b'_i}\frac{\partial S_{\mathrm{IV}}}{\partial d_i} + \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right)\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}} - \frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_i}{\bar{b}_i};\\
&6.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S_{\mathrm{V}}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{b'_i}\frac{\partial S_{\mathrm{V}}}{\partial d_i} + \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right)\times\\
&\times\left[3\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{V}} - \left(3\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}} + J^2\frac{1}{h_{i+1}}\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{IV}}\right)\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} + \frac{y_i}{h_i}\right)\right] -\\
&- \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}\right)\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{V}} + J^3\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i\frac{\left(\Delta\frac{1}{n}\right)_i}{\bar{b}_i} + E_i;\\
&7.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S^{xp}_{\mathrm{I}}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{b'_i}\frac{\partial S^{xp}_{\mathrm{I}}}{\partial d_i}\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right)\left(\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}{}^{xp}_{\mathrm{I}} - 2\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}{}^{xp}_{\mathrm{I}}\right) -\\
&- J\frac{n_i}{(\Delta n)_i}\left(\Delta\frac{dn}{n}\right)_i;\\
&8.\ \frac{1}{\bar{b}_i}\frac{\partial S^{xp}_{\mathrm{II}}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{b'_i}\frac{\partial S^{xp}_{\mathrm{II}}}{\partial d_i} - \left[\left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{h_i}\right)^2\right]\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}{}^{xp}_{\mathrm{I}} -\\
&- \frac{y_i}{h_i}J\frac{n_i}{(\Delta n)_i}\left(\Delta\frac{dn}{n}\right)_i.
\end{aligned}
\right\}\quad (\mathrm{VIII.2})
$$

Более подробные исследования показали, что при расчете второго параксиального луча от бленды, т. е. при условии, что действующая апертурная диафрагма находится внутри системы, частичное суммирование отдельных коэффициентов выполняется несколько иначе, а именно: для производных по поверхностям и толщинам линз, находящихся перед действующей диафрагмой, оно выполняется от 1 до i, а для линз, находящихся за диафрагмой, сохраняется таким, как указано в тексте.

В этих формулах

$$b_i' = \frac{n_{i+1}\alpha_{i+1}^2}{J}; \quad \bar{b}_i = \frac{n_{i+1} - n_i}{J} n_i^2;$$

$$A_i = a_i (S_{\mathrm{I}})_i,$$

где $a_i = J \frac{\left(\frac{1}{n}\right)_{i+1}}{h_i} \left[\frac{2}{(\Delta\alpha)_i} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)_{i+1}}{\left(\Delta \frac{\alpha}{n}\right)_i} \right];$

$$B_i = A_i \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i + C_i,$$

где $C_i = J^2 \frac{\left(\frac{1}{n}\right)_{i+1}}{h_i} \frac{W_i}{(\Delta\alpha)_i} = J^2 \frac{\left(\frac{1}{n}\right)_{i+1}}{h_i} \frac{\left(\Delta \frac{\alpha}{n}\right)_i}{\left(\Delta \frac{1}{n}\right)_i};$

$$D_i = (B_i + C_i)\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i; \quad E_i = \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)_i D_i + \frac{(S_{\mathrm{V}})_i}{(S_{\mathrm{II}})_i} C_i.$$

Смысл остальных величин объяснен выше. Суммы, обозначенные $\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}}$, $\overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}}$ и т. д., представляют собой полные суммы всех слагаемых для всех поверхностей системы (от 1 до κ); суммы $\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}}$, $\overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}}$ и т. д. представляют собой суммы, относящиеся к части системы, состоящей из поверхностей от $(i + 1)$-й до последней, κ-й; при определении производной, например по ρ_3, указанные суммы нужно вычислить от 4-й до последней, κ-й, поверхности.

В формулы (VIII.1) и (VIII.2) входит величина $[\beta]$ — линейное (или поперечное) увеличение системы, равное

$$[\beta] = \frac{n_1\alpha_1}{n_{\kappa+1}\alpha_{\kappa+1}}.$$

В том случае, когда $\alpha_1 = 0$, можно показать, что $\frac{\partial[\beta]}{\partial d_i} = \frac{\partial f'}{\partial d_i}$, а также $\frac{\partial[\beta]}{\partial \rho_i} = \frac{\partial f'}{\partial \rho_i}$, откуда формулы (VIII.1 и VIII.2) принимают вид

$$\frac{1}{b_i'} \frac{\partial f'}{\partial d_i} = \left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa+1}} - \frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right); \quad \frac{1}{b_i} \frac{\partial f'}{\partial \rho_i} = \left(\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} - \frac{y_i}{h_i}\right).$$

Формулы (VIII.1) и (VIII.2) без большого труда поддаются программированию на ЭВМ [1], поэтому, несмотря на кажущуюся

[1] В частности, такая программа разработана в ГОИ для машин «Урал-2» (программа № 14) и БСМ-4.

громоздкость, вычисления частных производных могут быть осуществлены быстро. Метод непосредственного расчета частных производных позволяет получать более точные значения производных, чем метод расчета конечных разностей, описанный ниже. Приведенные формулы дают возможность осмыслить влияние того или иного параметра отдельно и в случае необходимости повлиять в нужную сторону на интересующую в данный момент производную. В качестве примера использования метода расчета частных производных приводим результаты расчета частных производных от всех сумм $S_{\mathrm{I}}, \ldots, S_{\mathrm{V}}$ по третьей толщине d_3 и кривизне ρ_3 третьей поверхности трехлинзового объектива с фокусным расстоянием $f' = 200$ *мм* и следующими значениями конструктивных элементов и сумм Зейделя (рис. VIII.1):

r	d	n	
		1,0	
289,64			$S_{\mathrm{I}} = 1{,}6307$
	6,0	1,57828	
—104,28			$S_{\mathrm{II}} = -0{,}2247$
	12,0	1,0	
—77,76			$S_{\mathrm{III}} = -0{,}3369$
	4,0	1,57828	
—140,32			$S_{\mathrm{IV}} = 0{,}6215$
	36,0	1,0	
—94,89			$S_{\mathrm{V}} = -0{,}8841$
	6,0	1,57828	
—85,40			

$f' = 200{,}0$; $s' = 147{,}68$ при $s_1 = \infty$; $f' = h_1 = 1$; $\alpha_6' = 1{,}0$

$$J = -1 \qquad A_3 = -24{,}846$$
$$a_3 = 1{,}3127 \qquad B_3 = 24{,}398$$
$$C_3 = 2{,}7530 \qquad D_3 = -23{,}652$$
$$b_3' = -0{,}01578 \qquad E_3 = 22{,}830$$
$$b_3 = -0{,}4709$$

$$\frac{\partial S_{\mathrm{I}}}{\partial d_3} = -1{,}1375 \qquad \frac{\partial S_{\mathrm{I}}}{\partial \rho_3} = 11{,}99$$
$$\frac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial d_3} = -2{,}2952 \qquad \frac{\partial S_{\mathrm{II}}}{\partial \rho_3} = -13{,}47$$
$$\frac{\partial S_{\mathrm{III}}}{\partial d_3} = 4{,}8485 \qquad \frac{\partial S_{\mathrm{III}}}{\partial \rho_3} = 13{,}14$$
$$\frac{\partial S_{\mathrm{IV}}}{\partial d_3} = 0{,}0575 \qquad \frac{\partial S_{\mathrm{IV}}}{\partial \rho_3} = 0{,}06406$$
$$\frac{\partial S_{\mathrm{V}}}{\partial d_3} = -7{,}5515 \qquad \frac{\partial S_{\mathrm{V}}}{\partial \rho_3} = -12{,}66$$

Второй метод, наиболее распространенный, состоит в определении разностей аберраций, полученных в результате расчета хода

лучей (обычно с помощью ЭВМ), выполненного для слегка измененных (по отношению к расчетному) значений исследуемого конструктивного элемента. Обычно изменяют его значение в обе стороны на равные величины ω, что, с одной стороны, обеспечивает контроль, а с другой, — позволяет определить и вторую производную по разности первых разностей. Напомним, что вторая производная $f''(x)$, вычисленная для значения аргумента $x = a$, связана с разностями $\Delta f(a)$ и $\Delta^2 f(a)$ формулой

Рис. VIII.1

$$\omega^2 f''(a) = \Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) \ldots,$$

где ω — величина интервала между соседними значениями аргумента, а $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a)$ — разности первого, второго и третьего порядка соответственно.

Разности $\Delta f(a)$ и $\Delta^2 f(a)$ в этой формуле следует понимать, как указано ниже.

Аргумент	Функция	Первая разность	Вторая разность
a	$f(a)$	$\Delta f(a) = \Delta f(a+\omega) - f(a)$	$\Delta^2 f(a) =$
$a+\omega$	$f(a+\omega)$	$\Delta f(a+\omega) =$	$= \Delta f(a+2\omega) -$
$a+2\omega$	$f(a+2\omega)$	$= \Delta f(a+2\omega) - f(a+\omega)$	$- 2f(a+\omega) + f(a)$

Если имеется лишь три значения функции, рассчитанные для трех значений аргумента, то Δ^3 определить нельзя и приходится положить его равным нулю. Тогда $f''(a) = \frac{\Delta^2 f(a)}{\omega^2}$.

Что касается первой производной, то она вычисляется по формуле

$$\omega f'(a) = \Delta f(a) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a).$$

Очень существенно правильно выбрать величину ω, т. е. приращение рассматриваемого параметра. При слишком малом значении ω приращение функции тоже мало, и разности Δ малы, следовательно, величина производной $\frac{\Delta f(a)}{\omega}$ получается с большой погрешностью. Если приращение ω слишком велико и величины Δ велики, то величина $\Delta^3 f(a)$ тоже еще велика и принимать ее равной нулю нельзя. Существует оптимальное значение ω, при котором получается наибольшая точность, но заранее предугадать его невозможно, поэтому приходится воспользоваться методом проб.

Для уменьшения числа проб необходимо заботиться о том, чтобы значение функции $f(a)$ было известно с максимальной точностью; это зависит от числа верных знаков, которые может дать используемая ЭВМ.

Надо отметить, что большая точность необходима только для автоматического усовершенствования оптической системы по методике, описанной в гл. VII. Для вычисления допусков можно удовлетвориться и небольшой точностью, так как погрешность в 20—30% в их величине не имеет практического значения.

Метод конечных разностей обладает рядом преимуществ. Поскольку он основан на расчете хода лучей, при котором осуществляется двухкратный контроль (см. гл. I, формулы Федера для ЭВМ), то наличие ошибок практически исключено, тем более что всякая даже небольшая ошибка не может пройти незамеченной, так как приращения функции в ту и другую стороны должны быть почти одинаковыми, но с противоположными знаками.

6. ДЕЦЕНТРИРОВКА

При изготовлении оптических систем неизбежна децентрировка, вызванная как неточным изготовлением отдельных деталей (линз, зеркал), так и нестрогой сборкой, в результате которой центры отдельных деталей не ложатся точно на одну прямую, а оказываются смещенными относительно нее.

Рис. VIII.2

Рассмотрим подробнее влияние децентрировки на изображение объектов, создаваемое оптическими системами.

Исследуем наиболее простой случай: поворот одной поверхности. Пусть центр кривизны первой поверхности KDC линзы L (рис. VIII.2) смещается вниз на величину $HO_1 = b_1$; если вторая поверхность KPC при этом не претерпевает изменения, то оптическая ось линзы, ограниченной этими поверхностями, поворачивается, принимая новое положение O_1O_2. Объект AB, который стоял перпендикулярно оси в ее первоначальном положении, становится наклонным относительно нового ее положения. Изображение $A'B'$ также наклоняется, так как по правилам геометрической оптики продолжения объекта AB и его изображения $A'B'$ должны пересечь соответственные главные плоскости линзы на одинаковых высотах (при бесконечно тонкой линзе точка пересечения этих продолжений находится на общей главной плоскости линзы, совпадающей с перпендикуляром к оси O_1O_2, проходящим

через края линзы). Поскольку оптическая ось линзы повернулась, углы главного луча с осью изменяются, а вместе с ними изменяются и аберрации. Точка A' изображения становится внеосевой, что вызывает в первую очередь появление комы, пропорциональной углу поворота α и квадрату относительного отверстия линзы.

Таким образом, главными следствиями децентрировки одной поверхности являются кома точки на оси и наклон изображения. Последний сильнее всего сказывается на краю поля и проявляется в виде поперечной аберрации, пропорциональной первой степени апертуры и первой степени децентрировки b_1. Формально эта аберрация напоминает комбинацию астигматизма и кривизны поля, но поскольку она не третьего порядка малости, а второго, то оказывает несимметричное действие на изображение точки и складывается с эффектом комы. По этой причине при вычислении влияния децентрировки на качество изображения необходимо проверить изображение точки как на оси, так и для двух противоположных крайних значений угла поля зрения.

Эта проверка может быть выполнена двумя способами. Можно заменить точное определение аберраций с помощью расчета хода лучей вычислением аберраций третьего порядка децентрированной системы, считая величины децентрировки b бесконечно малыми. По этому пути пошли Конради [3] и Н. Н. Губель [4], формулы которого будут далее приведены. Можно также использовать точный расчет хода лучей через децентрированную оптическую систему.

Независимо от того, какой способ расчета будет применен, необходимо договориться о том, как понимать децентрировку оптической системы. Трудность заключается в следующем. Пусть в рассматриваемой системе определяется влияние децентрировки κ-й поверхности на аберрации. После κ-й поверхности оптическая ось системы ломается и параксиальный луч, совпадающий с оптической осью до поверхности κ, перестает быть параксиальным для остальной части системы, начиная с κ-й поверхности (если условно считать, что во всей системе лишь κ-я поверхность децентрирована, а все остальные остаются на месте). Поэтому параксиальные лучи, идущие из точки, находящейся в центре поля зрения, после κ-й поверхности пересекают плоскость изображения в точках, находящихся на некотором, отличном от нуля, расстоянии от оси. Эти точки, являющиеся предметами для последующей, центрированной, системы, начинающейся с $\kappa + 1$-й поверхности, изображаются этой системой уже не по законам параксиальной оптики, а обладают аберрациями наклонных пучков, в первую очередь — комой.

Таким образом, приращение δ аберрации $\delta g'_\kappa$, вызываемое децентрировкой, при переносе в пространство изображений всей системы (от 1-й до p-й поверхности) состоит из двух частей: первой δ_1, которая может быть вычислена на основании закона Лагранжа—Гельмгольца, и второй δ_2, представляющей собой кому,

вызываемую тем обстоятельством, что отрезок $\delta g'_\kappa$ находится на некотором расстоянии l'_κ от оси (рис. VIII.3).

В то время как δ_1 зависит только от параметров поверхности κ (радиус кривизны r_κ, показатели преломления n_κ и $n_{\kappa+1}$) и входных данных (ω_κ, b_κ), δ_2 зависит от параметров всей системы, начинающейся с $\kappa + 1$-й поверхности.

Это обстоятельство усложняет вычисление аберраций, вызываемых децентрировкой, особенно в случае их определения путем дифференцирования выражений для коэффициентов аберраций третьего порядка по величине b. Тем не менее, в отечественных вычислительных отделах стало общепринятым определять влияние децентрировок отдельных поверхностей именно таким образом, т. е. считая, что центры всех поверхностей, за исключением одного, лежат на оси. Сложность определения влияния децентрировки по описанной методике вызывает иногда сомнение в законности алгебраического сложения аберраций, создаваемых не одной децентрированной поверхностью, а одновременной децентрировкой нескольких поверхностей; но точное вычисление показывает, что оснований для подобных сомнений нет, если только не выходить из пределов величин первого порядка малости.

Рис. VIII.3

При изготовлении оптической системы ошибки децентрировки, естественно, носят случайный характер, иначе говоря, смещения b_κ центров кривизны относительно оси произвольны как по абсолютному значению, так и по направлению, т. е. b_κ представляет собой вектор. Но для вычисления допустимых величин децентрировок делается упрощающее предположение, что все b_κ лежат в меридиональной плоскости. При этом, как это легко доказать для случая аберраций третьего порядка, составляющая $\delta g'$ аберрации, вызываемой децентрировкой, принимает максимальное значение по абсолютной величине. Поэтому определение допустимых значений децентрировок на основании величин $\delta g'_D$ является правомерным (т. е. не может привести к бо́льшим аберрациям), если при одновременной децентрировке нескольких поверхностей общая аберрация равна алгебраической сумме составляющих.

Рассмотрим сначала предложенные Н. Н. Губелем формулы для определения влияния децентрировки b на коэффициенты пяти аберраций третьего порядка и двух хроматических аберраций.

Децентрировка сопровождается смещением изображения $\Delta y'$. Если точка-объект находится на оптической оси системы, то

величина $\Delta y'$ определяется формулой

$$\Delta y'_p = \frac{(\Delta\alpha n)_i}{\alpha'_p n'_p} b_i. \qquad \text{(VIII.3)}$$

Кроме смещения изображения децентрировка одной или нескольких поверхностей вызывает появление четырех монохроматических аберраций, проекции которых определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
-2n'_\kappa \delta g'_\kappa &= \frac{b_i}{J}\{(3\omega'^2_\kappa + \Omega'^2_\kappa)(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i + 2\omega'_\kappa w_1 [3(\bar{S}_{\mathrm{III}}) + \\
&+ J^2(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i] + 2W_1\Omega'_\kappa(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + w_1^2[3(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i + J^2(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i] + \\
&+ W_1^2[(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i + J^2(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i]\}; \\
-2n'_\kappa \delta G' &= \frac{b_i}{J}\{2\omega'_\kappa\Omega'_\kappa(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i + 2\Omega'_\kappa w_1[(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + \\
&+ J^2(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i] + 2\omega'_\kappa W_1(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + 2w_1W_1(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i\}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.4)}$$

или, полагая $b_i = -\theta r_i$,

$$\left.\begin{aligned}
2n'_\kappa \delta g'_\kappa &= \frac{\theta_i}{J}(3\omega'^2_\kappa + \Omega'^2_\kappa) r_i(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i + \\
&+ 2\omega'_\kappa w_1 r_i[3(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + J^2(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i] + \\
&+ 2W_1\Omega'_\kappa r_i(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + w_1^2 r_i[3(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i + J^2(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i] + \\
&+ W_1^2 r_i[(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i + J^2(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i]\}; \\
2n'_\kappa \delta G'_\kappa &= \frac{\theta_i}{J}\{2\omega'_\kappa\Omega'_\kappa r_i(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i + \\
&+ 2\Omega'_\kappa w_1 r_i[(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + J^2(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i] + \\
&+ 2\omega'_\kappa W_1 r_i(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + 2w_1W_1 r_i(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i\},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.5)}$$

где b_i — малое поперечное смещение центра кривизны поверхности с номером i в меридиональной плоскости; θ_i — малый угол поворота поверхности с номером i вокруг оси, перпендикулярной меридиональной плоскости, проходящей через вершину поверхности i; $\delta g'_\kappa$ — меридиональная составляющая аберраций второго порядка; $\delta G'_\kappa$ — сагиттальная составляющая аберраций второго порядка.

Надчеркнутые коэффициенты S имеют следующий смысл:

$$\left.\begin{aligned}
(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i &= (\beta n)_i (S_{\mathrm{I}})_i - (\Delta\beta n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}} - (\alpha n)_i (S_{\mathrm{II}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i &= (\beta n)_i (S_{\mathrm{II}})_i - (\Delta\beta n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} - (\alpha n)_i (S_{\mathrm{III}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i &= -(\alpha n)_i (S_{\mathrm{IV}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{IV}};\\
(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i &= (\beta n)_i (S_{\mathrm{IV}})_i - (\Delta\beta n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{IV}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i &= (\beta n)_i (S_{\mathrm{III}})_i - (\Delta\beta n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}} - (\alpha n)_i (S_{\mathrm{V}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{V}},
\end{aligned}\right\} \tag{VIII.6}$$

если децентрированная поверхность расположена за апертурной диафрагмой.

Коэффициенты S имеют иной вид, если апертурная диафрагма расположена за децентрированной поверхностью, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i &= (\Delta\beta n)_i \overset{i}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}} - (\alpha n)_i (S_{\mathrm{II}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i &= (\Delta\beta n)_i \overset{i}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}} - (\alpha n)_i (S_{\mathrm{III}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i &= -(\alpha n)_i (S_{\mathrm{IV}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{IV}};\\
(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i &= (\Delta\beta n)_i \overset{i}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i &= (\Delta\beta n)_i \overset{i}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}} - (\alpha n)_i (S_{\mathrm{V}})_i + (\Delta\alpha n)_i \overset{\kappa}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{V}}.
\end{aligned}\right\} \tag{VIII.7}$$

Если в системе децентрирована только апертурная диафрагма, т. е. ее центр смещен с оптической оси на величину b_i, то возникающие при этом аберрации второго порядка нужно вычислять по формулам (VIII.4), считая надчеркнутые коэффициенты S равными следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned}
(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i &= (n\beta)_{q+1} \overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{I}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i &= (n\beta)_{q+1} \overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{II}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i &= 0;\\
(\tilde{S}_{\mathrm{IV}})_i &= (n\beta)_{q+1} \overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{IV}};\\
(\bar{S}_{\mathrm{V}})_i &= (n\beta)_{q+1} \overset{\kappa}{\underset{1}{S}}_{\mathrm{III}},
\end{aligned}\right\} \tag{VIII.8}$$

где q — номер поверхности, за которой расположена действующая апертурная диафрагма.

Формулы (VIII.4) и (VIII.5) применимы для любой оптической системы как при бесконечно удаленном объекте (фотообъективы, астрономические объективы и т. п.), так и при объекте, расположенном на конечном расстоянии от системы (объективы микроскопа, проекционные объективы и т. п.).

Хроматическая разность смещений изображения или хроматическая аберрация увеличения, возникающая в центре поля при децентрировке поверхности с номером i, вычисляются по формуле

$$[\Delta y'_p]_{F-C} = \frac{[(\Delta\alpha n)_i]_F - [(\Delta\alpha n)_i]_C}{\alpha'_p n'_p} b_i. \qquad \text{(VIII.9)}$$

При сборке и исследовании фотографических и астрономических объективов большое значение имеют две аберрации второго порядка, возникающие при децентрировке поверхности с номером i на величину b_i; это меридиональная кома, определяемая коэффициентом $(S_{\text{II}})_i$, и наклон плоскости изображений, почти всегда сопровождающийся линейным по полю астигматизмом, которые определяются соответственно коэффициентами $(\bar{S}_{\text{IV}})_i$ и $(\bar{S}_{\text{III}})_i$. Из формул (VIII.4) получаем для меридиональной комы

$$\Delta g'_\kappa = + \frac{3}{2} \omega'^2_\kappa b_i (\bar{S}_{\text{II}})_i. \qquad \text{(VIII.10)}$$

Пользуясь формулами (VIII.4) или (VIII.5), можно исследовать аберрации, определяемые коэффициентами $(\bar{S}_{\text{III}})_i$ и $(\bar{S}_{\text{IV}})_i$. Исследование показывает, что астигматические фокальные линии располагаются в двух наклонных плоскостях, проходящих через центральную точку поля, перпендикулярных меридиональной плоскости. Существует третья наклонная плоскость, проходящая между указанными плоскостями, в которой фигуры рассеяния имеют форму кружков и которую можно назвать «наилучшей» наклонной плоскостью изображений; можно показать, что малый угол φ_p наклона этой плоскости (относительно плоскости изображений в центрированной системе) определяется (в минутах) формулой

$$[\varphi_p]' = 3438 \frac{b_i}{f'} [2(\bar{S}_{\text{III}})_i + (\bar{S}_{\text{IV}})_i]. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Очевидно, что если в системе фотографического объектива децентрирован ряд поверхностей на одну и ту же величину b_i, т. е. целый компонент, состоящий из p поверхностей от i-й до $(i+p-1)$-й, то нужно просто просуммировать коэффициенты, определяемые формулами (VIII.6) или (VIII.7), относящиеся к указанным поверхностям, т. е. в формулы (VIII.4) подставить вместо $(\bar{S}_{\text{II}})_i$, $(\bar{S}_{\text{III}})_i$

и т. д. соответствующие суммы этих коэффициентов, а именно:

$$\overset{i+p-1}{\underset{i}{\bar{S}_{\mathrm{II}}}} = \sum_{\mu=i}^{\mu=i+p-1} (\bar{S}_{\mathrm{II}})_\mu \text{ вместо } (\bar{S}_{\mathrm{II}})_i;$$

$$\overset{i+p-1}{\underset{i}{\bar{S}_{\mathrm{III}}}} = \sum_{\mu=i}^{\mu=i+p-1} (\bar{S}_{\mathrm{III}})_\mu \text{ вместо } (\bar{S}_{\mathrm{III}})_i \text{ и т. д.}$$

Аналогичным образом можно использовать формулы (VIII.5) для вычисления аберраций при малом наклоне какого-либо компонента в системе; для простоты предположим, что поворот компонента происходит вокруг вершины его первой поверхности. Тогда, пользуясь формулой (VIII.3), имеем

$$\Delta y_p' = -\frac{[\theta]'}{3438} \sum_{\mu=i}^{\mu=i+p-1} \frac{(\Delta\alpha n)_\mu}{\alpha_\kappa' n_\kappa'} \bar{r}_\mu, \qquad \text{(VIII.12)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_i &= r_i; \\ \bar{r}_{i+1} &= r_{i+1} + d_i; \\ \bar{r}_{i+2} &= r_{i+2} + (d_i + d_{i+1}); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{r}_{i+p-1} &= r_{i+p-1} + \sum_{\nu=i}^{\nu=i+p-2} d_\nu \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.13)}$$

и угол θ выражен в угловых минутах.

Из формул (VIII.5) получаем для меридиональной комы

$$\Delta g_\kappa' = -\frac{3}{2}\omega_\kappa'^2 \frac{[\theta_i]'}{3438} \sum_{\mu=i}^{\mu=i+p-1} \bar{r}_\mu (\bar{S}_{\mathrm{II}})_\mu \qquad \text{(VIII.14)}$$

и для наклона плоскости «наилучшего» изображения

$$[\varphi_p]' = -\frac{[\theta_i]'}{f'} \sum_{\mu=i}^{\mu=i+p-1} r_\mu [2(\bar{S}_{\mathrm{III}})_\mu + (\bar{S}_{\mathrm{IV}})_\mu]. \qquad \text{(VIII.15)}$$

В формулах (VIII.12), (VIII.14) и (VIII.15) могут встретиться плоские поверхности; тогда для соответствующего слагаемого эти формулы не пригодны, так как $r_\mu \to \infty$; в этом случае легко

найти пределы и подставить в суммы следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{r_\mu\to\infty}[r_\mu(\Delta\alpha n)_\mu] = h_\mu(\Delta n)_\mu f';\\
&\lim_{r_\mu\to\infty}[r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{II}})_\mu] = f'\Big[n_\mu y_\mu(S_{\mathrm{I}})_\mu - n_\mu h_\mu(S_{\mathrm{II}})_\mu -\\
&\qquad - \Delta n_\mu y_\mu \overset{\kappa}{\underset{\mu+1}{S}}_{\mathrm{I}} + \Delta n_\mu h_\mu \overset{\kappa}{\underset{\mu+1}{S}}_{\mathrm{II}}\Big];\\
&\lim_{r_\mu\to\infty}[r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{III}})_\mu] = f'\Big[n_\mu y_\mu(S_{\mathrm{II}})_\mu - n_\mu h_\mu(S_{\mathrm{III}})_\mu -\\
&\qquad - \Delta n_\mu y_\mu \overset{\kappa}{\underset{\mu+1}{S}}_{\mathrm{II}} + \Delta n_\mu h_\mu \overset{\kappa}{\underset{\mu+1}{S}}_{\mathrm{III}}\Big];\\
&\lim_{r_\mu\to\infty}[r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_\mu] = -f'\left(\frac{\alpha_\mu}{n_{\mu+1}} - \Delta n_\mu y_\mu \overset{\kappa}{\underset{\mu+1}{S}}_{\mathrm{IV}}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{VIII.16})$$

Формулы (VIII.4) и (VIII.5) позволяют вычислить аберрации второго порядка, возникающие при децентрировке, для всех практически интересных случаев, в том числе и для телескопических систем, если выразить аберрации $\delta g'$ и $\delta G'$ в угловой мере и соответствующим образом вычислить коэффициенты аберраций.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, *когда система состоит из бесконечно тонких компонентов.* Формулы (VIII.4) и (VIII.5) можно применить к оптическим системам, состоящим из любого числа бесконечно тонких компонентов, составленных из любого числа склеенных или несклеенных бесконечно тонких линз, если компоненты отделены друг от друга конечными воздушными промежутками.

Надчеркнутые коэффициенты S, определяемые формулами (VIII.6) или (VIII.7), значительно упрощаются при суммировании по всем поверхностям бесконечно тонкого компонента с номером i, и для аберраций, возникающих при смещении компонента на величину b_i, можно применить формулу (VIII.4), если вместо коэффициентов $(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i$, $(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i$ и т. д., определяемых по формуле (VIII.6), подставить следующие их выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i = -JP_i + J\alpha W_i + (\alpha'-\alpha)\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} - (\beta'-\beta)\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}};\\
&(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i = -J\frac{y}{h}P_i + J^2\frac{1}{h}W_i + \alpha\left(J\frac{y}{h}W_i - J^2\Phi_i\right) -\\
&\qquad -(\alpha'-\alpha)\left(\frac{y}{h}\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} - \overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}}\right);\\
&(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i = -\alpha\Phi_i\pi_i + (\alpha'-\alpha)\sum_{\nu=i+1}^{\nu=p}\pi_\nu\Phi_\nu;
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{VIII.17})$$

$$
\left.\begin{aligned}
2(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i + J^2(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_i = -2J\frac{y}{h}P_i + 2J^2\frac{1}{h}W_i + \\
+\alpha\left(2J\frac{y}{h}W_i - 2J^2\Phi_i - J^2\pi_i\Phi_i\right) - \\
-(\alpha'-\alpha)\left(\frac{y}{h}\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} - \overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}} - J^2\sum_{\nu=i+1}^{\nu=p}\pi_\nu\Phi_\nu\right),
\end{aligned}\right\}
$$

где α — угол первого параксиального луча до преломления на компоненте с номером i; α' — угол того же луча после преломления на компоненте i; P_i, W_i и π_i — параметры компонента с номером i; эти параметры могут быть, очевидно, выражены и через основные параметры компонента i по формулам (III.25); Φ_i — оптическая сила компонента i в системе; h, y — высоты первого и второго параксиальных лучей на компоненте с номером i; β — угол второго параксиального луча до преломления на компоненте i; β' — угол того же луча после преломления; $\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}}$, $\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}}$ и $\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}}$ — суммы, относящиеся к компонентам, расположенным за децентрированным компонентом с номером i, — от компонента с номером $(i+1)$ до последнего, с номером p, т. е.

$$
\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{I}} = \sum_{\nu=i+1}^{\nu=p} h_\nu P_\nu; \qquad \overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{II}} = \sum_{\nu=i+1}^{\nu=p}(y_\nu P_\nu - JW_\nu);
$$

$$
\overset{p}{\underset{i+1}{S}}_{\mathrm{III}} = \sum_{\nu=i+1}^{\nu=p}\left(\frac{y_\nu^2}{h_\nu}P_\nu - 2J\frac{y_\nu}{h_\nu}W_\nu + \Phi_\nu\right).
$$

Еще проще выражаются коэффициенты аберраций децентрировки при повороте компонента с номером i на малый угол θ_i вокруг вершины; в этом случае аберрации можно вычислить по формулам (VIII.5), если вместо произведений $r_i(\bar{S}_{\mathrm{II}})_i$, $r_i(\bar{S}_{\mathrm{III}})_i$ и т. д. подставить суммы этих произведений, выполнив суммирование по всем поверхностям компонента с номером i, т. е.

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{\mu=t} r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{II}})_\mu = JhW_i; \\
\sum_{\mu=1}^{\mu=t} r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{III}})_\mu = JyW_i - (\alpha'-\alpha)J^2; \\
\sum_{\mu=1}^{\mu=t} r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_\mu = (\alpha'-\alpha)(1-\pi_i); \\
2\sum_{\mu=1}^{\mu=t} r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{III}})_\mu + J^2\sum_{\mu=1}^{\mu=t} r_\mu(\bar{S}_{\mathrm{IV}})_\mu = 2JyW_i - \\
-(\alpha'-\alpha)J^2(1+\pi_i),
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.18)}
$$

где t — число поверхностей в компоненте с номером i; W_i, π_i — параметры компонента с номером i; α, α', y, h — имеют смысл, указанный выше.

Меридиональную кому при смещении компонента i на величину b_i можно вычислить по формуле (VIII.10), подставив $(\bar{S}_{\text{II}})_i$ из формул (VIII.17), а смещение центральной точки поля легко найти по формуле (VIII.3), выполнив суммирование по всем поверхностям компонента i:

$$\Delta y_p' = \frac{b_i}{\alpha_p' n_p'} \sum_{\mu=1}^{\mu=t} (\Delta\alpha n)_\mu = \frac{b_i}{\alpha_p' n_p'} h\Phi_i. \qquad \text{(VIII.19)}$$

Наклон плоскости изображений определяется по-прежнему формулой (VIII.11), если подставить выражение для $2(\bar{S}_{\text{III}})_i + J^2(\bar{S}_{\text{IV}})_i$ из формул (VIII.17).

При повороте компонента на угол θ_i меридиональная кома и наклон плоскости изображений определяются соответственно по формулам (VIII.14) и (VIII.15), если суммы подставить из формул (VIII.18). Что касается смещения центральной точки поля при повороте компонента, то из формулы (VIII.12) видим, что сумма

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=t} \frac{(\Delta\alpha n)_\mu}{\alpha_p' n_p'} r_\mu = \frac{1}{\alpha_p' n_p'} \sum_{\mu=1}^{\mu=t} \Delta n_\mu h =$$

$$= \frac{h}{\alpha_p' n_p'} \sum_{\mu=1}^{\mu=t} (\Delta n)_\mu = \frac{h}{\alpha_p' n_p'} (n_{t+1} - n_1),$$

т. е. равна нулю, если компонент i окружен воздухом и $n_{t+1} = n_1 = 1$. Этот результат очевиден, поскольку бесконечно тонкий компонент i поворачивается вокруг вершины своей первой поверхности, т. е. вокруг своей узловой точки, а такой поворот не может вызвать изменение угла между падающим на компонент и выходящим за компонентом i центральным лучом.

Все перечисленные формулы могут быть применены и для несферических поверхностей. При этом под величиной r следует понимать радиус кривизны в вершине поверхности, а за центр кривизны принимать точку, отстоящую от вершины на расстоянии r.

Приведем численный пример, заимствованный из статьи Н. Н. Губеля [4]. В табл. VIII.1 приведены конструктивные элементы объектива типа «Индустар» ($f' = 50$; $1:3{,}5$). Изменение положения плоскости изображения и величины меридиональной комы при смещении поверхностей и компонентов (линз) на $b_i = +0{,}10$ *мм* показано в табл. VIII.2, то же при повороте линз или компонентов на угол $\theta_i = -10'$ — в табл. VIII.3.

Сложность приведенных выше формул для производных аберраций по поперечному смещению центра кривизны поверхности в какой-то степени лишает их наглядности.

Автором [5] был предложен более грубый, но простой способ оценки влияния децентрировки на качество изображения, в большинстве случаев обеспечивающий точность, достаточную для определения допустимой децентрировки.

Предположим, что все поверхности оптической системы (рис. VIII.4) хорошо центрированы, за исключением последней $O'O_1'$; ее центр находится на расстоянии b_p от оси. Пусть r_p — ее радиус; A' — изображение точки на оси, даваемое всей системой, за исключением последней поверхности. Для поверхности $O'O_1'$

Таблица VIII.1

r_i	d_i	n
17,10		1,0
∞	2,7	1,6126
—33,57	4,18	1,0
14,56	1,05	1,5749
346,7	5,05	1,0
15,0	1,20	1,5294
—23,55	4,70	1,6126
		1,0
$x_1 = -2{,}30$; $x_1 = -2{,}75$		

Таблица VIII.2

№ децентрированной поверхности i	№ децентрированной линзы	Смещение центра поля изображений $\Delta y'_K$	Величина меридиональной комы в центре поля $\Delta g'_K$	Угол наклона плоскости изображений φ_p	
				в *рад*	в *мин*
(1)		+0,1877	+0,0320	—0,0058	—20
(2)		0	0	0	0
(1+2)	I	+0,1877	+0,0320	—0,0058	—20
(3)		—0,0709	—0,0231	—0,0080	—27,5
(4)		—0,1604	—0,0401	+0,0129	+44,3
(3+4)	II	—0,2313	—0,0632	+0,0049	+16,8
(5)		+0,0065	+0,0004	+0,00005	+0,2
(6)		+0,0239	+0,0087	—0,00252	—8,7
(7)		+0,1132	+0,0273	+0,0083	+28,5
(5+6+7)	III	+0,1436	+0,0364	+0,00585	+20

Таблица VIII.3

№ поверхности	№ компонента	Смещение центра поля изображений $\Delta y'_K$	Величина меридиональной комы $\Delta g'_K$	Угол наклона плоскости изображений φ_p	
				в *рад*	в *мин*
(1+2)	I	+0,0056	+0,0016	—0,0139	—47,8
(3+4)	II	—0,0036	+0,0044	+0,0137	+47,1
(5+6+7)	III	+0,0191	—0,0059	—0,0049	—17,1

точка A' играет роль предмета; но она оказывается не на оси, а на расстоянии от нее $l_p = s_p \frac{b_p}{r_p}$, где s_p — расстояние от A' до вершины поверхности p. Угол $w_p = \frac{l_p}{s_p}$ очень мал, поэтому можно считать, что изображение точки A' вследствие децентрировки будет обладать комой — аберрацией, пропорциональной первой степени угла w_p и второй степени апертурного угла ω'_p. Аберрациями более высокой степени малости относительно w можно пренебречь.

Эта кома, происходящая от децентрировки, вычисляется совершенно так же как кома внеосевых пучков для центрированных оптических систем.

Рис. VIII.4

В гл. II была выведена формула для аберрации одной поверхности. Применяя ее к нашему случаю и полагая $S_{\mathrm{I}} = S_{\mathrm{III}} = S_{\mathrm{IV}} = 0$, рассмотрим лишь кому, обусловливаемую коэффициентом S_{II}. Переходя от величин α и β к более удобным для данной цели величинам $Q_s = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$ и $Q_x = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)$ с помощью ранее доказанных соотношений

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\frac{1}{n}} = -hQ_s; \quad \frac{\Delta\beta}{\Delta\frac{1}{n}} = -yQx; \qquad \Delta\frac{\alpha}{n} = h\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right),$$

получаем

$$\frac{2n'\delta g'\omega'}{h_1} = -\frac{3m_p^2}{(x_p - s_p)^3} l_p s_p^2 x_p Q_x Q_s \Delta\frac{1}{ns}.$$

В нашем случае $(x_p = 0)$ $Q_x = n_p\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{x_p}\right)$ обращается в бесконечность, но произведение $x_p Q_x = n_p\left(\frac{x_p}{r_p} - 1\right) = -n$ конечно.

Ввиду того, что $x_p = 0$; $m_p = h_p$; $\frac{s_p^2}{(x_p - s_p)^2} = 1$; $\frac{l_p}{-s_p} = w_p$,

$$n'_p\delta g'_p\omega'_p = \frac{3}{2} n_p^2 h_p^2 w_p \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{s_p}\right)\left(\frac{1}{n'_p s'_p} - \frac{1}{n_p s_p}\right).$$

Возвращаясь к переменным α, после несложных преобразований получаем аберрацию децентрировки $\delta g'_p$, умноженную на $n'_p\omega'_p$ с целью образования инварианта Лагранжа—Гельмгольца

$$n'_p\delta g'_p\omega'_p = -\frac{3}{2} w_p h_p n_p W_p \omega'^2_p,$$

причем индекс может быть любой. Произведение $w_p n_p = w'_p n'_p$ является инвариантным по отношению к рассматриваемой поверхности. Величина h_p есть высота точки пересечения крайнего луча пучка с поверхностью p; W_p рассчитывается в предположении, что $\alpha'_p = 1$; w_p — наклон поверхности относительно ее первоначального положения (угол поворота ее).

Выполненный для p-й поверхности вывод применим для любой κ-й поверхности с той только разницей, что аберрация $\delta g'$ получается не в последней среде, а в среде с номером κ. При переносе аберрации в последнюю среду возникают указанные ранее препятствия: если принять, что последующая за κ-й поверхностью система центрирована относительно общей оси, то она, помимо увеличения аберрации $\delta g'$ согласно формуле Лагранжа—Гельмгольца, вносит еще дополнительную кому вследствие того, что изображение после поверхности κ находится вне общей оси.

Чтобы избежать этого осложнения, систему поверхностей $\kappa + 1$, $\kappa + 2$, . . ., p, рассматриваемую как самостоятельный центрированный компонент, вращаем вокруг точки пересечения ее первой (т. е. $\kappa + 1$ поверхности всей системы) поверхности с общей осью предыдущей системы на такой угол, чтобы изображение точки A' оказалось на оси предыдущей системы. При таком расположении этой оси исчезает дополнительная кома δ_2, а кому $\delta g'_p$ в пространстве изображений можно вычислить по формуле

$$\delta g'_p = -\frac{3}{2}\frac{n\alpha}{n'_p\alpha'_p} s_\kappa w_\kappa W_\kappa \omega'^2_p.$$

Такой прием может показаться условным, но, по существу, он не более условен, чем общепринятый, согласно которому ось считается общей для всех поверхностей кроме децентрированных.

Простота формул, определяющих значение комы при децентрировке, позволяет еще в стадии предварительных расчетов определить чувствительность отдельных поверхностей, так как величины W известны уже на стадии вычисления коэффициентов аберраций третьего порядка. В некоторых случаях излишняя чувствительность недопустима (например, если прибор подвергается вибрациям, толчкам и большим ускорениям), и система, в которой величины W превышают некоторую предельную, должны быть забракованы.

Предложенный здесь упрощенный метод определения влияния децентрировки страдает одним недостатком: с его помощью невозможно определить суммарное влияние децентрировок нескольких поверхностей, так как при этом методе оптическая ось терпит разрывы и, следовательно, наклон каждой последующей за децентрированной поверхностью оси не произволен, а зависит от наклона предыдущей поверхности. Но при определении допусков достаточно знать влияние децентрировки каждой поверхности

в отдельности, поэтому указанное отрицательное свойство не имеет практического значения. Другой недостаток упрощенного метода состоит в том, что он может быть применен лишь для точки на оси, следовательно, не может дать сведений о величине аберраций децентрировки на краю поля зрения, а поэтому пригоден лишь для систем, обладающих малым углом поля зрения.

Второй и наиболее распространенный метод вычисления допусков на децентрировку поверхностей опирается на расчет хода лучей через систему, в которой одна из поверхностей ($к$) децентрирована на определенную величину $b_к$, и вычисление возникающих из-за децентрировки аберраций. Вектор $b_к$ принимается лежащим в меридиональной плоскости, при этом аберрация оказывается максимальной по абсолютному значению. Обычно расчет хода лучей выполняется на ЭВМ по формулам Федера, изложенным в гл. I, с небольшим добавлением, вызванным децентрировкой.

Рис. VIII.5

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай децентрировки одной сферической поверхности. Пусть вершина $M_к$ (рис. VIII.5) $к$-й поверхности поворачивается на угол $\theta_к$ вокруг некоторого центра вращения $O_к$, находящегося на оси на расстоянии $l_к$ от точки $M_к$. Центр C_2 поверхности переходит в точку $C_{1к}$, причем изменения координат этой точки равны: по высоте — $b_к = H_к C_{1к} = (l_к - r_к) \sin \theta_к$; по абсциссе — $\Delta d_{к-1} = (l_к - r_к) \times (1 - \cos \theta_к)$.

Вычислив эти величины, можно продолжить расчет по обычным формулам.

При повороте целого компонента применяется аналогичный прием, на котором нет необходимости останавливаться. Расчет выполняется для ряда лучей (двух или четырех), исходящих из одной и той же точки-объекта, симметричных относительно главного луча и соответствующих различным значениям координаты m на входном зрачке (обычно берут те же значения, что и для расчета сферической аберрации). Производится также расчет луча, служащего продолжением осевого, который после $к$-й поверхности перестает быть параксиальным. Ордината точки пересечения этого луча с плоскостью изображения дает величину перемещения изображения в направлении, перпендикулярном оси. Между ординатами точек пересечения всех остальных лучей и ординатой главного луча составляются разности. Эти разности сравнивают с разностями, полученными для пучка лучей, рассчитанного через центрированную систему, и изменения этих разностей, вызванные

Таблица VIII.4

Параметры основной системы	Величина изменения	$\delta f_0'$	$\delta s_0'$	$\delta(s_{G'}' - s_C')$	$\sigma_1=0°;\ h=9{,}3$		$\sigma_1=-19°;\ m_1=0$		
					$\delta\Delta s'$	$\delta\eta$ в %	δx_s	δx_m	$\delta\Delta y'$
$r_1 = 19{,}099$	+1,0	+4,80	+5,74	+0,145	+2,07	+0,413	—0,09	—0,43	—0,04
$r_2 = 57{,}54$	+5,0	—1,76	—1,88	—0,028	—0,29	+0,020	—0,06	—0,11	+0,02
$r_3 = -80{,}17$	+5,0	+0,87	+0,88	+0,024	+0,39	—0,128	+0,06	+0,12	—0,01
$r_4 = 16{,}106$	+0,5	—1,81	—1,79	—0,041	—0,79	—0,169	—0,04	—0,02	+0,01
$r_5 = 84{,}14$	+5,0	+0,76	+0,67	+0,019	+0,05	—0,020	+0,04	+0,09	0,00
$r_6 = 19{,}099$	+1,0	+0,88	+0,76	—0,018	+0,30	+0,074	+0,05	+0,14	0,00
$r_7 = -40{,}46$	+2,0	—1,95	—1,52	—0,029	—0,35	+0,163	—0,03	—0,03	0,00
$d_1 = 7{,}5$	+0,5	—0,41	—1,17	—0,047	—0,43	—0,012	+0,06	+0,15	+0,02
$d_2 = 1{,}5$	+0,2	—0,05	—0,43	—0,023	—0,21	+0,020	+0,04	+0,10	+0,01
$d_3 = 1{,}6$	+0,2	+0,02	—0,17	—0,005	—0,06	—0,019	+0,05	+0,13	0,00
$d_4 = 3{,}8$	+0,5	—0,34	—0,08	—0,009	—0,10	—0,107	+0,03	+0,04	—0,03
$d_5 = 1{,}5$	+0,2	—0,02	0,00	0,000	—0,01	—0,027	+0,01	+0,03	—0,01
$d_6 = 7{,}0$	+0,5	+0,07	—0,02	+0,003	+0,02	—0,046	+0,04	+0,12	—0,01
$n_2 = 1{,}7468$	+0,0100	—0,83	—0,97	—	—0,15	—0,065	+0,01	+0,02	+0,01
$n_4 = 1{,}6242$	+0,0100	+1,23	+1,23	—	+0,34	—0,023	+0,03	+0,06	—0,01
$n_6 = 1{,}5800$	+0,0100	+0,83	+0,71	—	+0,15	+0,022	+0,04	+0,11	0,00
$n_7 = 1{,}7468$	+0,0100	—1,53	—1,27	—	—0,20	+0,038	—0,04	—0,13	0,00
$(n_{G'} - n_C)_2 = 0{,}02307$	+0,00100	—	—	—0,098	—	—	—	—	—
$(n_{G'} - n_C)_4 = 0{,}02796$	+0,00100	—	—	+0,120	—	—	—	—	—
$(n_{G'} - n_C)_6 = 0{,}02458$	+0,00100	—	—	+0,070	—	—	—	—	—
$(n_{G'} - n_C)_7 = 0{,}02307$	+0,00100	—	—	—0,129	—	—	—	—	—

Таблица VIII.5

Вид децентрировки	Величина децентрировки	$\sigma_1=0°$			$\sigma_1=-15°$			$\sigma_1=0°$		$\sigma_1=-15°$	
		m_1	y'	$y'-y_{гл}$	m_1	y'	$y_1-y'_{гл}$	$\delta y'_{гл}$	$\delta(y'-y'_{гл})$	$\delta y'_{гл}$	$\delta(y'-y'_{гл})$
Основная система		9,3 0 —9,3	—0,003 0 0,003	—0,003 0 0,003	6,5 0 —6,5	13,806 13,830 13,845	—0,024 0 0,015				
Поперечное смещение центров кривизны отдельных поверх-	$b_1=0,1$	9,3 0 —9,3	0,267 0,203 0,266	0,064 0 0,063	6,5 0 —6,5	14,059 14,037 14,054	0,022 0 0,017	0,203	0,067 0 0,060	0,207	0,046 0 0,002
	$b_2=0,5$	9,3 0 —9,3	—0,325 —0,281 —0,316	—0,044 0 —0,035	6,5 0 —6,5	13,497 13,519 13,505	—0,022 0 —0,014	—0,281	—0,041 0 —0,038	—0,311	0,002 0 —0,029
	$b_3=0,5$	9,3 0 —9,3	—0,229 —0,160 —0,225	—0,069 0 —0,065	6,5 0 —6,5	13,637 13,647 13,582	—0,010 0 —0,065	—0,160	—0,066 0 —0,068	—0,183	0,014 0 —0,080
	$b_4=0,1$	9,3 0 —9,3	—0,227 —0,155 —0,223	—0,072 0 —0,068	6,5 0 —6,5	13,585 13,663 13,664	—0,078 0 +0,001	—0,155	—0,069 0 —0,071	—0,167	—0,054 0 —0,014
	$b_5=0,5$	9,3 0 —9,3	0,151 0,143 0,158	0,008 0 0,015	6,5 0 —6,5	13,972 13,994 14,022	—0,022 0 0,028	0,143	0,011 0 0,012	0,164	0,002 0 0,013

ностей на величину b_K	$b_6 = 0{,}1$	9,3 0 —9,3	0,047 0,036 0,054	0,011 0 0,018	6,5 0 —6,5	13,863 13,872 13,890	—0,009 0 0,018	0,036	0,014 0 0,015	0,042	0,015 0 0,003
	$b_7 = 0{,}5$	9,3 0 —9,3	0,453 0,374 0,471	0,079 0 0,097	6,5 0 —6,5	14,191 14,248 14,413	—0,057 0 0,165	0,374	0,082 0 0,094	0,418	—0,033 0 0,150
Поперечное смещение линз	$b_{\mathrm{I}} = 1{,}0$	9,3 0 —9,3	2,515 1,471 1,765	1,044 0 0,294	6,5 0 —6,5	15,694 15,275 15,239	0,419 0 —0,036	1,471	1,047 0 0,291	1,445	0,443 0 —0,051
	$b_{\mathrm{II}} = 0{,}1$	9,3 0 —9,3	—0,272 —0,187 —0,269	—0,085 0 —0,082	6,5 0 —6,5	13,551 13,626 13,612	—0,075 0 —0,014	—0,187	—0,082 0 —0,085	—0,204	—0,051 0 —0,029
	$b_{\mathrm{III+IV}} = 0{,}1$	9,3 0 —9,3	0,170 0,140 0,178	0,030 0 0,038	6,5 0 —6,5	13,973 13,998 14,038	—0,015 0 0,050	0,140	0,033 0 0,035	0,158	0,009 0 0,035
Поворот линз вокруг вершины первой поверхности децентрируемой линзы	$\theta_{\mathrm{I}} = 10'$	9,3 0 —9,3	—0,024 —0,007 —0,017	—0,017 0 —0,010	6,5 0 —6,5	13,783 13,832 13,859	—0,049 0 0,027	—0,007	—0,014 0 —0,013	0,002	—0,025 0 0,012
	$\theta_{\mathrm{II}} = 10'$	9,3 0 —9,3	0,007 0,005 0,013	0,002 0 0,008	6,5 0 —6,5	13,842 13,831 13,816	0,011 0 —0,015	0,005	0,005 0 0,005	0,001	0,035 0 —0,030
	$\theta_{\mathrm{III+IV}} = 10'$	9,3 0 —9,3	—0,023 —0,022 —0,017	—0,001 0 0,005	6,5 0 —6,5	13,762 13,801 13,836	—0,039 0 0,035	—0,022	0,002 0 0,002	—0,029	—0,015 0 0,020

децентрировкой, являются мерой влияния децентрировки. Эти вычисления повторяют для всех поверхностей последовательно и составляют сводку результатов. Такие сводки выполняются обычно для точки на оси и для точки, лежащей близко к краю поля зрения. Если оптическая система обладает малым углом поля, достаточно исследовать влияние децентрировки для осевой точки. Выбор значения величин b_i определяется опытным путем. Обычно угол поворота $\frac{b_к}{r_к}$ берут порядка нескольких (1—10) минут (в зависимости от качества изображения, даваемого системой). Для высококачественных систем углы поворота должны быть малыми—порядка 1—2′.

Какие величины децентрировки допустимы? Для точки на оси можно исходить из следующего соображения. Если диаметр кружка рассеяния, вызываемого сферической аберрацией, в наилучшей плоскости установки равен $2z$, то можно допустить меридиональную кому порядка 30—40% от z. Если оптическая система визуальная и обладает высоким качеством изображения, целесообразно исходить из дифракционных критериев, например из волновой аберрации или из значений ЧКХ, допуская в первом случае волновую кому в 15—20% от волновой сферической аберрации (в наилучшей плоскости установки), а во втором — ухудшение значения ЧКХ на 15—20% при частотах, представляющих наибольший интерес для рассматриваемой оптической системы. Для систем с высокой разрешающей способностью, применяемых в астрономических и визуальных приборах, следует брать частоты, близкие к предельным разрешаемым; для фотографических объективов нужно исходить из частот, соизмеримых с разрешаемыми светочувствительным слоем частотами, которые обычно в десятки раз меньше предельных.

Для точки вне оси можно руководствоваться такими же соображениями, но допустить несколько большее ухудшение, например до 30—40%, причем здесь ухудшение чаще всего относится не к коме, а к астигматизму и кривизне (из-за наклона плоскости изображения).

Практика показывает, что для большинства оптических систем, за исключением широкоугольных с малой апертурой, основное значение имеет появление комы для осевой точки.

Приведем здесь в качестве иллюстрации сводку результатов расчета влияния параметров на некоторые параксиальные и аберрационные величины фотографического объектива, рассчитанного в ГОИ, с фокусным расстоянием 52 *мм*, относительным отверстием 1 : 2,8 и $2\beta = 46°$. Объектив исправлен для лучей D, ахроматизирован для C и G'. Расчет выполнен для двух значений параметров, отличающихся друг от друга на величины, приведенные в табл. VIII.4. В табл. VIII.5 дана сводка результатов влияния децентрировки отдельных поверхностей и целых компонентов на аберрации объектива.

Обе таблицы могут служить основанием для составления системы допусков на конструктивные элементы изучаемого объектива.

7. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ВОПРОСУ ДОПУСКОВ

Как правило, изменение каждого параметра x вызывает изменение всех аберраций рассматриваемой оптической системы. Допустимому изменению каждой аберрации (и габаритных характеристик) соответствует определенное для каждого параметра отклонение от расчетной величины. Наименьшее (по абсолютному значению) из всех полученных отклонений параметра, соответствующих допустимым отклонениям различных аберраций, берется в качестве допуска. Однако при окончательном определении допуска необходим анализ последствий, которые может вызвать та или другая аберрация; при этом анализе должны учитываться в первую очередь назначение системы, свойства приемника света и т. п.

Кроме того, нужно помнить, что число, характеризующее изменение каждой аберрации, само по себе еще ничего не говорит об ухудшении качества изображения, так как это изменение в некоторых случаях может быть компенсировано каким-нибудь простым способом. В качестве примера рассмотрим сферическую аберрацию. Пусть при изменении некоторого параметра x поперечная сферическая аберрация на краю апертуры изменилась на $\Delta\delta g'$. Однако сама по себе эта величина не определяет ухудшения качества изображения, так как смещением плоскости установки можно добиться возвращения к расчетной величине аберрации. Для других зон зрачка, как правило, поперечная аберрация становится иной и изменение качества все же происходит, но оно значительно меньше, чем можно было бы ожидать на основании величины изменения $\Delta\delta g'$. Аналогичные соображения могут быть выдвинуты и в отношении других аберраций, например дисторсии, которая выбором надлежащего значения фокусного расстояния (или увеличения) может быть уменьшена в несколько раз (в четыре раза в случае дисторсии третьего порядка). Поэтому во избежание возможных недоразумений рационально в качестве критерия качества изображения брать такой, как ЧКХ, соответствующая определенной частоте; при расчете ЧКХ должно быть принято во внимание и смещение плоскости установки. К сожалению, это требует весьма сложных вычислений и даже при наличии ЭВМ не всегда возможно.

Некоторые категории оптических приборов (астрономические и астрофотографические объективы) из-за своих значительных фокусных расстояний очень чувствительны к хроматической аберрации, вследствие чего при определении допустимых отклонений

конструктивных элементов главное внимание следует обращать на эти аберрации. Но при этом необходимо учесть спектральное распределение яркостей в источнике света, спектральный коэффициент отражения рассматриваемого объекта или, если последний является самосветящимся, его относительное или абсолютное спектральное излучение и, наконец, спектральную чувствительность приемника световой энергии. Так как все коэффициенты, определяющие указанные величины, перемножаются друг на друга, то в результате обычно остается очень узкая спектральная область, сильно сокращающая величину остаточной хроматической аберрации. Это в ряде случаев позволяет существенно увеличить допустимую величину отклонений параметров от их расчетного значения. Действительно, может оказаться, что в результате совместного действия источника, объекта и приемника лишь весьма узкая спектральная область участвует в образовании изображения.

При оценке качества изображения в широкой области спектра большую пользу может принести расчет ЧКХ по описанному в гл. X способу.

8. ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ДОПУСКА

Назовем *условным допуском* максимальное значение допустимого отклонения Δx_i параметра x_i оптической системы, вычисленное в предположении, что все остальные параметры точно соответствуют расчетным величинам.

Условные допуски следует вычислять непосредственно на основании сводной таблицы влияния параметров на габаритные величины и аберрации, принимая во внимание соображения, изложенные на стр. 473.

Теперь предстоит переход от условного допуска к реальному, т. е. максимально допустимой величине изменения параметра x_i в том случае, когда все остальные параметры также претерпевают изменения, не выходящие из границ рассчитанных для них допусков.

При изготовлении оптической детали неизбежно возникают отступления значений параметров от расчетных. Пусть Δx_i — отступление параметра x_i от расчетного значения. Предположим, что прибор выпускается в большом количестве. Среди N приборов имеется N_1 таких, для которых Δx_i лежит в пределах $0—\delta_1$; N_2 — для которых Δx_i лежит в пределах $\delta_1—\delta_2$, . . ., N_κ — для которых Δx_i лежит в пределах $\delta_{\kappa-1}—\delta_\kappa$. Можно представить графически зависимость N_κ от положения промежутка $\delta_{\kappa-1}—\delta_\kappa$ (рис. VIII.6). Для каждого парамегра x_i функция распределения ΔN в зависимости от $\Delta\delta$ может иметь свой вид. От вида функции распределения зависит в конечном счете выбор допустимых отклонений. К сожалению, до настоящего времени серьезных исследований по этому вопросу не проведено. Наиболее естественно пред-

положить, что это распределение имеет такой же характер, какой принят в теории погрешностей Гаусса; из этого предположения вытекает следствие, что к определению допусков приложимы некоторые разделы теории вероятностей, в том числе метод наименьших квадратов.

Один из выводов теории погрешностей заключается в следующем. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — результаты измерения некоторой величины x; $x_m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_p}{p}$ — среднее арифметическое всех значений x. Вероятная погрешность ε величины x_m равна $\frac{1}{\sqrt{p}}$ вероятной погрешности одного наблюдения; другими словами, точность определения некоторой измеряемой величины пропорциональна корню квадратному из числа наблюдений. С большой долей условности можно провести следующую аналогию. Сопоставим число наблюдений или измерений величины x с числом параметров оптической системы, от которых зависят требуемые габаритные условия и аберрации; с другой стороны, сопоставим вероятную погрешность среднего арифметического значения величины x с вероятным вкладом, вносимым каждым параметром в изменение габаритных данных и аберраций системы. Можно считать, что если при изготовлении оптических систем действует тот же закон распределения в отклонениях Δx, какой существует в погрешностях наблюдаемых величин, то вклад каждого параметра в значение изменения интересующих нас характеристик оптической системы будет обратно пропорционален корню квадратному из числа параметров p согласно формуле

Рис. VIII.6

$$\Delta x = \frac{\Delta x_m}{\sqrt{p}}. \qquad \text{(VIII.20)}$$

В число параметров входят радиусы кривизны, толщины, величины децентрировки отдельных поверхностей и узлов. Показатели преломления и дисперсии можно не учитывать, так как обычно по получении плавок стекол, из которых будет изготовляться система, делают пересчет последней, основываясь главным образом на таблице влияния изменения значений показателей преломления и коэффициентов Аббе. Таким образом, число параметров приблизительно в 3 раза больше, чем число поверхностей, если в системе нет асферических поверхностей. При наличии таковых число параметров увеличивается, так как добавляется число

коэффициентов, определяющих асферическую поверхность. Например, для оптической системы, содержащей 10 поверхностей, число параметров, подлежащих учету при вычислении допусков, достигает 35. Для перехода от условных допусков к реальным нужно уменьшить условный допуск в 6 раз.

На практике следует принимать во внимание ряд дополнительных соображений. Прежде всего, задавая те или другие допуски, необходимо считаться с трудностями, возникающими в мастерских и цехах при их выполнении. Например, воздушные промежутки, как правило, могут быть выдержаны с очень большой точностью, чаще всего намного превышающей определяемую из аберрационных условий. Если при расчете системы значения радиусов кривизны взяты из каталога пробных стекол, то можно считать, что при изготовлении погрешности в этих величинах равны нулю. То же относится к показателям преломления; как было указано выше, рационально делать пересчет системы с учетом показателей преломления плавок, предназначенных для этих систем; при этом, очевидно, необходимость определения допусков для показателей преломления и дисперсии стекол отпадает.

Изложенные обстоятельства приводят к значительному ослаблению допусков, так как число переменных p сокращается в 2—3 раза и допуски могут быть увеличены в 1,5—1,7 раза. Но этим не заканчивается работа по определению допустимых отклонений: она завершается иногда вместе с представителями мастерских, требующими расширения допусков для некоторых параметров, например величин децентрировки. Всегда возможно ослабить допуски для одной группы параметров при условии их ужесточения для другой группы, исходя из положения, что общая сумма их действия должна остаться постоянной.

9. УТОЧНЕНИЕ СИСТЕМЫ ДОПУСКОВ

При определении допусков изложенным выше методом не учитывается экономический фактор. Его можно учесть следующим образом. Некоторые конструктивные элементы, как радиусы кривизны сферических поверхностей (в том случае, когда подобраны пробные стекла), воздушные промежутки и т. д., могут быть осуществлены при изготовлении с очень большой точностью без особого труда. Очевидно, при определении окончательных допусков можно задать их для указанных параметров значительно более жесткими, чем это получается по формуле (VIII.20), и создаваемый таким путем резерв точности использовать для оставшихся трудоемких параметров, расширяя соответственно допуски на последние. Этот прием можно применять как приближенно с помощью прикидок, так и более точно, придавая допускам некоторые весовые коэффициенты подобно тому, как это делается при осу-

ществлении метода наименьших квадратов, причем весовой коэффициент при параметре тем больше, чем выше точность, с которой значение данного параметра может быть выдержано при изготовлении.

10. ДОПУСТИМАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ СТЕКОЛ

Рассмотрим влияние плавной неоднородности показателя преломления на ход луча. Пусть MN—$M'N'$ — бесконечно тонкий слой среды с показателем преломления n, лежащий между двумя слоями с показателями n—dn и $n + dn$ (рис. VIII.7); пусть нормаль ко всем поверхностям в бесконечно малом объеме, в котором происходит преломление, лежит в плоскости чертежа. Переходя через границу между двумя средами с показателями преломления n и $n + dn$, луч претерпевает изменение хода, определяемое путем дифференцирования формулы Декарта

$$n \sin i = n' \sin i' = C,$$

откуда

$$dn \sin i + n \cos i \, di = 0$$

или

$$di = \frac{dn}{n} \operatorname{tg} i.$$

Рис. VIII.7

Вычислим радиус кривизны R траектории луча $ABCD$. Этот радиус определяется по формуле $R = \frac{ds}{d\alpha}$, где ds — приращение дуги, а $d\alpha$ — приращение угла, образуемого нормалью с некоторым постоянным направлением.

Если слой среды, через которую проходит луч, имеет толщину dh, то соответствующая этому слою длина пути BC равна $\frac{dh}{\cos i}$; с другой стороны, $d\alpha = di$; поэтому

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{dh}{\cos i \frac{dn}{n} \operatorname{tg} i} = \frac{dh}{dn} \frac{n}{\sin i}.$$

Кривизна траектории $\frac{1}{R}$ определяется формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{dn}{dh} \frac{1}{n} \sin i = \operatorname{grad} n \frac{\sin i}{n}.$$

Таким образом, плавная неоднородность, т. е. такая неоднородность, при которой производная показателя преломления по толщине слоя h, или градиент показателя преломления $\frac{dn}{dh}$,

имеет конечное значение, так же как и вторая производная $\frac{d^2n}{dh^2}$, вызывает плавное отклонение луча; в этом случае радиус траектории может быть определен по вышеприведенным формулам.

Неоднородность стекла изменяет фронт волны. Если поверхность волны при отсутствии неоднородности сферическая, то при наличии градиента показателя она деформируется; как правило, появляются аберрации, иногда необычного вида, зависящего от поля градиента. Неоднородность стекла может носить самый разнообразный характер.

В массе стекла могут оказаться небольшие включения с показателем преломления, отличным от показателя основной массы стекла. Такие неоднородности мало опасны, если объем включения невелик по сравнению с объемом рабочей части линзы (под рабочей частью линзы следует понимать не ту часть, которая ограничивается оправой, а ту, которая заполняется пучком лучей, идущим от светящейся точки). Значительно бо́льшую опасность представляют неоднородности, простирающиеся на большие объемы.

В первом приближении можно считать, что неоднородность имеет линейный характер, т. е. что поверхности, на которых показатель преломления n имеет постоянное значение, являются плоскостями, и зависимость n от координат рассматриваемой точки можно представить уравнением

$$n = Ax + By + Cz + n_0,$$

где x, y и z — декартовы координаты точки пространства, в которой определяется значение показателя преломления n. Если на нормали к поверхностям равных значений n показатель изменяется на Δn на промежутке длины ΔN, то отношение $\frac{\Delta n}{\Delta N}$ представляет собой градиент показателя.

В гл. IV было доказано, что радиус кривизны R траектории луча определяется по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dN}\sin i,$$

где i — угол, образуемый лучом с нормалью к поверхности равных n. Наибольшая кривизна получается при углах i, близких к 90°, т. е. когда луч идет параллельно поверхности равных n. В дальнейшем будем полагать, что главный луч пучка направляется параллельно поверхности равных n. Отметим, что если луч отклоняется от этого направления на довольно большие углы (до 15—20°), то радиус кривизны почти не меняет своего значения, так как $\sin i$ остается близким к единице. При вычислении траектории луча можно с вполне достаточной точностью считать R постоянным вдоль очень значительных отрезков пути, так как во

всех встречающихся на практике случаях угол i меняется не более чем на секунды дуги.

Рассмотрим сначала случай плоскопараллельной пластинки толщиной d (рис. VIII.8). Пусть градиент $\frac{\Delta n}{\Delta N} = g$. Кривизна траектории луча равна $\frac{1}{R} = \frac{1}{OA} = \frac{1}{n} g$. Отклонение луча $\varphi = \frac{d}{R} = \frac{d}{n} g$.

Рис. VIII.8

Пример. Если n меняется на 10^{-5} на протяжении 1 *см*, отклонение луча пластинкой с толщиной 100 *мм* равно

$$\varphi = \frac{100 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10} 206\,000'' = 13''.$$

Плоскопараллельная пластинка из неоднородного стекла действует как клин.

Если закон изменения показателя параболический ($n = AN^2$), то плоскопараллельная пластинка действует как линза. Особенно опасны скачки показателя, так как они вызывают отчетливо заметное двоение изображений.

Неоднородность линейного характера стекла линз вызывает появление аберрации комы. Действительно, рассмотрим линзу, показатель преломления стекла которой меняется от верхнего к нижнему краю по линейному закону с градиентом g. Рассмотрим пучок лучей, падающий на эту линзу из точки на оси. Если принять, что углы, образуемые с осью лучами в стекле, невелики, то неоднородность стекла вызывает отклонение лучей, пропорциональное толщине линзы. Если обозначить через $\delta g'$ (рис. VIII.9) отклонение луча, через s' — расстояние от линзы до изображения, то величина отклонения $\delta g' = \frac{d}{n} g s'$. Но

Рис. VIII.9

$$d = \frac{h^2}{2r_1} - \frac{h^2}{2r_2} = \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{h^2}{2} \frac{1}{(n-1) f'},$$

поэтому

$$\delta g' = \frac{h^2}{2} \frac{1}{n(n-1)} g \frac{s'}{f'}.$$

Кома пропорциональна квадрату диаметра линзы и отношению $\frac{s'}{f'}$. Вследствие этого неоднородность стекла особенно опасна в больших объективах, например в астрономических. Если

по-прежнему $g = 10^{-6}$ *мм*$^{-1}$ (т. е. n меняется на единицу пятого знака на протяжении 1 *см*), $h = 500$ *мм*, $s' = f'$, $n = 1{,}5$, то

$$\delta g' = \frac{500^2}{3 \cdot 0{,}5} 10^{-6} = 0{,}17 \text{ мм},$$

что совершенно недопустимо. Допустимая неоднородность должна быть по крайней мере в 20 раз меньше, т. е. должна быть равна единице шестого знака на 2 *см*. При такой неоднородности аберрация будет видна под углом в 2′ при фокусном расстоянии окуляра в 15 *мм*. В объективах микроскопа, диаметр которых не превышает нескольких миллиметров, требования к однородности значительно менее строги, так как величина h в сотни раз меньше, и хотя отношение s'/f' довольно велико (порядка десятка), но при одинаковых значениях градиента показателя g величина $\delta g'$ в тысячи раз меньше.

Градиент показателя редко бывает постоянным, и искажение, вызываемое им, более сложно, чем описанное выше, но порядок величины может быть определен по указанному упрощенному способу.

Более подробно этот вопрос изложен в гл. IV.

11. ДОПУСТИМОЕ ОТКЛОНЕНИЕ УГЛОВ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ПРИЗМ

За немногими исключениями все отражательные призмы (при условии идеального изготовления) эквивалентны по своему действию на пучки, проходящие через них, комбинации плоскопараллельной пластинки с одним или двумя плоскими зеркалами (см. гл. V). При изготовлении, вследствие неточного соблюдения значений углов, эквивалентная пластинка не является плоскопараллельной, крайние грани призмы не параллельны между собой, а образуют малый угол; ребро, образуемое пересечением этих граней, перпендикулярно оптической оси системы, но может образовать любой угол с меридиональной плоскостью. Поэтому призма оказывается эквивалентной комбинации трех элементов: одного или двух плоских зеркал, плоскопараллельной пластинки и клина с малым преломляющим углом. Вредное влияние такого клина проявляется следующим образом: 1) он изменяет направление выходящего пучка; 2) вводит ряд аберраций в пучках; 3) вызывает появление добавочных рефлексов. Первое действие — отклонение всего пучка на угол $(n - 1) A$ (где A — угол клина) — вредно в бинокулярных инструментах, так как оно нарушает параллельность выходящих пучков, и это обстоятельство может послужить основанием для расчета максимального допуска. При этом следует учесть, что если клин расположен на расстоянии s' от фокальной плоскости объектива и его угол у вершины равен A, то линейное отклонение ε равно $(n - 1) As'$, а угол, под которым это отклонение видно в окуляре, равен $\frac{(n-1)As'}{f'}$, где f' — фокусное расстоя-

ние окуляра. Как было отмечено выше (гл. V), непараллельность выходящих пучков в бинокулярных трубах не должна превышать 30′ в вертикальной плоскости и 1° в горизонтальной; из этого условия можно определить угол A. Впрочем, эффект клина может быть компенсирован перемещением оси окуляра по отношению к оси объектива. Если оптический прибор служит для измерительных целей, то отклонения пучков допустить нельзя, и оно должно компенсироваться соответствующим образом. Но если даже действие отклонения компенсируется каким-нибудь способом, клин вносит трудно исправимые аберрации. В частности, он вводит дисторсию, кому и хроматическую разность увеличений.

Рис. VIII.10

Для определения дисторсии вычислим угол отклонения призмой с малым углом у вершины A. Имеем ряд формул:

$$\left.\begin{aligned} \sin i_1' &= \frac{1}{n}\sin i_1; \\ i_2 &= A + i_1'; \\ \sin i_2' &= n\sin i_2 = n\left(\sin A\cos i_1' + \cos A\sin i_1'\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII.21)}$$

Ввиду малости A можно написать

$$\sin A = A; \quad \cos A = 1;$$

$$\sin i_2' - \sin i_1 = nA\cos i_1' =$$

$$= 2\sin\frac{i_2' - i_1}{2}\cos\frac{i_2' + i_1}{2} = \left(i_2' - i_1\right)\cos i_1.$$

Отклонение призмой $\varepsilon = i_2' - i_1' - A$ равно

$$\varepsilon = \left(n\frac{\cos i_1'}{\cos i_1} - 1\right)A = (n-1)A + \frac{n^2-1}{2n}Ai_1^2. \quad \text{(VIII.22)}$$

Клин отклоняет лучи неодинаково; если клин стоит в параллельных пучках (т. е. предмет находится на бесконечности), то лучи, образующие бóльшие углы i_1 с нормалью к первой поверхности клина, отклоняются сильнее, чем лучи, образующие меньшие углы. Это вызывает дисторсию особого вида, непохожую на ту, которая известна из теории аберраций симметричных систем. Более подробное исследование показывает, что изображение квадрата (левая часть рис. VIII.10) принимает вид, показанный в правой части этого рисунка.

Если оптическая система предназначена для измерительных целей (например, аэрофотограмметрический объектив), то нельзя допускать отклонений от общего направления бóльших, чем 0,5—1′.

Если объектив обладает достаточно большим углом поля зрения, например 60°, то нужно, чтобы $\frac{n^2-1}{2n} Ai^2 < 0{,}0003$, т. е. при $n = 1{,}5$ и $i = 30° = 0{,}5$ *рад* получаем $A \leqslant 5'$.

Кома, вызываемая клином, может быть определена расстоянием HO (рис. VIII.11) между главным лучом M_2A_2 и точкой пересечения O двух симметричных по отношению к главному лучей, образующих с ним некоторый угол $\pm\omega$. Пусть C — мнимый источник света, на который направляются лучи M_1C, M_2C, M_3C, причем углы M_1CM_2, M_3CM_2 равны $\pm\omega$. После преломления через призму A_3PB_3 указанные лучи занимают положение B_1O, B_3O и B_2H.

Рис. VIII.11

Для определения OH или, что равносильно, отрезка I_1I_3 (продольная кома), нужно знать элементы треугольников $B_1I_1B_2$ и $B_2I_3B_3$. Для этого определяем сначала разность $\overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3}$. Вычисление, выполненное с точностью до величин четвертого порядка малости относительно апертуры, дает $\overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} = 2a\omega^2 i$, где a — расстояние предмета C до призмы. Считая $\frac{d}{a}$ малой величиной первого порядка и пренебрегая квадратом этого отношения, легко получить, что $\overline{B_2B_1} - \overline{B_3B_2} = 2a\omega^2\left(i_1 + \frac{A}{n}\right)$. Зная также разность углов $B_1I_1B_2$ и $B_2I_3B_3$, которая, согласно формуле (VIII.22), равна $2\frac{n^2-1}{n} A\omega i_1$, легко получить из треугольников $B_1I_1B_2$ и $B_2I_3B_3$ следующую формулу для отрезка $\overline{I_1I_3}$:

$$\overline{I_1I_3} = -3a\omega A\frac{n^2-1}{n}.$$

Поперечная кома $\overline{OH}$, равная с достаточной точностью произведению $\overline{I_1I_3}\,\frac{\omega}{2}$, определяется формулой

$$\overline{OH} = -\frac{3}{2}\frac{n^2-1}{n} Aa\omega^2. \qquad \text{(VIII.23)}$$

В качестве примера рассмотрим призменный бинокль. Первая отражательная призма расположена рядом с объективом, и можно принять $a = F$, где F — фокусное расстояние объектива. Угол α_1, под которым кома $\overline{OH}$ видна через окуляр, равен $\frac{OH}{f}$, где f — фокусное расстояние окуляра. Таким образом, имеем для угла α формулу

$$\alpha = -\frac{3}{2}\frac{n^2-1}{n} A\frac{F}{f}\omega^2 = -\frac{3}{2}\frac{n^2-1}{n}\omega^2 A\gamma.$$

Возьмем нормальный восьмикратный бинокль, где $\omega = \frac{1}{8}$, $n = 1{,}57$, $A = 5\alpha$. Если допустить $\alpha = 1'$, то для A получается $5'$.

Если призма стоит в параллельном пучке, т. е. перед объективом в телескопических системах, например в стереотрубах, панорамах, перископах и т. д., то клин комы не вызывает, но появляется хроматическая разность увеличений, величина которой определяется по формуле $\delta\alpha = A\delta n$, где $\delta\alpha$ — разность углов выхода из призмы для лучей двух цветов, разность показателей которых равна δn. Если, как обычно, цвета соответствуют линиям C и F, то $\delta n = \frac{n-1}{\nu}$ и $\delta\alpha = \frac{A(n-1)}{\nu} = \frac{\Delta}{\nu}$, где Δ — угол отклонения клином для луча средней между C и F длины волны.

Нужно помнить, что если призма стоит перед объективом, то угол дисперсии $(\delta\alpha)'$, вызываемый призмой в пространстве изображений, равен произведению $\delta\alpha$ на увеличение системы. Например, если головная призма стереотрубы обладает клиновидностью в $5'$, а коэффициент ν ее стекла равен 60 при $n = 1{,}5$, то получаем для $\delta\alpha$ величину $2{,}5''$, а для $(\delta\alpha)'$ — $25''$, т. е. еще незаметную величину.

12. ДОПУСТИМОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ОТРАЖАЮЩИХ ЗЕРКАЛ, НОРМАЛЬ К КОТОРЫМ ОБРАЗУЕТ С ОСЬЮ УГОЛ i

Для расчета исходим из предположения, что поверхность сферическая и что аберрация, вызываемая отступлением от плоскости, есть астигматизм. Это вытекает из того, что угол i велик, а относительное отверстие мало.

Пусть t — расстояние по главному лучу от фокуса объекта O до вершины зеркала O_1; $t'_m = O_1O'_m$ и $t'_s = O_1O'_s$ — то же для меридионального и сагиттального фокусов в пространстве объектов; i — угол падения луча; $r = CO_1$ — радиус кривизны поверхности. Пусть $t'_m - t'_s = \Delta t'$; $2z'$ — диаметр наименьшего кружка рассеяния, вызываемого астигматизмом.

Из формул Юнга—Аббе для фокусов бесконечно тонкого астигматического фокуса имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{t'_m} + \frac{1}{t} &= \frac{2}{r\cos i}; \\ \frac{1}{t'_s} + \frac{1}{t} &= \frac{2\cos i}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.24)}$$

Образуя разность и полагая $\Delta t'$ малым, получаем

$$\Delta t' = \frac{2t'^2}{r}\,\frac{\sin^2 i}{\cos i}. \qquad \text{(VIII.25)}$$

Но, как известно из теории астигматических фокусов, поперечная аберрация z' связана с $\Delta t'$ соотношением

$$2z' = \Delta t' \sin \omega'$$

(при небольших ω');

$$2z' = \frac{2t'^2}{r} \sin \omega' \frac{\sin^2 i}{\cos i}. \qquad \text{(VIII.26)}$$

Определим теперь число колец Ньютона, образуемых на поверхности, при сравнении ее с плоскостью. Пусть a — стрелка, соответствующая высоте h (рис. VIII.12) — полуширине меридионального пучка на зеркале. Имеем $a = \frac{h^2}{2r}$, причем $h = \frac{t' \sin \omega'}{\cos i}$, откуда

$$a = \frac{t'^2 \sin^2 \omega'}{2r \cos^2 i}.$$

Рис. VIII.12

Число N колец, отсчитываемое по рабочей части сферы в меридиональном сечении, равно $N = \frac{a}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{2a}{\lambda}$, откуда

$$N = \frac{t'^2 \sin^2 \omega'}{\lambda r \cos^2 i}. \qquad \text{(VIII.27)}$$

Сопоставляя уравнения (VIII.26) и (VIII.27), получаем

$$N = \frac{z'}{\lambda} \frac{\sin \omega'}{\cos i \sin^2 i}. \qquad \text{(VIII.28)}$$

В частном случае, когда $i = 45°$, имеем

$$N = 2{,}8 \frac{z'}{\lambda} \sin \omega'. \qquad \text{(VIII.28*)}$$

Надо помнить, что число колец, определяемое формулой (VIII.28), относится к рабочей части зеркала, ограничиваемой апертурой системы, т. е. к диаметру зеркала $2h = \frac{2t' \sin \omega'}{\cos i}$. Если диаметр самого зеркала больше в k раз, число колец N следует увеличить k^2 раз.

13. УСТАНОВЛЕНИЕ ДОПУСКОВ НА ОШИБКИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ УГЛОВ ПРИЗМ И НА ПИРАМИДАЛЬНОСТЬ

Вследствие неточного изготовления углы реальной призмы отступают от заданных величин, а ее ребра, образованные пересечением смежных рабочих граней, не параллельны друг другу,

т. е. имеется еще и так называемая пирамидальность. Поэтому развертка призмы представляет собой комбинацию из плоскопараллельной пластинки и весьма тонкого клина с малым преломляющим углом θ.

На рис. VIII.13 в качестве примера представлена трехгранная равнобедренная призма ABC, углы A и B которой в действительности не равны друг другу и несколько отклоняются от номиналь-

Рис. VIII.13

ной величины α. Пусть точка C_0 представляет собой пересечение сторон AC и BC в случае, когда углы A и B равны. На входную грань AC призмы нормально падает осевой луч, далее он отражается от грани AB, образуя с нормалью к ней углы $i = i'$, и выходит через грань BC. Клиновидность развертки $BCAC'$ призмы в плоскости главного сечения θ_c, с учетом принятого в геометрической оптике правила знаков для углов, равна (рис. VIII,13, *а*)

$$\theta_c = \angle B - \angle A. \qquad \text{(VIII.29)}$$

Таким образом, в данном случае клиновидность в главном сечении призмы равна разности углов, прилежащих к отражающей грани AB.

Согласно ГОСТу 10732—64 на оформление рабочих чертежей оптических деталей, узлов и схем, предельная допустимая разность равных по номиналу углов призмы обозначается буквой δ_α,

а в качестве индекса принимается номинальная величина этих углов в градусах дуги, т. е. в рассматриваемом случае индексом будет угол α.

Клиновидность θ_π в сечении, перпендикулярном главному, возникает в результате пирамидальности, величина которой в данном случае (рис. VIII.13, *б*) измеряется предельным допустимым углом π, составляемым ребром угла C с противолежащей отражающей гранью AB призмы, т. е.

$$\theta_\pi = 2\pi \cos\alpha, \qquad \text{(VIII.30)}$$

откуда

$$\pi = \frac{\theta_\pi}{2\cos\alpha}. \qquad \text{(VIII.31)}$$

Рис. VIII.14

Наклон отражающей грани AB на угол π вызовет, кроме того, отклонение выходящего осевого луча из плоскости главного сечения вниз на угол

$$\delta_\pi = -2n\pi\cos\alpha, \qquad \text{(VIII.32)}$$

а также поворот изображения вокруг осевого луча на угол

$$\alpha_u = 2\pi\sin\alpha. \qquad \text{(VIII.33)}$$

В призмах с крышей пирамидальность развертки возникает вследствие разворота ребра крыши на угол π_p, т. е. его неперпендикулярности по отношению к ребру противолежащего угла C призмы (рис. VIII.14). Этот разворот угла крыши вызовет отклонение осевого луча из плоскости чертежа на угол

$$\delta_\pi = 2n\pi_p \sin i \qquad \text{(VIII.34)}$$

и поворот изображения вокруг осевого луча на угол

$$\alpha_u = 2\pi_p \cos i. \qquad \text{(VIII.35)}$$

Здесь i — угол падения осевого луча на ребро крыши.

В силу взаимоперпендикулярности обеих составляющих клиновидности развертки призм ее суммарная величина равна

$$\theta = \sqrt{\theta_i^2 + \theta_\pi^2}.$$

В ГОСТе 10732—64 указанные составляющие клиновидности θ_c и θ_π рассматриваются как самостоятельные ошибки, и на каждую из них в отдельности следует устанавливать соответствующие допуски. При изготовлении призм каждая из этих ошибок устраняется независимо и также независимо контролируется. Такого же подхода удобно придерживаться и при расчете допусков на ошибки углов и на пирамидальность призм.

Призмы с клиновидной разверткой вызывают ряд дефектов, а именно:

1) сдвиг изображения осевой точки предмета с центра поля зрения, а также поворот изображения;

2) хроматизм увеличения;

3) кому.

В призмах с раздельным ходом частей пучка лучей ошибки углов вызывают, кроме того, двоение изображения. Таковы призмы с крышей, в которых пучок лучей падает одновременно на обе грани крыши, а также кубпризмы, трипельпризмы.

Если призмы расположены вблизи плоскости предмета или плоскости изображения, то дефекты возникают в основном в плоскости зрачков системы, расположенной за призмой.

Подвижные призмы — поворотные или качающиеся вокруг осей, как, например, головные призмы перископов или головные и компенсационные призмы панорамических визиров, а также призмы, смещаемые вдоль оси оптической системы, — вызывают все перечисленные выше дефекты, но последние имеют переменную величину. Сдвиг изображения и хроматизм возрастают с увеличением угла наклона клиновидной развертки призмы к осевому лучу, а в случае, когда призма расположена в сходящемся ходе лучей, также и с увеличением расстояния от призмы до плоскости изображения.

Постоянное по величине отклонение осевого луча, а также наклон изображения почти всегда можно полностью или частично скомпенсировать при сборке оптической системы соответствующим поворотом или наклоном отражающей призмы. Такая же возможность имеется нередко при склейке составных призм, таких, как призменные системы Аббе, Пехана, Малафеева — Порро 2-го рода и др. В призмах, изготовляемых из одной цельной заготовки, взаимокомпенсация ошибок может быть достигнута лишь соответствующей заключительной подгонкой углов между рабочими гранями в процессе изготовления призм.

При расчете допусков на клиновидность разверток призм удобны следующие приближенные формулы.

1. Для величины угла отклонения луча клином:

а) при ходе луча в главном сечении

$$\delta_i = \theta\left(\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2 i} - 1\right) \approx \theta(n - 1) + \theta\,\frac{n^2 - 1}{2n}\operatorname{tg}^2 i; \qquad \text{(VIII.36)}$$

б) при ходе луча в сечении, перпендикулярном главному,

$$\delta_i' = \delta_i \cos i = \theta \cos i\left(\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2 i} - 1\right); \qquad \text{(VIII.37)}$$

в) при нормальном падении луча на клин

$$\delta_0 = \theta(n - 1). \qquad \text{(VIII.38)}$$

2. Для величины приращения угла отклонения луча клином при повороте его от нормального положения ($i = 0$) на угол i:

а) вокруг оси, параллельной ребру клина,

$$\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_0 = \theta \frac{n^2 - 1}{2n} \operatorname{tg}^2 i; \qquad \text{(VIII.39)}$$

б) вокруг оси, перпендикулярной ребру клина и параллельной главному сечению,

$$\Delta\delta_i' = \delta_i' - \delta_0 = \theta \frac{n^2 - 1}{2n} \operatorname{tg} i \sin i - 2\theta (n - 1) \sin^2 \frac{i}{2}. \qquad \text{(VIII.40)}$$

3. Для величины хроматизма, измеряемого в случае визуальных систем углом между преломленными лучами для линий F и C и вызываемого:

а) наклонным клином при ходе луча в главном сечении

$$\Delta\delta_{FC} \approx \frac{\delta_i}{\nu} = \frac{\theta}{\nu} \left(\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 i} - 1\right); \qquad \text{(VIII.41)}$$

б) наклонным клином при ходе луча в сечении, перпендикулярном главному,

$$\Delta\delta_{FC}' \approx \frac{\delta_i'}{\nu} = \frac{\theta}{\nu} \cos i \left(\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 i} - 1\right); \qquad \text{(VIII.42)}$$

в) клином, нормальным к оси пучка лучей,

$$\Delta\delta_{FC} = \frac{\delta_0}{\nu} = \frac{\theta}{\nu} (n - 1). \qquad \text{(VIII.43)}$$

4. Для величины комы в линейной мере, вызываемой клином в плоскости изображения,

$$\Delta l_K = -\frac{3}{2} \theta \frac{n^2 - 1}{n} a u^2, \qquad \text{(VIII.44)}$$

где a — расстояние по осевому лучу от клина до плоскости изображения; u — апертурный угол пучка лучей.

Для величины комы в угловой мере, пересчитанной через оптическую систему, которая расположена за клином и имеет угловое увеличение γ для точки пересечения осевого луча с выходной гранью клина, из формулы (VIII.44) получим

$$\Delta\delta_K = -\frac{3}{2} \theta \frac{n^2 - 1}{n} u^2 \gamma. \qquad \text{(VIII.45)}$$

5. Для величины двоения изображения, вызываемого ошибкой прямого угла крыши $\Delta_{крш}$ призмы, за оптической системой, расположенной между призмой и наблюдателем,

$$\omega = \Delta_{крш} 4 n \gamma \cos i, \qquad \text{(VIII.46)}$$

где i — угол падения осевого луча на ребро крыши; γ — угловое увеличение системы для точки пересечения осевого луча с ребром крыши.

В формулах (VIII.36)—(VIII.46) величины, не упомянутые выше особо, обозначены следующим образом: n — показатель преломления материала призмы; ν — его коэффициент дисперсии; θ — величина преломляющего угла клина; i — угол падения луча на входную грань призмы.

При расчете допусков на отклонение углов призм и на пирамидальность удобно пользоваться обратными передаточными отношениями, каждое из которых равно частному от деления допуска для данной ошибки призмы на величину допускаемой аберрации. Все эти обратные отношения легко найти из формул (VIII.36)—(VIII.46). Конкретные величины допусков получатся из найденных отношений, если известны конструктивные данные оптической системы прибора. При этом получится ряд значений допусков, которые могут значительно отличаться друг от друга по величине. В качестве окончательного допуска следует принять наименьшую из полученных величин. При установлении допусков необходимо еще учитывать технологические возможности изготовления призм, а также некоторые другие технические требования, например требования о взаимозаменяемости сменных деталей.

Рис. VIII.15

Рассмотрим несколько типовых примеров.

Пример 1. Рассчитаем допуски на клиновидность защитного стекла *1*, а также на отклонение углов и на пирамидальность головной призмы *2* и окулярных призм *3*, *4* артиллерийской стереотрубы АСТ 10×45 (рис. VIII.15). Все перечисленные детали изготовляются из оптического стекла К8.

Качество изображения трубы должно быть первоклассным, так как она используется для визуального наблюдения. Допустимый хроматизм каждой детали определяется из условия, что $\Delta\delta_{FC}$ за окуляром не больше 10″.

Из формул (VIII.43) и (VIII.31) получим следующие величины допусков.

Для защитного стекла *1* найдем

$$\theta = 2'.$$

Защитные стекла являются сменными деталями, поэтому они должны быть взаимозаменяемы; в частности, при замене поврежденных защитных стекол в стереотрубе не должна появляться

непараллельность оптических осей труб. Допуская этот дефект за окулярами не более 7,5′, т. е. не более половины всего приборного допуска на непараллельность выходящих пучков по высоте, ужесточим допуск на клиновидность защитных стекол до

$$\theta = 1'.$$

Для головной призмы *2* найдем $\theta_c = \theta_\pi = 2'$, откуда

$$\delta_{45^\circ} = \theta_c = 2'; \quad \pi = \frac{\theta_\pi}{\sqrt{2}} = 1{,}5'.$$

Допуск на прямой угол следует задавать из других соображений, например из конструктивных.

Рис. VIII.16

Для окулярных призм *3* и *4*, находящихся перед окуляром под угловыми увеличениями $\gamma_3 \approx 1{,}5^\times$ и $\gamma_4 \approx 1^\times$, допуски на клиновидность по формуле (VIII.43) можно было бы задать соответственно в 7 и в 10 раз большими, чем для головной призмы. Но такие широкие допуски привели бы к заметной угловой децентрировке оптической системы трубы. Допуская эту децентрировку менее 10′, получим для обеих призм $\theta_c = \theta_\pi = 3{,}5'$. Для призмы *3* найдем

$$\delta_{45^\circ} = \theta_c = 3{,}5'; \qquad \pi = \frac{\theta_\pi}{\sqrt{2}} = 2{,}5'$$

и соответственно для призмы *4*

$$\Delta_{90^\circ} = \frac{\theta_c}{2} = 1{,}8'; \qquad \pi = \frac{\theta_\pi}{2} = 1{,}8'.$$

Для комы за окуляром по формуле (VIII.45) при рабочей апертуре объектива $u = 0{,}04$ получим

$$\Delta\delta_K = 0{,}6'',$$

т. е. пренебрежимо малую величину.

Пример 2. Рассчитаем допуск на клиновидность пластинки отражателя *1* коллиматорного визира (рис. VIII.16).

Клиновидность этой пластинки θ в меридиональном сечении вызывает двоение изображения светящейся сетки коллиматора на угол ω, а клиновидность θ' в сагиттальном сечении — двоение на угол ω'. Из рис. VIII.16 при угле падения $i = 45^\circ$ получим

$$\omega = 2\theta\sqrt{2n^2 - 1}; \quad \omega' = 2\theta\cos 45^\circ\sqrt{2n^2 - 1}.$$

Ограничивая допустимое двоение изображения углом $\omega = \omega' = 1'$, при $n \approx 1{,}5$ для допустимой клиновидности пластинки получим

$$\theta = 20''.$$

Пример 3. Рассчитаем допуски для защитного стекла *1* и для трех призм панорамы ПГ 4×16 — качающейся головной призмы *2*, вращающейся компенсационной призмы Дове *3* и окулярной призмы с крышей *4* (рис. VIII.17). Все детали изготовлены из стекла К8.

Из допустимого хроматизма за окуляром для каждой детали в 10″ получим для клиновидности деталей *1* и *2* допуск $\theta = 5'$.

При качании головной призмы по высоте на угол $\pm 9°$ угол наклона визирного луча по отношению к защитному стеклу достигает величины $i_{max} = \pm 18°$. Ошибка отсчета вертикального угла при клиновидности $\theta = 5'$ по формуле (VIII.39) составит всего

$$\Delta\delta_i = 0{,}2'.$$

Поэтому можно сохранить допуск на защитное стекло *1*

$$\theta = 5'.$$

Рис. VIII.17

Допуск на головную призму *2* можно задать такой же величины, поскольку угол наклона визирного луча по отношению к этой призме не превышает $i_{max} = \pm 9°$. Поэтому получим

$$\delta_{45°} = \theta_i = 5'; \quad \pi = \frac{\theta_\pi}{\sqrt{2}} = 3'.$$

Отклонение визирного луча вследствие клиновидности призмы Дове *3* в результате разности острых углов может быть скомпенсировано при юстировке самой призмы. Из допустимого хроматизма для призмы Дове по формуле (VIII.41) получим

$$\delta_{45°} = \theta_c = 3'; \quad \pi = \frac{\theta_\pi}{\sqrt{2}} = 3'.$$

Однако отклонение луча вследствие пирамидальности при юстировке призмы Дове не может быть скомпенсировано. Ограничивая это отклонение углом $\Delta\varphi = 0{,}7'$ (менее одной пятой величины допустимой угловой погрешности панорамы), для допуска на

пирамидальность из формул (VIII.37) и (VIII.31) получим окончательно

$$\pi = 50''.$$

Для призмы с крышей *4*, находящейся под угловым увеличением $\gamma \approx 2^{\times}$, найдем $\theta_c = \theta_\pi = 10'$, откуда из формул (VIII.29) и (VIII.34) определим

$$\delta_{45^\circ} = \theta_i = 10'; \quad \pi_p = \frac{\theta_\pi}{3\sqrt{2}} = 2{,}3'.$$

Для ошибки угла крыши из формулы (VIII.46) получим допуск

$$\Delta_{крш} = 2{,}5''.$$

Рис. VIII.18

Пример 4. Рассчитаем допуски для защитного стекла *1* и качающейся головной кубпризмы *2* зрительной трубы, приведенной на рис. VIII.18.

Для защитного стекла *1* при допустимом хроматизме $\Delta\delta_{FC} = 10''$ и при максимальном угле падения визирного луча $i_{\max} = 47^\circ$ из формулы (VIII.41) получим

$$\theta = 1'.$$

Ошибка вертикального угла при этом составит

$$\Delta\delta_i = 0{,}4',$$

что допустимо, так как точность измерения углов трубой не выше 0,001 *рад*.

Для половинок кубпризмы *2* из допустимого хроматизма той же величины $\Delta\delta_{FC} = 10''$ получили бы:

для нижней половинки ($i_{\max} = 60^\circ$)

$$\theta_н = 0{,}5';$$

для верхней половинки ($i_{\max} = 40^\circ$)

$$\theta_в = 1'.$$

Однако из допустимого двоения изображения за окуляром $\omega = 20''$ при увеличениях трубы порядка 6—12 получится весьма строгий допуск для кубпризмы в целом: 2—3″. Такой допуск можно выдержать лишь индивидуальной пригонкой обеих половинок кубпризмы.

Пример 5. Рассчитаем допуск для поворотной плоскопараллельной пластинки *1*, используемой в качестве микрометра перед объективом визирной трубы с фокусировкой при считывании долей делений миллиметровой шкалы с точностью до $\Delta_0 =$

$= \pm 0{,}05$ *мм*. Расстояние от трубы до шкалы изменяется в пределах $l = 1 \div 20$ *м*. Увеличение трубы $\Gamma = 20\times$ при диаметре входного зрачка $d_p = 40$ *мм* (рис. VIII.19).

Из допустимого значения хроматической аберрации при наибольшем угле поворота пластинки $i_{\max} = \pm 30^\circ$ находим

$$\theta = 50''.$$

Рис. VIII.19

Такая клиновидность вызовет несимметрию сдвига изображения шкалы при повороте пластинки и ошибку отсчета, которая в наихудшем случае равна

$$\Delta' = \Delta\delta_i l = \theta \frac{n^2 - 1}{2n} \operatorname{tg}^2 i_{\max} l \approx \pm 0{,}6 \text{ мм}.$$

Поскольку полученная величина в 12 раз превосходит допустимую ошибку отсчета Δ_0, допуск на клиновидность пластинки в измерительной плоскости окончательно зададим

$$\theta = 5''.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Rohr M. Die Bilderzeigung in Optischen Instrumente. Berlin, 1904.
2. Губель Н. Н. Опт. и спектр. Т. 1. Вып. 6, 1956.
3. Conrady A. E. Monthly Not. RAS. Vol. 79, 1919.
4. Губель Н. Н. Труды ГОИ. Т. 25. Вып. 149, 1956.
5. Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика. М. — Л., АН СССР, 1946.
6. Погарев Г. В. Юстировка оптических приборов. Л., изд-во «Машиностроение», 1968.

ГЛАВА IX

АСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

А. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ОСЬЮ СИММЕТРИИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Применение в оптических системах асферических поверхностей, хотя и не влияет на принципиальную сторону методики расчета, но вызывает ряд особенностей главным образом технического характера, на которые необходимо обратить внимание читателя.

Прежде всего формулы для расчета хода лучей через асферические поверхности существенно отличаются от таковых для сферических поверхностей. Эти формулы могут быть разбиты на несколько групп в зависимости от ряда обстоятельств, трудно поддающихся классификации, в том числе от того, какими вычислительными средствами обладает конструктор: таблицами логарифмов, арифмометром или электронно-вычислительной машиной. Однако главную роль при выборе методики расчета хода лучей играет форма поверхности и способ ее определения. Для поверхностей, мало отличных от сферических, применяются дифференциальные формулы или методы приведения к сферической поверхности. Для поверхностей второго порядка расчеты производятся с помощью точных формул, а общий случай поверхностей сложного вида, значительно отступающих от сферических, требует более сложных и трудоемких методов, применение которых на практике не может быть осуществлено иначе, чем с помощью ЭВМ.

2. МАЛЫЕ ОТСТУПЛЕНИЯ ОТ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Расчет с помощью логарифмических таблиц

Пусть M — точка пересечения с меридианным сечением асферической поверхности падающего луча LS, образующего с осью OX угол u (рис. IX.1); MC — нормаль к поверхности в точке M, образующая угол φ с осью; $h = y$ — расстояние точки M от оси; $OS = s$. Обозначим длину нормали MC через r_s, расстояние OC через r_0, радиус кривизны сечения в точке O через r. Рассуждая

так же, как в случае сферической поверхности, имеем [см. формулы (I.1)—(I.5)]

$$\left.\begin{aligned} &\sin i = \frac{r_0 - s}{r_s}\sin u; \quad \sin i' = \frac{n}{n'}\sin i; \\ &u' = u + i' - i; \quad r_0 - s' = \frac{r_s \sin i'}{\sin u'}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.1)}$$

Формула перехода имеет вид

$$r_{0\kappa+1} - s_{\kappa+1} = r_{0\kappa+1} - r_{0\kappa} + d_\kappa - (r_{0\kappa} - s'_\kappa). \qquad \text{(IX.1*)}$$

Величины u', i' и s' относятся к преломленному лучу. Таким образом, вычисления производятся, так же как и для сферических поверхностей, при условии замены радиуса r величинами r_0 и r_s в формулах (IX.1).

Рассмотрим сначала случай кривых второго порядка. Уравнение сечения, отнесенное к вершине поверхности (к точке O), имеет вид

$$y^2 = 2rx - (1 - e^2)x^2. \qquad \text{(IX.2)}$$

Рис. IX.1

Отсюда $yy' = r - (1 - e^2)x$, и, поскольку $h \operatorname{ctg} \varphi = yy' = r - (1 - e^2)x$,

$$r_0 = x + h \operatorname{ctg} \varphi = x + r - (1 - e^2)x = r + e^2 x. \qquad \text{(IX.3)}$$

Если решить уравнение (IX.2) относительно x, то получим

$$x = f(y) = \frac{1}{2}\frac{y^2}{r} + \frac{1}{8}(1 - e^2)\frac{y^4}{r^3} + \frac{1}{16}(1 - e^2)^2\frac{y^6}{r^5} + \frac{5}{128}(1 - e^2)^3\frac{y^8}{r^7} + \cdots$$

Следовательно,

$$r_0 = r + \frac{e^2}{2}\frac{y^2}{r} + \frac{e^2}{8}(1 - e^2)\frac{y^4}{r^3} + \frac{e^2}{16}(1 - e^2)^2\frac{y^6}{r^5} + \frac{5e^2}{128}(1 - e^2)^3\frac{y^8}{r^7} + \cdots \qquad \text{(IX.4)}$$

Вычислим $r_s = y \operatorname{cosec} \varphi = y\dfrac{\sqrt{1 + x'^2}}{x'}$. Произведя все вычисления после замены x на $f(y)$, получим

$$r_s = r + \frac{e^2}{2}\frac{y^2}{r} - \frac{1}{8}e^4\frac{y^4}{r^3} + \frac{1}{16}e^6\frac{y^6}{r^5} - \frac{5}{128}e^8\frac{y^8}{r^7}\cdots \qquad \text{(IX.5)}$$

Последний результат может быть получен проще на основании формулы $r_s = r \sec \omega$, где $\operatorname{tg} \omega = \frac{ey}{r}$.

Рассмотрим общий случай. Меридианная кривая представляется рядом

$$x = \bar{a}y^2 + \bar{b}y^4 + \bar{c}y^6 + \bar{d}y^8 + \cdots$$

Пользуясь формулами $r_0 = x + y \operatorname{ctg} \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y'$, получаем

$$r_0 = r + \frac{\bar{a}^3 - \bar{b}}{\bar{a}^2} y^2 + \frac{2\bar{a}^3\bar{b} - 3\bar{a}\bar{c} + 4\bar{b}^2}{2\bar{a}^3} y^4 + \\ + \frac{\bar{a}^4\bar{c} - 2\bar{a}^2\bar{d} + 6\bar{a}\bar{b}\bar{c} - 4\bar{b}^3}{\bar{a}^4} y^6 + \cdots \qquad \text{(IX.6)}$$

$$r_0 - r_s = (\bar{a}^3 - \bar{b}) y^4 - 2(\bar{a}^5 - 3\bar{a}^2\bar{b} + \bar{c}) y^6 + \\ + (5\bar{a}^7 - 20\bar{a}^4\bar{b} + 12\bar{a}\bar{b}^2 + 9\bar{a}^2\bar{c} - 3\bar{d}) y^8. \qquad \text{(IX.7)}$$

В ряде случаев удобнее писать разложение для x в виде

$$x = \frac{1}{2}\frac{y^2}{r} + \frac{1}{8}(1 + b)\frac{y^4}{r^3} + \frac{1}{16}(1 + c)\frac{y^6}{r^5} + \\ + \frac{5}{128}(1 + d)\frac{y^8}{r^7} \cdots$$

так как равенство нулю коэффициентов b, c, d означает, что рассматриваемая кривая является окружностью. Если $b = 0$, а c не равно нулю, аберрации третьего порядка не изменяются, а меняются только аберрации высшего порядка. В общем случае, когда коэффициенты b, c, d не равны нулю, выражения для r_0 и r_s имеют вид

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= r\left[1 - \frac{1}{2} b \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}(5b + 2b^2 - 3c)\left(\frac{y}{r}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}(7c + 6bc - 6b^2 - 2b^3 - 5d)\left(\frac{y}{r}\right)^6 \cdots\right]; \\ r_s &= r\left[1 - \frac{1}{2} b \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}(6b + 2b^2 - 3c)\left(\frac{y}{r}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}(9c + 6bc - 6b^2 - 2b^3 - 3b - 5d)\left(\frac{y}{r}\right)^6 \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.8)}$$

Отметим, что с точностью до членов, содержащих $\left(\frac{y}{r}\right)^2$, $r_0 = r_s$. Таким образом, если можно пренебречь членами четвертого порядка малости относительно $\frac{y}{r}$, а также более высокого порядка, можно считать $r_0 = r_s$ при любом y и расчет хода лучей производить по обычным схемам, изменяя лишь радиус у вершины

на величину $\Delta r = -\frac{b}{2}\frac{y^2}{r}$. Погрешность, которая при этом вводится в величине $r_s - r_0$, порядка $\frac{2b-b^2}{8}\frac{y^4}{r^3}$.

Для поверхностей второго порядка (эллипсоидов, параболоидов и гиперболоидов) представляет большие удобства следующий метод расчета, позволяющий использовать обычную схему для расчета меридиональных, а также косых лучей по формулам гл. I.

Напишем r_s в виде

$$r_s = r\left(1 + \frac{e^2}{2}\frac{y^2}{r^2}\right),$$

а r_0 в виде

$$r_0 = r_s + \frac{e^2}{8}\frac{y^4(1-e^2)}{r^3} = r_s + \frac{e^2}{4}\frac{y^2}{r^2}\frac{y^2}{2r}(1-e^2).$$

Обозначим через ε^2 величину $\frac{e^2y^2}{4r^2}$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} r_s &= r(1+2\varepsilon^2); \\ r_0 &= r_s + \varepsilon^2\frac{y^2}{2r}(1-e^2). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.9)}$$

Если будет составлена таблица, позволяющая по аргументу ε^2 получить $\lg(1+2\varepsilon^2) = f(\varepsilon^2)$, то легко получить $\lg r_s = \lg r + f(\varepsilon^2)$ и затем вычислить r_0 по формуле $r_0 = r_s + \varepsilon^2\frac{y^2}{2r}(1-e^2)$, где r_s получается из $\lg r_s$, а $\varepsilon^2\frac{y^2}{2r}(1-e^2)$ — величина очень малая, она определяется на логарифмической линейке.

Для удобства вычислений приводим табл. IX.1 для величины $\beta = \lg(1+2\varepsilon^2)$ в виде функции от $\varepsilon^2 = \frac{e^2y^2}{4r^2}$. В этой таблице ε^2 меняется в пределах от 0 до 0,01 через промежутки 0,0001, обеспечивающие удобное интерполирование. Точность таблицы — 6 знаков (обычная точность вычислений).

Применение этих таблиц законно в пределах таких значений ε^2, при которых поправочные члены еще не влияют на шестые знаки. Это члены порядка $\frac{1}{8}\frac{e^4y^4}{r^4}$. Если $\lg\frac{1}{8}\frac{e^4y^4}{r^4}$ меньше 0,000001, то вычисления совершенно точны. Указанное число равно $2\cdot10^{-6}$. Если $\frac{e^4y^4}{r^4}$ меньше, чем $16\cdot10^{-6}$, или $\frac{ey}{r}$ меньше, чем $\frac{1}{15}$, поставленное условие удовлетворяется. На самом деле практика показывает, что возможны значительно бо́льшие значения величины $\frac{ey}{r}$, доходящие до $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$; при величинах ε^2, меньших 0,01, погрешности в расчетах лучей, выполненных по изложенной выше методике, не превышают обычных.

ε^2	$10^6\beta$	Δ	ε^2	$10^6\beta$	Δ	ε^2	$10^6\beta$	Δ
0,0000	0		0,0030	2590		0,0060	5149	
1	87		31	2676		61	5234	
2	174		32	2762		62	5318	
3	260		33	2847		63	5403	
4	347	87	34	2933	86	64	5488	85
5	434		35	3019		65	5572	
6	521		36	3104		66	5657	
7	607		37	3190		67	5742	
8	694		38	3276		68	5826	
9	780		39	3361		69	5911	
0,0010	867		0,0040	3447		0,0070	5995	
11	953		41	3532		71	6079	
12	1040		42	3617		72	6164	
13	1126		43	3703		73	6248	
14	1213	86	44	3788	85	74	6332	84
15	1299		45	3873		75	6417	
16	1385		46	3959		76	6501	
17	1472		47	4044		77	6585	
18	1558		48	4129		78	6670	
19	1644		49	4214		79	6754	
0,0020	1730		0,0050	4300		0,0080	6839	
21	1816		51	4385		81	6923	
22	1902		52	4470		82	7007	
23	1988		53	4555		83	7091	
24	2075		54	4640		84	7175	
25	2161	86	55	4725	85	85	7259	84
26	2247		56	4810		86	7343	
27	2333		57	4895		87	7427	
28	2418		58	4979		88	7511	
29	2504		59	5064		89	7595	
0,0030	2590		0,0060	5149		0,0090	7679	

ε^2	$10^6\beta$	Δ	ε^2	$10^6\beta$	Δ
0,0090	7679		0,0095	8098	
91	7763		96	8182	
92	7847	84	97	8266	84
93	7931		98	8349	
94	8014		99	8433	
95	8098		100	8517	

Р. Р.

	87	86
1	8,7	8,6
2	17,4	17,2
3	26,1	25,8
4	34,8	34,4
5	43,5	43,0
6	52,2	51,6
7	60,9	60,2
8	69,6	68,8
9	78,3	77,4

	85	84
1	8,5	8,4
2	17,0	16,8
3	25,5	25,2
4	34,0	33,6
5	42,5	42,0
6	51,0	50,4
7	59,5	58,8
8	68,0	67,2
9	76,5	75,6

	83
1	8,3
2	16,6
3	24,9
4	33,2
5	41,5
6	49,8
7	58,1
8	66,4
9	74,7

Примечание. $\lg r_s = \lg r + \beta$; $\lg r_m = \lg r + 3\beta$; $r_0 = r_s + \varepsilon^2 \frac{y^2}{2r}$.

Необходимо знать разницу в высотах $h(y)$ пересечения луча со сферической и асферической поверхностями. Ее легко определить из рис. IX.2. Пусть луч L_1L_2 пересекает сферическую поверхность OMM_2 в точке M_2, асферическую — в точке M_1. На высоте y разность абсцисс двух точек MM_1, обладающих общей ординатой y, равна

$$\Delta x = \frac{1}{8}(1-e^2)\frac{y^4}{r^3}.$$

Угол $\angle M_2M_1M = u$; $\angle M_1MM_2 = 90° - \varphi$; сторона M_1M_2 определяется формулой

$$\overline{M_1M_2} = \Delta x \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi - u)} = \Delta x \frac{\cos\varphi}{\cos i}.$$

Рис. IX.2

Разность высот $\Delta y = \overline{M_1M_2}\sin u = \Delta x \frac{\cos\varphi}{\cos i}\sin u = \frac{1}{8}(1-e^2)\frac{y^4}{r^3}\frac{\cos\varphi}{\cos i}\sin u$. С точностью, достаточной для расчетов, можно написать

$$\Delta y = \frac{1}{8}(1-e^2)\frac{y^4}{r^3}\sin u, \qquad \text{(IX.10)}$$

так как погрешность, которая вытекает из предположения, что $\cos\varphi$ и $\cos i$ равны единице, такого же порядка как та, которая получается из-за пренебрежения членом порядка $\frac{y^6}{r^6}$.

Деформирование поверхности

Деформированной будем называть такую поверхность, которая отличается от сферической тем, что в разложении r_0 и r_s как функции от $\frac{y}{r}$ коэффициент при $\frac{y^2}{r^2}$ равен нулю ($b = 0$). Практический интерес, вызываемый такими поверхностями, обусловлен тем, что, во-первых, они, как правило, меньше отличаются от сферических, чем поверхности второго порядка, а во-вторых, обладают теми же коэффициентами аберраций третьего порядка. Таким образом, деформируя поверхность, можно влиять на аберрации высших порядков, не меняя аберраций третьих, что является ценным при окончательной подгонке системы.

Формулы (IX.8) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= r\left[1 - \frac{3}{8}c\frac{y^4}{r^4} + \frac{1}{16}(7c-5d)\frac{y^6}{r^6} + \cdots\right]; \\ r_s &= r\left[1 - \frac{3}{8}c\frac{y^4}{r^4} + \frac{1}{16}(9c-5d)\frac{y^6}{r^6} + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.11)}$$

Достойно внимания то, что здесь, так же как и для поверхностей второго порядка, первый член разложения одинаков для r_0 и r_s и в первом приближении можно принять $r_0 = r_s$, на этот раз с точностью до членов, содержащих отношение $\frac{y}{r}$ в шестой степени. Следует отметить, что если $5d = 8c$, то влияние члена, содержащего $\frac{y^6}{r^6}$, становится минимальным и можно им пренебречь, пока $\frac{y}{r}$ меньше $\frac{1}{4}$.

Разность высот Δy между точками пересечения луча со сферической и деформированной поверхностями определяется формулой

$$\Delta y = \Delta x \frac{\cos \varphi}{\cos i} \sin u,$$

где $\Delta x = \frac{1}{16} c \frac{y^6}{r^5}$.

Следовательно,

$$\Delta y = \frac{c}{16} \frac{y^6}{r^5} \frac{\cos \varphi}{\cos i} \sin u. \qquad \text{(IX.12)}$$

3. ТОЧНЫЙ РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ ЛОГАРИФМОВ

Выведем формулы расчета хода лучей, лежащих в меридиональной плоскости.

Как было показано ранее, уравнение поверхности, отнесенное к ее вершине, имеет вид

$$y^2 = 2rx - (1 - e^2) x^2. \qquad \text{(IX.13)}$$

Уравнение луча может быть написано в виде

$$y = (s - x) \operatorname{tg} u. \qquad \text{(IX.14)}$$

Напомним, что для угла u мы придерживаемся правила знаков, принятого для оптических вычислений (см. гл. I); этот знак не совпадает с тем, который принят у математиков.

Совместное решение уравнений (IX.13) и (IX.14) при исключении y дает

$$(\sec^2 u - e^2) x^2 - 2 (r + s \operatorname{tg}^2 u) x + s^2 \operatorname{tg}^2 u = 0. \qquad \text{(IX.15)}$$

Это уравнение удобнее всего решить с помощью вспомогательного угла. Положим для краткости

$$\sec^2 u - e^2 = a_1;$$

$$r + s \operatorname{tg}^2 u = a_2; \qquad s \operatorname{tg} u = a_3.$$

Если $a_1 > 0$, находят угол ψ, удовлетворяющий условию

$$\sin \psi = \frac{a_3 \sqrt{a_1}}{a_2},$$

и тогда

$$x = \frac{2a_2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{a_1}. \qquad \text{(IX.16)}$$

Если $a_1 < 0$, полагают $\operatorname{tg} \beta = \frac{a_3 \sqrt{a_1}}{a_2}$, и тогда

$$x = -\frac{2a_2}{a_1} \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}. \qquad \text{(IX.17)}$$

Правильность этих формул легко проверить. Применение их по сравнению с обычным решением с помощью вычисления квадратного корня имеет два существенных преимущества: во-первых, точность вычислений повышается, тогда как решение с радикалом приводит к потере точности ввиду того, что вычитаются друг из друга две почти равные величины (особенно это имеет место при малых углах u); во-вторых, значительно повышается скорость вычисления. Кроме того, получается только тот корень уравнения, который обладает практическим значением. Впрочем, для тех крайне редких случаев, когда требуется второй корень с наибольшим абсолютным значением, удобнее всего вычислить один корень по приведенным выше формулам, а второй получить из известного соотношения, что произведение корней равно $\frac{a_3}{a_1}$.

Вычислив x указанным способом, находят y из уравнения

$$y = (s - x) \operatorname{tg} u. \qquad \text{(IX.18)}$$

Угол φ нормали с осью находят на основании уравнения меридианного сечения по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy} = \frac{y}{r - (1 - e^2)\, x}. \qquad \text{(IX.19)}$$

По углу φ находят угол $i = u - \varphi$. Дальнейшие вычисления углов i', u' и отрезка $r - s'$ выполняются по обычным формулам гл. I.

Рассмотрим еще частный случай расчета хода луча через параболоидальную поверхность. В этом случае $e = 1$ и формулы упрощаются.

Величина $a_1 = \sec^2 u - 1$ всегда положительна, и можно написать для x следующую формулу:

$$x = 2 \frac{a_2}{a_1} \sin^2 \frac{\psi}{2} = s \operatorname{tg} \frac{\psi}{2},$$

причем $\sin \psi = \frac{s \operatorname{tg}^2 u}{r + s \operatorname{tg}^2 u} = \frac{s}{r \operatorname{ctg}^2 u + s}$, так как $a_1 = \operatorname{tg}^2 u$. Замечая, что $\frac{a_2}{a_1} = \frac{r + s \operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg}^2 u} = r \operatorname{ctg}^2 u + s$, и полагая

$\frac{a_2}{a_1} = r\operatorname{ctg}^2 u + s = a$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{s}{a}; \\ x &= 2(r\operatorname{ctg}^2 u + s)\sin^2\frac{\psi}{2} = 2a\sin^2\frac{\psi}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.20)}$$

Можно составить удобные таблицы для вычисления $\lg\left(2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$ по $\lg\sin\psi$, пользуясь тем обстоятельством, что

$$2\sin^2\frac{\psi}{2} = 2\left(\frac{\sin\psi}{2}\right)^2 + \varepsilon,$$

где ε величина малая, как это видно из разложения разности

$$\sin\frac{\psi}{2} - \frac{\sin\psi}{2} = \frac{\psi^3}{16} + \cdots$$

Таблица IX.2

lg sin ψ	δ	lg sin ψ	δ	lg sin ψ	δ	Δ	lg sin ψ	δ	Δ	lg sin ψ	δ	Δ
8,0	9,69898	8,70	69925	8,90	69966		9,10	70070	8	9,30	70336	21
1	899	71	26	91	69		11	078	9	31	357	22
2	900	72	27	92	72		12	087	9	32	379	23
3	01	73	28	93	76		13	096	9	33	402	24
4	04	74	30	94	80		14	105	10	34	426	26
5	08	75	31	95	84		15	115	11	35	452	26
52	09	76	33	96	88		16	126	11	36	478	28
54	10	77	35	97	92		17	137	11	37	506	30
56	12	78	37	98	97	5	18	148	12	38	536	31
58	13	79	38	99	70001	4	19	160	12	39	567	32
8,60	14	8,80	69940	9,00	6	5	9,20	70172	13	9,40	70599	34
61	15	81	42	01	11	5	21	185	14	41	633	36
62	16	82	45	02	16	5	22	199	15	42	669	37
63	17	83	47	03	22	6	23	214	15	43	706	39
64	18	84	49	04	28	6	24	229	15	44	745	41
65	19	85	52	05	34	6	25	244	17	45	786	44
66	20	86	54	06	41	7	26	261	17	46	830	45
67	21	87	57	07	48	7	27	278	19	47	875	48
68	22	88	60	08	55	7	28	297	19	48	923	50
69	23	89	63	09	62	7	29	316	20	49	973	53
8,70	25	8,90	66	9,10	70070	8	9,30	70336		9,50	71026	

Примечания: 1. Начиная со второго столбца пропущена характеристика δ, поскольку она постоянна и равна 9.

2. Таблица составлена для пятизначных логарифмов и может служить только как образец.

откуда

$$2\sin^2\frac{\psi}{2} = 2\left(\frac{\sin\psi}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\psi^4 + \cdots = \frac{\sin^2\psi}{2} + \\ + \frac{1}{8}\psi^4 + \cdots$$

Следовательно,

$$\lg\left(2\sin^2\frac{\psi}{2}\right) = 2\lg\sin\psi + \delta.$$

Удобно пользоваться таблицей, дающей по аргументу $\lg\sin\psi$ величину δ такую, что $\lg 2\sin^2\frac{\psi}{2} = 2\lg\sin\psi + \delta$ (см. табл. IX.2).

Для параболоидальной поверхности полагаем $a = s + r\,\mathrm{ctg}^2\,u$; $\frac{s}{a} = \sin\psi$. Тогда $x = 2a\sin^2\frac{\psi}{2}$.

4. РЯДЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МЕРИДИАННОЕ СЕЧЕНИЕ АСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, И ИХ ОБРАЩЕНИЕ

Уравнение меридианного сечения поверхностей второго порядка имеет вид

$$y^2 = 2rx - (1 - e^2)\,x^2.$$

Естественно использовать ряд такого же вида, но с дополнительными членами, содержащими дальнейшие степени x, для описания общего случая асферических поверхностей (с осью симметрии), а именно:

$$y^2 = 2rx - kx^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5 + \cdots \qquad \text{(IX.21)}$$

Такое разложение удобно, когда асферическая поверхность мало отличается от поверхностей второго порядка, так как в этом случае коэффициенты a, b, c. . . малы и ряд для y^2 быстро сходится. Однако это разложение неприменимо для поверхностей, меридианное сечение которых обладает одной или несколькими экстремальными точками, как это имеет место, например, на одной из поверхностей коррекционной пластинки Шмидта. Действительно, при заданном значении x по формуле (IX.21) можно получить только одну пару симметричных относительно оси точек, а не две или более.

Второй способ представления меридианного сечения асферической поверхности заключается в разложении стрелки x по четным степеням y:

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + Ey^{10} + \cdots \qquad \text{(IX.22)}$$

Этот способ пригоден для всех встречающихся на практике случаев, но не при любых апертурах (ряд может стать расходящимся при апертурах, превышающих некоторую предельную

величину). Другим недостатком этого разложения является то, что для наиболее часто встречающихся случаев сферических и близких к сферическим поверхностей число членов разложения очень велико и при вычислениях с помощью ЭВМ требуется большое число операций, что удлиняет время расчета; по этой причине невыгодно использовать одни и те же формулы для расчетов через сферические и асферические поверхности.

К преимуществам второго способа разложения в ряд относится возможность его применения (с небольшим дополнением) для торических поверхностей, симметричных относительно оси x. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Практика показала, что для решения некоторых задач необходимо уметь переходить от рядов первого типа $y^2 = f(x)$ к рядам второго типа $x = f(y^2)$. Приведем здесь формулы, связывающие коэффициенты обоих рядов.

Пусть имеем ряды

$$y^2 = 2rx - kx^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \gamma x^5;$$

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + Ey^{10},$$

представляющие одну и ту же меридианную кривую. Подстановка разложения x из второго ряда в первый и сравнение коэффициентов при одинаковых степенях y приводит к следующим результатам:

$$A = \frac{1}{2r}; \quad \gamma = \frac{14B^4 - 21B^2CA + 6A^2BD + 3A^2C^2 - A^3E}{A^9};$$

$$B = \frac{k}{8r^3}; \quad \beta = \frac{5BCA - 5B^3 - A^2D}{A^7};$$

$$C = \frac{k^2 - \alpha r}{16r^5}; \quad \alpha = \frac{2B^2 - CA}{A^5};$$

$$D = \frac{5k^3 - 10\alpha rk - 4\beta r^2}{128r^7}; \quad k = \frac{B}{A^3};$$

$$E = \frac{7k^4 - 21\alpha rk^2 - 12\beta r^2k + 6\alpha^2r^2 - 4r^3\gamma}{256r^9}; \quad 2r = \frac{1}{A}.$$

На практике вычисление ряда x по степеням y представляет трудности из-за крайней малости коэффициентов B, C, D, E, особенно если система имеет большое отверстие, так как величины y^6, y^8, y^{10} становятся очень большими. Во избежание указанных трудностей полезно вместо y вводить пропорциональные ему переменные $Y = \frac{y}{y_к}$, где $y_к$ — половина диаметра действующей части рассматриваемой поверхности, или $\overline{Y} = \frac{y}{r}$, где r — радиус кривизны поверхности у вершины.

5. РАСЧЕТ ХОДА ЛУЧЕЙ НА ЭВМ

Когда меридианная кривая асферической поверхности задается одним из уравнений (IX.21), (IX.22), расчет хода лучей становится настолько трудоемким, что лишь использование ЭВМ позволяет получить результат в достаточно короткий срок. Этот расчет так же как в случае расчета хода лучей через сферические поверхности, производится в два этапа для каждой поверхности: 1) определение точки пересечения падающего луча с поверхностью по координатам этого луча и уравнению поверхности; 2) определение координат преломленного (отраженного) луча по координатам падающего луча и нормали к поверхности в точке пересечения луча с поверхностью.

Отметим прежде всего, что в общем случае «косого» луча уравнение поверхности в пространстве имеет вид

$$y^2 + z^2 = 2rx - kx^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5 + \cdots \qquad \text{(IX.23)}$$

или

$$x = A(y^2 + z^2) + B(y^2 + z^2)^2 + C(y^2 + z^2)^4 + D(y^2 + z^2)^6 + \cdots \qquad \text{(IX.24)}$$

При любом рациональном выборе координатных осей уравнение луча пишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} Y &= y_0 + \frac{\mu}{\lambda}(X - x_0); \\ Z &= z_0 + \frac{\nu}{\lambda}(X - x_0), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.25)}$$

где λ, μ и ν — направляющие косинусы падающего луча; x_0, y_0, z_0 — координаты некоторой известной точки на луче, например точки пересечения с предыдущей оптической поверхностью.

Решение системы уравнений (IX.25) и одного из уравнений (IX.23) или (IX.24) находится итерационным путем. Для начала можно полагать, что преломляющая (отражающая) поверхность плоская и что в системе уравнений (IX.25) величина x_0 известна и из нее находят Y и Z.

Далее рассмотрим отдельно уравнения (IX.23) и (IX.24).

1. По найденным итерационным путем Y_0 и Z_0 машина решает уравнение (IX.23) относительно x и из уравнения луча для нового значения $x_0 + x$ получаются во втором приближении Y_1 и Z_1, из которых по формуле (IX.23) находится второе приближение для x. . ., затем третье и т. д., пока два последующих значения x_κ и $x_{\kappa+1}$ не окажутся равными в пределах требуемой точности.

2. В первом приближении также предполагают поверхность плоской, откуда получаются значения Y и Z в первом приближении. По формуле (IX.24) машина вычисляет первое (точнее — второе, так как для первого оно принималось равным нулю)

приближение для x_1, после чего, полагая в уравнении луча $X = x_0 + x_1$, получают второе приближение для y и z и т. д.

Второй способ выгоднее первого, так как итерационный процесс в два раза короче [решение уравнения (IX.24) не требует итерации, как решение уравнения (IX.23)].

Рис. IX.3

При изложенном выше способе вычисления машина выдает тот корень уравнений (IX.23) и (IX.24), который соответствует наименьшей по абсолютному значению величине x. Как правило, именно этот корень представляет практический интерес. Однако встречаются случаи (например, в параболоидальных отражателях с апертурным углом, превышающим $\pi/2$), когда действительная точка пересечения A_1 луча A_1SA_2 с поверхностью MOM' (рис. IX.3) оказывается дальше от касательной плоскости PP_1, чем вторая точка A_2. Для нахождения координат точки A_1 необходимо исходить из другого приближения, которое можно получить, например, графическим путем. Если поверхность второго порядка, то сначала можно вычислить по описанной методике корень, соответствующий точке A_2, а второй корень получить из известного соотношения между суммой (или произведением) корней и коэффициентами уравнения меридианного сечения поверхности.

6. РАСЧЕТ БЕСКОНЕЧНО ТОНКИХ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

В настоящее время, когда благодаря применению ЭВМ число лучей, подлежащих расчету, как меридиональных, так и косых, значительно увеличилось, в большинстве случаев уже отпадает надобность в изучении бесконечно тонких астигматических пучков и все сведения, которые получались на основании их расчета, могут полнее выясняться с помощью расчета хода достаточно большого количества лучей. Тем не менее следует учесть, что в системах с очень малым относительным отверстием (очковые линзы, особо широкоугольные фотографические объективы и т. п.) основным недостатком, подлежащим исправлению, является астигматизм, и для этого случая вопрос о расчете фокусов бесконечно тонких астигматических пучков приобретает большое значение.

Этот расчет представляет интерес главным образом для пучков, главный луч которых лежит в меридиональной плоскости. Для более общего случая, когда главный луч не лежит в меридиональной плоскости, можно воспользоваться формулами Д. Ю. Гальперна [1].

Вернемся к более часто встречающемуся случаю, когда главный луч астигматических пучков лежит в меридиональной плоскости.

Предположим, что поверхность задана меридианной кривой $x = f(y)$.

Нормаль MN к поверхности OM пересекает ось OO' в точке C_s (рис. IX.4). Расстояние MC_s и является сагиттальным радиусом кривизны, обозначаемым обычно буквой r_s, который входит в формулы Юнга—Аббе и др. [см., например, (I.52) и (I.55)] для определения фокусов бесконечно тонких пучков сагиттальных лучей. Напомним формулу Юнга—Аббе для этих пучков:

$$\frac{n'}{t_s} - \frac{n}{t_s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s}. \qquad \text{(IX.26)}$$

Рис. IX.4

Вывод этого уравнения производится точно так же, как и для сферической поверхности, с той лишь разницей, что радиус сферической поверхности r нужно заменить на сагиттальный радиус r_s.

Из рис. IX.4 ясно, что

$$r_s = \frac{y}{\sin \varphi}; \qquad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}},$$

где x' — производная от координаты x по переменной y.

Окончательно

$$r_s = \frac{y\sqrt{1 + x'^2}}{x'}. \qquad \text{(IX.27)}$$

Рассмотрим теперь формулу Юнга—Аббе для бесконечно тонких пучков меридиональных лучей

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'_m} - \frac{n \cos^2 i}{t_m} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_m}.$$

Величина r_m в знаменателе правой части представляет собой радиус кривизны MC_m меридионального сечения поверхности в точке M. Изложенный в гл. I вывод формулы Аббе для меридиональных лучей в случае сферической поверхности можно повторить и в данном общем случае, когда меридиональное сечение не

является окружностью; при выводе нужно принять, что точка C есть центр кривизны меридионального сечения поверхности.

Определим величину r_m в случае, когда сечение поверхности задано в виде $x = f(y)$. Как известно, $r_m = -\frac{ds}{d\varphi}$; знак минус появляется вследствие принятого нами правила знаков. Заменяя ds и $d\varphi$ их значениями, находим

$$r_m = -\frac{ds}{d\varphi} = \frac{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''} = \frac{1}{x''\cos^3\varphi}. \qquad \text{(IX.28)}$$

Если, наоборот, величина y дана как функция от x, то, как нетрудно проверить,

$$r_s = y\sqrt{1+y'^2} = y\operatorname{cosec}\varphi; \qquad \text{(IX.29)}$$

$$r_m = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{1}{y''\sin^3\varphi}. \qquad \text{(IX.30)}$$

Для конических сечений имеем общее уравнение

$$y^2 = 2rx - (1-e^2)x^2,$$

где e — эксцентриситет. Двукратное дифференцирование дает

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{r-(1-e^2)x}{y}; \\ y'' &= -\frac{r^2}{y^3}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.31)}$$

Подставляя выражение для y' в формулу (IX.29), получаем

$$r_s = y\sqrt{1+\left(\frac{r-(1-e^2)x}{y}\right)^2}.$$

После некоторых преобразований, имея в виду уравнение конических сечений, находим

$$r_s = r\sqrt{1-e^2\left[(1-e^2)\frac{x^2}{r^2} - \frac{2x}{r}\right]}. \qquad \text{(IX.32)}$$

Используя уравнение кривой, можно заменить выражение в квадратных скобках более простым выражением $-\frac{y^2}{r^2}$, после чего можно написать r_s в виде

$$r_s = r\sqrt{1+\frac{e^2y^2}{r^2}}. \qquad \text{(XI.33)}$$

Для меридионального фокуса из формулы (IX.30) после подстановки выражения для y'' получаем

$$r_m = \frac{y^3}{r^2}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя вместо y' выражение из формулы (IX.31), имеем

$$r_m = r\sqrt{\left\{1 - e^2\left[(1-e^2)\frac{x^2}{r^2} - \frac{2x}{r}\right]\right\}^3}. \qquad \text{(IX.34)}$$

Используя, как и прежде, соотношение между y и x из уравнения кривой, получаем

$$r_m = r\sqrt{\left(1 + e^2\frac{y^2}{r^2}\right)^3}. \qquad \text{(IX.35)}$$

Для параболоидальной поверхности имеем простые формулы

$$\left.\begin{aligned} & r_s = p\sec\varphi; \quad r_m = p\sec^3\varphi, \\ \text{где} \quad & p = r; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{p}; \quad \cos\varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}; \\ & \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}; \quad \sec\varphi = \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p} \\ \text{или} \quad & \sec\varphi = \sqrt{\frac{p+2x}{p}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.36)}$$

В общем случае для расчета астигматических пучков нужно использовать формулы Юнга—Аббе. Входящие в эти формулы величины r_s, r_m и косые толщины $\bar{d}_к$, отделяющие точки пересечения луча с двумя следующими друг за другом поверхностями, вычисляются на основании уравнений, описывающих меридианные сечения поверхности. Предположим, что эти поверхности определены одной из формул (IX.23) или (IX.24).

Напомним, что

$$r_s = \frac{y\sqrt{1+x'^2}}{x'}.$$

Так как мы предположили, что главный луч лежит в меридиональной плоскости, то координата z отпадает и остаются в обеих формулах лишь координаты y и x.

Если поверхность задана в виде (IX.24), можно непосредственно вычислить x'

$$x' = 2Ay + 4By^3 + 8Cy^7 + 12Dy^{11} + \cdots \qquad \text{(IX.37)}$$

и подставить полученное значение x' в формулу для r_s. Однако следует указать, что если ряд для x сходится плохо, то может оказаться, что ряд для производной вовсе не сходится; об этом можно догадаться по скорости уменьшения последующих членов. Если отношение абсолютных величин последующего члена к предыдущему меньше $^1/_5$—$^1/_{10}$, можно пользоваться формулой (IX.37) для x'.

Если уравнение поверхности представлено в виде (IX.23), то уравнение меридиального сечения есть

$$y^2 = 2rx - kx^2 \cdots$$

Для получения r_s следует найти y'; для этого необходимо дифференцировать последнее уравнение по x, что дает

$$2yy' = 2r - 2kx + 3ax^2 + 4bx^3 + 5cx^4 + \cdots ,$$

откуда

$$y' = \frac{r - kx + \frac{3}{2} ax^2 + 2bx^3 + \frac{5}{2} cx^4 + \cdots}{y}. \qquad \text{(XI.38)}$$

Это выражение для y' подставляется в формулу для r_s, а именно:

$$r_s = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Следует отметить, что величина y' обычно уже известна, так как если ход главного луча уже ранее вычислялся, то при его расчете необходимо было определить направление нормали к поверхности в точке пересечения луча с нею; таким образом, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{y'}$ уже известен, так же как x и y. Это замечание относится и к случаю, когда поверхность представлена в виде (IX.24).

Вычисление величины r_m представляет некоторые дополнительные трудности, так как она требует вычисления второй производной y'' или x''.

Действительно,

$$r_m = -\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{1}{y'' \sin^3 \varphi}.$$

Если уравнение меридианного сечения имеет вид

$$y^2 = f(x),$$

то для вычисления y'' нужно дважды дифференцировать это уравнение:

$$2yy' = f'(x);$$

$$2yy'' + 2y'^2 = f''(x),$$

откуда

$$y'' = \frac{f''(x) - 2y'^2}{2y}. \qquad \text{(IX.39)}$$

Первая производная y' уже известна, так как она понадобилась для вычисления r_s. Необходимо отметить, что ряд для y'' еще слабее сходится, чем ряд для y'. Поэтому здесь надлежит пользоваться теми же указаниями, что и для определения сходимости ряда для y'. Все затруднения со сходимостью могут быть обойдены, если при задании поверхностей ограничиться *конечным* числом членов (что не всегда возможно).

Если уравнение меридианного сечения имеет вид

$$x = f(y),$$

то

$$r_m = -\frac{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''}, \qquad \text{(IX.40)}$$

где

$$x' = \frac{\partial f(y)}{\partial y}; \quad x'' = \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}.$$

Вычисления производятся аналогично тому, как они выполнялись в предыдущем случае.

Что касается косой толщины $\bar{d}_\kappa$, то она тоже уже рассчитана, если вычисления производились по формулам Федера (см. гл. I). Если расчет хода велся по другим формулам, то достаточно вспомнить, что

$$\bar{d}_\kappa = \sqrt{(x_{\kappa+1} - x_\kappa)^2 + (y_{\kappa+1} - y_\kappa)^2}, \qquad \text{(IX.41)}$$

где x и y — координаты точек пересечения луча с поверхностями κ и $\kappa + 1$.

Можно еще написать $\bar{d}_\kappa$ в виде

$$\bar{d}_\kappa = (d_\kappa + x_{\kappa+1} - x_\kappa) \sec u_{\kappa+1}. \qquad \text{(IX.42)}$$

Приводим сводку формул для расчета положения фокусов бесконечно тонких астигматических пучков:

$$\left.\begin{aligned}
&1. \quad \frac{n'}{t'_s} - \frac{n}{t_s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s};\\
&2. \quad \frac{n' \cos^2 i'}{t'_m} - \frac{n \cos^2 i}{t_m} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_m};\\
&3. \quad r_s = y\sqrt{1+y'^2} = y \operatorname{cosec} \varphi = \frac{y\sqrt{1+x'^2}}{x'};\\
&4. \quad r_m = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{1}{y'' \sin \varphi} = -\frac{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''};\\
&\text{частные случаи для поверхностей второго порядка}\\
&\qquad r_s = r\sqrt{1 + \frac{y^2 e^2}{r^2}};\\
&\qquad r_m = r\sqrt{\left(1 + \frac{y^2 e^2}{r^2}\right)^3};\\
&5. \quad t_{\kappa+1} = t'_\kappa - \bar{d}_\kappa;\\
&6. \quad \bar{d}_\kappa = (d_\kappa + x_{\kappa+1} - x_\kappa) \sec u_{\kappa+1}.
\end{aligned}\right\} \text{(IX.43)}$$

7. РАСЧЕТ АСТИГМАТИЧЕСКОГО ПУЧКА ДЛЯ СЛЕГКА ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Наиболее удобными для вычислений являются также формулы Аббе; ниже приведены формулы, по которым вычисляются радиусы кривизны r_s и r_m формул Аббе для сагиттальных и меридиональных бесконечно тонких пучков.

Для сагиттальных пучков из рис. IX.4 имеем

$$r_s = y \operatorname{cosec} \varphi = y \operatorname{cosec} (\varphi_0 + \Delta\varphi) =$$

$$= y\left(\operatorname{cosec} \varphi_0 - \frac{\Delta\varphi \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) = r - y \cos \varphi \frac{\Delta\varphi}{\sin^2 \varphi},$$

или

$$r_s = r - \frac{r^2}{y} \Delta\varphi \cos \varphi, \qquad \text{(IX.44)}$$

где r — радиус кривизны недеформированной (сферической) поверхности; φ_0 — угол с осью нормали к этой поверхности.

Для меридиональных пучков имеем

$$r_m = \frac{ds}{d\varphi},$$

где

$$ds = dy \sec \varphi.$$

С другой стороны,

$$\varphi = \varphi_0 + d\varphi = \arcsin \frac{y}{r} + \Delta\varphi.$$

Отсюда находим

$$d\varphi = d\left(\arcsin \frac{y}{r}\right) + d(\Delta\varphi) = \frac{1}{r} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}} + \frac{d(\Delta\varphi)}{dy} dy. \qquad \text{(IX.45)}$$

Подставляя найденные значения ds и $d\varphi$ в выражение для r_m, получаем

$$r_m = \frac{dy \sec \varphi}{\frac{1}{r} \frac{dy}{\cos \varphi} + \frac{d(\Delta\varphi)}{dy} dy} = \frac{r}{1 + r \cos \varphi \frac{d(\Delta\varphi)}{dy}}. \qquad \text{(IX.46)}$$

Если произведение $r \cos \varphi \frac{d(\Delta\varphi)}{dy}$ невелико по сравнению с единицей, можно написать приближенную формулу

$$r_m = r - r^2 \cos \varphi \frac{d(\Delta\varphi)}{dy}. \qquad \text{(IX.46*)}$$

Для вычисления r_m по формуле (IX.46) нужно взять производную от ряда $\Delta\varphi = ay^3 + by^5 + \cdots$; это дает

$$\frac{d(\Delta\varphi)}{dy} = 3ay^2 + 5by^4 + \cdots$$

Подставляя вместо y его численное значение, вычисляем $\frac{d(\Delta\varphi)}{dy}$.

Нетрудно определить влияние малых деформаций сферических поверхностей на положение фокусов бесконечно тонких сагиттальных и меридиональных пучков. Для этого можно использовать формулы Аббе, дифференцируя их по величинам t, t' и r; дифференциал dr должен быть заменен конечным изменением величины r, т. е. разностью $r_m - r$ для меридионального пучка и разностью $r_s - r$ для сагиттального пучка.

Для одной поверхности изменение положения сагиттального фокуса $\Delta t'_s$ на основании формулы (IX.44) определяется выражением

$$\frac{n'}{t'^2_s}\Delta t'_s = -\frac{n'\cos i' - n\cos i}{r^2}\frac{r^2}{y}\Delta\varphi =$$

$$= \frac{n'\cos i' - n\cos i}{y}\Delta\varphi. \qquad \text{(IX.47)}$$

Для меридионального фокуса изменение положения $\Delta t'_m$ согласно формуле (IX.46*), т. е. при пренебрежении членом $r\Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi$, имеет вид

$$\frac{n'}{t'^2_m}\Delta t'_m = -(n'\cos i' - n\cos i)\cos\varphi\frac{d(\Delta\varphi)}{dy}. \qquad \text{(IX.48)}$$

К сожалению, применение теоремы Лагранжа—Гельмгольца для случая наклонных пучков вряд ли возможно. Однако эта теорема может быть полезной при определении приблизительного влияния деформации любой поверхности системы на положение фокусов бесконечно тонких сагиттальных или меридиональных пучков. Для окончательного расчета необходимо применение точных формул Аббе со значениями радиусов кривизны (IX.44) и (IX.46); вычисление выполняется по формулам (IX.43).

В заключение приведем несколько формул, которые могут оказаться полезными при расчетах систем, содержащих асферические поверхности.

1. Расстояние N между асферической поверхностью и сферической, соприкасающейся в ее вершине, отсчитываемое по нормали к сферической поверхности, для поверхностей второго порядка равно

$$N \approx \frac{e^2x^2}{2r}\cos\varphi = \frac{e^2y^4}{8r^3}\cos\varphi, \qquad \text{(IX.49)}$$

где φ— угол нормали с осью.

2. Точная формула для разности стрелок (отсчитываемой параллельно оси) для поверхностей второго порядка

$$x = \frac{2r}{1-e^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \text{(IX.50)}$$

где $\sin\theta = \frac{y}{r}\sqrt{1-e^2}$, если $e < 1$;

$$x = 2\frac{r}{e^2-1}\frac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{\cos\psi}, \qquad \text{(IX.50*)}$$

где $\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{r}\sqrt{e^2-1}$, если $e > 1$.

3. Если $x = ay^2 + by^4 + cy^6 + dy^8$, то

$$r_0 - r_s = (a^3 - b)y^4 - 2(a^5 - 3a^2b + c)y^6 + \\ + (5a^7 - 20a^4b + 12ab^2 + 9a^2c - 3d)y^8, \qquad \text{(IX.51)}$$

причем

$$r_0 = r + \frac{a^3-b}{a^2}y^2 + \frac{2a^3b - 3ac + 4b^2}{2a^3}y^4 + \frac{a^4c - 2a^2d + 6abc - 4b^3}{a^4}y^6$$

есть расстояние от вершины асферической поверхности до точки пересечения с осью нормали к меридианной кривой; r_s — расстояние от точки пересечения луча с меридианной кривой до точки пересечения с осью нормали к меридианной кривой.

4. Поправка к ординате y при переходе от сферической к асферической поверхности, если луч образует с осью угол u, нормаль к поверхности — угол φ и угол преломления равен i:

для поверхностей второго порядка

$$\Delta y = \frac{e^2y^4}{8r^3}\frac{\cos\varphi}{\cos i}\sin u,$$

в общем случае

$$\Delta y = \left(\frac{1}{8r^3} - b\right)y^4\frac{\cos\varphi}{\cos i}\sin u. \qquad \text{(IX.52)}$$

Значение коэффициента b определяется по формуле разложения x для случая 3.

8. ДЕЦЕНТРИРОВАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим встречающийся иногда на практике случай, когда ось симметрии поверхности вращения второго порядка не совпадает с оптической осью системы, а образует с ней угол φ (рис. IX.5).

Ограничимся частным случаем, когда обе оси пересекаются. Рассмотрим только меридиональное сечение.

Пусть OX — большая ось поверхности вращения второго порядка; $O'X'$ — оптическая ось, пересекающая сечение поверхности в точке O'.

Пользуясь соотношениями для перехода от старой системы координат (x, y) к новой (x', y')

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0;$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0$$

и подставляя их в уравнение кривой второго порядка

$$y^2 = 2rx - (1 - e^2)x^2, \tag{IX.53}$$

получаем, помня, что точка с координатами x_0, y_0 находится на кривой:

$$\left.\begin{aligned} &x'^2(1 - e^2\cos^2\varphi) + y'^2(1 - e^2\sin^2\varphi) + 2x'y'e^2\sin\varphi\cos\varphi + \\ &\quad + 2y_0(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + 2x_0(1 - e^2) \times \\ &\quad \times (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) = 0 \\ &\text{или} \\ &x'^2(1 - e^2\cos^2\varphi) + y'^2(1 - e^2\sin^2\varphi) + 2x'y'e^2\sin\varphi\cos\varphi + \\ &\quad + 2x'[y_0\sin\varphi + x_0(1 - e^2)\cos\varphi] + 2y' \times \\ &\quad \times [y_0\cos\varphi - x_0(1 - e^2)\sin\varphi] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{IX.54}$$

Поставим условие, чтобы ось $O'X'$ была нормалью к кривой MOM_1 в точке O'. Тангенс угла наклона равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{r - (1 - e^2)x}. \tag{IX.55}$$

Рис. IX.5

После всех преобразований, используя уравнения (IX.53) и (IX.55), получаем уравнение кривой в новой системе координат

$$(\bar{x}_0^2 + m^3y_0^2)x'^2 + m(\bar{x}_0^2 + my_0^2)y'^2 + 2m(m - 1)\bar{x}_0y_0x'y' + \\ + 2(\bar{x}_0^2 + m^2y_0^2)^{\frac{3}{2}}x' = 0 \tag{IX.56}$$

при $m = \frac{1}{1 - e^2}$, $\bar{x}_0 = x_0 - rm = x_0 - \frac{r}{1 - e^2}$.

Уравнение кривой может еще быть написано в виде

$$[(1 - e^2)^3\bar{x}_0^2 + y_0^2]x'^2 + (1 - e^2)[(1 - e^2)\bar{x}_0^2 + y_0^2]y'^2 + \\ + 2e^2(1 - e^2)\bar{x}_0y_0x'y' + 2[(1 - e^2)^2\bar{x}_0^2 + y_0^2]^{\frac{3}{2}}x' = 0. \tag{IX.57}$$

Если поверхность параболоидальная, т. е. $e^2 = 1$, а следовательно, выражение $\frac{r}{1 - e^2}$ бесконечно, то при переходе к пределу легко получить, что уравнение сечения имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &y_0^2x'^2 + r^2y'^2 - 2ry_0x'y' + 2(r^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}x' = 0 \\ &\text{или} \\ &(y_0x' - ry')^2 + 2(r^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}x' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{IX.58}$$

9. РАСЧЕТ ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ, В ОБЛАСТИ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В гл. II были выведены формулы (II.75) и (II.75*) для аберраций третьего порядка центрированных систем, часть поверхностей которых асферична. Напомним эти формулы:

$$-2n'\delta g' = \omega'(\omega'^2 + \Omega'^2) S_{\mathrm{I}}^* + (3\omega'^2 + \Omega'^2) w S_{\mathrm{II}}^* +$$

$$+ (3S_{\mathrm{III}}^* + J^2 S_{\mathrm{IV}}) \omega' w^2 + S_{\mathrm{V}}^* w^3;$$

$$-2n'\delta G' = \Omega'(\omega'^2 + \Omega'^2) S_{\mathrm{I}}^* + 2\omega'\Omega' w S_{\mathrm{II}}^* +$$

$$+ (S_{\mathrm{III}}^* + J^2 S_{\mathrm{IV}}) \Omega' w^2,$$

причем

$$S_{\mathrm{I}}^* = \sum h_\kappa (P_\kappa + B_\kappa);$$

$$S_{\mathrm{II}}^* = \sum y_\kappa (P_\kappa + B_\kappa) - J \sum W_\kappa;$$

$$S_{\mathrm{III}}^* = \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa} (P_\kappa + B_\kappa) - 2J \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa} W_\kappa + J^2 \sum \frac{1}{h_\kappa} \Delta_\kappa \frac{\alpha}{n};$$

$$S_{\mathrm{IV}} = \sum \frac{1}{h_\kappa} \Pi_\kappa;$$

$$S_{\mathrm{V}}^* = \sum \frac{y_\kappa^3}{h_\kappa^2} (P_\kappa + B_\kappa) - 3J \sum \frac{y_\kappa^2}{h_\kappa^2} W_\kappa +$$

$$+ J^2 \sum \frac{y_\kappa}{h_\kappa^2} \left(3\Delta_\kappa \frac{\alpha}{n} + \Pi_\kappa\right) - J^3 \sum \frac{1}{h_\kappa^2} \Delta_\kappa \left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$B_\kappa = \frac{h_\kappa^3 b_\kappa (n'_\kappa - n_\kappa)}{r_\kappa^3};$$

$$J = n\alpha l = n_1\alpha_1 (x_1 - s_1) = n'_p (x'_p - s'_p), \text{ если } \alpha'_p = 1, \ \beta_1 = 1;$$

$$\Pi_\kappa = -\frac{h_\kappa}{r_\kappa} \Delta_\kappa \frac{1}{n} = \frac{\Delta\alpha n}{nn'}.$$

Для бесконечно тонких компонентов, разделенных воздухом, формулы для S_{III}, S_{IV} и S_{V} упрощаются:

$$S_{\mathrm{III}} = \sum \frac{y_i^2}{h_i} (P_i + B_i) - 2J \sum \frac{y_i}{h_i} W_i + J^2 \varphi_i;$$

$$S_{\mathrm{IV}} = \sum \varphi_i \pi_i;$$

$$S_{\mathrm{V}} = \sum \frac{y_i^3}{h_i^2} (P_i + B_i) - 3J \sum \frac{y_i^2}{h_i^2} W_i + J^2 \sum \frac{y_i}{h_i} (3 + \pi) \varphi_i,$$

где

$$\varphi_i = \frac{\alpha_i' - \alpha_i}{h_i};$$

$$\pi = \sum \frac{\varphi}{n} \text{ при } \sum \varphi = 1.$$

Таким образом, коэффициенты аберраций третьего порядка систем, содержащих несферические поверхности, отличаются от обычных только тем, что к величинам $P = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}\right)^2 \Delta\alpha\nu$ добавляется член, связанный с деформацией поверхности, $B = \frac{h^3 b}{r^3}(n' - n)$, где b — коэффициент деформации, входящий в множитель при y^4 в разложении x:

$$x = \frac{y^2}{2r} + \frac{1+b}{8r^3} y^4.$$

Этот коэффициент b равен $-e^2$, когда поверхность второго порядка. Добавочный член ΔP может быть написан в виде

$$\Delta P = \frac{(\alpha' n' - \alpha n)^3}{(n' - n)^2} b.$$

Его физический смысл виден из приведенной выше формулы разложения для x; член $\frac{y^4}{8r^3} b$ представляет собой разность стрелок меридианных сечений асферической и сферической поверхностей. Умножение ее на разность показателей $n' - n$ дает изменение положения волнового фронта вдоль луча.

Весьма важно отметить, что деформация поверхности влияет только на величину P, оставляя без изменения функции W, π и тем более $\Delta\alpha n$, $\Delta\alpha\nu$, φ и другие, входящие в выражения коэффициентов аберраций третьего порядка. Это обстоятельство очень облегчает расчет, и из него вытекает ряд важных следствий. Для наглядности рассмотрим случай бесконечно тонких компонентов, для которого действительны формулы для коэффициентов аберраций третьего порядка

$$\delta g_N' = \sum_i a_{Ni} P_{Ni} + \sum_i b_{Ni} W_{Ni} + \sum_i c_{Ni} \pi_{Ni} + \sum_i d_{Ni},$$

где N обозначает номер аберрации; i — номер компонента.

Вводя асферические поверхности, можно изменить значение P_i при любом i на любую величину, так как b может принимать (теоретически) любое значение от $-\infty$ до $+\infty$, но остальные члены при этом останутся без изменения. Изменить P_i в компоненте i на определенную величину ΔP_i можно введением либо одной (безразлично какой) асферической поверхности, либо нескольких —

результат в отношении аберраций третьего порядка будет один и тот же, но влияние на аберрации высших порядков будет различно.

Таким образом, применение асферических поверхностей в области аберраций третьего порядка позволяет получить новую степень свободы — по одной на каждый компонент, каковы бы ни были число и форма асферических поверхностей. Это обстоятельство очень важно, и необходимо помнить о нем. Этот новый коррекционный параметр можно признать полноценным в том смысле, что он может принять любое значение, но при этом следует заметить, что с точки зрения технологии не все значения нового параметра, характеризуемого величиной b, равно хороши. Малые и отрицательные значения $b = -e^2$ соответствуют эллиптическим поверхностям, которые сравнительно легко могут быть изготовлены; при больших отрицательных b поверхность гиперболическая с большим отступлением от сферы. Положительные значения b приводят к трудно осуществляемым на практике поверхностям (e — мнимая величина), меридианная кривая которых имеет вид эллипса с большой осью, перпендикулярной к оптической оси. По этой причине следует избегать асферических поверхностей, для которых b положительно; это вполне возможно, так как в большинстве случаев кривизна поверхностей линз (и зеркал) слишком велика на ее краях (из-за чего возникают аберрации) и введение асферичности, уменьшающей ее, влияет на аберрации в благоприятную сторону. При этом коэффициент b оказывается отрицательным, e — вещественным.

Вследствие того, что число параметров для исправления аберраций третьего порядка у асферических поверхностей больше, чем у сферических, их применение позволяет одновременно исправлять аберрации и высших порядков, причем любых, так как, по крайней мере теоретически, число коэффициентов, определяющее форму поверхности, бесконечно велико. Однако не следует думать, что это число дополнительных параметров позволяет исправлять несколько аберраций высшего порядка, так как каждая аберрация также характеризуется бесконечно большим числом коэффициентов. Например, полную поперечную сферическую аберрацию $\delta g'$ надо писать в виде бесконечного ряда $\delta g' = a_1 \sin^3 u' + a_2 \sin^5 u' + \cdots + a_p \sin^{2p+1} u'$. То же самое можно сказать о коме и других аберрациях. Следует помнить, что число коэффициентов аберраций высших порядков тоже бесконечно велико. Иллюстрацией этого положения может служить известная двухзеркальная система Шварцшильда, в которой исправлены полностью, т. е. до любого порядка, две аберрации — сферическая и отступление от отношения синусов — с помощью двух асферических поверхностей, определяемых бесконечно большим числом коэффициентов. К этому примеру мы вернемся еще несколько раз ввиду его поучительности.

10. ИСПРАВЛЕНИЕ АБЕРРАЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЕФОРМАЦИЕЙ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ (ОТРАЖАЮЩИХ) ПОВЕРХНОСТЕЙ

Предположим, что подбором конструктивных элементов (радиусов кривизны, эксцентриситетов, толщин, показателей преломления) удалось получить оптическую систему, удовлетворяющую всем поставленным условиям в отношении аберраций третьего порядка; например, двухлинзовый склеенный объектив со сферическими поверхностями, удовлетворяющий условиям $S_{\mathrm{I}} = 0$, $S_{\mathrm{I}}^{xp} = 0$; двухлинзовый несклеенный объектив также со сферическими поверхностями, удовлетворяющий условиям $S_{\mathrm{I}} = 0$, $S_{\mathrm{II}} = 0$, $S_{\mathrm{I}}^{xp} = 0$, или двухлинзовый склеенный с одной поверхностью второго порядка, удовлетворяющий тем же условиям. Предположим еще, что полученное решение единственное, отвечающее всем поставленным требованиям, например габаритам, выбору сортов стекла и пр.

Исправление остаточных аберраций в таком случае возможно единственным способом — деформированием одной или нескольких преломляющих (отражающих) поверхностей.

В этом случае возникает вопрос, каким образом изменить форму сферических или асферических поверхностей, чтобы, не влияя на коэффициенты аберраций третьего порядка, изменить по своему усмотрению оставшиеся неисправленными аберрации высших порядков.

Эту же задачу можно несколько видоизменить и обобщить, используя деформацию поверхностей не только для изменения аберраций высших порядков, но и для улучшения аберраций третьих порядков.

Аберрации, как известно, бывают продольными, поперечными или волновыми. Удобнее всего исходить из волновых аберраций по двум причинам: во-первых, волновые аберрации обладают свойством сложения, т. е. волновая аберрация всей оптической системы равна сумме волновых аберраций отдельных частей системы, в то время как поперечные аберрации надо сначала умножить на произведение $n \sin \alpha$ (где α — угол апертурного луча с осью), чтобы иметь возможность их складывать; во-вторых, волновая аберрация простейшим образом зависит от формы преломляющих (отражающих) поверхностей, а поэтому и деформация поверхности непосредственно связана с изменением волновой аберрации.

11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ АБЕРРАЦИЙ

Поскольку расчет хода лучей через оптическую систему заканчивается вычислением поперечных аберраций, необходимо перейти от поперечных аберраций к волновым, что может быть выполнено следующим образом.

Пусть OX — оптическая ось системы (рис. IX.6); O — начало координат (обычно совпадающее с центром выходного зрачка); YOX — меридиональная плоскость, содержащая гауссово изображение C_0 светящейся точки; C — некоторая точка плоскости YOX, близкая к точке C_0, по отношению к которой нужно вычислить волновую аберрацию; часто в качестве точки C_0 берут пересечение главного луча с плоскостью установки. Пусть l_0' — расстояние от точки C_0 до оси; S — идеальная волновая поверхность с центром в точке C, а радиус R равен OC. Пусть M — точка этой поверхности; MN — нормаль к волновой поверхности в этой

Рис. IX.6

точке; N — точка пересечения этой нормали с реальной волновой поверхностью.

Уравнение идеальной волновой поверхности имеет следующий вид:

$$z^2 + (y - l_0')^2 + (x - d)^2 - R^2 = 0,$$

где d — абсцисса точки пересечения плоскости установки с осью OX. Можно написать уравнение реальной волновой поверхности в таком виде:

$$f(x, y, z) = z^2 + (y - l_0')^2 + (x - d)^2 - (R + N)^2 = 0,$$

где N — отрезок MN — некоторая функция от x и от y. Уравнение нормали к реальной волне в точках x, y и z имеет вид

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

или, если пренебречь величиной N по сравнению с R,

$$\frac{Z - z}{z - R\frac{\partial N}{\partial z}} = \frac{Y - y}{y - l_0' - R\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{X - x}{x - d}.$$

Полагая $X = d$, получаем значения координат $Z = \delta G'$, $Y = l_0' + \delta g'$ точки пересечения луча с плоскостью установки, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \delta G' &= R\frac{\partial N}{\partial z}; \\ \delta g' &= R\frac{\partial N}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.59)}$$

Уравнения (IX.59) связывают поперечные аберрации $\delta g'$ и $\delta G'$ с производными функции N по z и по y. Остается теперь выразить эти координаты через известные m' и M'.

Если аберрации системы невелики, то можно принять, что направление реального луча, проходящего через точку M идеальной волновой поверхности с координатами x, y, z, мало отличается от направления нормали MC, т. е. можно принять, что реальный луч проходит через точку C с координатами 0, l_0' и d. Положим, что плоскость ZOY совпадает с плоскостью выходного зрачка и что координаты точки пересечения луча с этой плоскостью суть M_1', m' и 0; так как эти координаты должны удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки M и C, то все указанные координаты связаны следующими соотношениями:

$$M' = \frac{d}{d-x}z; \quad m' = \frac{dy - zl_0'}{d-x}, \qquad \text{(IX.60)}$$

при этом

$$x = d - \sqrt{R^2 - z^2 - (y - l_0')^2}.$$

Эти приближенные уравнения дают достаточную точность для всех случаев, встречающихся на практике, так как нормали в соответственных точках обеих волновых поверхностей — реальной и идеальной сферической — мало отличаются одна от другой.

Если угол расхождения выходящего пучка невелик и отношение диаметра выходного зрачка к расстоянию d (или R) не превышает 1 : 4 и даже 1 : 3, то формулы (IX.60) могут быть упрощены следующим образом. Положим, что $d = R$; тогда обычным приемом разложения корня квадратного в ряд по формуле бинома Ньютона находим

$$x = \frac{1}{2}d\left[\frac{z^2 + (y - l_0')^2}{d^2}\right].$$

Далее получаем приближенные формулы для M' и m' в таком виде:

$$M' = z\left(1 + \frac{x}{d}\right) \quad \text{и} \quad m' = y + \frac{x}{d}(y - l_0').$$

После замены x только что найденным приближенным значением находим

$$\left.\begin{aligned} M' &= \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{z^2 + y^2 - 2yl_0' + l_0'^2}{d^2}\right) z; \\ m' &= y + \frac{1}{2}\,\frac{z^2 + y^2 - 2yl_0' + l_0'^2}{d^2}\,(y - l_0'). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.61)}$$

Обратно z и y выражаются через M' и m' следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} z &= M'\left(1 - \frac{M'^2 + m'^2 - 2m'l_0'}{d^2}\right); \\ y &= m' - \frac{M'^2 + m'^2 - 2m'l_0'}{d^2}\,(m' - l_0'). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.62)}$$

Указанными формулами следует пользоваться только тогда, когда нужна исключительная точность; во всех остальных случаях можно просто положить, что $M' = z$, $m' = y$, и тогда вместо формулы (IX.59) имеем

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= R\,\frac{\partial N}{\partial m'}, \\ \delta G' &= R\,\frac{\partial N}{\partial M'}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.63)}$$

Ввиду того, что

$$y = R \sin u' + l_0',$$

$$dy = Rd(\sin u');$$

следовательно,

$$N = \int dg'\, d(\sin u').$$

Формулы (IX.63) применяются для вычисления величины волновой аберрации N. Если проекции $\delta g'$ и $\delta G'$ поперечной аберрации выражены в виде функций от m' и M', то волновая аберрация N может быть получена интегрированием системы уравнений (IX.63); задача сводится к нахождению такой функции N от m' и M', частные производные которой по m' и M' дают $\delta g'$ и $\delta G'$.

В случаях, когда нужна бóльшая точность, но применение формул (IX.61) и (IX.62) нежелательно из-за их громоздкости, можно поступить иначе. Рассмотрим частный, но важный случай определения волновой аберрации для меридионального сечения пучка, исходящего из внеосевой точки. Как видно из рис. IX.6, имеем $y = l_0' + R \sin u'$, откуда $dy = Rd(\sin u')$; поэтому можно написать

$$N = \int \frac{\delta g'}{R}\, dy = \int_{\sin u_0'}^{\sin u_\kappa'} \delta g'\, d(\sin u'). \qquad \text{(IX.64)}$$

Для каждого рассчитанного в меридиональной плоскости луча известны $\delta g'$ и $\sin u'$.

Рассматривая $\delta g'$ как функцию от $\sin u'$, можно вычислить N либо графически (как площадь, заключенную между кривой $\delta g'$, ординатами $\sin u_0'$ и $\sin u'$ и осью x), либо с помощью одного из способов механических квадратур. В качестве начала отсчетов удобнее всего брать точку пересечения главного луча с сечением AOB.

Формула (IX.64) пригодна и в том случае, когда точка-объект лежит на оси ($l_1 = l' = 0$).

Вычисление волновой аберрации для точки на оси

Для определения остаточной сферической аберрации оптической системы вычисляют ход некоторого числа лучей через систему, причем эти лучи обычно рассчитываются с соблюдением определенной закономерности при выборе высот пересечения лучей с входным зрачком. Когда система обладает малым относительным отверстием и малыми аберрациями высших порядков, ограничиваются двумя лучами: крайним и некоторым средним, для которого m равно $m_к \sqrt{\frac{1}{2}}$. Если система обладает более значительными аберрациями, берут три луча при закономерности $m_1 = m_к \sqrt{\frac{1}{3}}$, $m_2 = m_к \sqrt{\frac{2}{3}}$, $m_к$. Наконец, при больших остаточных аберрациях берут четыре луча, причем $m_1 = m_к \sqrt{\frac{1}{4}}$, $m_2 = m_к \sqrt{\frac{2}{4}}$, $m_3 = m_к \sqrt{\frac{3}{4}}$, $m_4 = m_к$. Поскольку расчет волновых аберраций требуется только в системах с высоким качеством изображения, для которых выполняется с достаточно большой точностью условие синусов, можно считать, что для всех серий лучей отношения $\frac{\sin u'}{\sin u_к'}$ равны отношениям $\frac{m}{m_к}$, т. е. $\sqrt{\frac{1}{2}} : 1$ в первом случае, $\sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : 1$ во втором и $\sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{2}{4}} : \sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt{1}$ в третьем.

Рассмотрим для примера первый случай. Пусть $\delta s_к'$ — значение продольной сферической аберрации для крайнего луча и $\delta s_з'$ — для зоны. Можно написать общее выражение для $\delta s'$ как функции от $\sin u'$:

$$\delta s' = A \sin^2 u' + B \sin^4 u'. \qquad \text{(IX.65)}$$

Подставляя вместо $\sin u'$ его значения для края и зоны, имеем

$$\delta s'_к = A \sin^2 u'_к + B \sin^4 u'_к;$$

$$\delta s'_з = A \frac{1}{2} \sin^2 u'_к + B \frac{1}{4} \sin^4 u'_к,$$

где вместо $u'_з$ подставлено $\sqrt{\frac{1}{2}} \sin u'_к$.

Обозначим через a величину $A \sin^2 u'_к$, через b — $B \sin^4 u'_к$. Тогда

$$\delta s'_к = a + b;$$

$$\delta s'_з = \frac{a}{2} + \frac{b}{4},$$

откуда

$$a = 4\delta s'_з - \delta s'_к;$$

$$b = 2\delta s'_к - 4\delta s'_з.$$

Если углы u' не очень велики, можно написать

$$N = \int \delta g' \, d(\sin u') = \int \delta s' \sin u' \, d(\sin u') = \int \delta s' \frac{d(\sin^2 u')}{2}.$$

Подставляем вместо $\delta s'$ его значение из (IX.65). Тогда

$$N = \int (A \sin^2 u' + B \sin^4 u') \frac{d(\sin^2 u')}{2} =$$

$$= \frac{A}{2} \sin^4 u' + \frac{B}{6} \sin^6 u'. \qquad \text{(IX.66)}$$

Используя приведенные выше соотношения, получаем

$$\left.\begin{aligned} N_з &= \left(\frac{1}{6}\delta s'_з - \frac{1}{48}\delta s'_к\right) \sin^2 u'_к = \\ &= (0{,}1667\delta s'_з - 0{,}0208\delta s'_к) \sin^2 u'_к; \\ N_к &= \left(\frac{1}{3}\delta s'_з + \frac{1}{12}\delta s'_к\right) \sin^2 u'_к = \\ &= (0{,}333\delta s'_з + 0{,}0833\delta s'_к) \sin^2 u'_к. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.67)}$$

Поступая точно так же для случая трех лучей, находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_{\frac{1}{3}} &= 0{,}00695\delta s'_к - 0{,}0347\delta s'_{\frac{2}{3}} + 0{,}1319\delta s'_{\frac{1}{3}}; \\ \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_{\frac{2}{3}} &= 0{,}0556\delta s'_{\frac{2}{3}} + 0{,}2222\delta s'_{\frac{1}{3}}; \\ \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_к &= 0{,}0625\delta s'_к + 0{,}1875\delta s'_{\frac{2}{3}} + 0{,}1875\delta s'_{\frac{1}{3}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.68)}$$

Для случая четырех лучей получаем

$$\left.\begin{aligned}
10^3 \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_{\frac{1}{4}} &= -3{,}30\delta s'_к + 18{,}40\delta s'_{\frac{3}{4}} - 45{,}83\delta s'_{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 112{,}15\delta s'_{\frac{1}{4}}; \\
10^3 \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_{\frac{2}{4}} &= -1{,}39\delta s'_к + 5{,}56\delta s'_{\frac{3}{4}} + 33{,}3\delta s'_{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 172{,}2\delta s'_{\frac{1}{4}}; \\
10^3 \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_{\frac{3}{4}} &= -4{,}69\delta s'_к + 65{,}63\delta s'_{\frac{3}{4}} + 112{,}5\delta s'_{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 159{,}4\delta s'_{\frac{1}{4}}; \\
10^3 \frac{1}{\sin^2 u'_к} N_к &= +38{,}88\delta s'_к + 177{,}8\delta s'_{\frac{3}{4}} + 66{,}7\delta s'_{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 177{,}8\delta s'_{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}\right\} \quad (IX.69)$$

В последней группе формул коэффициенты при $\delta s'$ помножены на 10^3, чтобы облегчить переход к длинам волн; длина волны λ должна быть выражена в микрометрах, а $\delta s'$ — в миллиметрах. Индексы при величинах $\delta s'$ обозначают

$$\frac{\sin^2 u'}{\sin^2 u'_к}.$$

Напомним, что первая группа формул пригодна только при малых аберрациях высшего порядка; при ее применении предполагается, что можно пренебречь аберрациями седьмого и более высокого порядка. Последняя группа пригодна практически во всех случаях. Наличие нескольких групп формул дает надежный способ контроля. В том случае, когда координаты точек пересечения лучей с входным зрачком не соответствуют принятым для расчета правилам, можно чертить график $\delta s'$ как функции от $\sin u'$ и снять с графика необходимые значения $\delta s'$. На графике целесообразно по оси ординат откладывать не $\sin u'$, а $\sin^2 u'$; тогда промежутки между ординатами равны между собой. Кроме того, при таком нанесении шкалы $\sin u'$ влияние дефокусировки, пропорциональное $\sin^2 u'$, учитывается с наибольшей легкостью.

Вычисление волновой аберрации для точки вне оси

Для точки вне оси волновая аберрация зависит от двух параметров y и z (или m и M) и может быть вычислена путем двойного интегрирования по контуру согласно формуле

$$N = \frac{1}{R} \int (\delta G' \, dz + \delta g' \, dy).$$

Практически такое интегрирование возможно только тогда, когда $\delta g'$ и $\delta G'$ известны как функции y и z или, в крайнем случае, m' и M', для чего требуется рассчитать очень большое число лучей, с помощью которых можно было бы построить чертеж кривых равных значений N на входном или выходном зрачках.

Рис. IX.7

Значительно быстрее волновую аберрацию N можно рассчитать с помощью ЭВМ одновременно с расчетом хода луча. Волновая аберрация N может быть представлена как разность оптических путей между двумя сферами сравнения для ряда лучей. Пусть O (рис. IX.7) точка-объект; O' — центр изображения; AA_1 — оптическая система; ss_1 и $s's'_1$ — две сферы с центрами в точках O и O' соответственно. Пусть (MM') — оптический путь, т. е. сумма значений $\sum \frac{l}{n}$, где l — длина отрезков, соединяющих точки пересечения луча с двумя последующими поверхностями, отсчитанная от точки M на одной сфере до соответствующей точки M' на второй сфере. Оптический путь (MM') есть функция от координат луча, исходящего из точки O. Если из оптических путей, соответствующих различным лучам, вычесть оптический путь для любого луча, например для главного луча, то получим волновую аберрацию этих лучей. Добавление одной и той же величины ко всем значениям оптических путей не влияет на результат.

Поэтому выбор радиуса сферы ss' не имеет значения; выбор же радиуса сферы ss' в пространстве изображений влияет на результат. Во избежание этого следует принимать, что сфера сравнения находится на бесконечности и ее радиус бесконечен.

Процесс вычисления волновой аберрации по изложенной методике описан подробнее в гл. X.

Правило знаков для волновой аберрации

Во избежание ошибок при оценке волновой аберрации и для определения деформации преломляющих (отражающих) поверхностей необходимо установить правило знаков для волновой аберрации. С этой целью рассмотрим ряд лучей, принадлежащих пучку, исходящему из некоторой точки-объекта O. Для простоты ограничимся лучами, лежащими в меридиональной плоскости. Пусть $M_0'M_0''$ (рис. IX.8) главный луч пучка; F_m' — фокус бесконечно тонкого меридионального пучка; $M_1'M_1''$, $M_2'M_2''$, $M_3'M_3''$ и т. д. — ряд лучей, принадлежащих пучку. Пусть $s_0s_1s_2s_3$ — кривая, ортогональная всем лучам пучка. Она является по определению меридиональным сечением волновой поверхности.

Рис. IX.8

Из точки F_m', как центра, через точку S_0 проводим окружность $S_0\bar{S}$; это сечение идеальной волны меридиональной плоскостью. Точка $\bar{S}$ не совпадает с точкой S_3, поскольку свет распространяется в направлении слева направо (как показывают стрелки) и оптическая длина пути, отсчитываемая от некоторой точки O (или от любой сферы с центром в точке O) до точки S_3, больше, чем до точки $\bar{S}$, на величину $n'\bar{S}S_3$.

Эту величину мы и называем волновой аберрацией N. На рис. IX.8 она положительна: положительному N соответствует усиление кривизны реальной волны, или отрицательная продольная и поперечная аберрации. Следовательно, волновую аберрацию N нужно писать в виде

$$N = -n' \int_{\sin u_0'}^{\sin u'} \delta g' \, d(\sin u'). \qquad \text{(IX.70)}$$

Рассмотрим теперь, как влияет деформация поверхности на величину волновой аберрации N. Пусть элемент преломляющей поверхности передвигается при деформации по направлению

распространения света на величину l (рис. IX.9, *а*). Пусть n и n' — показатели преломления до и после преломления на поверхности *к*. Оптический путь увеличивается на nl в первой среде, но уменьшается на $n'l$ во второй; таким образом, $\sum nl$ претерпевает приращение $(n - n')\,l$. Если поверхность отделяет стекло от воздуха, то приращение равно $(n - 1)\,l$ и положительно; оно отрицательно в противоположном случае. Увеличение толщины линзы увеличивает оптический путь.

Рис. IX.9

Если поверхность отражающая, причем свет *в среде изображений* распространяется слева направо (рис. IX.9, *б*), а следовательно, $n' > 0$, то при сдвиге элемента поверхности вправо дополнительный оптический путь равен $(n - n')\,dl = -2n'dl$ и является отрицательным; при сдвиге влево оптический путь и волновая аберрация изменяются в положительную сторону.

12. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Одна из наиболее часто встречающихся задач состоит в том, чтобы изменением формы поверхности довести сферическую аберрацию системы до допустимой величины. При этом, если поле зрения системы мало, то качество изображения улучшится не только на оси, но и по всему полю зрения.

Если в системе имеется отражающая поверхность, то рационально подвергнуть деформации именно ее, так как при этом величина деформации окажется примерно в 4 раза меньше, чем для преломляющей поверхности, и в 6 раз в случае, если отражающая поверхность находится в стекле (линза Манжена).

Прежде всего по одному из описанных выше методов определяется волновая аберрация для нескольких точек выходного зрачка, например $h_к$, $h_к\sqrt{\frac{3}{4}}$, $h_к\sqrt{\frac{2}{4}}$, $h_к\sqrt{\frac{1}{4}}$; обозначим эти аберрации через N_4, N_3, N_2, N_0.

Соответствующая деформация на соответствующих высотах поверхности должна быть равна значениям $\frac{N}{n - n'}$, например $-\frac{N}{2}$, если $n' = 1$, $n = -1$.

Пусть уравнение сечения поверхности имеет вид

$$y^2 + z^2 = 2rx - kx^2, \qquad \text{(IX.71)}$$

где $k = (1 - e^2)$, и пусть y_4 — то значение ординаты, которому соответствует волновая аберрация N_4. Необходимо так изменить

уравнение (IX.71), чтобы стрелки x на высотах y_4, y_3, . . ., y_1 изменились соответственно на $\frac{N_4}{n-n'}$, . . ., $\frac{N_1}{n-n'}$. С этой целью обращаем уравнение (IX.71) с помощью формулы (IX.22) и получаем обращенное уравнение

$$x = \frac{y^2}{2r} + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + \cdots \qquad \text{(IX.72)}$$

Задавая величинам y значения y_4, . . ., y_1, следует для x получить те же значения стрелок, которые получаются при решении уравнения (IX.71) относительно x для значений y равных y_4, . . ., y_1. Это служит контролем правильного расчета коэффициентов B, C, D. Задача заключается в том, чтобы придать коэффициентам r, B, C, D такие значения, при которых стрелки x для определенных значений y приняли бы значения $x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2$, . . ., $x_4 + \Delta x_4$, где $\Delta x_i = \frac{N_i}{n-n'}$.

Полагая, что величины y_i находятся друг к другу в отношениях $\sqrt{4}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{1}$, что осуществляется всегда с достаточной для рассматриваемой задачи точностью, поскольку величины h_i на зрачке также находятся в таком соотношении, можно написать четыре уравнения $\Delta x_i = \Delta \frac{1}{2r_1} y_i^2 + \Delta B y_i^4 + \Delta C y_i^6 + \Delta D y_i^8$ для четырех значений y_i. Благодаря простым соотношениям, связывающим величины y_i при различных значениях i, решение системы четырех уравнений принимает простой вид

$$\Delta \frac{1}{2r_1} = 4\Delta_1 - 2\Delta_1^2 + 1{,}333\Delta_1^3 - \Delta_1^4;$$

$$\Delta B = 8\Delta_1^2 - 8\Delta_1^3 + 7{,}33\Delta_1^4;$$

$$\Delta C = 10{,}67\Delta_1^3 - 16\Delta_1^4;$$

$$\Delta D = 10{,}67\Delta_1^4,$$

где $\Delta_1 \Delta_1^2 \Delta_1^3 \Delta_1^4$ суть разности, получаемые из верхнего подчеркнутого ряда таблицы

$$\begin{array}{c|cccc}
f_0 & & & & \\
 & \boldsymbol{\Delta_1} & & & \\
f_1 & & \boldsymbol{\Delta_1^2} & & \\
 & \Delta_2 & & \boldsymbol{\Delta_1^3} & \\
f_2 & & \Delta_2^2 & & \\
 & \Delta_3 & & \Delta_2^3 & \boldsymbol{\Delta_1^4} \\
f_3 & & \Delta_3^2 & & \\
 & \Delta_4 & & & \\
f_4 & & & &
\end{array}$$

Под f_i следует понимать значение Δx_i; в частности $f_0 = 0$, так как первая точка соответствует значению $y = 0$.

Добавляя эти поправки к первоначальным значениям коэффициентов $\frac{1}{2r_1}$, ΔB и т. д., получаем уравнение исправленной

поверхности. Обращая снова уравнение, получаем исправленную поверхность в виде

$$y^2 + z^2 = 2r_1x - k_1x^2 + ax^3 + bx^4 + \ldots$$

После замены первоначальной поверхности новой проводится тригонометрический расчет хода тех же лучей через измененную систему. Аберрации новой системы намного меньше, чем раньше, и, как правило, они тем меньше, чем ближе деформированная поверхность к концу системы. Действительно, если подлежащая изменению формы поверхность последняя, то деформация, согласно изложенной методике, приведет к полному уничтожению волновой аберрации для четырех высот. Если же деформируется одна из промежуточных поверхностей, лучи отклоняются от первоначального хода сразу же после нее, отчего происходит дополнительное и непредусмотренное изменение волновой аберрации, впрочем довольно малое и намного меньшее, чем остаточные аберрации. Однако это обстоятельство приводит к тому, что необходимо произвести вторую деформацию по той же методике. Обычно двух приближений бывает достаточно, чтобы получить необходимое качество изображения.

Если уравнение меридионального сечения дано в виде $x = f(y^2)$, то решение поставленной задачи намного упрощается, так как отпадает надобность в обращении функции $y = f(x)$ и во втором обращении после вычисления измененных коэффициентов при степенях y.

13. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДВУХ И БОЛЕЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Если подлежащая окончательной корректировке система обладает не очень малым полем зрения, оказывается недостаточным исправление одной только сферической аберрации, а требуется учесть еще и аберрации наклонных пучков. Используя деформацию двух поверхностей, можно, как правило, полностью исправить две аберрации, например сферическую аберрацию и кому или сферическую аберрацию и астигматизм (напомним, что кривизну Пецваля деформацией изменить нельзя); неполностью можно исправить три или более аберраций. В качестве примера такого компромисса можно привести задачу, где требуется получить высокое качество изображений *двух* точек: одной — на оси, а второй — на некотором условно выбранном расстоянии от нее. Такая задача, по-видимому, может быть решена на основании той же методики, которая была применена для одной поверхности, но с ее обобщением на два пучка вместо одного.

Однако легко показать, что решение рассматриваемой задачи не всегда возможно; это становится очевидным при переходе к пределу, когда обе поверхности сливаются в одну. Тогда каждый элемент поверхности должен удовлетворить сразу двум условиям,

а это не может быть выполнено для всякой плавной поверхности, так как каждый такой элемент обладает лишь одной степенью свободы — направлением касательной. Очевидно, что единственный параметр, вообще говоря, не может удовлетворить двум различным условиям. Мы увидим дальше на частном примере, что при неплавной (типа Френеля) поверхности поставленная задача может решаться, так как при отказе от плавности имеются две степени свободы: направление касательной и положение элемента (отсутствие связи с предыдущим и последующим элементами).

Возвращаясь к случаю двух поверхностей, отметим, что наиболее благоприятные условия при решении задачи об исправлении

Рис. IX.10

двух аберраций возникают тогда, когда пучки, соответствующие двум точкам поля зрения, например $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $EFCGE_1F_1C_1G_1$, хотя бы на одной поверхности разделены как на первой поверхности рис. IX.10. Тогда исправление остаточной сферической аберрации возможно на одной из внутренних поверхностей MM_1 или NN_1, а исправление аберраций наклонного пучка может быть достигнуто независимо от этого на первой поверхности FBB_1, на которой пучки не имеют общих точек. Естественно, что наличие таких общих точек может затруднить решение задачи, так как в этих точках уравнение поверхности должно одновременно удовлетворить двум различным условиям. Впрочем, это затруднение во многих случаях может быть обойдено (см. дальше описание апланатических двухзеркальных систем Шварцшильда). Удобство, присущее первому случаю разделенных пучков, является скорее практическим, чем принципиальным: оно дает возможность удовлетворить обоим поставленным условиям *порознь*. Можно, например, деформацией поверхности MM_1 исправить сферическую аберрацию, а далее так подобрать форму первой поверхности FBB_1, чтобы при деформированной MM_1 свести в точку пучок EE_1FF_1.

Решение задачи об исправлении аберраций для двух пучков путем деформации двух поверхностей при отсутствии ЭВМ в принципе не отличается от изложенного выше решения для одной поверхности, но обобщается на две поверхности. Вычисляются волновые аберрации N, соответствующие p_1 точкам первой поверхности и p_2 точкам второй, как для первого пучка, так и для второго и составляются $2(p_1+p_2)$ уравнений, выражающих зависимость $2(p_1+p_2)$ деформаций от поставленных $2(p_1+p_2)$ условий.

Если волновые аберрации, относящиеся к первому и второму пучкам, для определенных лучей вычислены непосредственно с помощью ЭВМ (или каким-нибудь другим способом), то расчет де-

Рис. IX.11

формации сводится к решению системы $2(p_1+p_2)$ линейных уравнений, в правых частях которых записываются желаемые изменения ΔN волновых аберраций. Если нет каких-либо специальных соображений, можно принять $\Delta N_{ij} = -N_{ij}$, т. е. обратить в ноль остаточные волновые аберрации, соответствующие выбранным лучам. Как и в случае одной поверхности, задача решается в несколько приближений, тем более что вследствие большого расстояния между асферическими поверхностями возможны заметные изменения оптического пути.

Рассмотрим более подробно случай одновременного исправления сферической аберрации и комы одной несферической отражающей поверхностью.

Решение такой задачи имеет большое прикладное значение, так как искомая поверхность создает на расстоянии равномерное освещение при небольшом размере источника. Как было указано раньше, эту задачу нельзя решить применением плавной поверхности, так как в этом случае можно удовлетворить только одному из поставленных условий (и то только первому). Одновременное выполнение обоих условий возможно (лишь приближенно) с помощью разрывной поверхности.

Первое условие выполняется с помощью параболоидального зеркала или, в более общем случае, с помощью параболоидальных колец с общим фокусом. Второе условие требует постоянства величины $\frac{h}{\sin u_1}$, т. е. поверхность должна иметь вид сферы, но с центром

в фокусе, а не на двойном фокусном расстоянии, как это имеет место в параксиальной области для любой отражающей поверхности. Таким образом, поверхность состоит из ряда колец, расположение которых может быть понято из рис. IX.11, где показано сечение поверхности меридианной плоскостью. Радиус кривизны параболоидальной поверхности в точке O_1 в 2 раза больше, чем расстояние O_1F; далее все участки O_1O_2, O_3O_4, O_5O_6 и т. д. располагаются так, чтобы их средние точки оказались на сферической поверхности с центром F, а их фокусы совпали бы с точкой F. Все параболоиды обладают разными значениями параметров p.

Указанная поверхность, поскольку она удовлетворяет условию синусов, не может обладать относительным отверстием более чем 1 : 0,5, что видно из рис. IX.11.

14. СЛУЧАЙ ТРЕХ И БОЛЕЕ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В связи с трудностями, связанными с изготовлением асферических поверхностей, стараются не применять в системах более чем одну, в крайнем случае, две поверхности сложного профиля. Все же бывают очень светосильные системы *простой конструкции* с углами поля зрения, превышающими 10—15°, где избежать наличия трех и даже более асферических поверхностей не удается. Использование методики, описанной выше, становится мало эффективным из-за большого числа уравнений, притом неточных. Лучше переходить к методике, основанной на изучении влияния каждого параметра (считая каждый коэффициент ряда, определяющего несферическую поверхность, за параметр), для которой существуют готовые программы, благодаря чему расчеты производятся значительно быстрее и надежнее. Все же следует иметь в виду, что часто бывают неудачи, так как поставленные условия устранения аберраций приводят к противоречиям, а следовательно, к отсутствию решений. Более подробно об этом см. гл. VI.

15. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В системах из одной, максимум — двух асферических поверхностей и произвольного числа сферических поверхностей большую пользу могут оказать приемы, основанные на приложении теоремы Ферма. Последняя обычно приводит либо к аналитическим соотношениям алгебраического типа, либо к дифференциальным уравнениям первого порядка. Такие задачи, как расчеты линз, исправленных в отношении сферических аберраций при очень больших апертурах, также приводят к дифференциальным уравнениям.

Случай одной отражающей поверхности

Принцип Ферма о равенстве всех оптических путей между точкой-объектом на оси поверхности и изображением в этом случае вполне определяет форму поверхности. Это всегда поверхности второго порядка: эллипсоид, если предмет и изображение оба действительные или мнимые; гиперболоид, если одна из точек вещественная, а другая мнимая; параболоид, если либо предмет, либо изображение находятся на бесконечности. Перечисленные формы поверхностей вытекают из известного свойства поверхностей второго порядка — постоянства суммы (или разности) расстояний от фокусов поверхностей до любой точки поверхности.

Преломляющая поверхность

Рассмотрим несколько более сложный случай оптической системы с последней асферической поверхностью. Пусть A (рис. IX.12) — точка на оптической оси системы; A' — ее изобра-

Рис. IX.12

жение, даваемое системой на расстоянии s'_p от последней поверхности. Предположим, что вся система поверхностей BB_1, CC_1,. . ., HH_1, за исключением последней KK_1, задана; требуется определить форму поверхности так, чтобы все лучи после выхода из системы проходили через точку A'. С помощью принципа Ферма задача может быть решена следующим образом. Применим принцип к двум лучам $AB_1, \ldots, K_1A'$ и $AB, \ldots, KA'$; это дает

$$n_1\overline{AB} + n_2\overline{BC} + n_3\overline{CD} + \ldots + n_p\overline{HK} + n_{p+1}\overline{KA'} =$$
$$= n_1\overline{AB_1} + n_2\overline{B_1C_1} + \ldots + n_{p+1}\overline{K_1A'}.$$

Оптический путь от A до H зависит только от угла луча с осью u_1; обозначим для краткости этот путь через $l(u_1)$; уравнение, выражающее принцип Ферма, можно переписать в таком виде:

$$l(u_1) + n_p\overline{HK} + n_{p+1}\overline{KA'} = C, \qquad \text{(IX.73)}$$

где C — известная величина. Пусть x_{p-1} и y_{p-1} — координаты точки H, удовлетворяющие уравнению сферы; обе зависят от u_1; x_p и y_p — координаты точки K, удовлетворяющие уравнению последней неизвестной поверхности KK_1.

Уравнение (IX.73) можно написать в таком виде:

$$l(u_1) + n_p \sqrt{(x_p - x_{p-1})^2 + (y_p - y_{p-1})^2} +$$

$$+ n_{p+1} \sqrt{(s_p' - x_p)^2 + y_p^2} = C. \qquad \text{(IX.74)}$$

Напишем, кроме того, уравнение прямой HK

$$-(Y - y_{p-1}) = (X - x_{p-1}) \operatorname{tg} u_p, \qquad \text{(IX.75)}$$

где x_{p-1}, y_{p-1} и u_p — известные функции от u_1.

Уравнению (IX.75) удовлетворяют координаты x_p, y_p любой точки меридианной кривой KK_1; следовательно,

$$-(y_p - y_{p-1}) = (x_p - x_{p-1}) \operatorname{tg} u_p. \qquad \text{(IX.76)}$$

Из уравнений (IX.74) и (IX.76) можно найти x_p и y_p как функции от u_1 и получить для каждой из них

$$x_p = f_1(u_1); \qquad y_p = f_2(u_1). \qquad \text{(IX.77)}$$

Уравнения (IX.77) суть параметрические уравнения искомой кривой. Применение этого метода на практике наталкивается на значительные трудности.

Этот же вопрос решается гораздо проще с технической стороны путем механического интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Пусть $x = f(y)$ — уравнение сечения неизвестной поверхности. Предположим, что положение некоторой точки M этой кривой известно; пусть x_p и y_p — координаты этой точки; известен также угол u_p луча до преломления через определяемую поверхность.

Вспомним, что

$$\operatorname{tg} u_p' = \frac{y_p}{s_p' - x_p}. \qquad \text{(IX.78)}$$

По углам u_p и u_p' можно найти положение нормали к неизвестной кривой. Для этого из уравнения $u' = u + i' - i$, в котором для краткости опущены значки, получаем

$$i = i' - (u' - u);$$

далее

$$\sin i = \sin i' \cos(u' - u) - \cos i' \sin(u' - u),$$

или

$$\frac{n'}{n} \sin i' = \sin i' \cos(u' - u) - \cos i' \sin(u' - u).$$

Разделив обе части этого уравнения на $\cos i'$, решаем его относительно $\operatorname{tg} i'$; это дает

$$\operatorname{tg} i' = \frac{n \sin(u' - u)}{n \cos(u' - u) - n'}. \qquad \text{(XI.79)}$$

Уравнения (IX.78) и (IX.79) позволяют по известным x_p и y_p получить u_p' и i_p', после чего легко найти

$$\varphi_p = u_p' - i_p'. \tag{IX.80}$$

Производная от x по y, которую обозначим x', как раз равна $\operatorname{tg} \varphi_p$, т. е.

$$\frac{dx}{dy} = x' = \operatorname{tg} \varphi_p. \tag{IX.81}$$

Таким образом, если известна одна точка кривой, то можно вычислить тангенс угла нормали в этой точке с осью по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} u_p' &= \frac{y_p}{s_p' - x_p}; \\ \operatorname{tg} i_p' &= \frac{n_p \sin (u_p' - u_p)}{n_p \cos (u_p' - u_p) - n_p'}; \\ \frac{dx_p}{dy_p} &= x_p' = \operatorname{tg} (u_p' - i_p'). \end{aligned}\right\} \tag{IX.82}$$

Для механического интегрирования полученного уравнения очень удобным является излагаемый ниже метод Адамса—Крылова [2].

Предположим, что уже известны координаты x_p трех-четырех точек, ординаты которых отличаются друг от друга на постоянную величину Δa. Обозначим через a_1, a_2, a_3, . . . значения переменной y, через b_1, b_2, b_3, . . . — соответствующие значения переменной x.

Составляем таблицу по следующему образцу:

y_p	x_p	Δx	x'	$f = x' \Delta a$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
a_1	b_1	Δb_1	x_1'	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
a_2	b_2	Δb_2	x_2'	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	
a_3	b_3	Δb_3	x_3'	f_3			
a_4							

В первом столбце записываются значения переменной y, во втором столбце — соответствующие значения функции x. Третий столбец оставляется для разностей Δx; в четвертом столбце записываются значения x', полученные по формулам (IX.82); в пятом — произведения $f = x' \Delta a$; в шестом, седьмом, восьмом столбцах —

разности первого, второго, третьего порядка функции f. Для вычисления b_4, соответствующего значению $y_p = a_4$, прибавляем к b_3 разность Δb_3, полученную по формуле

$$\Delta b_3 = f_3 + \frac{1}{2}\Delta f_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 f_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 f_0, \qquad \text{(IX.83)}$$

где разности Δ, Δ^2, . . . берутся по восходящей прямой (подчеркнуты в таблице). Получив $b_4 = b_3 + \Delta b_3$, можно вычислить x_4', f_4 и еще ряд разностей Δf_3, $\Delta^2 f_2$, $\Delta^3 f_1$ и т. д., после чего вычисляют новую разность Δb_4 по формуле (IX.83) с прибавлением единицы ко всем значкам этого уравнения.

Первые три-четыре значения y_p и x_p вычисляются в предположении, что кривая практически не отличается от окружности в области небольших y, что соответствует действительности. Зная начальные ксординаты кривой, продолжают ее с помощью процесса Адамса. Этот метод определения формы поверхностей с помощью дифференциального уравнения, примененный в вычислительном бюро ГОИ, оказался очень удобным в вычислительном отношении.

Апланатическая система двух зеркал

Эта задача, решенная впервые (в 1905 г.) Шварцшильдом [3], снова была дважды решена, независимо от него, Кретьеном [4] в 1922 г. и Д. Максутовым [5] в 1932 г.

Рис. IX.13

Как известно, параболические рефлекторы, идеально исправленные в отношении сферической аберрации, обладают очень значительной комой. Последнюю можно устранить применением двух асферических зеркал; их форма определяется из условия апланатизма, которое должно выполняться для всего отверстия пучка. Рассмотрим здесь наиболее изящный с математической точки зрения прием Шварцшильда, который привел задачу к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть AM (рис. IX.13) — меридиональное сечение поверхности первого большого зеркала телескопа; BM' — меридиональное сечение поверхности второго малого зеркала. Луч, падающий на систему параллельно оси, проходит через точки C, A, B, S'. Если точка S' лежит за первым зеркалом, в нем делается отверстие; можно также еще отбросить лучи в сторону с помощью плоского зеркала, как в телескопе Ньютона. Пусть f и f' — фокусные расстояния большого и малого зеркал; d — расстояние между их вершинами;

F — фокусное расстояние всей системы; m — расстояние MS'; по общей формуле имеем

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - \frac{d}{ff'}. \qquad \text{(IX.84)}$$

При отсутствии сферической аберрации, согласно принципу Ферма, сумма оптических путей от любой плоскости, перпендикулярной оси, до точки S' для всех лучей одинакова. Примем ось системы за ось абсцисс и поместим начало координат в точку S'. Обозначим через x расстояние от точки A до плоскости SS' и будем считать расстояние $AS = x$ положительным, если SS' лежит вправо от A. Поскольку луч CA до точки S не доходит, величину $AS = x$ при расчете оптического пути надо считать отрицательной. Принцип Ферма дает

$$-x + \overline{AB} + \overline{BS'} = -\overline{MS'} + \overline{MM'} + \overline{M'S'} = 2d. \qquad \text{(IX.85)}$$

Обозначая через u' угол, образуемый с осью лучом после отражения от обоих зеркал, можем написать условие синусов в виде

$$\frac{y}{\sin u'} = F, \qquad \text{(IX.86)}$$

где y — ордината точки A.

Совокупность уравнений (IX.85) и (IX.86) выражает условие апланатизма; введем в эти уравнения параметры, определяющие форму зеркал. Пусть i и i' — углы луча с нормалями к первой и второй поверхностям. Из рис. IX.13 видно, что

$$u' = 2i' - 2i. \qquad \text{(IX.87)}$$

Обозначим через ρ и l отрезки $\overline{BS'}$ и $\overline{AB}$, считая их положительными. Координаты x и y точки A большого зеркала определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos u' - l\cos 2i; \\ y &= \rho\sin u' + l\sin 2i. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.88)}$$

Пусть $\rho = \rho(u')$ — уравнение сечения малого зеркала в полярных координатах. Направление нормали к нему определяется углом i', для которого можно написать уравнение

$$\operatorname{tg} i' = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{du'}. \qquad \text{(IX.89)}$$

Определим $2i$ из уравнения (IX.87) и y из уравнения (IX.86) и подставим найденные значения во второе из уравнений (IX.88); полагая, что $F = 1$, находим

$$\sin u' = \rho\sin u' + l\sin(2i' - u'). \qquad \text{(IX.90)}$$

Из уравнения (IX.85) и первого из уравнений (IX.88) исключаем x и получаем

$$2d = -\rho\cos u' + l\cos(2i' - u') + l + \rho,$$

или

$$2d = \rho(1 - \cos u') + l[1 + \cos(2i' - u')]. \qquad (IX.91)$$

Определяя l из уравнения (IX.90) и подставляя его значение в уравнение (IX.91), получаем после простых преобразований

$$2d = \rho(1 - \cos u') + (1 - \rho)\sin u' \operatorname{ctg}\left(i' - \frac{u'}{2}\right). \qquad (IX.92)$$

Решая это уравнение относительно $\operatorname{tg} i'$ и приравнивая полученное выражение правой части (IX.89), имеем

$$\frac{1}{\rho}\rho' = \frac{d - \rho + \cos^2\frac{u'}{2}}{d - \sin^2\frac{u'}{2}} \operatorname{tg}\frac{u'}{2}. \qquad (IX.93)$$

Дифференциальное уравнение (IX.93) определяет форму малого зеркала, связывая полярные координаты точек кривой. Интеграл уравнения (IX.93) может быть легко написан:

$$\operatorname{tg}\rho = \int \frac{d - \rho + \cos^2\frac{u'}{2}}{d - \sin^2\frac{u'}{2}} \operatorname{tg}\frac{u'}{2}\, du'. \qquad (IX.94)$$

Обозначая правую часть уравнения (IX.94) через $f_1(u')$, имеем

$$\lg\rho = f_1(u') + C,$$

или

$$\rho = Ce^{f_1(u')}.$$

Постоянная интегрирования определяется из того условия, что $\rho = d + m$, когда $u' = 0$. Вводим новую переменную t, определяя ее формулой

$$t = \sin^2\frac{u'}{2};$$

выполняя интегрирование, находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{t}{d} + \frac{1}{m}\frac{\left(1 - \frac{t}{d}\right)^{\frac{1}{1-d}}}{(1-t)^{\frac{1}{1-d}}}. \qquad (IX.95)$$

Имея уравнение меридианной кривой малого зеркала, нетрудно найти уравнение меридионального сечения большого зеркала. Из уравнения (IX.85) имеем

$$x = \rho + l - 2d.$$

Исключая i' из уравнений (IX.90) и (IX.91), получаем

$$l = d - \rho t + \frac{t(1-t)(1-\rho)^2}{d - \rho t}.$$

Подставляя в предыдущее уравнение вместо l его значение, находим

$$-x = d - \rho(1-t) - \frac{t(1-t)(1-\rho)^2}{d-\rho t} =$$

$$= d - (1-t)\frac{\rho(d-2t)+t}{d-\rho t}; \qquad \text{(IX.96)}$$

заменяя ρ его выражением (IX.95), имеем

$$x = d - \frac{t(1-t)}{d} - md^{2d-1}(d-t)^{\frac{1-2d}{1-d}}(1-t)^{\frac{1}{1-d}}. \qquad \text{(IX.97)}$$

С другой стороны, из условия синусов (IX.86) получаем

$$y = \sin u' = 2\sin\frac{u'}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{u'}{2}} = 2\sqrt{t(1-t)}. \qquad \text{(IX.98)}$$

Уравнения (IX.97) и (IX.98) определяют параметрически через t форму большого зеркала.

Удобнее иметь уравнение кривых сечений малого и большого зеркал в виде разложений в ряды. Для большого зеркала положим

$$x = A + By^2 + Cy^4 + Dy^6 + Ey^8 + \cdots \qquad \text{(IX.99)}$$

Исключая параметр t из уравнений (IX.97) и (IX.98) получаем для коэффициентов A, B, . . . следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} A &= m - d; & D &= -\frac{1}{96}\,\frac{1+4d}{d}\,\frac{m}{4d}; \\ B &= \frac{1-m}{4d}; & & \\ C &= -\frac{1}{8}\,\frac{m}{4d}; & E &= -\frac{1}{1536}\,\frac{2+11d+30d^2}{d^2}\,\frac{m}{4d}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.99*)}$$

Поступая аналогично для малого зеркала, получаем

$$x = m + \left(\frac{1-m}{d} - 1\right)\frac{y^2}{4m} + \left[\frac{1}{4d} - \frac{1-m}{2d} + 2\,\frac{(1-m)^2}{4d^2}\right]\frac{y^4}{8m^3} + \cdots$$

(IX.100)

Система двух зеркал, определяемых уравнениями (IX.97) и (IX.98) или (IX.99) и (IX.100), исправлена точно в отношении сферической аберрации и комы. Остаются два свободных (в небольших пределах) параметра d и m (расстояние между зеркалами и расстояние фокуса от поверхности MA), которыми можно располагать для устранения еще двух аберраций — кривизны поля и астигматизма. Для вычисления этих аберраций с точностью только до третьего порядка малости можно воспользоваться формулами Зейделя для системы бесконечно тонких компонентов в применении к отражательным поверхностям, но проще вычислить положение фокусов бесконечно тонких сагиттальных и мери-

диональных пучков по формулам Аббе, разлагая в ряд тригонометрические величины sin и cos и удерживая только два члена в этих разложениях. Зная отклонения Δ_m и Δ_s фокусов обоих пучков от плоскости изображения в зависимости от расстояния l' точки пересечения луча с фокальной плоскостью системы от оси системы, легко вычислить радиусы кривизны R_m и R_s геометрического места фокусов меридиональных и сагиттальных пучков по формуле $2\Delta R = l'^2$. При этом можно использовать свойство, доказанное на стр. 105, а именно: если сферическая аберрация и кома исправлены, величина астигматизма не зависит от положения входного зрачка; кривизна поля, как это вытекает из выражения для S_{IV}, также не зависит от положения входного зрачка. Поэтому можно принять, что входной зрачок совпадает с вершиной большого зеркала, что значительно облегчает выводы. При выводе формул для R_s и R_m Шварцшильд не вполне законно предположил, что вторая поверхность зеркальной системы имеет сферическую форму. Небезынтересно было бы проверить, какая при этом вводится погрешность.

В результате вычислений Шварцшильд получил формулы

$$\frac{1}{R_s} = \frac{f}{f-d}\left(\frac{d}{f^2} - \frac{d}{2}\right); \qquad \text{(IX.101)}$$

$$\frac{1}{R_m} = \frac{f}{f-d}\left(\frac{d}{f^2} + 4 - 3d\right). \qquad \text{(IX.102)}$$

В уравнениях (IX.101) и (IX.102) по-прежнему F принято за единицу, а f считается положительным, если зеркало вогнуто.

Поперечные размеры кружков рассеяния в фокальной плоскости системы при отсутствии сферической аберрации и комы определяются из формул

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= \frac{F^2}{2R_m}\,\omega' \operatorname{tg}^2 w_1; \\ \delta G' &= \frac{F^2}{2R_s}\,\omega' \operatorname{tg}^2 w_1, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.103)}$$

которые выводятся так же как формулы гл. II, где $\delta g'$ и $\delta G'$ — полуоси эллипсов рассеяния в гауссовой плоскости изображения, $\delta g'$ — в меридиональном и $\delta G'$ — в сагиттальном направлениях; ω' — апертурный выходной угол системы (половина относительного отверстия).

Заканчивая изложение методов расчета систем из асферических поверхностей, имеющих ось симметрии, нужно указать, что по всей вероятности можно предложить ряд иных способов решения той же задачи; к сожалению, литература по этому вопросу крайне бедна и обычно ограничивается только соображениями общего характера. В отношении формул расчета хода лучей через

асферические поверхности дело обстоит несколько лучше, но несколько опубликованных работ по этому вопросу [6, 7, 8] не нашли никакого отражения в современной литературе.

16. ПРИМЕНЕНИЕ ТОРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Наша оптическая промышленность до сих пор не овладела полностью технологией изготовления несферических поверхностей, за исключением тех поверхностей, которые чрезвычайно мало отличаются от сферических и требуют нанесения лишь небольшой ретуши (или напыления). Поэтому вычислителям приходится искать всякие компромиссы и суррогаты несферических поверхностей, технология изготовления которых относительно проста (по сравнению с несферическими поверхностями, значительно отступающими от сферических). К таким поверхностям относятся торические, для которых уже существуют специальные станки, позволяющие изготовить их с достаточно большой точностью. По сравнению со сферическими поверхностями, торические обладают одним лишним параметром, а следовательно, применение их вместо сферических дает одно лишнее коррекционное средство, по силе равнозначное эксцентриситету для поверхностей второго порядка. Особенно рационально применение торических поверхностей в тех случаях, когда рабочая поверхность имеет вид кольца, т. е. когда ее центральная часть не работает, что имеет место в зеркально-линзовых системах.

Как известно, в зеркальных и зеркально-линзовых системах большой светосилы, например с относительным отверстием, превышающим 1 : 0,8—1 : 0,75, не представляется возможным применение сферических зеркал, если угловое поле системы достигает нескольких градусов. Однако в ряде случаев торические поверхности при этих же условиях могут дать вполне удовлетворительные результаты в отношении качества изображения.

Здесь рассматривается вопрос о замене несферической поверхности сложного профиля торической, о подборе параметров последней и о методике расчета хода лучей через торические поверхности.

Предположим, что выполнен расчет оптической системы, в которой одна из поверхностей несферична, причем отступление от сферы таково, что методами ретуши и напыления изготовление такой поверхности невозможно.

Пусть OA_1A_3 (рис. IX.14) меридианная кривая поверхности. Можно всегда представить эту поверхность в виде ряда $x = f(y) = ay^2 + by^4 + cy^6 + \ldots$ Рассмотрим точку A_2, расположенную на кривой между A_1 и A_3 ближе к последней, например на высоте $y = y_к \sqrt{3/4}$, где $y_к$ — координата крайней точки A_3. Через точку A_2 проводим нормаль A_2C к поверхности. Пусть координаты

центра кривизны кривой C суть x_0 и y_0 (начало координат принято у вершины поверхности), а радиус кривизны в меридиональной плоскости равен

$$R_m = \sqrt{(x_{A_2} - x_0)^2 + (y_{A_2} - y_0)^2}.$$

Угол φ, образуемый нормалью с осью, определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi = x' = 2ay_{A_2} + 4by_{A_2}^3 + \cdots$$

а радиус кривизны R_m вычисляется по формуле

$$R_m = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Величины x_0 и y_0 получаем из следующих уравнений: $x_0 = x_{A_2} + R_m \cos\varphi$; $y_0 = y_{A_2} - R_m \sin\varphi$, считая R_m положительным, когда вогнутость обращена вправо, а знак угла нормали с осью определяется согласно правилам, принятым в расчетной оптике.

Рис. IX.14

Далее следует проверить, насколько торическая поверхность отличается от рассчитанной несферической. Для этого нужно вычислить абсциссу x торической поверхности для ряда точек с ординатами $y_1, y_2, \ldots, y_p$ и сравнить с абсциссами (стрелками) несферической поверхности, соответствующими тем же ординатам и вычисленными по приведенному выше ряду. Проще всего вычислить стрелки для меридианной кривой торической поверхности следующим образом:

$$x = x_0 - \sqrt{R^2 - (y - y_0)^2} = x_0 - \sqrt{x_0^2 + 2yy_0 - y^2}.$$

Умножая и деля выражение для x на сопряженную величину, получаем

$$x = \frac{y^2 - 2yy_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2yy_0 - y^2}} = \frac{y^2 - 2yy_0}{2x - x_0}. \qquad \text{(IX.104)}$$

Формула (IX.104) очень удобна для вычисления постепенными приближенными, если положить сначала x в знаменателе равным нулю. Если отклонения велики, можно попытаться их уменьшить небольшими изменениями x_0 и y_0 и добиться наименьших возможных отклонений. Когда последние не превышают нескольких микрометров, можно считать, что замена несферической поверхности в принципе возможна, однако для окончательного ответа следует выяснить влияние отклонений на аберрации оптической

системы, после чего можно решить вопрос, следует ли торическую поверхность еще подвергнуть дополнительной ретуши или можно ее оставить без изменений. Для этого необходимо вывести формулы для тригонометрического расчета хода лучей через торическую поверхность. С этой целью можно использовать любую программу для вычисления хода лучей через поверхности, определенные уравнением

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots$$

на электронно-вычислительной машине, например программу № 2 для ЭВМ «Урал-2», но необходимо предварительно определить коэффициенты a_1, a_2, a_3 и т. д.

Примем за начало координат точку O, где окружность, вращение которой вокруг оси образует торическую поверхность, пересекает ось. Формула Маклорена для области около начала координат дает

$$x = x'y + \frac{x''}{2} y^2 + \frac{x'''}{3!} y^3 + \cdots$$

где x', x'' — производные функции x по переменной y. Но $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_m^2$.

Дифференцируя последовательно эту формулу по аргументу y и вводя обозначения

$$a_1 = x';$$

$$a_2 = \frac{x''}{2};$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{x^{(n)}}{n!},$$

можно составить рекуррентные формулы

$$a_1 = -m;$$

$$a_2 = \frac{1 + m^2}{2x_0},$$

где $m = \frac{y_0}{x_0}$;

$$x_0 a_3 = a_1 a_2;$$

$$x_0 a_4 = a_1 a_3 + \frac{1}{2}(a_2)^2;$$

$$x_0 a_5 = a_1 a_4 + a_2 a_3;$$

$$x_0 a_6 = a_1 a_5 + a_2 a_4 + \frac{1}{2}(a_3)^2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0 a_{2\kappa} = a_1 a_{2\kappa-1} + a_2 a_{2\kappa-2} + \cdots + \frac{1}{2}(a_\kappa)^2;$$

$$x_0 a_{2\kappa+1} = a_1 a_{2\kappa} + a_2 a_{2\kappa-1} + \cdots + a_\kappa a_{\kappa+1},$$

т. е. коэффициенты при четных степенях y отличаются от коэффициентов при нечетных тем, что перед квадратом a_κ стоит множитель $^1/_2$; при нечетных — квадратов нет. Как правило, коэффициенты при нечетных степенях y малы, так как они содержат в качестве множителя величину m, которая всегда мала. Для оценки порядка величины любого четного коэффициента (что нужно для определения числа необходимых членов ряда) можно заметить, что приближенно

$$a_4 \approx \frac{1}{8x_0^3}; \quad a_6 \approx \frac{1}{16x_0^5}; \quad a_8 \approx \frac{1}{32x_0^7} \text{ и } a_{2\kappa} \approx \frac{1}{2^{\kappa+1}x_0^{2\kappa-1}};$$

следовательно, вклад 2κ-го члена ряда приближенно равен

$$\frac{y^{2\kappa}}{2^{\kappa+1}x_0^{2\kappa-1}}.$$

Рис. IX.15

Отсюда легко определить, начиная с какого κ можно пренебречь последующими членами ряда. Учитывая, что четные члены ряда имеют всегда один и тот же знак, нужно быть осторожным в оценке сходимости. Желательно, чтобы отношение $\frac{y_0}{x_0}$ не превосходило $^1/_4$—$^1/_5$. В таком случае каждый последующий четный член в 8—10 раз меньше предыдущего и сходимость надежно обеспечена. Вычислив на ЭВМ ход лучей через систему, содержащую торическую поверхность, и сравнив этот результат с результатами, полученными для асферической поверхности, можно узнать, насколько изменились аберрации при замене сложной поверхности торической.

Можно предложить более простой способ оценки изменения аберрации, вызываемого переходом от асферической поверхности к торической; однако для него требуется специальная операция, позволяющая определить изменение аберрации, вызываемое отклонением луча от своего первоначального направления. Такая операция может быть осуществлена согласно той же программе № 2 ГОИ. Определив отступления Δx торической поверхности от несферической для ряда ординат y, чертят кривую Δx как функцию от y (рис. IX.15). Пусть $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент

касательной в точке M_p кривой, соответствующей ординате y_p. Угловой коэффициент (тангенс) касательной в точке M_p с учетом масштаба графика дает наклон $\Delta\alpha$ нормали к торической поверхности по отношению к нормали несферической поверхности. Зная этот наклон, можно получить отклонение луча $2\Delta\alpha$ (в случае отражения) и с помощью сведений, полученных в результате указанной выше операции, определить изменение аберраций, вызываемое неполным совпадением поверхностей. Для иллюстрации этого способа рассмотрим следующий пример.

Пусть поверхность первого зеркала зеркально-линзовой системы типа Грегори с компенсатором перед фокальной плоскостью определяется уравнением

$$y^2 + z^2 = -208{,}3x + 1{,}592x^2 + 0{,}2021x^3 + 0{,}1654x^4.$$

Торическая поверхность, наиболее приближающаяся к ней, определяется параметрами $x_0 = 127{,}63$; $y_0 = -3{,}09$; $R = 127{,}67$; вычисление абсцисс x для меридианных кривых обеих поверхностей дает значения, приведенные в табл. 3,

Таблица IX.3

y	x для несферической поверхности	x для торической поверхности	Δx	tg $\Delta\varphi$ *в сек*	$\Delta\delta g'$
15	1,0715	1,0714	—0,0001	—315	—0,029
16	1,2176	1,2186	0,0010	—130	—0,044
17	1,3726	1,3739	0,0013	—5	—
18	1,5364	1,5374	0,0010	110	—
19	1,7087	1,7090	0,0003	165	—
20	1,8893	1,8888	—0,0005	165	0,054
21	2,0779	2,0769	—0,0010	45	—
22	2,2740	2,2732	—0,0008	—175	—
23	2,4774	2,4778	0,0004	—350	—0,096

где $\Delta\varphi = \Delta\alpha$, а $\Delta\delta g'$ — разность между значениями поперечной аберрации торической и асферической поверхности, полученная в результате расчета хода лучей.

Устранение остаточных аберраций может быть достигнуто дополнительной ретушью, величина которой не превышает 1—2 *нм*.

17. СВОДКА ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

1. Ряды, определяющие меридианное сечение асферических поверхностей, можно представить двумя способами:

$$y^2 = 2rx - \kappa x^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5 + \cdots \qquad \text{(IX.21)}$$

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + Ey^{10} + \cdots \qquad \text{(IX.22)}$$

Коэффициенты обоих рядов связаны следующими формулами:

$$A = \frac{1}{2r}; \quad \gamma = \frac{14B^4 - 21B^2CA + 6A^2BD + 3A^2C^2 - A^3E}{A^9};$$

$$B = \frac{\kappa}{8r^3}; \quad \beta = \frac{5BCA - 5B^3 - A^2D}{A^7};$$

$$C = \frac{\kappa^2 - \alpha r}{16r^5}; \quad \alpha = \frac{2B^2 - CA}{A^5};$$

$$D = \frac{5\kappa^3 - 10\alpha r\kappa - 4\beta r^2}{128r^7}; \quad \kappa = \frac{B}{A^3};$$

$$E = \frac{7\kappa^4 - 21\alpha r\kappa^2 - 12\beta r^2\kappa + 6\alpha^2 r^2 - 4r^3\gamma}{256r^9}; \quad 2r = \frac{1}{A}.$$

2. Сводка формул (IX.43) для расчета положения фокусов бесконечно тонких астигматических пучков приведена на стр. 537.

3. Если поверхность характеризуется разложением $x = ay^2 + by^4 + cy^6 + dy^8$, то

$$r_0 - r_s = (a^3 - b)y^4 - 2(a^5 - 3a^2b + c)y^6 + (5a^7 - 20a^4b + 12ab^2 + 9a^2c - 3d)y^8, \qquad \text{(IX.51)}$$

причем

$$r_0 = r + \frac{a^3 - b}{a^2}y^2 + \frac{2a^3b - 3ac + 4b^2}{2a^3}y^4 + \frac{a^4c - 2a^2d + 6abc - 4b^3}{a^4}y^6.$$

4. Поправка к ординате y при переходе от сферической поверхности к асферической, если луч образует с осью угол u, нормаль к поверхности — угол φ и угол преломления равен i:

для поверхностей второго порядка

$$\Delta y = \frac{e^2y^4}{8r^3}\frac{\cos\varphi}{\cos i}\sin u;$$

в общем случае

$$\Delta y = \left(\frac{1}{8r^3} - b\right)y^4\frac{\cos\varphi}{\cos i}\sin u. \qquad \text{(IX.52)}$$

5. Сводка формул для аберраций третьего порядка систем, содержащих асферические поверхности, приведена в гл. II.

6. Сводка формул (IX.67)—(IX.69) для вычисления волновой аберрации точки на оси на основании значений продольных асферических аберраций для двух, трех и четырех лучей дана на стр. 550—551.

Б. АНАМОРФОТЫ

18. ВВЕДЕНИЕ

Оптические системы, обладающие осью симметрии, образуют подобное объекту изображение: если объектом служит квадрат (в плоскости, перпендикулярной оси), то его изображение будет квадратом; если круг, то изображение имеет вид круга и т. д.; другими словами, поперечное увеличение системы одинаково во всех плоскостях, пересекающих ось. Однако для некоторых отраслей техники, главным образом кинематографии, оказались необходимыми оптические системы, создающие искаженные определенным образом изображения. Особенно это необходимо при съемке высоких, но узких объектов (башни) или, наоборот, очень широких, но невысоких (ландшафты, панорамы). При съемках таких объектов бóльшая часть площади снимка остается неиспользованной. С помощью анаморфота, т. е. оптической системы, создающей изображение различных масштабов в двух взаимно перпендикулярных направлениях, можно значительно увеличить используемую площадь, задавая такую деформацию изображения, при которой последнее оказалось бы близким к квадрату или прямоугольнику согласно формату кадра. В дальнейшем при проекции на экран можно использовать такой же анаморфот, но работающий в обратном направлении и восстанавливающий правильные размеры картины. Возможны и другие применения анаморфотов, например для поисков объектов, имеющих удлиненную форму, но мало заметных из-за большого расстояния или по другим причинам. Кажущееся увеличение длины при сохранении ширины позволяет намного быстрее обнаружить разыскиваемый объект.

Анаморфоты создаются из комбинаций поверхностей, обладающих двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, например торических и цилиндрических. Поскольку изготовление более сложных поверхностей с достаточной точностью оптической промышленностью не освоено, то в настоящее время и в течение еще довольно продолжительного срока можно ожидать, что никакие другие линзы, кроме цилиндрических, для изготовления анаморфотов применяться не будут.

Плоскости симметрии анаморфота совпадают для всех поверхностей, так как в противном случае свойство двойной симметрии не может быть удовлетворено. На практике анаморфоты содержат несколько компонентов, состоящих каждый из цилиндрических линз с параллельными образующими, причем у одних компонентов образующие параллельны одной из плоскостей симметрии, у других они перпендикулярны последней. Простейшими примерами аноморфота могут служить следующие комбинации.

1. Две цилиндрические линзы расположены как показано на рис. IX.16, где вверху приведена вертикальная проекция системы,

а внизу — горизонтальная (обе проекции совпадают с плоскостями симметрии системы). Как видно из картины хода лучей на обеих проекциях, приведенный на рисунке анаморфот в одном сечении дает увеличение в 2 раза, в то время как увеличение во втором сечении равно $^1/_2$; отношение этих двух увеличений, характеризующее степень искажения, равно 4.

2. Две цилиндрические линзы имеют параллельные образующие, расположенные как показано на рис. IX.17.

В первом сечении, перпендикулярном образующим (верхняя часть рисунка), лучи, падающие параллельно оси OO' пересечения

Рис. IX.16

Рис. IX.17

двух плоскостей симметрии, пересекаются в заднем фокусе F первого компонента L_1, совпадающем с передним фокусом второго компонента L_2, и, преломляясь вторым компонентом L_2, выходят из системы параллельно оси, но на высоте h_2, отличной от высоты падения h_1. Если обозначить отношение $\frac{h_1}{h_2}$ через Г, то можно считать, что система действует в рассматриваемом сечении как галилеевская с увеличением Г.

Во втором сечении (нижняя часть рис. IX.17) лучи проходят не преломляясь. Изображение получается на бесконечности с увеличением равным единице. Таким образом, рассматриваемая система является телескопической и создает деформированное изображение, увеличенное в первом сечении в Г раз, во втором — в 1 раз. Такие системы очень удобны в качестве приставок к обычным объективам, рассчитанным для съемки далеких объектов, и в комбинации с ними образуют анаморфоты с коэффициентом искажения Г.

Таким образом, анаморфот состоит из двух или более компонентов, каждый из которых дает астигматическое изображение (для точки на оси включительно), но в комбинации эти компоненты, будучи подобраны подобающим образом, образуют стигматическое изображение (в пределах гауссовой области).

Все существующие анаморфоты (за исключением призменных, которые будут рассмотрены особо) относятся к одной из двух

перечисленных категорий, хотя следует отметить, что могут быть и другие группы анаморфотов, поверхности которых не цилиндрические, а торические.

19. ГАУССОВА ОПТИКА АНАМОРФОТОВ

Напомним формулы:

$$n'\alpha' - n\alpha = \lambda\Delta;$$
$$n'\beta' - n\beta = \mu\Delta;$$
$$n'\gamma' - n\gamma = \nu\Delta,$$

где $\Delta = n' \cos i' - n \cos i$.

Подставляя вместо $\cos i$ и $\cos i'$ их значения

$$\cos i = \lambda\alpha + \beta\mu + \gamma\nu,$$
$$\cos i' = \lambda\alpha' + \beta'\mu + \gamma'\nu,$$

получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}(n'\alpha' - n\alpha)(1-\lambda^2) &= \lambda[\mu(n'\beta' - n\beta) + \nu(n'\gamma' - n\gamma)];\\ (n'\beta' - n\beta)(1-\mu^2) &= \mu[\lambda(n'\alpha' - n\alpha) + \nu(n'\gamma' - n\gamma)];\\ (n'\gamma' - n\gamma)(1-\nu^2) &= \nu[\lambda(n'\alpha' - n\alpha) + \mu(n'\beta' - n\beta)],\end{aligned}\right\} \quad (\text{IX}.105)$$

где λ, μ, ν — направляющие косинусы нормали в точке пересечения луча с поверхностью преломления. Решая системы двух последних уравнений относительно выражений $n'\beta' - n\beta$ и $n'\gamma' - n\gamma$, получаем

$$\left.\begin{aligned}n'\beta' - n\beta &= \frac{\mu}{\lambda}(n'\alpha' - n\alpha);\\ n'\gamma' - n\gamma &= \frac{\nu}{\lambda}(n'\alpha' - n\alpha).\end{aligned}\right\} \quad (\text{IX}.106)$$

В параксиальной области эти два выражения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}n'\beta' - n\beta &= -\frac{y}{r_y}(n' - n);\\ n'\gamma' - n\gamma &= -\frac{z}{r_z}(n' - n),\end{aligned}\right\} \quad (\text{IX}.107)$$

так как $\mu = -\frac{y}{r_y}$ и $\nu = -\frac{z}{r_z}$, где y и z — координаты точки пересечения луча с поверхностью.

Следует отметить, что под β, β', γ и γ' можно понимать углы с осью проекций падающего и преломленного луча соответственно на плоскости YOX, ZOX (рис. IX.18), причем эти углы положительны и по абсолютному значению меньше $\pi/2$, если проекции лежат в первом квадранте, и отрицательны — в четвертом. Эти знаки противоположны обычно принятым для углов u и u'. То же имеет место для углов нормали с осями. Отсюда появляется знак минус в приведенных формулах.

Формулы (IX.107) совпадают с обычными формулами преломления в гауссовой области; они показывают, что каждый луч, преломляющийся на поверхности, может быть заменен двумя проекциями на взаимно перпендикулярные плоскости и каждая из этих проекций ведет себя как обыкновенный луч, преломляющийся по обычным законам геометрической оптики. Под r_y и r_z следует понимать величины, входящие в разложение координаты x в виде ряда $x = \frac{y^2}{2r_y} + \frac{z^2}{2r_z}$, изображающего уравнение поверхности преломления, отнесенное к ее вершине в начале координат.

Рис. IX.18

Отсюда следует вывод, что в параксиальной области, окружающей ось анаморфота (т. е. пересечение двух плоскостей симметрии), лучи распространяются таким образом, что можно следить за ними по проекциям на двух плоскостях симметрии, причем ход луча вполне определяется обычным законом преломления, а радиусы r_y и r_z в обеих плоскостях могут быть получены из уравнения преломляющей поверхности, написанного в виде

$$x = f(y, z).$$

Это положение облегчает расчет аноморфотов в приближении Гаусса. Можно выполнить этот расчет отдельно для каждой проекции, обращая внимание на следующее: точки пересечения каждой поверхности (напомним, что в параксиальной области все поверхности можно принимать за сферические) с осью в обоих сечениях находятся на равных расстояниях от некоторого начала, например от точки пересечения с первой поверхностью. Проекции точки-объекта находятся на одном и том же расстоянии от начала. То же должно иметь место для ее изображения, иначе система не является анаморфотом.

Для примера рассмотрим систему из двух компонентов, у которых плоскости симметрии попарно совпадают. Пусть s_1 — расстояние от предмета до первой линзы; d — расстояние между линзами; f_1 и f_2 — фокусные расстояния этих линз в экваториальном сечении; f_1' и f_2' — фокусные расстояния в меридиональном сечении; s_s' и s_m' — расстояния изображений точки-предмета в обоих сечениях системы от второго компонента. Для экваториального сечения легко выводим формулу

$$s_s' = \frac{1 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{s_1}}{\Phi + \frac{1}{s_1}\left(1 - \frac{d}{f_2}\right)},$$

где для краткости положено:

$$\Phi = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Аналогично для меридионального сечения находим

$$s'_m = \frac{1 - \frac{d}{f'_1} - \frac{d}{s_1}}{\Phi' + \frac{1}{s_1}\left(1 - \frac{d}{f'_2}\right)},$$

где

$$\Phi' = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}.$$

Условие, необходимое для того, чтобы исследуемая система дала изображение, выражается следующим образом:

$$s'_s = s'_m,$$

что приводит к некоторому соотношению между четырьмя величинами: f_1, f_2, f'_1, f'_2. Если линзы цилиндрические, то в каждой линзе одна из величин f или f' равна бесконечности и тогда должно выполняться некоторое соотношение между двумя оставшимися величинами.

Рис. IX.19

В отличие от оптических систем, обладающих осью симметрии, анаморфоты теряют свойство образования резкого (в области Гаусса) изображения объекта, когда последний меняет свое положение вдоль оси. Это вытекает из того, что фокусы отдельных компонентов анаморфота в двух плоскостях симметрии не совпадают и одно и то же изменение Δ положения предмета вызывает в пространстве изображений разные изменения в разных сечениях.

Пусть H_m, H'_m, F_m, F'_m — главные точки и главные фокусы меридионального сечения; H_s, H'_s, F_s, F'_s — то же для экваториального сечения (рис. IX.19); O и O' — вершины первой и последней поверхностей системы. Условия, которым должны удовлетворять абсциссы s_m и s'_m, s_s и s'_s точки и ее изображения в двух главных сечениях, следующие:

$$s_m = s_s; \quad s'_m = s'_s.$$

Пусть a_m, a'_m — расстояния от первой поверхности до переднего фокуса и от последней поверхности до заднего фокуса в мери-

диональном сечении; a_s и a_s' — соответственные величины в экваториальной плоскости. Из уравнения Ньютона получаем

$$(a_m - s)(a_m' - s') = f_m f_m';$$

$$(a_s - s)(a_s' - s') = f_s f_s',$$

или

$$ss' - a_m' s' - f_m f_m' - a_m a_m' = 0;$$

$$ss' - a_s' s' - f_s f_s' - a_s a_s' = 0.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем линейную связь между s и s'; выражая одну из неизвестных s или s' через другую с помощью этого линейного соотношения, получаем квадратное уравнение относительно одной из неизвестных. Следовательно, существуют две пары сопряженных точек, для которых оптическая система является анаморфотом. Аббе показал, что линейные увеличения в этих двух парах сопряженных точек обратны. Это можно объяснить следующим образом. Для обоих сечений имеем

$$\frac{f_m}{f_m'} = \frac{f_s}{f_s'} = \frac{n}{n'}. \qquad \text{(IX.108)}$$

Пусть β_m и β_m^*, β_s и β_s^* — линейные увеличения в меридиональной и экваториальной плоскостях для первой и второй пары сопряженных точек. Если A и A^*, A' и A'^* — сопряженные точки, то из геометрических построений вытекает

$$\gamma_m = \frac{AA^*}{A'A'^*}\beta_m^*; \quad \gamma_s = \frac{AA^*}{A'A'^*}\beta_s^*; \qquad \text{(IX.109)}$$

следовательно,

$$\frac{\gamma_m}{\gamma_s} = \frac{\beta_m^*}{\beta_s^*}.$$

Вследствие формул (IX.108) и $\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$ получаем

$$\beta_m \gamma_m = \beta_s \gamma_s,$$

откуда

$$\frac{\beta_m}{\beta_s} = \frac{\beta_s^*}{\beta_m^*}. \qquad \text{(IX.110)}$$

При вращении анаморфота, обладающего в двух главных сечениях увеличениями разных знаков, изображение объекта вращается вокруг оси с удвоенной по сравнению со скоростью вращения системы угловой скоростью. При этом изображение искажено, если отношение увеличений отлично от —1. Если это отношение равно —1, то изображение является зеркальным. Таким

образом, анаморфот с увеличением +1 в одном сечении и —1 в другом (типа трубы Кеплера с единичным увеличением) позволяет поворачивать изображение, оказывая такое же действие, как система нечетного числа плоских зеркал.

20. АБЕРРАЦИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА АНАМОРФОТОВ

Теория анаморфотов была разработана в конце XIX в. Аббе, Кульманном и др., но только в пределах параксиальной области. Первые анаморфоты использовались в типографии для изготовления вставок и не требовали никакого аберрационного исправления. Первый ответственный анаморфот «Гипергонар» (приставка к фотографическому объективу) был предложен Кретьеном в виде галилеевской системы цилиндрических линз с параллельными образующими, причем аберрации были исправлены лишь в одном сечении; но при испытании оказалось, что качество изображения плохое, главным образом из-за дисторсии непривычного характера.

Аберрации третьего порядка анаморфотов исследовались в различных частных случаях, например подробно рассматривались аберрации типа дисторсии [9]; кроме того, неоднократно изучались аберрации третьего порядка систем цилиндрических линз с параллельными образующими [10, 11].

Полное исследование аберраций третьего порядка было выполнено Брудером в его докторской диссертации; последняя не была опубликована из-за смерти автора, но ее результаты приведены в статье Кёлера [12]. К сожалению, эти результаты сообщены в незаконченном виде, вследствие чего их применение на практике без существенных дополнений невозможно. Кроме того, один из членов разложения в формулах Брудера может обратиться в бесконечность при явной конечности аберраций, что свидетельствует о какой-то ошибке в выводе.

Приведем здесь полный вывод выражений для коэффициентов аберраций третьего порядка анаморфотов, исходя из свойств углового эйконала, изложенных в гл. II, следуя по тому пути, который привел к формулам для коэффициентов аберраций третьего порядка оптических систем с осевой симметрией.

Пусть OO' — оптическая система с поверхностями двоякой кривизны, расположенная таким образом, чтобы ее главные сечения совпали с координатными плоскостями XOY, XOZ (рис. IX.20). Пусть $LMM'L'$ — луч, входящий в систему и преломляющийся ею. Напомним, что проекции поперечной аберрации $\delta g'$ и $\delta G'$ связаны с производными углового эйконала W формулами

$$\left.\begin{aligned} -n'\delta g' &= \frac{\partial W}{\partial \beta'} + \tau \frac{\partial W}{\partial \beta}; \\ -n'\delta G' &= \frac{\partial W}{\partial \gamma'} + \tau \frac{\partial W}{\partial \gamma}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.111)}$$

где W — длина оптического пути HH' между основаниями перпендикуляров SH и $S'H'$, опущенных из сопряженных осевых точек S и S' плоскостей предмета и изображения. Величина $W = \sum ndl$, распространенная на путь HH', должна быть выражена *только* через направляющие косинусы β, γ, β' и γ' луча до и после преломления рассматриваемой оптической системой OO' и кон-

Рис. IX.20

структивные элементы оптической системы. Величина $\tau = \frac{n'l'}{nl}$ обратна угловому увеличению для сопряженных плоскостей.

Величину W удобно вычислять в три приема: сначала для частного случая, когда плоскости объекта и изображения совпадают с плоскостью, касательной к преломляющей поверхности. Далее можно перейти к любому положению объекта при одной преломляющей поверхности.

Переход от одной поверхности к самому общему случаю удобнее осуществить не по величине W, а после дифференцирования ее и получения выражений для $\delta g'$ и $\delta G'$ и затем, используя формулу Лагранжа—Гельмгольца $n'\delta g'\alpha' = \text{const}$ и свойства слагаемости аберраций третьего порядка, составить формулу для $\delta g'$ всей системы.

Рис. IX.21

Приведем вывод выражения для W при одной преломляющей поверхности, когда плоскости предметов и изображений совпадают (рис. IX.21). Это частное значение W обозначим $W_н$.

В этом случае $\tau = \frac{n'}{n}$, так как $\frac{l'}{l} = 1$. Расстояние $W_н = n\overline{MH} + n'\overline{MH'} = -n'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) + n(\alpha x + \beta y + \gamma z)$, где x, y и z — координаты точки пересечения M луча с поверхностью.

Можно переписать выражение для $W_н$ в виде

$$-W_н = x(\alpha' n' - \alpha n) + y(\beta' n' - \beta n) + z(\gamma' n' - \gamma n).$$

Как было доказано выше [см. (IX.106)]

$$n'\beta' - n\beta = \frac{\mu}{\lambda}(n'\alpha' - n\alpha); \qquad n'\gamma' - n\gamma = \frac{\nu}{\lambda}(n'\alpha' - n\alpha).$$

Используя эти формулы, можно написать для $W_н$ простое выражение

$$W_н = -\frac{\alpha' n' - \alpha n}{\lambda}(\lambda x + \mu y + \nu z), \qquad \text{(IX.112)}$$

где λ, μ и ν — направляющие косинусы нормали к поверхности в точке M. Заметим, что выражение в скобках $\lambda x + \mu y + \nu z$ имеет простой геометрический смысл: это расстояние от основания T перпендикуляра OT, опущенного из точки O на нормаль MN, до точки M пересечения луча с поверхностью.

Напишем теперь уравнение поверхности в виде ряда

$$x = \frac{y^2}{2r_1} + \frac{z^2}{2r_2} + \frac{y^4}{8r_3^3} + \frac{2y^2z^2}{8r_4^3} + \frac{z^4}{8r_5^3}, \qquad \text{(IX.113)}$$

содержащего степени y и z до четвертого порядка, необходимые и достаточные для вывода аберраций третьего порядка. В этой формуле r_1 и r_2 суть радиусы кривизны поверхности в двух главных сечениях; r_3, r_4 и r_5 — некие коэффициенты, имеющие размер длины; причем в том случае, когда сечения имеют вид окружностей, $r_3 = r_1$ и $r_5 = r_2$. О коэффициенте r_4 будет сказано ниже.

Из уравнения (IX.113) можно получить направляющие косинусы нормали. Для определенности считаем положительное направление нормали совпадающим с направлением хода луча, причем за начало ее примем точку поверхности.

Написав уравнение в виде $x - f(x) = 0$, находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{r_1} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{r_1^3} - \frac{1}{2}\frac{yz^2}{r_4^3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{r_2} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{r_5^3} - \frac{1}{2}\frac{zy^2}{r_4^3}.$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Ввиду того, что $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{D} = \frac{1}{D}$, имеем $\lambda D = 1$. Примем у D знак плюс, откуда при $D > 0$ $\lambda > 0$. Тогда $\mu = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{D} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}$, $\nu = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$; следовательно,

$$-\frac{\mu}{\lambda} = \frac{y}{r_1} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{r_1^3} + \frac{1}{2}\frac{yz^2}{r_4^3}; \quad -\frac{\nu}{\lambda} = \frac{z}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{r_5^3} + \frac{1}{2}\frac{zy^2}{r_4^3}. \qquad \text{(IX.114)}$$

Составляем выражение $\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{\lambda}$, входящее в формулу для $W_н$. Для этого из последних уравнений получаем y и z с необходимой точностью:

$$\left.\begin{aligned} y &= -r_1\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{2}\frac{r_1^4}{r_3^3}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{r_1^2r_2^2}{r_4^3}\frac{\mu\nu^2}{\lambda^3};\\ z &= -r_2\frac{\nu}{\lambda}+\frac{1}{2}\frac{r_2^4}{r_5^3}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{r_1^2r_2^2}{r_4^3}\frac{\nu\mu^2}{\lambda^3};\end{aligned}\right\} \qquad (IX.115)$$

из уравнения поверхности получаем

$$x=\frac{r_1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\frac{r_2}{2}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^2-\frac{3}{8}\frac{r_1^4}{r_3^3}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^4-$$

$$-\frac{3}{8}\frac{r_2^4}{r_5^3}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^4-\frac{3}{4}\frac{r_1^2r_2^2}{r_4^3}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda^2}\right)^2. \qquad (IX.115^*)$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в формулу для $W_н$ и заменяя отношения $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$ их выражениями

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{n'\beta'-n\beta}{n'\alpha'-n\alpha}; \qquad \frac{\nu}{\lambda}=\frac{n'\gamma'-n\gamma}{n'\alpha'-n\alpha},$$

получаем для $W_н$ искомое выражение через β, β', γ и γ':

$$-W_н=-\frac{r_1}{2}\frac{(n'\beta'-n\beta)^2}{(n'\alpha'-n\alpha)}-\frac{r_2}{2}\frac{(n'\gamma'-n\gamma)^2}{(n'\alpha'-n\alpha)}+\frac{1}{8}\frac{r_1^4}{r_3^3}\frac{(n'\beta'-n\beta)^4}{(n'\alpha'-n\alpha)^3}+$$

$$+\frac{1}{8}\frac{r_2^4}{r_5^3}\frac{(n'\gamma'-n\gamma)^4}{(n'\alpha'-n\alpha)^3}+\frac{1}{4}\frac{r_1^2r_2^2}{r_4^3}\frac{(n'\beta'-n\beta)^2(n'\gamma'-n\gamma)^2}{(n'\alpha'-n\alpha)^3}. \qquad (IX.116)$$

Для вычисления $\delta g'$ и $\delta G'$ надо получить производные от $W_н$ по β, β', γ и γ', причем можно для сокращения записи заменить отношения $\frac{n'\beta'-n\beta}{n'\alpha'-n\alpha}$ и $\frac{n'\gamma'-n\gamma}{n'\alpha'-n\alpha}$ на $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$ соответственно. Частные производные от $W_н$ по β, β', γ' и γ равны

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial W_н}{\partial\beta} &= \frac{nr_1\mu}{2\lambda^2\alpha}(2\alpha\lambda+\mu\beta)-\frac{1}{8}\frac{r_1^4}{r_3^3}n\frac{\mu^3}{\alpha\lambda^4}(4\alpha\lambda+3\mu\beta)-\\ &\quad -\frac{1}{4}n\frac{r_1^2r_2^2}{r_4^3}\frac{\nu^2\mu}{\lambda^3\alpha}(2\alpha\lambda+3\mu\beta);\\ -\frac{\partial W_н}{\partial\beta'} &= -\frac{n'r_1\mu}{2\lambda^2\alpha'}(2\alpha'\lambda+\mu\beta')+\frac{1}{8}\frac{r_1^4}{r_3^3}n'\frac{\mu^3}{\alpha'\lambda^4}(4\alpha'\lambda+3\mu\beta')-\\ &\quad -\frac{1}{4}n'\frac{r_1^2r_2^2}{r_4^3}\frac{\nu^2\mu}{\lambda^3\alpha'}(2\alpha'\lambda+3\mu\beta').\end{aligned}\right\}$$

(IX.117)

Аналогичные выражения можно получить для $\frac{\partial W_H}{\partial \gamma}$ и $\frac{\partial W_H}{\partial \gamma'}$, заменив r_1 на r_2, r_3 на r_5, β на γ и β' на γ'. Далее с помощью формулы (IX.111) вычисляем $\delta g'$ и $\delta G'$, полагая $\tau = \frac{n'}{n}$. Помня, что произведения $\mu\beta$, $\mu\beta'$ второго порядка малости по сравнению с $\alpha\lambda$, $\alpha'\lambda$ и что λ, α и α' равны единице с точностью до величин второго порядка малости, получаем весьма простые выражения

$$\left.\begin{aligned} \delta g' &= -\frac{1}{2}\frac{r_1\mu^2}{2\lambda^2}\left(\frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\frac{y^2}{r_1}(\beta' - \beta); \\ \delta G' &= -\frac{1}{2}\frac{r_2\nu^2}{2\lambda^2}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \frac{\gamma}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\frac{z^2}{r_2}(\gamma' - \gamma), \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX.118)}$$

верные с необходимой для аберраций третьего порядка точностью. Любопытно, что эти аберрации не зависят от радиусов r_3, r_4 и r_5, т. е. от членов четвертого порядка в разложении x; другими словами, форма поверхности вне параксиальной области не оказывает влияния на аберрации третьего порядка поверхности двоякой кривизны в том случае, когда объект и изображение находятся в одной плоскости.

21. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧЛЕНА $W_\tau - W_H$

Как было показано в гл. II при выводе выражения для коэффициентов аберраций третьего порядка симметричных систем, переход от эйконала W для случая $\frac{l'}{l} = 1$ к общему случаю любого $\tau = \frac{n'l'}{nl}$ выполняется по формуле

$$W = W_H + \frac{f}{n}(n\tau - n')\left(n'\alpha' - \frac{n\alpha}{\tau}\right).$$

Но так как $\frac{f}{n}(n\tau - n') = s'$, то

$$W = W_H + s'n'\alpha' - sn\alpha, \quad \text{(IX.119)}$$

что сразу вытекает из построения W.

Поперечную аберрацию можно написать в виде

$$\delta g' = \delta g'_{\tau=1} + s'\delta\beta', \quad \text{(IX.120)}$$

где $\delta\beta'$ — угловая аберрация рассматриваемого луча. Она может быть получена как предел отношения $\frac{\delta g'}{s'}$ при $s' \to \infty$. Этот предел можно найти следующим образом. Примем $W = W_H + W - W_H$. Тогда

$$-n'\delta g' = \frac{\partial W}{\partial \beta'} + \tau\frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{\partial W_H}{\partial \beta'} + \frac{\partial(W - W_H)}{\partial \beta'} + \\ + \tau\left[\frac{\partial W_H}{\partial \beta} + \frac{\partial(W - W_H)}{\partial \beta}\right].$$

Поскольку $\frac{\partial W_H}{\partial \beta'}$ конечно при $\tau \to \infty$, можно писать

$$-n'\delta g' = \frac{\partial (W - W_H)}{\partial \beta'} + \tau \frac{\partial (W - W_H)}{\partial \beta} + \tau \frac{\partial W_H}{\partial \beta}.$$

Но $\tau = \frac{s'}{s}$. Поэтому

$$-n' \frac{\delta g'}{s'} = \frac{1}{s'} \frac{\partial (W - W_H)}{\partial \beta'} + \frac{1}{s} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial (W - W_H)}{\partial \beta} + \frac{\partial (W_H)}{\partial \beta} \right]. \qquad \text{(IX.121)}$$

Дифференцируя выражение (IX.119), получаем

$$\frac{\partial (W - W_H)}{\partial \beta'} = s'n' \frac{d\alpha'}{d\beta'} = -s'n' \frac{\beta'}{\alpha'};$$

$$\frac{\partial (W - W_H)}{\partial \beta} = sn \frac{\beta}{\alpha}.$$

Подставляя в формулу (IX.121) полученные выражения для частных производных от $(W - W_H)$ по β и β' и полученное ранее выражение для $\frac{\partial W_H}{\partial \beta}$, помня, что в рассматриваемом случае, когда τ и s' бесконечны, $\frac{1}{s} = -\frac{n' - n}{nr_1}$, и отбрасывая члены пятого порядка малости относительно величин β, β', μ, ν, λ, γ, γ', получаем для отношения $-n' \frac{\delta g'}{s'} = -n'\delta\beta'$ выражение

$$-n' \frac{\delta g'}{s'} = -n' \frac{\beta'}{\alpha'} + n \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{s} \left[\frac{nr_1\mu}{\lambda} \left(1 + \frac{\mu\beta}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{r_1^4}{r_3^3} n\mu^3 - \frac{1}{2} n \frac{r_1^2 r_2^2}{r_4^3} \nu^2\mu \right].$$

Ввиду того, что $\alpha = (1 - \beta^2 - \gamma^2)^{1/2}$ и $\alpha' = (1 - \beta'^2 - \gamma'^2)^{1/2}$, то, обозначая $\beta^2 + \gamma^2 = m$, $\beta'^2 + \gamma'^2 = m'$, получаем

$$-n' \frac{\delta g'}{s'} = -n'\beta' + n\beta - \frac{1}{2}(n'\beta'm' - n\beta m) -$$

$$- \frac{1}{s} \left(\frac{nr_1\mu}{\lambda} + \frac{nr_1\mu^2\beta}{2} + \frac{ny_1^3 r_1}{r_3^3} + \frac{1}{2} n \frac{z^2 y r_1}{r_4^3} \right).$$

Заменяя $-\frac{1}{s} = \frac{n' - n}{nr_1}$; $-\mu r_1 = y$; $n'\beta' - n\beta = (\alpha' n' - \alpha n) \frac{\mu}{\lambda}$,

напишем

$$-n'\frac{\delta g'}{s'}=\frac{\mu}{\lambda}[n'(1-\alpha')-n(1-\alpha)]-\frac{1}{2}(n'\beta'm'-n\beta m)+$$

$$+\frac{n'-n}{2}\left(\frac{y^2}{r_1^2}\beta+\frac{y^3}{r_3^3}+\frac{z^2y}{r_4^3}\right);$$

$$-2n'\frac{\delta g'}{s'}=\frac{\mu}{\lambda}[n'(\beta'^2+\gamma'^2)-n(\beta^2+\gamma^2)]-(n'\beta'm'-n\beta m)+$$

$$+(n'-n)\left(\frac{y^2}{r_1^2}\beta+\frac{y^3}{r_3^3}+\frac{z^2y}{r_4^3}\right)=$$

$$=n'\left(\frac{\mu}{\lambda}-\beta'\right)[\beta'^2+\gamma'^2-(\beta^2+\gamma^2)]+$$

$$+(n'-n)\left(\frac{y^2}{r_1^2}\beta+\frac{y^3}{r_3^3}+\frac{z^2y}{r_4^3}\right).$$

Разность $\frac{\mu}{\lambda}-\beta'$ с точностью до величин третьего порядка можно заменить углом преломления луча i, тогда $ni=n'i'$. Для сокращения записи обозначим произведение $n'\left(\frac{\mu}{\lambda}-\beta'\right)=n\left(\frac{\mu}{\lambda}-\beta\right)$ через (ni), помня, что i имеет значение и знак, соответствующий стандарту геометрической оптики.

Окончательно

$$-2n'\frac{\delta g'}{s'}=(ni)[\beta'^2+\gamma'^2-(\beta^2+\gamma^2)]+$$

$$+(n'-n)\left(\frac{y^2}{r_1^2}\beta+\frac{y^3}{r_3^3}+\frac{z^2y}{r_4^3}\right), \qquad \text{(IX.122)}$$

после чего можно написать для $\delta g'$ при любом τ или s

$$\delta g'=\delta g'_{s=0}+s'\delta\beta'=-\frac{1}{2}\frac{y^2}{r_1}(\beta'-\beta)-$$

$$-\frac{s'}{2n'}\left\{(ni)[\beta'^2+\gamma'^2-(\beta^2+\gamma^2)]+(n'-n)\left(\frac{y^2}{r_1^2}\beta+\frac{y^3}{r_3^3}+\frac{z^2y}{r_4^3}\right)\right\}. \qquad \text{(IX.123)}$$

Можно соединить два члена:

$$\frac{y^2}{r_1}(\beta'-\beta)+\frac{s'}{n'}(n'-n)\frac{y^2}{r_1^2}\beta=\frac{y^2}{r_1}\left[\beta'-\beta+\frac{s'(n'-n)}{n'}\frac{\beta}{r_1}\right]=$$

$$=\frac{y^2}{r_1}\left(\beta'-\beta\frac{s'}{s}\frac{n}{n'}\right)=\frac{y^2}{r_1}\frac{s'}{n'}\left(\frac{n'\beta'}{s'}-\frac{n\beta}{s}\right).$$

Образуем аберрационный инвариант Лагранжа—Гельмгольца $n'\delta g'u'$, понимая под u' отношение $\frac{h}{s'}$, где h — высота пересече-

ния первого параксиального луча с преломляющей поверхностью; умножив его на —2, получим

$$-2n'\delta g'u' = h\left\{(n'-n)\left(\frac{y}{r_3}\right)^3 + (n'-n)\frac{yz^2}{r_4^3} + \right.$$

$$\left. + (ni)\left[\beta'^2 + \gamma'^2 - (\beta^2+\gamma^2)\right]\right\} + \frac{y^2}{r_1}(n'\beta'u' - n\beta u). \quad \text{(IX.124)}$$

Напомним, что $(ni) = n(\mu - \beta)$.

Для удобства дальнейших выкладок введем новые обозначения, а именно: $y = p$; $z = q$. Смысл величины y, встречающейся на последующих страницах, объясняется на стр. 588.

Для сокращения выкладок ограничимся перекрестными членами, так как остальные коэффициенты, содержащие величины, относящиеся лишь к одному из главных сечений, совпадают с теми, которые выведены для осесимметричных систем и приведены в гл. II; для удобства эти формулы будут повторены ниже.

Заметим, что добавочный член в формуле (IX.123) $s'\delta\beta'$, равный $-\frac{1}{2}\frac{y^2}{r_1}(\beta'-\beta)$, не относится к перекрестным и при вычислении перекрестных аберраций его нужно отбросить и исходить поэтому из формулы (IX.122). Записываем эту формулу для двух проекций $\delta g'$ и $\delta G'$, помня, что вторая получается из первой путем замены p на q, β на γ и обратно, s'_y на s'_z, $(ni)_y$ на ni_z. Получаем

$$\left.\begin{aligned} 2n'\delta g' &= -s'_y\left[\frac{n'-n}{r_4^3}pq^2 + (ni)_y(\gamma'^2-\gamma^2)\right]; \\ 2n'\delta G' &= -s'_z\left[\frac{n'-n}{r_4^3}p^2q + (ni)_z(\beta'^2-\beta^2)\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX.125)}$$

Чтобы сложить аберрации третьего порядка по всем поверхностям анаморфота, нужно умножить обе части уравнений (IX.125) на u' — множитель, пропорциональный апертурному углу ω'. В левой части появляются тогда инварианты Лагранжа—Гельмгольца. В правой части произведения s' на соответствующие u' дают высоты h пересечения апертурного луча с поверхностью, выраженные в соответствующих единицах:

$$\left.\begin{aligned} 2n'\delta g'\omega'_y &= -h_y\left[\frac{n'-n}{r_4^3}pq^2 + (ni)_y(\gamma'^2-\gamma^2)\right]; \\ 2n'\delta G'\omega'_z &= -h_z\left[\frac{n'-n}{r_4^3}p^2q + (ni)_z(\beta'^2-\beta^2)\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX.126)}$$

Эти формулы можно считать окончательными, и они могут быть приняты для расчета дополнительных (перекрестных) аберраций для любого луча, заданного своими входными координатами l, L,

s_1 и x_1, из которых можно получить углы β_1, γ_1 и отрезки p, q, а далее по формулам гауссовой оптики вычислить все последующие значения $h_к$, $\beta_к$, $\gamma_к$, $(ni)_y$, $(ni)_z$, $p_к$ и $q_к$.

Такой прием отличается от тригонометрического расчета луча только тем, что осуществляется намного проще и быстрее, но дает лишь приближенное значение аберраций. Для исправления системы необходимо представить аберрации в виде произведений некоторых коэффициентов $S_I S_{II}, \ldots, S_к$, умноженных на произведения различных комбинаций апертурных и полевых углов ω, w, Ω и W, имеющих следующие значения:

Рис. IX.22

$$\left.\begin{aligned} \omega &= -\frac{m}{x-s}; \quad \Omega = -\frac{M}{x-s}; \\ w &= \frac{l}{x-s}; \quad W = \frac{L}{x-s}. \end{aligned}\right\} \text{(IX.127)}$$

Знаки углов здесь приняты согласно ГОСТу 7427—55 и правилам, изложенным в гл.II.Напомним, что правила знаков для углов ω и w обратны тем, которые приняты в геометрии.

Найдем соотношения между величинами p, q, ω, Ω, w, W, β, γ, β', γ' и т. д. Из рис. IX.22, помня правила знаков, получаем $\beta = \frac{m-l}{x-s} = \frac{m}{x-s} - \frac{l}{x-s} = -\omega - w$.

Соотношение между p и высотами пересечения параксиальных апертурного и полевого лучей h и y легко получить из того же рисунка:

$$p = l - s\beta = l - s\frac{m-l}{x-s} = \frac{lx - sm}{x-s} = xw + s\omega = y + h.$$

Аналогичные формулы можно написать для второго сечения:

$$q = Y + H \text{ и } \gamma = -\Omega - W.$$

Остается еще выразить $(ni)_y$ и $(ni)_z$ как функции от ω, Ω, w, W. Заметим, что $i = \frac{\mu}{\lambda} - \beta$ и что $i' - i = \beta - \beta'$, откуда $(ni)_y = \frac{\beta - \beta'}{\nu' - \nu} = -\frac{\beta' - \beta}{\nu' - \nu} = \frac{\omega' - \omega}{\nu' - \nu} + \frac{w' - w}{\nu' - \nu}$ и аналогично $(ni)_z = \frac{\Omega' - \Omega}{\nu' - \nu} + \frac{W' - W}{\nu' - \nu}$.

Подставляя полученные выражения в формулу (IX.126), соединяем члены, содержащие одинаковые комбинации степеней при величинах ω и w. Помня, что h пропорционально ω, H пропорционально Ω, y и Y пропорциональны соотвественно w и W,

складываем по поверхностям и, обозначая для краткости $\frac{n'-n}{r_4^3}$ через m, получаем

$$\left.\begin{aligned}
2n'\delta g'\alpha'_p = &\sum h\left[mhH^2+\frac{\Delta\omega}{\Delta\nu}(\Omega'^2-\Omega^2)\right]+\\
&+2\sum h\left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\nu}(\Omega'W'-\Omega W)+mhHY\right]+\\
&+\sum h\left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\nu}(W'^2-W^2)+mhY^2\right]+\\
&+\sum h\left[\frac{\Delta w}{\Delta\nu}(\Omega'^2-\Omega^2)+myH^2\right]+\\
&+2\sum h\left[\frac{\Delta w}{\Delta\nu}(\Omega'W'-\Omega W)+myYH\right]+\\
&+\sum h\left[\frac{\Delta w}{\Delta\nu}(W'^2-W^2)+myY^2\right],
\end{aligned}\right\}\quad(\text{IX.128})$$

где ω и w — углы лучей, проходящих через точку-объект на оси и центр зрачка на оси в первом сечении; Ω и W — то же во втором сечении.

Согласно приему, примененному в гл. II при выводе выражений для коэффициентов аберраций третьего порядка, вводим под знаки $\sum$ не реальные значения углов ω, Ω, w и W, а значения этих углов в параксиальной области, полученные при расчетах апертурного и полевого параксиальных лучей в обоих главных сечениях XOY и XOZ.

Как известно, этот прием законен в пределах зейделевой области. Далее следует перейти к системе обозначений ГОСТа 7427—55, согласно которому углы первого вспомогательного (апертурного) луча с осью обозначаются через α, а второго — через β. Напомним, что при выводе формул для аберраций третьего порядка анаморфота буквы α и β были использованы для обозначения направляющих косинусов падающего на поверхность луча. Теперь эти же буквы приобретают свое обычное значение. Поскольку мы теперь имеем дело с двумя главными сечениями, следует договориться об обозначении углов обоих вспомогательных лучей во втором сечении. По аналогии с величинами ω и Ω, w и W, условимся обозначать эти углы через буквы A и B греческого алфавита.

Как в гл. II при рассмотрении аберраций третьего порядка, условимся нормировать углы $\Omega'_p = \omega'_p = 1$, $w_1 = W_1 = 1$ (где p — номер последней поверхности). Тогда выражения для коэффициентов перекрестных аберраций принимают вид

$$
\left.
\begin{aligned}
2n'\delta g'\alpha' &= \omega_p'\Omega_p'^2 \sum h \left[mhH^2 + \frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}(A'^2 - A^2)\right] + \\
&+ 2\omega'\Omega' W \sum h \left[mhHY + \frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}(A'B' - AB)\right] + \\
&+ \omega_p' W^2 \sum h \left[mhY^2 + \frac{\Delta\alpha}{\Delta\nu}(B'^2 - B^2)\right] + \\
&+ w\Omega'^2 \sum h \left[myH^2 + \frac{\Delta\beta}{\Delta\nu}(A'^2 - A^2)\right] + \\
&+ 2w\Omega' W \sum h \left[myHY + \frac{\Delta\beta}{\Delta\nu}(A'B' - AB)\right] + \\
&+ wW^2 \sum h \left[myY^2 + \frac{\Delta\beta}{\Delta\nu}(B'^2 - B^2)\right]; \\
2n'\delta G'A' &= \Omega_p'\omega_p'^2 \sum H \left[mHh^2 \frac{\Delta A}{\Delta\nu}(\alpha'^2 - \alpha^2)\right] + \\
&+ 2\omega'\Omega' w \sum H \left[mhHy + \frac{\Delta A}{\Delta\nu}(\alpha'\beta' - \alpha\beta)\right] + \\
&+ \Omega_p' w^2 \sum H \left[mHy^2 + \frac{\Delta A}{\Delta\nu}(\beta'^2 - \beta^2)\right] + \\
&+ W\omega'^2 \sum H \left[mYh^2 + \frac{\Delta B}{\Delta\nu}(\alpha'^2 - \alpha^2)\right] + \\
&+ 2wW\omega' \sum H \left[mYhy + \frac{\Delta B}{\Delta\nu}(\alpha'\beta' - \alpha\beta)\right] + \\
&+ Ww^2 \sum H \left[mYy^2 + \frac{\Delta B}{\Delta\nu}(\beta'^2 - \beta^2)\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (IX.129)
$$

Рассмотренный выше самый общий случай оптической схемы анаморфотов в настоящее время представляет малый практический интерес, так как изготовление поверхностей, удовлетворяющих уравнению (IX.113) с достаточной для обычных целей точностью, недостижимо для оптической промышленности.

Прежде всего член, содержащий произведение y^2z^2, приводит к весьма необычному профилю, о характере которого можно судить, проводя ряд сечений, перпендикулярных оси OX. Рассмотрим уравнение упрощенного вида

$$x = \frac{x^2 + z^2}{2r} + ay^2z^2.$$

На рис. IX.23 показаны кривые сечения поверхности рядом плоскостей, соответствующих увеличивающимися значениям x, что дает представление о форме поверхности. Коэффициент a вызывает появление все увеличивающихся углублений. Естественно, что осуществить такую форму поверхности имеющимся в настоящее время средствами не представляется возможным. С другой стороны, наличие этого члена сильно увеличивает коррекционные возможности системы, поскольку он влияет на все аберрации

третьего и высших порядков. По этой причине в дальнейшем коэффициент r_4 будет принят равным бесконечности.

Как было указано выше, в настоящее время оптическая промышленность изготовляет с достаточной точностью лишь цилиндрические поверхности. Остановимся подробнее на этом частном случае, причем для увеличения числа корректирующих параметров предположим, что направляющие цилиндрических поверхностей могут отличаться от окружностей.

Рис. IX 23

В формулах (IX.129) происходит ряд упрощений. Предположим, что в компоненте из j (рис. IX.24) бесконечно тонких цилиндрических линз все образующие параллельны оси Z, а следовательно, направляющие симметричны относительно плоскости XOZ. При этом уравнение поверхностей имеет вид $x = \frac{y^2}{2r_1} + \frac{y^4}{8r_3^3}$, так как $r_2 = r_4 = r_5$ бесконечно велики. Направляющий косинус $\nu = 0$. Формулы (IX.106) принимают вид (в прежних обозначениях)

$$n'\beta' - n\beta = \frac{\mu}{\lambda}(n'\alpha' - n\alpha);$$

$$n'\gamma' - n\gamma = 0.$$

Рис. IX.24

Посмотрим, какой вид принимает формула (IX.126) при этих соотношениях. Ввиду того, что $r_4 = \infty$, первый член в фигурных скобках исчезает. Во втором члене вследствие второго из приведенных уравнений $\gamma' = \frac{n}{n'}\gamma$, следовательно, $\gamma'^2 - \gamma^2 = \gamma^2\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 1\right]$. Если компонент можно считать состоящим из бесконечно тонких линз с общими высотами p и q, а также h_y и h_z, то для каждой линзы будем иметь

$$2n'\delta g'\omega_y' = -h_y\gamma^2\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\frac{1}{n} - 1} - \frac{\beta_3 - \beta_2}{1 - \frac{1}{n}}\right) =$$

$$= h_y\gamma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)p\varphi_y,$$

а так как γ в воздушных промежутках одна и та же величина, то получаем для всего компонента

$$2n'\delta g'\omega'_y = h_y p\gamma^2 \sum\left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_y. \qquad \text{(IX.130)}$$

Для второй составляющей $\delta G'$, замечая, что ni одно и то же на всех поверхностях и может быть вынесено за знак $\sum$, получаем

$$2n'\delta G'\omega'_z = -h_z\,(i)_z\,(\beta_l^2 - \beta_k^2),$$

где k и l — индексы сред, отделяющих рассматриваемый компонент от соседних. Помня, что $(i_z) = \frac{\mu}{\lambda} - \gamma$ [см. вывод формул (IX.122)], так как $\mu = 0$, получаем окончательно

$$2n'\delta G'\omega'_z = h_z\gamma\,(\beta_l^2 - \beta_k^2). \qquad \text{(IX.131)}$$

Рис. IX.25

Из формул (IX.130) и (IX.131) вытекает практическая невозможность устранения перекрестных членов в компонентах, состоящих из цилиндрических линз. В первой из этих формул можно воздействовать на правую часть уравнения только выбором стекол, да и то в ничтожной степени, так как множитель $1 + \frac{1}{n}$ меняется в очень малых пределах (1,59—1,67); во второй формуле отпадает всякая возможность приравнять нулю составляющую $\delta G'$, так как величины γ и β, зависящие только от положения и оптических сил компонентов анаморфота, заранее определены еще в стадии габаритных расчетов и практически не могут быть изменены.

Если образующие цилиндрических линз компонента параллельны оси Y (рис. IX.25), то, повторяя предыдущие рассуждения применительно к новому направлению образующих, можно получить формулы для $\delta g'$ и $\delta G'$

$$\left.\begin{aligned} 2n'\delta g'\omega'_y &= h_y(\beta)_y\,(\gamma_l^2 - \gamma_k^2);\\ 2n'\delta G'\omega'_z &= h_z\beta^2 g\sum\left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_z. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.131)}$$

В общем случае, когда встречается ряд компонентов, у которых образующие параллельны то оси Y, то оси Z, следует складывать правые части уравнений (IX.130), (IX.131) и (IX.132) с учетом направлений образующих.

Для иллюстрации использования полученных формул рассмотрим два примера.

1. Анаморфот из двух бесконечно тонких компонентов для объекта на конечном расстоянии, создающий в одном сечении двух-

кратное увеличение, в другом — половинное с оборачиванием изображения (рис. IX.26).

Оптические силы компонентов в сечениях:

	I	II
xy	0,015	0
xz	0	0,015

Расстояние $s_1 = -100$ *мм*. Воздушный промежуток $d = 100$ *мм*. Расстояние $s_2' = 100$ *мм*.

Рассмотрим три точки-объекта: 1) координаты точки-объекта $l = 20$, $L = 0$ входной зрачок совпадает с первой линзой; лучи, излучаемые объектом, пересекают на зрачке окружность радиусом $\rho = 10$ *мм*; 2) $l = 14{,}14$, $L = 14{,}14$; $\rho = 10$ *мм*; 3) $l = 0$, $L = 20$; $\rho = 10$ *мм*. На каждом из графиков рис. IX.27 приведены кривые пересечения указанной совокупности лучей с плоскостью изображений. Вычисления производились по формулам

$$2\delta g' = \frac{1}{100^2}(0{,}75lL^2 - 3l\rho^2\sin^2\varphi + 3{,}5\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi + 5{,}375L^2\rho\cos\varphi - 10L\rho^2\cos\varphi\sin\varphi);$$

Рис. IX.26

$$2\delta G' = \frac{1}{100^2}(-2{,}5l^2L + 5l^2\rho\sin\varphi + 6{,}5l\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + 0{,}875\rho^3\sin\varphi\cos^2\varphi - 0{,}25L\rho^2\cos^2\varphi - 4Ll\rho\cos\varphi).$$

2. Телескопическая система из двух бесконечно тонких компонентов; увеличение 2 в сечении xy, 1 — в сечении xz. Оптические силы 0,01 и —0,01 в сечении xy, 0 и 0 в сечении zx. Расстояние между компонентами равно 50 *мм*. Система предполагается исправленной в отношении всех аберраций третьего порядка в сечении xy.

Рассмотрим три пучка лучей от бесконечно удаленного предмета, опирающихся на окружность с радиусом $\rho = 10$ *мм* и с центром в точке пересечения первого компонента с осью. Первый пучок исходит из точки-объекта с угловыми координатами $w_1 = -0{,}1$, $W_1 = 0$; второй — из точки с координатами $w_1 = 0$; $W_1 = -0{,}1$; третий — из точки с координатами $w_1 = -0{,}1$; $W_1 = -0{,}1$. Вычисления производились по формулам

$$2n'[\delta g'] = -\Gamma\gamma^2\varphi_1 d(\beta_1 - p_1\varphi_1)(1 + \nu_2);$$

$$2n'[\delta G'] = -\gamma\beta_1^2(\Gamma^2 - 1).$$

Рис. IX.27

Рис. IX.28

На рис. IX.28 изображены графики аберраций, выраженных в угловой мере. Для первого пучка с координатами $w_1 = -0{,}1$, $W_1 = 0$ аберрации равны нулю, поэтому график не дается.

В обоих приведенных примерах аберрации велики. Они могут быть уменьшены лишь при условии увеличения фокусных расстояний компонентов, что приводит к уменьшению относительных отверстий, а в первом случае — и к уменьшению полевых углов.

Как вытекает из формул для анаморфотов, состоящих из цилиндрических линз, коррекционные возможности этих систем для перекрестных аберраций весьма ограничены.

Значительно более перспективны в отношении этих аберраций системы, в которые введены торические поверхности вместо цилиндрических, так как появляются новые коррекционные параметры, влияющие на эти аберрации. То же самое относится к введению поверхностей с некруглой направляющей; к сожалению, такие поверхности очень трудно изготовить и нельзя рассчитывать на возможность их использования в ближайшие годы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперн Д. Ю. Труды ГОИ. Т. 26. Вып. 152, 1958.
2. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 2-е, Л., АН СССР, 1933.
3. Schwarzchild K. Göttinger Nachr, N. F. 4, N 43, 1905.
4. Chrétien H. Revue d'Optique. T. 1, 1922.
5. Максутов Д. Д. Труды ГОИ. Т. 8, 1932.
6. Herschel T. F. On the theory of light. London Encycl. Metrop, Poggendorff, 1928.
7. Linnemann M. Über nicht sphärische Objective. Diss. Göttinger, 1905.
8. Curie. Mém. de l'off. du genie, 1876, 10.
9. Волосов Д. С. и Печатникова Ш. Я. Инф.-техн. бюллетень ЦКБ Министерства культуры СССР, Л. 1957, № 4 (10).
10. Burfoot D. C. Proc. Phys. Soc., 67, 1954.
11. Wynne C. G. Proc. Phys. Soc., 67, 1954.
12. Köhler H. Optik. B. 13, H. 4, 1956.

ГЛАВА X

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

Расчет оптической системы заканчивается обычно составлением сводки результатов расчета хода лучей через эту систему. Первоначальная, предварительная оценка качества изображения, даваемого рассматриваемой системой, вытекает из величины кружка рассеяния, образуемого совокупностью лучей, излучаемых несколькими точками-объектами на различных участках поля зрения. Размеры этих кружков дают первое представление о качестве изображения, так как очевидно, что разрешающая способность системы будет порядка $\frac{1}{\sigma}$, где σ — средний размер диаметров кружка. Однако такая оценка может быть признана достаточной лишь для малоответственных систем типа конденсоров, осветителей, разных «собирателей» световой энергии, но она совершенно неудовлетворительна для ответственных оптических систем, предназначенных для получения максимально полной информации о наблюдаемых предметах.

В последнем случае желательно дать характеристику качества изображения, которая, во-первых, позволила бы легко предсказать свойства изображений объектов сравнительно простой структуры (двойные точки, периодические структуры типа мир Фуко или синусоидального распределения яркости и т. д.); во-вторых давала бы возможность предсказать качество изображения не только самой оптической системы, но еще и в комбинации с приемником — глазом или любым другим светочувствительным слоем и, в-третьих, имела бы простой вид, характеризуемый малым числом величин.

Еще со времен Релея и Аббе наиболее распространенным критерием качества изображения считалась разрешающая способность (или сила) оптической системы; она выражалась числом линий на миллиметр, еще разрешаемых глазом, в изображении периодической структуры типа миры Фуко. Однако определение этой величины на основании расчета хода лучей представляет серьезные затруднения, вызываемые недостаточностью сведений о свойствах приемника, и не всегда приводит к однозначным результатам; при этом оно требует громоздких вычислений, особенно в тех случаях, когда приходится принимать во внимание

волновую природу света. Кроме того, разрешающая сила сильно зависит от контраста миры.

Во второй половине XX столетия понятие разрешающей силы оптической системы было уточнено; были полностью отделены друг от друга величины разрешающей силы объектива и приемника. По аналогии с системами связи, передающими сигналы, было введено понятие передающей функции, или частотно-контрастной характеристики, описывающей свойства оптической системы, рассматриваемой как передатчик пространственных частот. Как показал Дюффие, всякая оптическая система, даже идеально исправленная, может передавать пространственные частоты не выше какой-то определенной, предельной. Всякая частота меньше предельной передается с уменьшением контраста. Если в качестве тест-объекта брать линейную структуру с синусоидальным распределением яркости в направлении перпендикулярном линиям и условиться понимать контраст как отношение $K = \frac{B_{max} - B_{min}}{B_{max} + B_{min}}$, где B_{max} и B_{min} — максимальное и минимальное значение яркости тест-объекта, то можно показать, что изображение этой структуры, даваемое оптической системой, обладает также синусоидальным распределением, но с уменьшенной величиной контраста K_1.

Отношение $\frac{K_1}{K}$, зависящее от частоты и от угла поворота тест-объекта по отношению к меридиональной плоскости оптической системы, называется передающей функцией, или функцией контраста, или частотно-контрастной характеристикой (ЧКХ) оптической системы.

Все оптические системы по признаку качества изображения могут быть разбиты на две группы. В первой группе качество очень высокое, волновые аберрации не превышают нескольких волн. В этом случае дифракционные явления в высокой степени влияют на распределение энергии в изображении и при расчетах необходимо исходить из принципа Гюйгенса—Френеля, изложение которого будет приведено дальше. К этой группе относятся визуальные приборы: телескопические системы, микроскопы при непрозрачных объектах, фотографические объективы высокого класса исправления и т. д.

Вторая группа приборов отличается худшим качеством изображения; волновые аберрации превосходят 3—5 волн. Как показала практика, распределение энергии в изображении светящейся площадки (не точки!), величина которой превышает несколько наименьших разрешаемых расстояний, практически не зависит от того, учитываются дифракционные явления или нет; другими словами, можно ограничиться тем приближением, которое дает чисто геометрическая оптика. К этой группе приборов относится большинство фотографических и проекционных объективов,

а также приборов, приемниками которых служат светочувствительные слои (за исключением сетчатки).

Прежде чем перейти к изложению методов расчета ЧКХ, необходимо напомнить основы дифракционной теории изображения и расчета распределения энергии в картине изображения точки, даваемой оптической системой.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ ЛУЧ

При решении большого количества задач по распределению световой энергии можно опираться на понятие луча и законы геометрической оптики. Согласно этому понятию, энергия переносится по некоторой траектории (прямой — в случае однородной среды, двоякой кривизны — в случае неоднородных сред), которая может рассматриваться как предел, к которому стремится световая трубка при уменьшении до нуля площадей прямых сечений ее. Очевидно, что понятие луча чисто условно, поскольку энергия, переносимая такой трубкой, равна нулю. Поэтому с помощью законов геометрической оптики можно достаточно точно решить задачи о расположении и размерах изображений любых предметов (не слишком малых), о приближенном распределении световой энергии при достаточно больших источниках, но нельзя рассчитать это же распределение, когда размеры источника становятся малыми или его структура очень тонка.

Рис. X.1

В противоположность понятию луча волновая теория света исходит из представления Гюйгенса, согласно которому из светящегося тела исходят волны, распространяющиеся по всем направлениям; Френель предположил, что отдельные элементы волновой поверхности интерферируют между собой и распределение энергии в каком-нибудь сечении пучка (а в наиболее важном случае — в плоскости изображения) является результатом этой интерференции. Это предположение, подсказанное гениальной интуицией, было многократно подтверждено опытом. В дальнейшем принцип Гюйгенса—Френеля с небольшими изменениями был получен Кирхгофом из общего волнового уравнения, вытекающего из уравнений Максвелла при некоторых упрощающих предположениях.

Пусть (рис. X.1) O — источник световых колебаний. Колебательное состояние E в некоторой точке M, находящейся на расстоянии r_0 от источника O, определяется формулой

$$E = \frac{a}{r_0} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_0}{\lambda} \right), \qquad (X.1)$$

где t — время, в течение которого свет прошел расстояние r_0 от точки O до M; $\frac{a}{r_0}$ — амплитуда колебания, причем a — коэффициент, зависящий только от свойств источника света; сила света источника в данном направлении пропорциональна квадрату этого коэффициента, т. е. a^2. Аргумент $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_0}{\lambda}\right)$ называется фазой колебания; τ — период колебания, λ — длина волны луча.

Геометрическое место точек, в которых аргумент $2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_0}{\lambda}\right)$ имеет одно и то же значение в момент t, называется поверхностью волны. Поверхность волны ортогональна световым лучам, испускаемым источником света; это свойство остается в силе и после любого числа преломлений и отражений, как это вытекает из теоремы Малюса. Переход от волновой теории света к «лучевой», т. е. к геометрической оптике, опирается на упомянутое соответствие между лучами и поверхностью волны. Для того чтобы совершить этот переход и вывести из теории распространения волн основные законы геометрической оптики (прямолинейность распространения света, законы отражения и преломления света и т. д.), а также вычислить распределение энергии в пятне рассеяния даваемом реальной оптической системой вместо идеального, геометрического изображения, нужно применить следующие положения принципа Гюйгенса—Френеля.

Каждая точка светового поля, т. е. пространства, окружающего светящуюся точку O (рис. X.1), в свою очередь, становится источником световых колебаний. Колебание, возникающее в какой-нибудь точке P поля, получается как результат сложения всех колебаний, пришедших в эту точку от всех элементов поверхности S, построенной в световом поле.

Поверхность S может быть выбрана произвольно, но для упрощения удобнее всего взять в качестве поверхности S одну из волновых поверхностей; колебательное состояние всех точек этой поверхности в момент времени t определяется формулой (X.1). Колебательное состояние в точке P, определяемое величиной E_P, можно вычислить, если по известной теореме о сложении колебаний с одинаковыми периодами определить сумму всех возмущений, пришедших в точку P из всех точек поверхности S, т. е. вычислить следующий двойной интеграл:

$$E_P = \iint \frac{a}{r_0 r} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_0 + r}{\lambda}\right) dS, \qquad (X.2)$$

где r — расстояние от некоторой точки M поверхности волны до точки P; dS — площадь элемента поверхности в точке M; очевидно, что действие этого элемента в точке P пропорционально его площади. Интегрирование распространяется на всю ту часть поверхности волны, которая существует в действительности;

в частном случае оптической системы удобно взять ту поверхность волны, которая ограничена выходным зрачком системы, так как границы этой поверхности точно известны. Во многих случаях вместо волновой поверхности можно взять плоскость выходного зрачка системы.

Формула (X.2) дает возможность найти уравнение колебания в точке P. Если эту формулу применить в простейшем случае сферической волны, свободно распространяющейся из точки O, и сравнить результат с тем, который получается непосредственно из уравнения луча (X.1), то оказывается, что вычисление по формуле (X.2) дает неправильное значение фазы; это значение отличается от фазы в формуле (X.1) на $\frac{1}{2}\pi$. В большинстве случаев принципом Гюйгенса—Френеля пользуются для вычисления освещенности, которая пропорциональна квадрату амплитуды; поэтому неправильное значение фазы обычно не имеет значения.

Рис. X.2

Имея в виду вычисление только амплитуды сложного колебания, определяемого формулой (X.2), можно упростить вычисление интеграла в этой формуле, воспользовавшись следующими рассуждениями. Задача о сложении какого угодно числа колебаний с одинаковыми периодами, но с различными амплитудами и фазами легко решается графическим построением. Для простоты ограничимся примером сложения трех колебаний, уравнения которых имеют такой вид

$$e_\kappa = a_\kappa \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_\kappa}{\lambda}\right) = a_\kappa \cos \varphi_\kappa,$$

где $\kappa = 1, 2, 3$ и φ_κ — фаза колебания. Представим каждое колебание вектором, длина которого равна амплитуде a_κ, а направление образует с осью X на рис. X.2 угол φ_κ. Сложим полученные три вектора $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_2A_3}$, как это показано на рис. X.2. Их сумма $\overline{OA_3}$ дает амплитуду составного колебания, а угол φ между вектором $\overline{OA_3}$ и осью X определяет фазу этого колебания. Длина вектора $\overline{OA_3}$ не зависит от значения переменной части фазовых углов, т. е. не зависит от переменной t, а определяется разностями фаз. При изменении значения переменной t многоугольник $OA_1A_2A_3$ поворачивается в плоскости чертежа вокруг точки O, не изменяя своей формы. Уравнение составного колебания E представим в таком виде

$$E = \sum e_\kappa = \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sum a_\kappa \cos \frac{2\pi r_\kappa}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \sum a_\kappa \sin \frac{2\pi r_\kappa}{\lambda}.$$

Если на рис. X.2 углы φ_κ приняты равными $\frac{2\pi r_\kappa}{\lambda}$, то каждый член первой суммы представится на чертеже проекцией амплитуды на ось X (OP_1, P_1P_2 и P_2P_3), а каждый член второй суммы — проекцией амплитуды на ось Y (OQ_1, OQ_2 и OQ_3). Поэтому искомая амплитуда a составного колебания может быть представлена в таком виде

$$a = \sqrt{\left(\sum a_\kappa \cos\frac{2\pi r_\kappa}{\lambda}\right)^2 + \left(\sum a_\kappa \sin\frac{2\pi r_\kappa}{\lambda}\right)^2}.$$

Формула (X.2) отличается от только что приведенной тем, что число слагаемых колебаний в ней бесконечно велико; перепишем эту формулу следующим образом:

$$E_P = \iint \frac{a}{rr_0} \cos 2\pi \frac{r_0 + r}{\lambda} \cos\frac{2\pi t}{\tau}\, dS + \\ + \iint \frac{a}{rr_0} \sin 2\pi \frac{r_0 + r}{\lambda} \sin\frac{2\pi t}{\lambda}\, dS. \qquad (X.3)$$

Ясно, что энергия E составного колебания может быть вычислена по формуле

$$E = C^2 + S^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} C &= \iint \frac{a}{r_0 r} \cos 2\pi \frac{r_0 + r}{\lambda}\, dS; \\ S &= \iint \frac{a}{r_0 r} \sin 2\pi \frac{r_0 + r}{\lambda}\, dS. \end{aligned}\right\} \qquad (X.4)$$

Во многих случаях преобразования и промежуточные вычисления можно упростить, если вместо подынтегральной функции в выражении C формул (X.4) ввести комплексную функцию u такого вида

$$u = \frac{a}{rr_0} e^{-i\frac{2\pi(r_0+r)}{\lambda}} = \frac{a}{r_0 r}\cos\frac{2\pi(r_0+r)}{\lambda} - i\,\frac{a}{r_0 r}\sin\frac{2\pi(r_0+r)}{\lambda}. \qquad (X.5)$$

Очевидно, что вещественная часть интеграла

$$\iint \frac{a}{r_0 r} e^{-i\frac{2\pi(r_0+r)}{\lambda}}\, dS$$

равна слагаемому амплитуды C; если обозначить этот интеграл через E^*, то

$$E^* = C - Si = \iint u\, dS. \qquad (X.6)$$

Образуем сопряженную комплексную величину $\overline{E}^*$, определяемую формулой

$$\overline{E}^* = C + Si. \qquad (X.7)$$

Для получения $\bar{E}^*$ нужно в интеграле E^* заменить i на $-i$. Тогда искомую энергию E колебания удобно вычислить по формуле

$$E = E^*\bar{E}^* = (C - Si)(C + Si) = C^2 + S^2, \qquad (X.8)$$

так как эта формула дает квадрат амплитуды.

Таким образом, формула (X.2), выражающая в математической форме принцип Гюйгенса — Френеля, может быть заменена более удобной для вычислений формулой (X.6), в которой функция u, определяемая формулой (X.5), называется комплексной амплитудой элементарного колебания.

Рис. X.3

Кирхгоф более точно формулировал исходные положения принципа Гюйгенса и дал строгую формулу для вычисления величины u_p, характеризующей колебательное состояние в точке светового поля, в соответствии с решением дифференциального волнового уравнения. Не останавливаясь на выводе формулы Кирхгофа, приведем ее в упрощенном виде, дающем комплексную амплитуду искомого колебания.

Построим (рис. X.3) около данной точки P, для которой вычисляется комплексная амплитуда u_p, произвольную замкнутую поверхность S, не содержащую источников света. Положим, что во всех точках этой поверхности известны значения комплексной амплитуды u, а также значения производной этой функции по направлению нормали ν, внешней по отношению к поверхности S. Тогда по Кирхгофу

$$u_p = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}r}\right) - \frac{1}{r}e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]dS. \qquad (X.9)$$

В этой формуле dS — элемент поверхности S; r — расстояние от элемента dS до точки P.

Применение формулы (X.9) для вычисления амплитуды колебания встречает затруднения, так как в большинстве случаев нет возможности определить значение u и $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ во всех точках поверхности S. Часто можно устранить эти затруднения особым выбором поверхности S: часть этой поверхности совмещают с частью поверхности волны, на которой можно определить значения комплексной амплитуды и ее производной с достаточной точностью. На остальной части волновой поверхности предполагают величины u и $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ равными нулю.

Исследованиями Пуанкаре было доказано, что такое предположение неправомерно, так как оно противоречит уравнениям

Максвелла, но вытекающая из этого предположения ошибка, как показала практика, настолько мала, что можно ею пренебречь.

Изложенный прием дает возможность вычислять энергию колебания в различных точках пространства во многих случаях дифракционных явлений и явлений, происходящих в оптических приборах.

Применим указанный прием к простейшему случаю, уже рассмотренному при формулировке принципа Гюйгенса—Френеля, т. е. вычислим по формуле (X.9) комплексную амплитуду

Рис. X.4

в точке P (рис. X.4), освещаемой лучами, исходящими из точечного источника O; C — поверхность волны с радиусом r_0; M_1M_2 — диафрагма, ограничивающая распространение лучей из точки O; в частном случае такой диафрагмой может служить входной или выходной зрачок. Можно принять, что во всех точках части поверхности волны M_1M_2 комплексная амплитуда $\bar{u}$ имеет одно и то же значение, а именно

$$\bar{u} = \frac{a}{r_0} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r_0}. \qquad (X.10)$$

Примем этот участок поверхности за часть замкнутой поверхности S, которую продолжим в темную часть пространства за экран и замкнем на бесконечности; тогда для всех точек этой поверхности можно считать, что $\bar{u} = 0$ и $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} = 0$, кроме части M_1M_2.

Из формулы (X.10) находим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} = -\frac{ae^{-\frac{2\pi i r_0}{\lambda}}}{r_0}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{2\pi i}{\lambda}\right)\cos(\nu, r_0).$$

Так как

$$\cos(\nu, r_0) = -1,$$

то

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} = \frac{a}{r_0} e^{-\frac{2\pi i r_0}{\lambda}}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{2\pi i}{\lambda}\right). \qquad (X.11)$$

Вычисляем производную в первом члене подынтегральной функции формулы (X.9):

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}\right) = -\frac{e}{r}^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}\left(\frac{1}{r}+\frac{2\pi i}{\lambda}\right)\cos(\nu,\ r). \quad (X.12)$$

Подставляя найденные значения обеих производных в формулу (X.9), находим

$$u_p = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{ae^{-\frac{2\pi i\,(r_0+r)}{\lambda}}}{rr_0}\left[\cos(\nu,\ r)\left(\frac{1}{r}+\frac{2\pi i}{\lambda}\right)+\left(\frac{1}{r_0}+\frac{2\pi i}{\lambda}\right)\right]dS. \quad (X.13)$$

При достаточно больших значениях расстояний r и r_0 можно пренебречь их обратными значениями по сравнению с членом $\frac{2\pi i}{\lambda}$, в котором λ — малое число; при малом отверстии M_1M_2 и небольших удалениях точки P от оси отверстия величина $M_1M_2\cos(\nu,\ r)$ близка к единице; поэтому с достаточной точностью можно принять, что

$$u_p = \iint \frac{iae^{-\frac{2\pi i\,(r+r_0)}{\lambda}}}{r_0\lambda r}\,dS. \quad (X.14)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (X.6), являющейся математической формулировкой принципа Гюйгенса—Френеля, и принимая во внимание формулу (X.5), убеждаемся в том, что правые части формул (X.6) и (X.14) различаются только постоянным множителем $\frac{i}{\lambda}$. Множитель i перед комплексной амплитудой означает, что фаза колебаний, определяемых формулами (X.6) и (X.14), различается на $\frac{1}{2}\pi$, так как вещественная часть формулы (X.5) содержит множитель $\cos\frac{2\pi\,(r_0+r)}{\lambda}$, а вещественная часть формулы (X.14) — множитель $\sin\frac{2\pi\,(r_0+r)}{\lambda}$. Кроме того, из формулы (X.14) вытекает важная зависимость амплитуды колебания от длины волны: она обратно пропорциональна длине волны. Таким образом, формула (X.14), выражающая принцип Гюйгенса—Френеля более точно и более правильно, чем формула (X.6), является следствием формулы (X.9) Кирхгофа.

Преобразуем формулу (X.14) следующим образом:

$$u_p = \frac{aie^{-\frac{2\pi i r_0}{\lambda}}}{\lambda r_0}\iint \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}}{r}\,dS. \quad (X.15)$$

Множитель $\frac{aie^{-\frac{2\pi i r_0}{\lambda}}}{r_0}$ обозначим одной буквой a, меняя таким образом значение этой буквы; это не вызовет затруднений в дальнейшем, так как амплитуда при всех вычислениях будет измеряться в условных единицах. Тогда формула (X.14) примет следующий вид:

$$u_p = \frac{a}{\lambda} \int\int \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}}{r} dS = C + iS. \qquad (X.16)$$

Энергию колебания E в точке P согласно формуле (X.8) получим, умножив комплексную амплитуду u_p на сопряженную ей комплексную величину $\bar{u}_p$, т. е.

$$E = u_p \bar{u}_p = C^2 + S^2, \qquad (X.17)$$

где

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{a}{\lambda} \int_S \frac{1}{r} \cos \frac{2\pi r}{\lambda} dS; \\ S &= \frac{a}{\lambda} \int_S \frac{1}{r} \sin \frac{2\pi r}{\lambda} dS. \end{aligned}\right\} \qquad (X.17^*)$$

Выражения для C и S могут быть упрощены, когда апертура выходящего пучка не более $^1/_2$—$^1/_3$ и точка P расположена достаточно близко к оптической оси. В таком случае величина r, стоящая в знаменателе под знаком интеграла, мало меняется по своей величине и может считаться постоянной; можно ее ввести в коэффициент a и написать

$$C,\ S = \frac{a}{\lambda} \int_S \cos,\ \sin \frac{2\pi r}{\lambda} dS. \qquad (X.18)$$

Следует отметить, что добавление любой постоянной к величине r, входящей в аргумент sin и cos в формуле (X.18), не изменяет результата суммы $C^2 + S^2$, так как такое добавление изменяет лишь фазы обеих составляющих C и S на одну и ту же величину. Такое добавление равносильно повороту результирующего вектора OA_3 (рис. X.2) на некоторый угол: такой поворот не влияет на длину вектора. По этой причине формулу (X.18) можно написать в виде

$$C,\ S = \frac{a}{\lambda} \int_S \cos,\ \sin \frac{2\pi}{\lambda} \delta\, dS, \qquad (X.18^*)$$

где под δ можно понимать малую величину порядка нескольких длин волн, представляющую переменную часть от r. За постоянную часть r можно принять, например, расстояние от вершины поверхности волны до точки пересечения с плоскостью изображения главного луча пучка или до изображения точки-объекта параксиальными лучами. Этот вопрос будет подробнее рассмотрен в следующем параграфе.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ИЗОБРАЖЕНИИ ТОЧКИ

Пусть S (рис. X.5) — волновая поверхность пучка лучей после выхода из оптической системы; обозначим через O ее вершину и примем эту точку за начало координат xyz. Пусть C (R, O, O) — центр волновой поверхности, которая представляет собой сферу, если оптическая система идеальна. Вычислим распределение освещенности в некоторой плоскости, перпендикулярной оси, пересекающей ось в точке C_1, находящейся на расстоянии Δ от центра волны C. Пусть $(x'y'z')$ — координаты точки P, для которой вычисляется освещенность. Имеем $x' = R + \Delta$, причем Δ, y' и z' предполагаем весьма малыми. Плоскость, содержащую оси OX и OY, назовем меридиональной. Рассмотрим на поверхности S элемент M на расстоянии $AM = \rho$ от оси; обозначим через φ угол, образуемый AM с осью OY. Вычислим разность хода между отрезками $\overline{MP}$ и $\overline{OP}$:

Рис. X.5

$$\overline{MP} - \overline{OP} = \sqrt{(R + \Delta - a)^2 + (\rho \cos \varphi - y')^2 + (\rho \sin \varphi - z')^2} -$$

$$- \sqrt{(R + \Delta)^2 + y'^2 + z'^2},$$

где $a = OA$ — стрелка, определяемая из уравнения сферы

$$a(2R - a) = \rho^2.$$

Умножим разность радикалов на их сумму; это дает

$$\overline{MP} - \overline{OP} = \frac{-2(R + \Delta)a + \rho^2 - 2y'\rho \cos \varphi - 2z'\rho \sin \varphi + a^2}{\overline{MP} + \overline{OP}}.$$

Приняв во внимание предыдущее уравнение для ρ^2 и выразив сумму $\overline{MP} + \overline{OP}$ через $2R$, получим

$$\overline{MP} - \overline{OP} = \frac{-2a\Delta - 2y'\rho \cos \varphi - 2z'\rho \sin \varphi}{2R}.$$

Учитывая малость члена $2a\Delta$ по сравнению с остальными, можно положить $a = \frac{\rho^2}{2R}$, после чего имеем

$$\overline{MP} - \overline{OP} = -\Delta \frac{\rho^2}{2R^2} - \frac{\rho}{R}(y' \cos \varphi + z' \sin \varphi).$$

Следует отметить, что проекции вектора $\overline{AM}$ ($\rho \cos \varphi$ и $\rho \sin \varphi$) равны величинам $R\mu'$ и $R\nu'$, если λ', μ' и ν' — направляющие

косинусы нормали CM. Тогда разность хода

$$\overline{MP} - \overline{OP} = -\Delta \frac{\rho^2}{2R^2} - (y'\mu' + z'\nu').$$

Эта разность относится к идеальной — безаберрационной — оптической системе. Если система имеет аберрации, то к этой разности надо добавить волновую аберрацию, соответствующую лучу, проходящему через точку M; пусть эта аберрация будет $N(\rho, \varphi)$. Тогда полная разность хода

$$\delta = N(\rho, \varphi) - \Delta \frac{\rho^2}{2R^2} - (y'\mu' + z'\nu'). \qquad (X.19)$$

Напомним, что величина Δ положительна, если плоскость установки находится справа от гауссова изображения, а N принимается положительной, если поверхность реальной волны находится слева от идеальной волны и реальный оптический путь, отсчитываемый от поверхности к ее центру, длиннее идеального (рис. X.6). Для симметричных относительно оси оптических систем можно ограничиться рассмотрением точек изображения, лежащих в меридиональной плоскости, т. е. можно принять $z' = 0$, и тогда получим следующее выражение:

Рис. X.6

$$\delta = N(\rho, \varphi) - \frac{\Delta\rho^2}{2R^2} - y'\mu' = N(\rho, \varphi) - \frac{\Delta\rho^2}{2R^2} - \frac{\rho}{R} y' \cos\varphi. \qquad (X.20)$$

Для вычисления величин C и S воспользуемся формулой (X.18), заменив $r = MP$ суммой двух величин: постоянной OP и переменной δ.

Предположим сначала, что $\Delta = 0$, т. е. точка P находится в гауссовой плоскости установки. Тогда

$$C, S = \frac{a}{\lambda} \int_S \cos, \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(y' \frac{\rho}{R} \cos\varphi \right) dS. \qquad (X.21)$$

Знак минус при аргументе sin и cos отброшен, так как он не влияет на сумму $C^2 + S^2$. Дифференциал dS может быть написан в виде

$$dS = \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Если поверхность S ограничена окружностью с диаметром ρ_1, то

$$C, S = \frac{a}{\lambda} \int_0^{\rho_1} \int_0^{2\pi} \cos, \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} y' \frac{\rho}{R} \cos\varphi \right) d\varphi\rho\, d\rho.$$

Интеграл

$$\frac{a}{\lambda} \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} y' \frac{\rho}{R} \cos\varphi \right) d\varphi$$

равен нулю, так как

$$\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}y'\frac{\rho}{R}\cos(\pi+\varphi)\right]=-\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y'\frac{\rho}{R}\cos\varphi\right).$$

Следовательно, каждому положительному элементу интегрирования соответствует элемент с тем же значением, но с противоположным знаком.

Для удобства вводим новую величину $n=\alpha\rho=\frac{2\pi}{\lambda}\rho\frac{y'}{R}$ нулевой размерности, которую принято выражать в так называемых оптических единицах. Эта величина играет важную роль в исследовании дифракционных картин.

Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\cos\varphi)\,d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}\cos(n\cos\varphi)\,d\varphi$ встречаются в различных разделах астрономии и физики и хорошо исследованы. Функция $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(n\cos\varphi)\,d\varphi$ обозначается символом $J_0(n)$ и называется функцией Бесселя нулевого порядка. Эта функция обладает следующими свойствами.

1. Она разлагается в бесконечный ряд вида

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2\cdot1^2}+\frac{x^4}{2^4\cdot2!^2}-\frac{x^6}{2^6\cdot3!^2}+\cdots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\cdots\right). \qquad (X.22)$$

2. При больших значениях x можно применять для вычисления $J_0(x)$ следующую приближенную формулу:

$$J_0(x)=\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}. \qquad (X.23)$$

3. Функция $J_0(x)$ связана с другой функцией $J_1(x)$, называемой функцией Бесселя первого порядка, следующим соотношением:

$$\int xJ_0(\alpha x)\,dx=\frac{x}{\alpha}J_1(\alpha x). \qquad (X.24)$$

4. Функция $J_1(x)$, определяемая по Бесселю соотношением

$$J_1(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-\varphi)\,d\varphi, \qquad (X.25)$$

может быть вычислена с помощью ряда

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 1\cdot 2} + \frac{x^4}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^6}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots\right), \quad (X.26)$$

или

$$\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \frac{x^6}{9216}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18\,432},$$

а при больших значениях x

$$J_1(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}. \quad (X.27)$$

5. Функция $J_1(x)$ удовлетворяет следующему интегральному соотношению:

$$2\int_0^n \frac{J_1^2(x)}{x}\,dx = 1 - \left[J_0^2(n) + J_1^2(n)\right]. \quad (X.28)$$

Для функций J_0 и J_1 существуют таблицы (например, таблицы Янке и Эмде, таблицы функций с формулами и кривыми), пользование которыми упрощает в значительной степени вычисления распределения энергии для круглых отверстий.

Найденное выше выражение для C

$$C = \frac{a}{\lambda}\int_0^{\rho_1}\int_0^{2\pi} \cos(\alpha\rho\cos\varphi)\,d\varphi\rho\,d\rho,$$

где $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{y'}{R}$, может быть приведено к следующему виду:

$$C = \frac{2a\pi}{\lambda}\int_0^{\rho_1} J_0(\alpha\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Последняя формула с учетом формулы (X.24) может быть написана в виде

$$C = \frac{2a\pi\rho_1}{\lambda}\frac{J_1(\alpha\rho_1)}{\alpha} = \frac{2a\pi\rho_1^2}{\lambda}\frac{J_1(\alpha\rho_1)}{\alpha\rho_1}. \quad (X.29)$$

Для освещенности E_P в точке P находим

$$E_P = C^2 + S^2 = C^2 = \frac{4\pi^2a^2\rho_1^4}{\lambda^2}\frac{J_1^2(n)}{n^2}.$$

Отбрасывая постоянный множитель $\frac{\pi^2a^2\rho_1^4}{\lambda^2}$, получаем

$$E_P = \frac{4J_1^2(n)}{n^2}. \quad (X.30)$$

В этой формуле коэффициент 4 сохранен, так как при $n = 0$ $\frac{J_1(n)}{n} = \frac{1}{2}$, а следовательно, $E_0 = 1$. Таким образом, в формуле (X.30) освещенность в центре дифракционного пятна принята за единицу; функция $\frac{4J_1^2(n)}{n^2}$ имеет вид, графически изображенный на рис. X.7. В табл. X.1 приведены значения этой функции для различных n.

Рис. X.7

Функция E обращается в нуль при следующих значениях n: 3,83; 7,02; 10,17; 13,32; 16,47 и имеет максимум при следующих значениях n:

$\bar{n}$	5,13	8,42	11,62	14,80	17,96
$E(n)$ в % . . .	1,75	0,416	0,160	0,078	0,044

Изображение точки, даваемое в монохроматическом свете идеальной оптической системой, представляется в виде светового пятна шириной в $2 \times 3{,}83$ оптических единиц, окруженного кольцами попеременно темными и светлыми. Интенсивность этих колец падает весьма быстро в центре, медленно — при удалении от центра, как показывают приведенные выше данные.

При больших n освещенность E определяется по формуле

$$E = \frac{8}{\pi n^3} \sin^2\left(n - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (X.31)$$

Максимумы E убывают пропорционально $\frac{1}{n^3}$. Дифракционные кольца хорошо наблюдаются в лабораторной обстановке.

Таблица X.1

n	$\frac{4J_1^2(n)}{n^2}$ в %	n	$\frac{4J_1^2(n)}{n^2}$ в %	n	$\frac{4J_1^2(n)}{n^2}$ в %
0,0	100	2,8	8,56	5,6	1,53
0,4	96,07	3,2	2,67	6,0	0,85
0,8	85,03	3,6	0,28	6,4	0,32
1,2	68,97	4,0	0,11	6,8	0,04
1,6	50,75	4,4	0,85	7,2	0,03
2,0	33,26	4,8	1,55	7,6	0,18
2,4	18,79	5,2	1,74	8,0	0,34

При наблюдении звезд в телескопы кольца почти никогда не наблюдаются вследствие атмосферных помех.

Рассмотрим, как распределяется энергия по отдельным кольцам. Энергия dE, проходящая через бесконечно тонкое кольцо с радиусом n (выраженным в оптических единицах) и шириной dn, центр которого совпадает с центром дифракционного пятна, пропорциональна величине

$$E2\pi n\, dn = 8\pi \frac{J^2(n)}{n}\, dn.$$

Количество энергии, проходящей через кольцо конечной толщины, у которого внутренний радиус равен n_1, а внешний n_2, равно

$$E = 8\pi \int\limits_{n_1}^{n_2} \frac{J_1^2(n)}{n}\, dn.$$

Согласно формуле (X.28)

$$E = 4\pi \left[J_0^2(n_1) + J_1^2(n_1) - J_0^2(n_2) - J_1^2(n_2)\right];$$

это количество энергии выражено в произвольных единицах.

Введем коэффициент пропорциональности m и выберем его значение таким образом, чтобы полная энергия, распределенная по всему пятну рассеяния, была равна единице. Тогда

$$\overset{\infty}{\underset{0}{E}} = 4\pi m \left[J_0^2(0) + J_1^2(0) - J_0^2(\infty) - J_1^2(\infty)\right] = 1;$$

так как сумма в скобках согласно формулам (X.22), (X.23), (X.26) и (X.27) равна единице, то $m = \frac{1}{4\pi}$.

Таким образом, E нужно писать в виде

$$E = J_0^2(n_1) + J_1^2(n_1) - J_0^2(n_2) - J_1^2(n_2). \qquad \text{(X.32)}$$

По формуле (X.32) можно найти, что в центральном белом пятне собирается 83,8% всей энергии, в первом светлом кольце — 7,2%, во втором кольце — 2,8%, в третьем — 1,4%, в четвертом — 0,9%; в остальных светлых кольцах собирается 3,9% всей энергии.

Рассмотрим, как выглядят дифракционные кольца в белом свете. Величина $n = \frac{2\pi\rho y'}{\lambda R}$ зависит от λ, а следовательно, максимумы освещенности E для лучей с различными длинами волн λ наступают при различных y', т. е. при различных расстояниях от оптической оси. Чем больше λ, тем больше y', поэтому диаметры колец в красном свете больше, чем в синем, и дифракционная картина изображения точки представляется в виде белого пятна с красной каймой, окруженной кольцами с цветными краями.

4. ИЗОБРАЖЕНИЯ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Когда пучок лучей, исходящий из точки, расположен симметрично относительно оси (например, при осевом положении точки или при отсутствии комы и астигматизма в оптической системе), распределение интенсивностей симметрично относительно центра пятна рассеяния и можно упростить выражение для распределения энергии в дифракционном изображении точки.

Напомним, что

$$E = C^2 + S^2,$$

где

$$C, S = \frac{a}{\lambda} \iint \cos, \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[N(\rho) - \frac{\rho y'}{R} \cos\varphi \right] \rho \, d\rho \, d\varphi,$$

так как N зависит только от ρ.

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \cos(n \cos\varphi) \, d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \cos(n \cos\varphi) \, d\varphi = 2\pi J_0(n).$$

Следовательно, величины C и S могут быть заменены пропорциональными им величинами C_1 и S_1, определяемыми формулами

$$C_1, S_1 = \frac{2}{\rho_к^2} \int_0^{\rho_к} \cos, \sin \frac{2\pi}{\lambda} N J_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho y'}{R} \right) \rho \, d\rho, \qquad (X.33)$$

где $\rho_к$ — полудиаметр входного зрачка.

Коэффициент при интеграле выбран таким образом, чтобы при $N = 0$ и $y' = 0$ $E = 1$.

Дефокусировка идеальной оптической системы с круглым зрачком

Вопрос о распределении энергии в изображении точки, даваемом идеальной системой при наличии дефокусировки, несмотря на то, что он относится к весьма частному случаю, имеет большое значение. Прежде всего дефокусировку можно считать простейшей из всех аберраций и вычисление распределения энергии при этом может быть доведено до конца сравнительно простыми средствами. Кроме того, дефокусировка является несложным и вместе с тем действенным способом частичной компенсации таких аберраций, как сферическая, астигматизм, кривизна изображения.

Изучая закономерности, свойственные кривым распределения энергии в случае дефокусировки, нетрудно уловить некоторые общие связи, которые могут быть использованы при решении более сложных задач. Примером является переход от физического (дифракционного) изображения объектов к геометрическому. За-

мена физического изображения геометрическим становится целесообразной при наличии больших аберраций. В частности, исследование распределения энергии при дефокусировке позволяет с наибольшей наглядностью убедиться в том, что это распределение, вычисленное по дифракционной теории, становится все более схожим с тем, которое соответствует полученному на основании формул геометрической оптики. Сходство увеличивается по мере того, как растет величина дефокусировки. Это свойство позволяет значительно облегчить расчеты распределения энергии в изображении точки при наличии хроматической аберрации и при вычислении ЧКХ в широкой спектральной области.

Вычисление распределения энергии в пятне рассеяния, вызываемом дефокусировкой, при круглом зрачке

В формуле (X.18*) заменим δ ее выражением

$$\delta = -\frac{\Delta\rho^2}{2R^2} - \frac{\rho y'}{R}\cos\varphi,$$

поскольку член N, зависящий от аберраций системы, равен нулю. Величина Δ — предельное смещение плоскости установки.

Следовательно,

$$C, S = \frac{a}{\lambda}\iint \cos, \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\Delta\rho^2}{2R^2} - \frac{\rho y'}{R}\cos\varphi\right)\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

так как $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Ввиду того, что дефокусировка относится к симметричным аберрациям, можно для вычисления C и S использовать формулы (X.33), согласно которым

$$C, S = \frac{a}{\lambda}\int_0^{\rho_к} \cos, \sin\frac{\pi}{\lambda}\Delta\frac{\rho^2}{R^2}J_0\left(\frac{2\pi\rho y'}{\lambda R}\right)\rho\, d\rho,$$

где $\rho_к$ — полудиаметр выходного зрачка.

Коэффициент a выбирается таким, чтобы $C^2 + S^2 = 1$ при $\Delta = 0$, $y' = 0$. Так как при этом $C, S = \frac{a}{\lambda}\frac{\rho_к^2}{2}$, то $a = \frac{2\lambda}{\rho_к^2}$, поэтому окончательно

$$C, S = \frac{2}{\rho_к^2}\int_0^{\rho_к} \cos, \sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{\Delta\rho^2}{R^2}J_0\left(\frac{2\pi\rho y'}{\lambda R}\right)\rho\, d\rho. \qquad (X.34)$$

Заметим, что коэффициент Штреля, т. е. значение E при $y' = 0$, вычисляемый по формулам (X.34), получается равным

$$E_{Ш} = C^2 + S^2 = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{\left[\frac{\pi}{\lambda} \Delta \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]^2} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta \sin^2 \omega'\right)}{\left[\frac{\pi}{\lambda} \Delta \sin^2 \omega'\right]^2}, \quad (X.35)$$

где ω' — апертурный угол со стороны изображения.

Из формулы (X.35) вытекает, что распределение коэффициента Штреля по оси при заданной дефокусировке примерно имеет вид, показанный на рис. X.7.

Распределение освещенности в плоскости установки при дефокусировке может быть вычислено по формуле (X.34), но такое вычисление наталкивается на затруднения из-за отсутствия хороших программ для расчета $J_0(x)$ с помощью ЭВМ.

Автором [1] был предложен более удобный и хорошо поддающийся обработке на ЭВМ метод, заключающийся в следующем.

Напишем волновую аберрацию N в виде

$$N = A\lambda k^2, \quad (X.36)$$

где $k = \frac{\rho}{\rho_к}$, а величина A связана с дефокусировкой Δ соотношением

$$\Delta = \frac{2A\lambda}{\sin^2 \omega'}, \quad (X.36^*)$$

где $\sin \omega' = \frac{\rho_к}{R}$.

Дифференцируя выражение (X.34) для C и S по аргументу $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y'\rho}{R} = n$ и пользуясь соотношением между функциями Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$, а именно

$$\int x J_0(\alpha x)\, dx = \frac{x}{\alpha} J_1(\alpha x),$$

приходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 2\cos\varphi \frac{J_1(n)}{n} - \frac{4\pi A}{n} \frac{dS_1}{dn}; \\ S_1 &= 2\sin\varphi \frac{J_1(n)}{n} + \frac{4\pi A}{n} \frac{dC_1}{dn}, \end{aligned}\right\} \quad (X.37)$$

где $\varphi = 2\pi A$, а величины C_1 и S_1 отличаются от C и S лишь постоянным множителем.

Напомним, что $n = \frac{2\pi}{\lambda} y' \sin \omega'_к = \frac{2\pi}{\lambda} y' \frac{\rho_к}{R}$ есть та самая величина, которая входит аргументом в формулу (X.30) и характеризует ход распределения световой энергии в плоскости изо-

бражения точки и служит для определения разрешающей способности идеальной оптической системы.

Система дифференциальных уравнений (X.37) решается численно одним из методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, например методом Штермера, изложение которого можно найти в литературе по приближенным вычислениям [2].

При использовании метода Штермера необходимо знать численные значения C_1 и S_1 для $n = 0$ и для нескольких малых значений n. При $n = 0$ уравнения (X.34) дают

$$C_1(0) = \frac{\sin 2\pi A}{2\pi A};$$

$$S_1(0) = \frac{1 - \cos 2\pi A}{2\pi A}.$$

Из этих же уравнений можно получить $C_1(n)$ и $S_1(n)$ путем разложения в ряд функций sin, cos и $J_0(\alpha x)$.

Указанный метод очень удобен для применения ЭВМ, так как формулы (X.37) имеют очень простой вид, а вычисление разностей первых двух-трех порядков величин C_1 и S_1 занимает мало времени. Выбор промежутков для n тоже не представляет труда, так как он обусловливается значениями разностей $\Delta_3 C_1$ и $\Delta_3 S_1$.

К сожалению, метод приведения к системе дифференциальных уравнений неприменим для решения более сложных видов аберрационных уравнений, в том числе для случая сферической аберрации третьего порядка.

Распределение освещенности при произвольных аберрациях

В общем случае следует применить ранее приведенные формулы

$$E = C^2 + S^2;$$

$$C, S = \frac{a}{\lambda} \int\limits_S \cos, \sin \frac{2\pi\delta}{\lambda}\, dS,$$

причем

$$\delta = N(\rho, \varphi) - \Delta \frac{\rho^2}{R^2} - (y'\mu' + z'\nu'),$$

где N — волновая аберрация, соответствующая точке на сфере с центром в гауссовом изображении точки; Δ — смещение плоскости установки (положительное, если плоскость установки правее гауссового изображения); y', z' — координаты в плоскости установки точки, для которой определяют освещенность; μ' и ν' — направляющие косинусы нормали к сфере в точке, где луч ее пересекает. Практически действующая часть сферы (которую

иногда заменяют плоскостью выходного зрачка, допуская при этом погрешность, подлежащую определению) разбивается на большое число малых элементов одинаковой площади ds; для каждого из них при заданных y' и z' вычисляются подынтегральные величины sin и cos $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ и результаты складываются. При этом элементы ds должны быть так малы, чтобы замена бесконечно

Рис. X.8

малых элементов элементами конечной величины не вызывала заметной погрешности.

Поскольку такие громоздкие вычисления должны выполняться для весьма большого числа точек y', z', так как распределение энергии в изображении точки имеет всегда очень сложный и быстро осциллирующий характер, то даже при расчетах на ЭВМ требуется значительное время для получения достаточно ясной картины распределения. По этой причине в литературе приведено весьма ограниченное количество примеров.

На рис. X.8 приведены графики освещенности для некоторых симметричных распределений; кривые соответствуют дефокусировке и различным комбинациям дефокусировки и сферической аберрации третьего порядка [3].

I. A — кривая дифракционного кружка Эри; B — дефокусировка в $\lambda/_4$; C — дефокусировка в $\lambda/_2$; D — дефокусировка в $^3/_4\lambda$; E — дефокусировка в λ; F — дефокусировка в $1{,}5\lambda$; G — дефокусировка в 2λ; H — дефокусировка в 4λ.

II. A — $\lambda/_4$ сферической аберрации скомпенсировано $\lambda/_4$ дефокусировкой; B — $\lambda/_4$ сферической аберрации; C — $\lambda/_4$ сферической аберрации скомпенсировано $\lambda/_2$ дефокусировкой; D — $\lambda/_4$ сферической аберрации скомпенсировано $^5/_4\lambda$ дефокусировкой; E — $\lambda/_4$ сферической аберрации скомпенсировано $^3/_4\lambda$ дефокусировкой; F — 2λ сферической аберрации скомпенсировано 3λ дефокусировкой.

III. A — λ сферической аберрации скомпенсировано λ дефокусировкой; B — λ сферической аберрации скомпенсировано $^3/_4\lambda$ дефокусировкой; C — λ сферической аберрации скомпенсировано $^5/_4\lambda$ дефокусировкой; D — λ сферической аберрации скомпенсировано 3λ дефокусировкой (шкала увеличена в 10 раз); E — λ сферической аберрации скомпенсировано λ дефокусировкой (шкала увеличена в 10 раз). Чтобы избежать наложения кривых, каждая последующая кривая смещена вниз по отношению к предыдущей на величину, соответствующую 10%.

Рис. X.9

На рис. X.9 приведены кривые распределения световой энергии для таких комбинаций сферической аберрации третьих и пятых порядков, при которых волновая аберрация на краю отверстия равна нулю [4]. Кривые даны для шести значений коэффициента A волновой аберрации $S = -A\,(u^4 - u^6)$. Максимальная аберрация S равна $-\frac{4}{27}A$; при $A = 1$ она равна $-\frac{4}{27}\lambda$; при $A = 5$ она достигает $-\frac{20}{27}\lambda$. По оси абсцисс отложены расстояния n от центра изображения, выраженные в оптических единицах, по оси ординат — освещенность E в процентах, причем за единицу взята освещенность в центре дифракционного пятна для идеальной системы. Рис. X.10 [5] показывает изофоты изображения точки в присутствии комы третьего порядка, достигающей 0,48 длины волны.

Изучение опубликованного материала по этому вопросу приводит к следующим выводам. При некотором усреднении кривых, соответствующем размерам объекта, превышающим в 2—3 раза размеры центрального дифракционного пятна, распределение

освещенности, полученное согласно дифракционной теории, становится весьма близким к тому, которое дает геометрическая оптика, и может быть вычислено с помощью подсчета числа точек пересечения лучей с плоскостью установки, если выполнены следующие условия:

1) лучи попадают на волновую поверхность со стороны объекта в точках, образующих правильную квадратную сетку, иначе

Рис. X.10

говоря, каждый луч как бы является представителем одного и того же светового потока;

2) число лучей настолько велико, чтобы обеспечить на изображении достаточно подробную картину распределения; в большинстве случаев оно не должно быть меньше 200—300 на весь зрачок.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Формула, выражающая зависимость распределения световой энергии в дифракционном изображении точки от координат y' и z' рассматриваемой точки P изображения, как будет показано ниже, представляет собой преобразование Фурье некоторой функции $F(\rho, \varphi)$ или $F_1(\mu'\lambda')$ на поверхности сферы с центром в точке C и радиусом R.

Напомним некоторые определения и свойства рядов и преобразования Фурье, поскольку они в дальнейшем понадобятся. Рассмотрим функции от одного аргумента.

1. Если функция $f(x)$ периодическая (с периодом p) и удовлетворяет некоторым довольно общим и почти всегда выполняемым

на практике условиям, она может быть представлена в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{2\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{4\pi x}{p} + \cdots + a_n \cos\frac{2n\pi x}{p} + \cdots$$

$$\cdots + b_1 \sin\frac{2\pi x}{p} + b_2 \sin\frac{4\pi x}{p} + \cdots + b_n \sin\frac{2n\pi x}{p} + \cdots, \quad (X.38)$$

причем ряд с правой стороны при достаточном количестве членов может представить $f(x)$ с любой заранее заданной степенью точности.

Коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n,\ b_n = \frac{2}{p}\int_p f(x)\cos,\ \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx. \quad (X.39)$$

Рис. X.11

Можно представить величины a_n и b_n в виде функций частоты $\frac{n}{p}$, но удобнее считать каждую пару величин a_n и b_n проекциями на координатные оси некоторого вектора ρ_n, перпендикулярного оси частот $\frac{n}{p}$ (рис. X.11). Угол $\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}$ есть фаза, соответствующая этой частоте; $\rho = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — ее амплитуда. Совокупность этих векторов называется спектром функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ четная относительно x, все b_n равны нулю и векторы a_n образуют картину, действительно похожую на спектр химического элемента, рассматриваемого через спектроскоп.

2. Если функция $f(x)$ не периодическая и удовлетворяет указанным в пункте 1 общим условиям (главное из которых заключается в том, что функция имеет конечное число разрывов, достаточно плавный ход между ними и интегрируема), можно считать, что она обладает бесконечно большим периодом и число $\frac{1}{p}$ стремится к нулю, а следовательно, векторы (a_n, b_n) приближаются вплотную друг к другу и их концы образуют сплошную кривую, которая также является спектром функции $f(x)$. Тогда формулы (X.38) и (X.39) дают

$$f(x) = 2\int_0^\infty \left[\cos 2\pi ux \int_p f(x)\cos 2\pi ux\,dx + \right.$$

$$\left. + \sin 2\pi ux \int_p f(x)\sin 2\pi ux\,dx\right] du, \quad (X.40)$$

где $u = \frac{n}{p}$; $du = \frac{1}{p}$.

Формулы для a и b теперь принимают вид

$$a(u),\ b(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos,\ \sin 2\pi ux\,dx; \qquad (X.41)$$

тогда

$$f(x) = 2\int_{0}^{\infty} [a(u)\cos 2\pi ux + b(u)\sin 2\pi ux]\,du. \qquad (X.42)$$

Введем теперь комплексные обозначения. Согласно формулам Эйлера, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{+xi} + e^{-xi})$; $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$. Для удобства записи полагаем $e^{xi} = h(x)$; $e^{-xi} = h(-x)$.

Введем функцию $g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,h(2\pi ux)\,dx = Tf(x)$, объединяющую функции $a(u)$ и $b(u)$, и назовем ее преобразованием Фурье функции $f(x)$. Функция $g(u)$ показывает долю участия этой частоты в функции $f(x)$, когда последняя разложена в ряд по всем частотам. Из формулы (X.42) вытекает:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,h(-2\pi ux)\,du = T^{-1}g(u). \qquad (X.43)$$

Функция $f(x)$ является преобразованием Фурье функции $g(u)$ с той только разницей, что перед аргументом функции h стоит знак минус.

Преобразования Фурье обладают одним ценным и полезным в теории изображений свойством, выраженным теоремой Парсеваля: если преобразования Фурье двух функций $f(x)$ и $F(x)$ представляются функциями $g(u)$ и $G(u)$, то преобразование Фурье произведения $f(x)\,F(x)$ может быть написано в виде

$$T(fF) = \int G(v)\,g(u-v)\,dv = \int g(v)\,G(u-v)\,dv. \qquad (X.44)$$

Выражения, стоящие справа от знака равенства, называются свертками функций G и g. Примером свертки может служить распределение световой энергии в изображении объекта одного измерения, если $g(v)$ есть аппаратная функция, т. е. распределение энергии в изображении точки-объекта, а $G(u)$ — распределение энергии в объекте, в предположении, что изображение изопланатично, т. е. что все точки объекта дают одну и ту же картину изображения и что объект изображается в натуральную величину.

Большое значение имеет преобразование Фурье для квадрата модуля $f(x)$. Полагая $F(x) = f^*(x)$ сопряженной с $f(x)$ и за-

мечая, что $G(u) = g^*(-u)$, получаем

$$T|f(x)|^2 = \int |f(x)|^2 h(2\pi ux)\,dx =$$

$$= \int g^*(v')\,g(u+v')\,dv' = \int g(v)\,g^*(v-u)\,dv. \qquad (X.44^*)$$

Преобразование Фурье функции от двух переменных записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} g(u, v) &= \iint f(x, y)\,h\,[2\pi(ux+vy)]\,dx\,dy; \\ f(x, y) &= \iint g(u, v)\,h\,[-2\pi(ux+vy)]\,du\,dv \end{aligned}\right\} \qquad (X.45)$$

и обладает такими же свойствами, как и преобразование Фурье функции одной переменной.

6. ПЕРЕДАЧА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Обозначим через $O(y, z)$ распределение яркостей на плоском предмете O, расположенном перпендикулярно оптической оси системы. Преобразование Фурье этого распределения представляется в виде наложения бесконечного числа синусоидальных составляющих, характеризуемых направлением, пространственной частотой, амплитудой и фазой. Каждому заданному значению частоты и направления соответствует своя амплитуда и своя фаза. Например, если в качестве объекта рассматривается мира Фуко, яркость которой в зависимости от координаты x, выбранной перпендикулярно штрихам, определяется уравнением

$$O(x) = \frac{4}{\pi} A \left(\sin\frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{2\pi x}{p} + \cdots\right),$$

где p — период миры, A — яркость светлых полос, то она состоит из множества частот, соответствующих периодам p, $p/3$, $p/5$ и т. д.; направление — одно единственное, это направление перпендикулярное штрихам. Значения амплитуд изменяются как $1, {}^1/_3, {}^1/_5$.

Обозначим теперь через $A(y', z')$ аппаратную функцию, т. е. распределение освещенности в изображении светящейся точки. Распределение освещенности в изображении некогерентного объекта $O(y, z)$ определяется равенством

$$I(y', z') = \iint_0 O(y, z)\,A(y'-y, z'-z)\,dy\,dz, \qquad (X.46)$$

если увеличение равно единице и $A(y'z')$в изображении объекта не изменяется.

Таким образом, как было уже показано выше, величина I есть свертка функций O и A.

Некогерентное освещение

Из теоремы Парсеваля (которая может быть распространена на случай двух и более переменных) вытекает, что преобразование Фурье свертки I равно произведению преобразования Фурье распределения яркости на объекте O и аппаратной функции A. Для доказательства этого положения можно написать выражение для преобразования i Фурье функции I

$$i(\mu, \nu) = \iint I(y', z')\, h\,[2\pi(\mu y' + \nu z')]\, dy\, dz; \qquad (X.47)$$

обратное преобразование дает

$$I(y', z') = \iint i(\mu, \nu)\, h\,[-2\pi(\mu y' + \nu z')]\, d\mu\, d\nu, \qquad (X.47^*)$$

где μ и ν — пространственные частоты с размерностью обратной длины. Если в первой формуле подставить вместо величины $I(y', z')$ ее выражение из (X.46) и произвести некоторые простые преобразования, можно получить основную формулу

$$i(\mu, \nu) = o(\mu, \nu)\, a(\mu, \nu), \qquad (X.48)$$

т. е. преобразование Фурье распределения освещенности на изображении равно произведению преобразований Фурье распределения яркости на объекте и аппаратной функции. Отсюда вытекает, что оптическая система играет роль фильтра частот: при заданных μ и ν, т. е. частоте и направлению штрихов, $i = oa$, причем i передает o в ослабленном в a раз виде. Поэтому коэффициент a, представляющий собой преобразование Фурье распределения A освещенности в изображении точки, можно назвать фактором контраста; его зовут также функцией передачи или частотно-контрастной характеристикой.

Вычислим контраст $a(\mu', \nu')$ для случая некогерентного источника. Комплексная амплитуда точки $(y'z')$ изображения, как было показано выше, определяется формулой

$$E(y'z') = U \iint F(\beta'\gamma')\, h\,[-k(\beta' y' + \gamma' z')]\, d\beta'\, d\gamma';$$

где U — постоянная, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Но при некогерентном источнике энергия на изображении определяется квадратом модуля комплексной амплитуды $E(y', z')$, т. е. величиной $|E(y'z')|^2$, равной произведению $E(y', z')\, E^*(y', z')$, где E^* — функция, сопряженная с E. Поэтому $a(\mu', \nu')$ — преобразование Фурье функции $|E(y'z')|^2$ — может быть написано в виде

$$a(\mu', \nu') = \iint |E(y'z')|^2\, h\,[2\pi(\mu' y' + \nu' z')]\, dy'\, dz'. \qquad (X.49)$$

Используя формулу (X.44*) и произведя замены, а именно $g = F$; $g^* = F^*$; $u = \frac{\mu'}{\lambda}$, получаем

$$a(\mu', \nu') = \iint F(\beta'\gamma') F^*(\beta' - \lambda\mu'; \ \gamma' - \lambda\nu') \, d\beta' \, d\gamma', \quad (X.50)$$

где β' и γ' — направляющие косинусы луча, проходящего через рассматриваемый элемент зрачка $r^2 d\beta' d\gamma'$; λ — длина волны; μ' и ν' — составляющие пространственных частот R в плоскости изображений; μ' равно нулю, когда штрихи параллельны оси Y', а ν' равно нулю, если штрихи перпендикулярны этому направлению. Функция F — комплексная амплитуда на поверхности волны в точке $\beta'\gamma'$ — имеет вид $F = E_0 h\left(\frac{2\pi}{\lambda} N\right)$, где N — волновая аберрация в точке $\beta'\gamma'$, которая может содержать и член дефокусировки; E_0 — постоянная.

Интегрирование распространяется на площадь, общую для контура выходного зрачка и второго контура, воспроизводящего первый, но смещенного относительно него на величину, проекции которой равны $\lambda\mu'$ и $\lambda\nu'$. Более подробное описание методики вычисления величины $a(\mu', \nu')$ для наиболее важного случая синусоидальной миры будет изложено далее.

Рассмотрим безаберрационную систему с круглым зрачком; в этом случае $N = 0$, F постоянно и $a(\mu', \nu')$ пропорционально площади S, общей для двух окружностей с радиусом $r = \alpha'$, причем $\alpha' = \sqrt{\beta'^2 + \gamma'^2}$ — синус апертурного угла, выходящего из системы пучка. Радиус r можно принять равным единице, поскольку важны только относительные величины площадей S.

Смещение OO_1 второго контура относительно первого равно $\lambda\mu' = \frac{\lambda}{p}$, где p — период синусоидальной решетки; μ' — число штрихов на 1 *мм*. Величину $\frac{1}{p}$ в дальнейшем назовем частотой и обозначим через R. Площадь S равна $\alpha'^2(\theta - \sin\theta\cos\theta)$, где θ определяется из треугольника OMH (рис. X.12). Имеем $\cos\theta = \frac{OH}{\alpha'} = \frac{OO_1}{2\alpha'} = \frac{\lambda}{2\alpha' p}$; отсюда видно, что $\cos\theta$ пропорционален частоте μ'. График зависимости функции $\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi\alpha'^2}$ от частоты μ' называется частотно-контрастной характеристикой K (ЧКХ). Множитель $\frac{1}{\pi\alpha'^2}$ обращает функцию в единицу при $\theta = \pi$ ($\mu' = 0$). ЧКХ обращается в нуль, когда $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$, т. е. когда $p = \frac{\lambda}{2\alpha'}$ и $\mu' = \frac{2\alpha'}{\lambda}$. На рис. X.13 приведен график ЧКХ в безаберрационной системе с круглым зрачком.

Частотно-контрастная характеристика при наличии аберраций. Наличие аберраций обычно уменьшает значение ЧКХ в начале кривой (при малых частотах). Для частот R, близких к предельным,

равным $\frac{2\alpha'}{\lambda}$, значения ЧКХ стремятся к тем, которыми обладает безаберрационная система, так как в этом случае расстояние между центрами окружностей близко к радиусу, площадь S близка к нулю, двойной интеграл формулы (X.50) сводится к произведению $F(\beta'\gamma')\,F^*(\beta'-\lambda\mu',\ \gamma'-\lambda\nu')\,ds$, модуль которого не зависит от значения волновых аберраций. К этому вопросу мы вернемся ниже. Приемы вычислений ЧКХ будут приведены на стр. 634 и далее.

Отметим здесь одно важное свойство оптических систем, относящееся к изображению периодических структур при некогерент-

Рис. X.12

Рис. X.13

ном освещении. Если объект обладает синусообразным распределением яркости, при котором можно записать закон изменения яркости в виде

$$I(y') = I_0 \sin\frac{2\pi}{p}\,y,$$

то изображение этого объекта также обладает синусообразной структурой.

Действительно, согласно формуле (X.46) и полагая $I_0 = 1$, имеем

$$I(y') = \iint \sin\frac{2\pi y}{p}\,A(y'-y)(z'-z)\,dy\,dz.$$

Положим $y'-y=Y$, $z'-z=Z$. Тогда

$$I(y') = \iint \sin\frac{2\pi}{p}(y'-Y)\,A(Y,\ Z)\,dY\,dZ =$$

$$= \sin\frac{2\pi y'}{p}\iint A(Y,\ Z)\cos\frac{2\pi Y}{p}\,dY\,dZ -$$

$$-\cos\frac{2\pi y'}{p}\iint A(Y,\ Z)\sin\frac{2\pi Y}{p}\,dY,\ dZ.$$

Обозначим $C,\ S = \iint A\,(Y,\ Z)\cos,\ \sin\frac{2\pi Y}{p}\,dY\,dZ$. Тогда

$$I(y') = C\sin\frac{2\pi y'}{p} - S\frac{\cos 2\pi y'}{p},$$

т. е. получается синусоидальное распределение со сдвигом фазы φ, определяемым формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{S}{C}.$$

Влияние малых аберраций на ЧКХ

Введем следующие обозначения: d — дефокусировка или кривизна поля, т. е. максимальное отклонение на краю зрачка ($h = 1$) сферы сравнения от волновой поверхности (которая является сферической, если эта аберрация единственная); S_1 — коэффициент сферической аберрации третьего порядка; это максимальное отклонение на краю зрачка деформированной волновой поверхности от сферы сравнения, имеющей центр в параксиальном фокусе (острие геометрической каустики); S_3 — коэффициент сферической аберрации пятого порядка при тех же условиях; q — параметр, соответствующий возможному покачиванию сферы сравнения; K_1 — коэффициент комы третьего порядка, т. е. максимальное отклонение на краю отверстия от сферы сравнения, центр которой совпадает с параксиальным фокусом волновой поверхности, соответствующей коме (если эта аберрация единственная); K_3 — коэффициент комы пятого порядка при тех же условиях; a — коэффициент астигматизма, т. е. максимальное отклонение астигматической волновой поверхности от сферы сравнения, центр которой находится на середине расстояния, разделяющего оба фокуса.

Пусть

$$\omega = \cos\theta = \frac{\lambda}{2p\alpha'}; \qquad \varepsilon = \sin\theta,$$

где ω — пространственная частота; p — период решетки; $\alpha' = n'\sin u'_к$ — численная апертура пучка в пространстве изображений.

Полагая

$$P_1 = 3(\theta - \sin\theta\cos\theta) = 3(\theta - \varepsilon\omega);$$

$$P_2 = P_1 - 2\varepsilon^3\omega;$$

$$P_3 = P_2 - \frac{8}{5}\varepsilon^5\omega;$$

$$P_4 = P_3 - \frac{48}{35}\varepsilon^7\omega.$$

Стил в 1952 г. получил следующее выражение для ЧКХ в предположении, что аберрации малы $\left(\text{не более } \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$ и длина волны λ принята за единицу длины:

$$\frac{2}{3\pi} P_1 + \Big\{ - d^2 \frac{16}{3} \pi\omega^2 \left[(1 + 4\omega^2) P_3 - \frac{32}{5} \varepsilon^7\omega\right] -$$

$$-2dS_1 \frac{64}{9} \pi\omega^2 \left[(1 + 12\omega^2 + 12\omega^4) P_3 - \frac{24}{5} \varepsilon^7\omega (3 + 4\omega^2)\right] -$$

$$-S_1^2 \frac{32}{9} \pi\omega^2 \Big[\left(3 + 68\omega^2 + 192\omega^4 + 96\omega^6\right) P_3 -$$

$$- \frac{48}{5} \varepsilon^7\omega (7 + 28\omega^2 + 16\omega^4)\Big] -$$

$$-2dS_3 \frac{8}{3} \pi\omega^2 \Big[(3 + 72\omega^2 + 240\omega^4 + 128\omega^6) P_3 -$$

$$- \frac{16}{5} \varepsilon^7\omega (21 + 104\omega^2 + 64\omega^4)\Big] -$$

$$-2S_1S_3 \frac{32}{15} \pi\omega^2 \Big[(6 + 225\omega^2 + 1320\omega^4 + 2000\omega^6 + 640\omega^8) P_3 -$$

$$- \frac{16}{5} \varepsilon^7\omega (57 + 497\omega^2 + 920\omega^4 + 320\omega^6)\Big] -$$

$$-S_3^2 \frac{16}{15} \pi\omega^2 \Big[(15 + 828\omega^2 + 7960\omega^4 + 24\,000\omega^6 + 23\,040\omega^8 +$$

$$+ 5120\omega^{10}) P_3 - \frac{64}{35} \varepsilon^7\omega (315 + 4578\omega^2 + 17\,298\omega^4 +$$

$$+ 19\,040\omega^6 + 4480\omega^8)\Big] - q^2 \cos^2 \Phi \frac{16}{3} \pi\omega^2 P_1 -$$

$$-2qK_1 \cos^2 \Phi \frac{16}{3} \pi\omega^2 [(1 + 4\omega^2) P_1 - 8\varepsilon^3\omega] -$$

$$-K_1^2 \cos^2\Phi \frac{8}{3} \pi\omega^2 \left[\left(3 + 34\omega^2 + 32\omega^4\right) P_1 - \frac{2}{5} \varepsilon^3\omega \left(129 + 206\omega^2\right)\right] -$$

$$-K_1^2 \sin^2 \Phi \frac{8}{9} \pi\omega^2 \left[\left(1 + 6\omega^2\right) P_4 - \frac{288}{35} \varepsilon^9\omega\right] -$$

$$- a^2 \sin^2 2\Phi \frac{16}{3} \pi\omega^2 P_2 \Big\}.$$

Здесь Φ обозначает азимут линии в плоскости объекта; $\Phi = 0$, когда линия перпендикулярна оси симметрии пятна комы. Первый член $\left(\frac{2}{3\pi} P_1\right)$ относится к идеальной оптической системе.

Этим сложным выражением можно легко пользоваться на практике, если для разных значений приведенной пространственной частоты ω вычислить коэффициенты различных составляющих аберраций. Коэффициенты аберраций в выражении для контраста приведены в табл. X.2. Влияние дефокусировки на коэффициент ЧКХ показано в табл. X.3. Дефокусировка принята равной $\lambda/4$. Для сравнения приведены значения ЧКХ для совершенного прибора, а также относительная потеря контраста.

Переход к случаю больших волновых аберраций. В этом случае вычисление ЧКХ из-за больших значений аргументов h и быстрых изменений F и F^* становится практически невыполнимым. Вместе с тем теория и вычисления показывают, что когда волновая аберрация превышает несколько волн, то распределение энергии в изображении точки, полученное на основании законов геометрической оптики, не отличается от того, которое вычислено по вышеуказанным формулам.

Переход от дифракционного к геометрическому аспекту происходит при стремлении длины волны λ к нулю, так как геометрическая оптика является предельным случаем дифракционной, соответствующим бесконечно малому значению λ.

Рассмотрим, как изменится формула (X.50) при стремлении λ к нулю. С целью упрощения выводов ограничимся случаем, когда одна из величин μ' или ν' равна нулю, так как это представляет наибольший практический интерес. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu' = 0$.

Напомним формулу (X.50), выражающую зависимость контраста K от направления штрихов:

$$K = a(\mu', \nu') = \iint F(\beta'\gamma') F^*(\beta' - \lambda\mu';\ \gamma' - \lambda\nu')\, d\beta'\, d\gamma',$$

где

$$F = E_0 h\left(\frac{2\pi N}{\lambda}\right) = E_0 e^{\frac{2\pi i N}{\lambda}} = E_0 e^{ikN(\beta')},$$

а E_0 — некоторая постоянная, которая может быть отброшена при последующих вычислениях.

Заметим, что

$$e^{+ikN(\beta')} e^{-ikN(\beta'-\lambda\mu')} = e^{ik[N(\beta')-N(\beta'-\lambda\mu')]}.$$

Но когда λ стремится к нулю, можно писать

$$N(\beta') - N(\beta' - \lambda\mu') = \lambda\mu' \frac{\partial N}{\partial \beta'}.$$

Из соотношений между волновыми и геометрическими аберрациями известно, что $\frac{\partial N}{\partial \beta'} = \delta g'$, где $\delta g'$ — поперечная аберрация

Таблица X.2

Аберрации	Пространственная частота $\omega = \cos\theta$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Постоянная	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374
$-d^2$	0,5517	1,4761	2,1018	2,1995	1,8326	1,2196	0,61197	0,19508	0,02201
$-2dS_1$	0,6272	1,4752	1,9358	1,9822	1,7224	1,2642	0,72892	0,27376	0,03682
$-S_1^2$	0,8000	1,6395	1,9499	1,9108	1,6918	1,3435	0,87853	0,38583	0,06166
$-2dS_3$	0,6089	1,3046	1,6459	1,6831	1,4941	1,1453	0,71166	0,29911	0,04659
$-2S_1S_3$	0,8279	1,5411	1,7512	1,6971	1,5165	1,2424	0,86685	0,42329	0,07809
$-S_3^2$	0,8922	1,5049	1,6294	1,5552	1,3954	1,1706	0,86433	0,46627	0,09897
$-K_1^2\cos^2\Phi$	0,2234	0,4773	0,5381	0,4467	0,3021	0,1726	0,0816	0,0275	0,00364
$-K_1^2\sin^2\Phi$	0,0854	0,2096	0,2691	0,2487	0,1778	0,09736	0,03767	0,00823	0,00049
$-a^2\sin^2 2\Phi$	0,6562	2,1072	3,6476	4,7240	4,9974	4,3880	3,0918	1,5538	0,3678

Таблица X.3

Наименование	$\cos\theta$	Пространственная частота $\omega = \cos\theta$									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Совершенный прибор	1	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374	0
Дефокусировка ($\lambda/4$)	1	0,8384	0,6548	0,4924	0,3671	0,2765	0,2086	0,1499	0,0919	0,0360	0
Относительная потеря контраста	0	0,04	0,12	0,21	0,27	0,29	0,27	0,20	0,12	0,04	0

рассматриваемого луча. Поэтому

$$F(\beta')F^*(\beta'-\lambda\mu') = e^{ik\lambda\mu'\delta g'} = e^{2\pi i\mu'\delta g'} =$$

$$= \cos 2\pi\mu'\delta g' + i\sin 2\pi\mu'\delta g'$$

и величина ЧКХ определяется формулой

$$K(\mu',\ 0) = \frac{1}{S}\iint\limits_S \cos 2\pi\mu'\delta g'\,dS + \frac{i}{S}\iint\limits_S \sin 2\pi\mu'\delta g'\,dS, \qquad (X.51)$$

где S — площадь выходного зрачка. Форма выходного зрачка не имеет значения и может быть любой.

Аналогично можно показать, что

$$K(0,\ \nu') = \frac{1}{S}\iint\limits_S \cos 2\pi\nu'\delta G'\,dS + \frac{i}{S}\iint\limits_S \sin 2\pi\nu'\delta G'\,dS, \qquad (X.51^*)$$

где

$$dS = d\beta'\,d\gamma'.$$

Фаза ЧКХ, как прежде, определяется формулами

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\iint\limits_S \sin 2\pi\mu'\delta g'\,dS}{\iint\limits_S \cos 2\pi\mu'\delta g'\,dS} \qquad (X.52)$$

для случая, когда $\nu' = 0$;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\iint\limits_S \sin 2\pi\nu'\delta G'\,dS}{\iint\limits_S \cos 2\pi\nu'\delta G'\,dS} \qquad (X.52^*)$$

для случая, когда $\mu' = 0$.

Можно еще поступить следующим образом.

Напомним, что $K = a(\mu',\ \nu')$ есть преобразование Фурье распределения яркости на изображении $Э(y',\ z')$ некоторой точки $(y,\ z)$. Эта величина $Э(y',\ z')$ может быть определена на основании расчета хода большого числа лучей. Тогда выражение для $K(\mu',\ \nu')$ имеет вид

$$a_0K(\mu',\ \nu') = \iint\limits_S Э(y',\ z')\,h\,[2\pi(\mu',\ y'+\nu',\ z')]\,dy'\,dz',$$

где $a_0 = \iint\limits_S Э(y',\ z')\,dy'\,dz'$ — число лучей, пропускаемых через выходной зрачок системы. Заметим, что интегрирование происходит здесь по площади аберрационного кружка рассеяния, а не по площади выходного зрачка, как в предыдущем способе (X.51).

Рассмотрим случай, когда $\nu' = 0$

$$a_0 K(\mu', 0) = \iint\limits_S Э(y', z') \cos 2\pi\mu' y' \, dy' \, dz' +$$

$$+ i \iint\limits_S Э(y', z') \sin 2\pi\mu' y' \, dy' \, dz'. \qquad (X.53)$$

Разбиваем площадь изображения (рис. X.14) на n полос, параллельных OZ', настолько малой ширины dy', что $\mu' y'$ можно считать постоянным по всей ширине полосы. Обозначим через

Рис. X.14

$$\Delta S(y') = \int\limits_{z_1}^{z_2} Э(y', z') \, dz'$$

число точек пересечения лучей с полосой q. Контраст $K(\mu', 0)$ вычисляется по формуле

$$a_0 K(\mu', 0) = \int\limits_{y_1'}^{y_2'} \Delta S(y') \cos 2\pi\mu' y' dy' +$$

$$+ i \int\limits_{y_1'}^{y_2'} \Delta S(y') \sin 2\pi\mu' y' dy'. \qquad (X.53^*)$$

и представляет собой гармонический анализ функции $\Delta S(y')$. Хотя формулы (X.51) и (X.53*) для вычисления $K(\mu', 0)$ внешне заметно отличаются друг от друга, они приводят к одинаковым процессам вычисления (см. стр. 646 и далее).

Вычисление ЧКХ для точки на оси при малых $\mu\delta g'$

Для точек на оси симметрии ЧКХ не зависит от направления штрихов, и можно написать для K выражение

$$K(\mu', 0) = \frac{3}{S} \iint\limits_S \cos 2\pi\mu' \delta g' \, dS,$$

где S — площадь зрачка, dS — элемент площади выходного зрачка (или волновой поверхности).

При дефокусировке $\delta g' = \Delta\rho \cos\varphi$, где Δ пропорционально дефокусировке

$$SK(\mu', 0) = \int\limits_0^i \int\limits_0^{2\pi} \cos 2\pi\mu' (\Delta\rho \cos\varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

При малом $\mu'\delta g'$ получаем

$$K(\mu', 0) = 1 - \iint \frac{4\pi^2\mu'^2(\Delta\rho\cos\varphi)^2}{2S}\rho\, d\rho\, d\varphi = 1 - \frac{1}{8}\pi^2\mu'^2D^2, \quad (X.54)$$

где $D = 2\delta g'_{max}$ — диаметр кружка рассеяния.

Если рассеяние в аберрационном кружке вызывается сферической аберрацией третьего порядка, то для $K(\mu', 0)$ получается выражение, аналогичное предыдущему, но коэффициент при $\pi^2\mu'^2D^2$ равен не $^1/_8$, а $^1/_{16}$. При увеличении порядка сферической аберрации коэффициент уменьшается, что легко объясняется усилением концентрации света в центре кружка рассеяния.

Например, при сферической аберрации третьего порядка

$$K(\mu', 0) = 1 - \frac{1}{16}\pi^2\mu'^2D^2. \quad (X.55)$$

При сферической аберрации пятого порядка

$$K(\mu', 0) = 1 - \frac{1}{24}\pi^2\mu'^2D^2. \quad (X.56)$$

Когерентное освещение

До сих пор рассматривалась зависимость ЧКХ от частоты при некогерентном освещении. Однако в ряде оптических систем, главным образом из группы микроскопов, наблюдению подвергаются частично прозрачные объекты, освещаемые малым источником света; это создает когерентное освещение или, точнее, смешанное освещение, где преобладает когерентное. Согласно проведенным опытам, на долю когерентного света приходится $^3/_4$ световой энергии и лишь $^1/_4$ — на долю некогерентного света.

Оценка качества изображения, даваемого оптической системой рассматриваемого типа, может производиться точно таким же образом, как при некогерентном освещении, а именно путем наблюдения периодических структур, наиболее простая из которых — синусоидальная мира.

Вычисление ЧКХ в этом случае производится намного проще, чем при некогерентном освещении. Действительно, синусообразная решетка, освещаемая параллельным пучком (а следовательно, когерентным), дифрагирует свет в трех направлениях (рис. X.15), образующих с направлением падающего пучка углы $\pm\omega$, синусы которых равны 0 и $\pm\frac{\lambda}{p}$. Это вытекает из того, что синусоидальная функция $1 + \cos\frac{2\pi y}{p}$ может быть представлана в виде

$$O(y, z) = 1 + \frac{1}{2}\left[h\left(\frac{2\pi y}{p}\right) + h\left(-\frac{2\pi y}{p}\right)\right].$$

Зная распределение амплитуд на объекте, можно найти распределение амплитуд на зрачке (точнее — на сфере с центром на объекте, который мы считаем бесконечно малым по сравнению со зрачком), пользуясь тем, что оно является обратным преобразованием Фурье амплитуд объекта. Это свойство вытекает из второго уравнения (X.45), если ввести в него обозначения, принятые здесь для оптических приложений. Тогда получаем

$$F(\beta'\gamma') = \iint E(y'z')\, h\,[k(\beta' y' + \gamma' z')]\, dy'\, dz'. \qquad (X.57)$$

Эта формула, очевидно, может быть применена также и в пространстве объектов. Из нее вытекает (при замене E распределе-

Рис. X.15

нием O), что $F(\beta'\gamma')$ представляется тремя составляющими: $F(\beta'\gamma') = 1$ при $\beta' = 0$; $F(\beta'\gamma') = \frac{1}{2}$ при $\beta' = -\frac{\lambda}{p}$; $F(\beta'\gamma') = \frac{1}{2}$ при $\beta' = +\frac{\lambda}{p}$.

При переходе от входного зрачка к выходному добавляется аберрация изображения, после чего $F = 1$ при $\beta' = 0$; $F = \frac{1}{2} h\left[k\Delta\left(\frac{\lambda}{p},\ 0\right)\right]$ при $\beta' = -\frac{\lambda}{p}$; $F = \frac{1}{2} h\left[k\Delta\left(-\frac{\lambda}{p},\ 0\right)\right]$ при $\beta' = +\frac{\lambda}{p}$.

Изображение миры, т. е. преобразование Фурье амплитуды на выходном зрачке F (будем ее считать равной амплитуде на входном зрачке в соответственных точках), можно определить уравнением

$$I(y') = 1 + \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{\lambda}{p},\ 0\right) h\left(-2\pi\frac{y'}{p}\right) + F\left(-\frac{\lambda}{p},\ 0\right) h\left(2\pi\frac{y'}{p}\right)\right]$$

или, подставив вместо F его значения, заменив h через синусы и косинусы,

$$I(y') = 1 + \exp i\Phi \cos\left(2\pi\frac{y'}{p} - \varphi\right), \qquad (X.58)$$

где

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{N\left(\frac{\lambda}{p}\right)+N\left(-\frac{\lambda}{p}\right)}{2}; \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{N\left(\frac{\lambda}{p}\right)-N\left(-\frac{\lambda}{p}\right)}{2}.$$

Как и в случае некогерентного освещения, изображение синусоидального распределения имеет синусоидальный характер с периодом, определяемым по законам геометрической оптики. Контраст (ЧКХ) зависит от Φ, смещение изображения — от φ.

Если написать коэффициент при cos в формуле (X.58) в виде

$$\exp i\Phi = \cos\Phi + i\sin\Phi,$$

то можно считать, что ЧКХ при когерентном освещении равна $\cos\Phi$. Заметим, что в случае симметричного (относительно оси OZ) распределения аберраций (что всегда осуществляется, если объект расположен в меридиональной плоскости — плоскости OZ) $N\left(\frac{\lambda}{p}\right) = N\left(-\frac{\lambda}{p}\right)$, $\varphi = 0$ и $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}N\left(\frac{\lambda}{p}\right)$.

Следует обратить внимание на то, что в отличие от случая некогерентного освещения мы здесь сравниваем *не интенсивности* (*освещенности*), *а амплитуды*. Только в этом случае синусоидальное распределение (амплитуд) на объекте превращается в синусоидальное же распределение (амплитуд) на изображении.

Любопытно отметить, что когда амплитуда на объекте изменяется по синусоидальному закону, то яркость, т. е. квадрат амплитуды, изменяется по несколько более сложному закону, а именно: если $O(y) = 1 + \cos\frac{2\pi y}{p}$, то

$$[O(y)]^2 = \frac{3}{2} + 2\cos\frac{2\pi y}{p} + \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi y}{p} \qquad (X.59)$$

и кривая распределения кроме периода $\frac{2\pi y}{p}$ обладает еще гармоникой $\frac{4\pi y}{p}$.

Так же обстоит с изображением; распределение освещенности в нем легко определить, умножая правую часть равенства (X.58) на сопряженную величину:

$$|I(y')|^2 = \left[1 + h(\Phi)\cos\left(2\pi\frac{y'}{p} - \varphi\right)\right] \times$$

$$\times\left[1 + h(-\Phi)\cos 2\pi\left(\frac{y'}{p} - \varphi\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{2} + 2\cos\Phi\cos\left(\frac{2\pi y'}{p} - \varphi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi y'}{p} - 2\varphi\right). \qquad (X.60)$$

Таким образом, изображение характеризуется рядом такого же вида, как и предмет, с той только разницей, что член основного

периода умножен на cos Φ (как и в случае амплитуды); вторая же гармоника по амплитуде остается без изменения, только смещается на 2φ, т. е. кривая отражает не только уменьшение контраста, но также и влияние второй гармоники.

7. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧКХ

Случай малых аберраций, не превышающих нескольких длин волн

Рассмотрим в пространстве изображений выходящую из системы волну S', ортогональную лучам, излучаемым точечным источником в пространстве объектов. Для определенности предположим, что поверхность волны S' проходит через центр выходного зрачка P' (рис. X.16). Рассмотрим также ближайшую сферическую поверхность сравнения (идеальную поверхность волны) с центром в точке O', где главный луч пучка пересекает плоскость изображений, и предположим, что эта поверхность также проходит через точку P'. Луч $P'O'$ обычно называют главным лучом пучка.

Рис. X.16

Пусть $N(y', z')$ — отступление истинной волны от идеальной; y' и z' — координаты пересечения луча с идеальной волновой поверхностью. Определим частотно-контрастную характеристику, относящуюся к точке O'. Согласно формуле (X.50)

$$K(\mu', \nu') = a(\mu', \nu') = U \iint\limits_S F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \lambda\mu', \gamma' - \lambda\nu')\, d\beta'\, d\gamma',$$

где U — коэффициент нормировки.

Рассмотрим какую-нибудь точку M' волновой поверхности. Положение точки M' определим с помощью направляющих косинусов β' и γ' прямой $O'M'$ по отношению к координатной системе $P'Y'Z'$, причем ось $P'Y'$ лежит в меридиональной плоскости, а $P'Z'$ перпендикулярна ей и главному лучу $P'O'$. Комплексная величина $F(\beta', \gamma')$ представляет собой амплитуду на элементе поверхности волны S', находящемся на прямой $O'M'$, и разность фаз соответствует волновой аберрации этого элемента. Как обычно, будем считать, что амплитуда по всей волновой поверхности постоянна, фаза равна $\frac{2\pi}{\lambda} N(\beta', \gamma')$, где N — волновая аберрация для направления β', γ'.

Положим

$$F(\beta', \gamma') = e^{-ikN(\beta', \gamma')}.$$

Обозначим через F^* функцию, сопряженную с F.

Тогда

$$F^*(\beta' - \lambda\mu', \gamma - \lambda\nu') = e^{ikN(\beta'-\lambda\mu', \gamma'-\lambda\nu')},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Легко проверить, что

$$FF^* = \cos[N(\beta', \gamma') - N(\beta' - \lambda\mu', \gamma' - \lambda\nu')] -$$
$$- i \sin[N(\beta', \gamma') - N(\beta' - \lambda\mu', \gamma' - \lambda\nu')].$$

Вычисление частотно-контрастной характеристики сводится к расчету двух интегралов:

$$\left.\begin{aligned} C &= \iint\limits_{\sigma} \cos k[N(\beta', \gamma') - N(\beta' - \lambda\mu', \gamma' - \lambda\nu')]\, d\beta'\, d\gamma'; \\ S &= \iint\limits_{\sigma} \sin k[N(\beta', \gamma') - N(\beta' - \lambda\mu', \gamma' - \lambda\nu')]\, d\beta'\, d\gamma'. \end{aligned}\right\} \quad (X.61)$$

Тогда

$$K(\mu', \nu') = \iint\limits_{\sigma} FF^* d'\beta' d\gamma' = C - iS.$$

Частотно-контрастная характеристика обладает реальной частью C и чисто мнимой iS. Отношение $\frac{S}{C} = \operatorname{tg} \varphi$ дает смещение фазы изображения объекта, представляющегося в виде решетки с синусоидальным распределением амплитуд.

Задачей данного параграфа является вычисление функций C и S для оптических систем, конструктивные элементы которых считаются известными. Большинство авторов, занимающихся этим вопросом, заменяет сферу сравнения плоскостью выходного зрачка. Такая замена далеко не всегда законна и, кроме того, приводит к ряду затруднений, о которых будет сказано ниже.

Прежде всего установим, для каких систем требуется рассчитать частотно-контрастную характеристику с учетом дифракции. Как было указано выше, дифракция оказывает заметное влияние в том случае, когда волновые аберрации не превышают двух-трех волн, т. е. в системах в высокой степени корригированных. В таких системах обращается особое внимание на исправление сферической, хроматической аберраций и комы. Выполнение условия апланатизма приводит к обязательному выполнению соотношения синусов, а именно: если лучи в пространстве объектов пересекают сферическую волновую поверхность в точках, соответствующих значениям направляющих косинусов β и γ, меняющихся на равные величины $\Delta\beta = \Delta\gamma$, то в пространстве изображений величины β' и γ' будут меняться также на равные величины. Это обеспечивает отсутствие каких-нибудь сгущений и разрежений точек на сфере сравнения, которые привели бы к неправильным значениям рас-

пределения энергии в изображении точки и к соответствующей погрешности при вычислении частотно-контрастной характеристики. Это свойство сохраняется и для точек вне оси, если оптическая система достаточно хорошо исправлена для них (волновые аберрации не более нескольких длин волн).

Отметим здесь, что для этих же систем указанное свойство не распространяется на плоскости входного и выходного зрачков. Если лучи в пространстве предметов пересекают входной зрачок по узлам квадратной сетки, то в пространстве изображений они пересекают плоскость выходного зрачка по узлам сетки, расположенным по гиперболическим кривым [6]. При больших относи-

Рис. X.17

Рис. X.18

тельных отверстиях, какие встречаются, например, при расчете объективов микроскопа, отступления от квадратной формы громадны. Это вызывает появление больших погрешностей в вычислениях интегралов C и S при замене дифференциалов $rd\beta'$ и $rd\gamma'$ дифференциалами dm' и dM'.

Чтобы избежать этих погрешностей, выбираем лучи, подлежащие расчету для определения волновых аберраций, так, чтобы их выходные координаты β' и γ' составляли квадратную сетку, изображенную на рис. X.17, а именно: выбираем временную систему координат, в которой ось PX направлена от центра P входного зрачка (и вершины волновой поверхности) к точке T источника (рис. X.18). Ось меридиональной плоскости, содержащей T, направлена перпендикулярно PX; ось Z направлена перпендикулярно меридиональной плоскости в сторону читателя. В этой системе координат точки пересечения лучей со сферой имеют координаты $y = q\varepsilon$, $z = q_1\varepsilon$, где q и q_1 — целые числа; синусы апертурных углов рассматриваемых лучей меняются через равные промежутки $\frac{\varepsilon}{r}$, где r — радиус кривизны поверхности волны.

Переходим к новой системе координат, в которой осью X_1 служит оптическая ось системы, осью Y_1 — перпендикуляр к оси X_1, лежащий в меридиональной плоскости; ось Z_1 параллельна оси Z. Начало координат, как обычно, берем у вершины

первой поверхности. Переход от старых координат к новым происходит по формулам

$$x_1 = x\cos w_1 + y\sin w_1 + s_{гл}; \quad x = r - \sqrt{r^2 - (y^2 + z^2)};$$

$$y_1 = -x\sin w_1 + y\cos w_1; \quad z_1 = z,$$

где $s_{гл}$ — расстояние от первой поверхности системы до входного зрачка; w_1 — угол главного луча с оптической осью (положительный, если луч идет сверху вниз).

Направляющие косинусы луча в новой системе координат определяются по формулам

$$\lambda = -\frac{x_1 - s_1}{r}; \quad \mu = -\frac{y_1 - l_1}{r}; \quad \nu = -\frac{z_1}{r},$$

где s_1 — расстояние от первой поверхности системы до объекта; $l_1 = TA$ — расстояние объекта от оси. По известным l_1, s_1 и направляющим косинусам выполняется на электронно-вычислительной машине расчет хода лучей.

Волновая аберрация N вычисляется как сумма оптических путей от первой сферической волновой поверхности до последней. В качестве поверхности волны в пространстве объектов принимаем сферу с центром в точке-объекте; радиус этой сферы берем таким, чтобы сфера проходила через центр входного зрачка P. В часто встречающемся случае, когда предмет находится на бесконечности, радиус волны становится бесконечно большим и волновая поверхность плоская. Сфера сравнения в пространстве изображений имеет центром точку T' (параксиальное изображение точки T предмета). Впрочем, в качестве точки T', находящейся на расстоянии l_0' от оси, можно взять любую другую точку при условии, что l_0' мало отличается от βl_1, например за l_0' можно принять расстояние от оси до точки пересечения главного луча с плоскостью изображения. Радиус сферы сравнения в пространстве изображений можно выбрать таким, чтобы эта сфера проходила через центр выходного зрачка, тогда под p следует понимать расстояние от плоскости изображения до точки пересечения сферы сравнения с осью. Для повышения точности вычислений могут быть приняты различные меры (например, при наличии больших воздушных промежутков последние можно исключить из оптического пути и учесть лишь разность путей по лучу и по оси — небольшая величина, которая может быть вычислена точно).

Наибольшую трудность представляет расчет разности пути по лучу и оси от первой (последней) поверхности до сферы сравнения. Формула расчета этой разности для системы, работающей с конечного расстояния (рис. X.19), в пространстве изображений имеет вид

$$d = s_0' \frac{\mu^2 + \nu^2}{\lambda(1+\lambda)} - \frac{x}{\lambda} - M + \frac{l_0'^2}{p + \sqrt{p^2 + l_0'^2}} - \frac{\delta}{2\sqrt{l_0'^2 + p^2}}, \quad (X.62)$$

где

$$M = \mu\delta g' + \nu\delta G';$$

$$\delta = \delta g'^2 + \delta G'^2;$$

$$l_0' = \beta l_1;$$

p — расстояние от плоскости изображения до плоскости выходного зрачка, равное $s_{гл}' - s_0'$.

Рис. X.19

Рис. X.20

В пространстве объектов аберрации отсутствуют и поэтому формула для d принимает более простой вид

$$d = s_1 \frac{\mu^2 + \nu^2}{\lambda(1+\lambda)} - \frac{x}{\lambda} + \frac{l_1^2}{p + \sqrt{p^2 + l_1^2}}. \qquad (X.62^*)$$

В случае, когда предмет (изображение) находится в бесконечности (рис. X.20), r обращается в бесконечность, и для расстояния $M_1M_2 = d$ получаем следующую формулу:

Рис. X.21

$$d = \frac{x - y\,\mathrm{tg}\,w_1}{\lambda - \mu\,\mathrm{tg}\,w_1} + s_{гл} \times$$

$$\times \frac{\mu^2(\mathrm{tg}^2 w_1 - 1) - \nu^2 - 2\lambda\mu\,\mathrm{tg}\,w_1}{\bar{\lambda}(1+\bar{\lambda})}, \qquad (X.63)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda - \mu\,\mathrm{tg}\,w_1$. Точность, даваемая, например, электронно-вычислительной машиной «Урал-2», вполне достаточна для большинства оптических систем. Проделанные для нескольких объективов численные расчеты показали, что при общей длине оптического пути порядка 50 *мм* ошибки в определении N не превышали 1—2 единиц шестого знака после запятой (1—2 *нм*), т. е. примерно $\frac{1}{300}\lambda$; полагая, что точность в $\left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{20}\right)\lambda$ достаточна, можно считать, что она может быть получена даже при длине оптического пути в 1 *м*. Следует отметить, что указанная точность выдерживается при использовании схемы Федера.

Предположим, что CC_1C_2 (рис. X.21) — контур рабочей части поверхности волны после выхода из системы. Величины q и q_1 берутся такими, чтобы подлежащие расчету лучи проходили

в основном внутри контура, а небольшая часть лучей пересекала поверхность волны и вне контура для облегчения дальнейших операций. Число лучей, для которых проводится расчет, должно быть таково, чтобы для любой точки поверхности путем простой (линейной) интерполяции можно было определить N с точностью до $\left(\frac{1}{20} \div \frac{1}{10}\right)\lambda$. Расположение точек по пересечениям взаимно перпендикулярных прямых, разделенных разными промежутками, намного упрощает интерполирование. Число точек должно быть порядка 50—100, что обеспечивает более чем достаточную точность. Путем интерполирования на середину[1] можно легко довести число элементов до 200—400. При таком числе точность в $\frac{1}{20}\lambda$ для каждого элемента обеспечивается в большинстве случаев. При этом условии вполне законно заменить истинную волновую поверхность ячеистой, состоящей из большого числа (например, 400) квадратных элементов, каждый из которых имеет сферическую поверхность с постоянной волновой аберрацией; заменяют истинное переменное значение волновой аберрации в этом элементе постоянным и округленным в ближайшую сторону до $0{,}05\lambda$ значением. При этом разность между истинным значением аберрации N на этом элементе и принятым округленным значением не превышает $(0{,}05 \div 0{,}1)\lambda$. Отклонения волновой аберрации от истинного значения в пределах $\left(\frac{1}{20} \div \frac{1}{10}\right)\lambda$ не оказывают заметного влияния на картину распределения освещенности в пятне рассеяния, а тем более на частотно-контрастную характеристику, которая менее чувствительна к изменениям формы волны, чем аппаратная функция. Это положение было проверено на ряде конкретных примеров; с этой целью на различных участках поверхности волны с определенным распределением волновых аберраций менялось значение последних на $0{,}1\lambda$ и вычислялись заново координаты кривой частотно-контрастной характеристики.

На основании этих соображений была выработана следующая схема вычисления частотно-контрастной характеристики.

---

[1] Напомним, что если имеется таблица значений функции $f(x)$ для равноудаленных значений аргумента a, $a+\omega$, $a+2\omega$, ... и их разностей $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$

$$\begin{array}{c|c|c|c} a & f(a) & & \\ & & \Delta f(a) & \\ a+\omega & f(a+\omega) & & \Delta^2 f(a), \\ & & \Delta f(a+\omega) & \\ a+2\omega & f(a+2\omega) & & \end{array}$$

то значение функции для аргумента $a+\frac{\omega}{2}$ вычисляется по формуле

$$f\left(a+\frac{\omega}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2}\Delta f(a) - \frac{1}{8}\Delta^2 f(a).$$

1. После того как предварительными вычислениями определены границы зрачка выхода, а следовательно, и поверхности волны, вычисляется на электронно-вычислительной машине ход qq_1 лучей (от 25 до 100 в зависимости от качества исправления), точки пересечения которых с входной волновой поверхностью располагаются на узлах квадратной сетки, охватывающей всю рабочую часть зрачка. Определяются координаты точек пересечения луча с выходной идеальной волновой поверхностью и волновая аберрация N каждого луча. Машина запоминает значения волновых аберраций и производит, если нужно, интерполяцию на средние точки с целью увеличения числа их до 100—400.

По причинам, указанным выше, эти точки ложатся на квадратную сетку, подобную сетке входной поверхности волны. Одновременно с расчетом лучей электронно-вычислительная машина определяет границы пучка на основании значений высот точек пересечения с отдельными поверхностями и зрачками системы.

Рис. X.22

2. Машина округляет все значения волновой аберрации до 0,05λ. Представим себе сетку (см. рис. X.17), центры ячеек которой совпадают с точками пересечения лучей с волновой поверхностью (напомним, что из-за апланатичности системы эти точки расположены на равных расстояниях друг от друга). Каждая клетка служит элементом интеграла $r^2\, d\beta' d\gamma'$. Контур поверхности, внутри которой производится интегрирование, определяется на основании расчета хода лучей; если луч пересек хотя бы одну из оправ или диафрагм, соответствующая клетка не принимается в расчет. Граница рабочей части зрачка имеет вид, показанный на рис. X.22. Внутри каждой клетки можно считать N постоянным и округленным до $\pm 0{,}05\lambda$. Смещениям зрачка дают последовательно значения, соответствующие стороне одной, двух, трех клеток и т. д., т. е. ε, 2ε, 3ε, ... Смещению $K\varepsilon$ соответствует частота $R_k = \frac{K\varepsilon n'}{r\lambda}$, причем n' — показатель преломления последней среды, r — радиус волновой поверхности. На практике ограничиваются обычно двумя, в крайнем случае — четырьмя направлениями штрихов: первое соответствует оси Z, второе — оси Y, третье и четвертое, редко рассчитываемые, располагаются под углом 45° к предыдущим.

Положим, что вычисление частотно-контрастной характеристики производится для направления оси Z. Машина вычисляет разности величин N, соответствующие двум горизонтальным клеткам, смещенным последовательно на 1, 2, . . ., p клеток. Это вычитание происходит только в том случае, когда обе клетки соответствуют определенным (существующим) значениям N; если одна из двух клеток помечена крестиком, вычитание не производится. При вычитании сохраняется лишь дробная часть, а целая

отбрасывается, так как отбрасывание целого числа длин волн не оказывает влияния на результат; при получении отрицательной величины прибавляется одна волна. Тогда все разности имеют одно из значений 0; 0,1; 0,2; . . .; 0,9. Положим, что имеется n_0 клеток с разностью 0; n_1 — с разностью 0,1; n_9 — с разностью 0,9. Тогда значение частотно-контрастной характеристики может быть написано в виде

$$C = (n_0 - n_5) + \cos 36^\circ (n_1 + n_9 - n_6 - n_4) + \\ + \cos 72^\circ (n_2 + n_8 - n_7 - n_3);$$

$$S = \sin 36^\circ (n_1 + n_4 - n_9 - n_6) + \sin 72^\circ (n_2 + n_3 - n_7 - n_8)$$

или

$$\left.\begin{aligned} C &= n_0 - n_5 + 0{,}809 (n_1 + n_9 - n_6 - n_4) + \\ &\quad + 0{,}309 (n_2 + n_8 - n_7 - n_3); \\ S &= 0{,}588 (n_1 + n_4 - n_9 - n_6) + \\ &\quad + 0{,}951 (n_2 + n_3 - n_7 - n_8). \end{aligned}\right\} \qquad (X.64)$$

Далее все полученные результаты делятся на ρ — общее число рабочих клеток. Заметим, что при изложенном приеме в вычислениях участвует лишь та часть площади, которая является общей рабочей площадью поверхности волны с этой же площадью, смещенной на величину $R\lambda$.

Таким же способом вычисляется частотно-контрастная характеристика в направлении оси Y, но смещение производится по вертикали. Если необходимо, можно использовать аналогичный способ, производя вычисления в направлении диагоналей, и получить частотно-контрастные характеристики для направлений, составляющих угол в 45° с основными.

Для точки на оси вычисления значительно упрощаются. На основании результатов расчета хода 4—6 лучей можно составить интерполяционную формулу для значений N любой точки волновой поверхности и вычислять величины N по этой формуле, минуя расчет хода лучей. Этот прием значительно сокращает время расчета ЧКХ.

С целью проверки точности формул была рассчитана частотно-контрастная характеристика для дефокусированной безаберрационной оптической системы при квадратном зрачке (значение дефокусировки бралось таким, что на концах диагонали зрачка волновая аберрация имела значения 0,45; 0,9; 1,8; 5,4; 10,8 λ) и были сравнены кривые частотно-контрастных характеристик. Точная кривая получена с помощью формулы

$$K(\Delta) = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} a\Delta\,(2 - \Delta)}{\frac{4\pi a\Delta}{\lambda}}, \qquad (X.65)$$

где $2a$ — волновая аберрация на концах диагонали пятна рассеяния со стороной $\Delta = \frac{\lambda R}{n' \sin u'_m}$; R — частота (в периодах на 1 *мм*), u'_m — апертурный угол для вписанного в квадрат круга; вторая рассчитана на электронно-вычислительной машине с помощью описанной выше методики. Результаты вычислений на машине приведены в виде кривых на рис. X.23 и X.24; точками

Рис. X.23

обозначены величины, полученные на основании точной формулы.

Следует отметить, что вычисления в рассмотренных случаях выполнялись на ЭВМ без интерполяции; последняя, практически не влияя на продолжительность расчета (так как основное время машины уходит на расчет хода лучей и вычисление волновой аберрации), значительно увеличивает точность.

Опыт работы по приведенной схеме с системами, обладающими

Рис. X.24

осью симметрии, показал, что сетку точек на поверхности волны, для которых вычисляются волновые аберрации, надо расположить симметрично относительно меридиональной плоскости таким образом, чтобы ближайшие точки справа и слева расположились на полстороны клетки.

Наконец, следует отметить влияние значения радиуса сферы сравнения в пространстве изображений на величину волновых аберраций; это влияние особенно сильно сказывается при малых радиусах сферы сравнения. Хотя вопрос о выборе радиуса r

в литературе не нашел отражения и не может считаться решенным, по различным причинам следует его принять бесконечно большим.

При этом формула (VII.62), применяемая для вычисления разности оптических путей в последней среде, принимает вид

$$d = s_0' \frac{\mu^2 + \nu^2}{\lambda (1 + \lambda)} - \frac{x}{\lambda} - \mu \delta g' - \nu \delta G',$$

где x — абсцисса точки пересечения луча с последней поверхностью системы.

Если предмет на бесконечности, следует применить формулу (VII.63); аналогичную формулу можно применить, если s_0' бесконечно велико.

Вычисление ЧКХ для очень малых частот

Такие оптические системы, как фотографические объективы, особенно универсальные и светосильные, обладают довольно большими волновыми аберрациями (доходящими до 5—10 длин волн и более).

Для таких систем кривая ЧКХ около начала координат круто спускается вниз. Так как первая выданная машиной точка ЧКХ лежит относительно далеко от начала, трудно оценить значение контраста, соответствующего малым частотам, которые обычно представляют наибольший интерес. Укажем прием, дающий возможность определить поведение кривой около начала координат, что позволит дополнить участок кривой в наиболее важной для практики области. Как следует из формулы (X.51), контраст при весьма малых частотах выражается следующим образом:

$$K(\mu', 0) = \frac{1}{S} \iint\limits_{S_0} \cos 2\pi\mu' \delta g' \, dS + \frac{i}{S} \iint\limits_{S_0} \sin 2\pi\mu' \delta g' \delta S$$

для горизонтальных штрихов;

$$K(0, \nu') = \frac{1}{S} \iint\limits_{S_0} \cos 2\pi\nu' \delta G' \, dS + \frac{i}{S} \iint\limits_{S_0} \sin 2\pi\nu' \delta G' \delta S$$

для вертикальных штрихов.

Здесь S — площадь зрачка; S_0 — общая часть площади двух пересекающихся контуров зрачков, отстоящих друг от друга на $\frac{\lambda\mu'}{\sin \omega'}$ для горизонтальных штрихов или на $\frac{\lambda\nu'}{\sin \omega'}$ для вертикальных штрихов. (Если показатель преломления последней среды n' отличен от единицы, следует величину $\sin \omega'$ заменить произведением $n' \sin \omega'$.)

Когда контур зрачка является окружностью или мало от нее отличается, имеем

$$\frac{S_0}{S} = \frac{2}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

где $\cos\theta = \frac{\lambda\mu'}{2\sin\omega'}$ для горизонтальных штрихов или $\cos\theta = \frac{\lambda\nu'}{2\sin\omega'}$ для вертикальных штрихов.

Но для θ близкого к $\frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sin\theta = 1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \cos\theta,$$

откуда

$$\frac{S_0}{S} = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\mu'}{\sin\omega'}$$

для горизонтальных штрихов;

$$\frac{S_0}{S} = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\nu'}{\sin\omega'}$$

для вертикальных штрихов.

Когда произведения $\mu'\delta g'$ и $\nu'\delta G'$ малы, что имеет место при малых частотах, можно написать

$$\cos 2\pi\mu'\delta g' = 1 - 2\pi^2\mu'^2\delta g'^2;$$

$$\sin 2\pi\mu'\delta g' = 2\pi\mu'\delta g'$$

и аналогичные формулы для ν'.

После указанных замечаний можно привести $K(\mu', 0)$ и $K(0, \nu')$ к виду

$$K(\mu', 0) = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\mu'}{\sin\omega'} - \frac{2\pi^2\mu'^2}{S}\iint\limits_{S_0}\delta g'^2 dS - \frac{2\pi i\mu'}{S}\iint\limits_{S_0}\delta g'\, dS;$$

$$K(0, \nu') = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\nu'}{\sin\omega'} - \frac{2\pi^2\nu'^2}{S}\iint\limits_{S_0} gG'^2 dS - \frac{2\pi i\nu'}{S}\iint\limits_{S_0}\delta G'\, dS.$$

Для краткости обозначим

$$\iint\limits_{S_0}\delta g'^2\frac{dS}{S} = (\delta^2); \quad \iint\limits_{S_0}\delta g'\frac{dS}{S} = (\delta);$$

$$\iint\limits_{S_0}\delta G'^2\frac{dS}{S} = (\bar{\delta}^2); \quad \iint\limits_{S_0}\delta G'\frac{dS}{S} = (\bar{\delta}).$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} K(\mu', 0) &= 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\mu'}{\sin\omega'} - 2\pi^2\mu'^2(\delta^2) - 2\pi i\mu'(\delta); \\ K(0, \nu') &= 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\nu'}{\sin\omega'} - 2\pi^2\nu'^2(\bar{\delta}^2) - 2\pi i\nu'(\bar{\delta}). \end{aligned}\right\} \quad (X.66)$$

Удобно ввести вместо частот μ' и ν' относительные частоты $\frac{\mu'}{\mu_0'}$ и $\frac{\nu'}{\mu_0'}$, где μ_0' — максимальная пропускаемая частота, определяемая формулой $\mu_0' = \frac{2\sin\omega'}{\lambda}$. Тогда

$$K(\mu', 0) = 1 - \frac{4}{\pi}\frac{\mu'}{\mu_0'} - \frac{8\pi^2\sin^2\omega'}{\lambda^2}(\delta^2)\left(\frac{\mu'}{\mu_0'}\right)^2 - i\frac{4\pi\sin\omega'}{\lambda}(\delta)\left(\frac{\mu'}{\mu_0'}\right);$$

$$K(0, \nu') = 1 - \frac{4}{\pi}\frac{\nu'}{\mu_0'} - \frac{8\pi^2\sin^2\omega'}{\lambda^2}(\bar{\delta}^2)\left(\frac{\nu'}{\mu_0'}\right)^2 - i\frac{4\pi\sin\omega'}{\lambda}(\bar{\delta})\left(\frac{\nu'}{\mu_0'}\right).$$

Из этих выражений получаем для модуля K следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} \text{ЧКХ}\left(\frac{\mu'}{\mu_0'}\right) &= |K(\mu', 0)| = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\mu'}{\mu_0'}\right) - \\ &- \frac{8\pi^2\sin^2\omega'}{\lambda^2}[(\delta^2) - (\delta)^2]\left(\frac{\mu'}{\mu_0'}\right)^2; \\ \text{ЧКХ}\left(\frac{\nu'}{\mu_0'}\right) &= |K(0, \nu')| = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\nu'}{\mu_0'}\right) - \\ &- \frac{8\pi^2\sin^2\omega'}{\lambda^2}[(\bar{\delta}^2) - (\bar{\delta})^2]\left(\frac{\nu'}{\mu_0'}\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (X.67)$$

а смещение фаз получается по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{4\pi\sin\omega'}{\lambda}(\delta)\frac{\mu'}{\mu_0'}.$$

Применить для составления кривой ЧКХ формулы (X.67) можно следующим образом. Вычислив величины (δ^2), (δ), $(\bar{\delta}^2)$ и $(\bar{\delta})$ как средние по всем точкам на зрачке, для которых рассчитан ход лучей, положим для краткости

$$\frac{8\pi^2\sin^2\omega'}{\lambda^2}[(\delta^2) - (\delta)^2] = b.$$

Тогда

$$|K(\mu', 0)| = 1 - 1{,}272\frac{\mu'}{\mu_0'} - b\left(\frac{\mu'}{\mu_0'}\right)^2. \qquad (X.68)$$

Задавая $\frac{\mu'}{\mu_0'}$ два-три достаточно малых значения, например 0,025 и 0,05, получаем две точки, через которые проходит кривая ЧКХ. Помня, что эта кривая касается прямой $|K| = 1 - 1{,}272\frac{\mu'}{\mu_0'}$ и, кроме того, в начале своего пути проходит через две рассчитанные по формулам (X.67) точки, а также через точку, вычисленную

с помощью ЭВМ, легко вычертить кривую. Следует отметить, что для симметричных распределений (точка на оси) величины δ и $\overline{\delta}$ равны нулю и выражения для ЧКХ упрощаются.

Вычисление ЧКХ в случае больших волновых аберраций (геометрическое приближение)

Как было показано ранее (стр. 627), ЧКХ для оптических систем, обладающих большими значениями волновой аберрации (от 2—3λ и выше), целесообразно вычислять по приему интегрирования по зрачку или по поверхности идеальной волны (которое может быть заменено интегрированием по площади кружка рассеяния). Для двух основных направлений (μ', 0) и (0, ν') ЧКХ вычисляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} K(\mu',0) &= \frac{1}{S}\iint\limits_S \cos 2\pi\mu'\delta g' dS + \frac{i}{S}\iint\limits_S \sin 2\pi\mu'\delta g' dS; \\ K(0,\nu') &= \frac{1}{S}\iint\limits_S \cos 2\pi\nu'\delta G' dS + \frac{i}{S}\iint\limits_S \sin 2\pi\nu'\delta G' dS, \end{aligned}\right\} \quad (X.69)$$

где S — площадь, ограниченная конусом лучей, пропущенных выходным зрачком; ν', μ' — частота, т. е. число штрихов на 1 *мм*; $\delta g'$ — меридиональная составляющая поперечной аберрации; $\delta G'$ — сагиттальная составляющая поперечной аберрации.

Вычисления можно выполнять согласно применяемой для предыдущего случая методике с соответствующими изменениями, а именно: с помощью ЭВМ рассчитывается ход n лучей и определяются поперечные аберрации $\delta g'$ каждого луча. Выбор лучей осуществляется так же как в рассмотренном случае. Важно, чтобы каждому лучу соответствовал одинаковый поток. Число n лучей (клеток) должно быть не менее 100—200 на половину зрачка (если оптическая система имеет ось симметрии). При такой густоте лучей возможна интерполяция величины $\delta g'$ на половину интервала, что обеспечивает от 400 до 800 элементов. Все величины $\delta g'$ запоминаются машиной и так же как в случае малых волновых аберраций, разбиваются на отдельные группы таким образом, чтобы $\mu'\delta g'$ лежали в определенных пределах, например от 0 до $\frac{1}{40}$, от $\frac{1}{40}$ до $\frac{2}{40}$ и т. д. В каждой группе аргумент при cos и sin колеблется в пределах $\frac{\pi}{20}$, т. е. 9 или $\pm 4{,}5°$, что дает в обычных условиях достаточную точность. Пусть n_1; n_2; n_3 — число лучей, для которых $\mu'\delta g'$ лежит в пределах

$$0 \to \frac{\pi}{\kappa}; \qquad \frac{\pi}{\kappa} \to \frac{2\pi}{\kappa}; \qquad \frac{2\pi}{\kappa} \to \frac{3\pi}{\kappa} \text{ и т. д. от } \left(\frac{2\kappa-1}{\kappa}\right)\pi$$

$$\text{до } \frac{2\kappa}{\kappa}\pi \left(\text{т. е. от } 2\pi - \frac{\pi}{\kappa} \text{ до } 2\pi\right),$$

где κ — число, на которое делится полуокружность $\pi = 180°$.

Если $|\mu'\delta g'| > 2\pi$, то из этого значения следует вычесть целое число q полных окружностей 2π с тем, чтобы $|\mu'\delta g'| - 2q\pi$ лежало между 0 и 2π. Обозначим через n_1 число элементов, попадающих в первый промежуток; через n_2 — число, относящееся ко второй группе, и т. д.

Заметим, что при достаточно большом κ величины $\cos 2\pi\,(\mu'\delta g')$ и $\sin 2\pi\,(\mu'\delta g')$ для всех элементов одной группы можно считать одинаковыми и равными

$$\cos\frac{2p-1}{2\kappa}\pi, \qquad \sin\frac{2p-1}{2\kappa}\pi.$$

Тогда ЧКХ можно написать в виде

$$K(\mu',0) = \frac{1}{n}\left[n_1\cos\frac{\pi}{2\kappa} + n_2\cos\frac{3\pi}{2\kappa} + n_3\cos\frac{5\pi}{2\kappa} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + n_{2\kappa}\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2\kappa}\right)\right] + \frac{i}{n}\left[n_1\sin\frac{\pi}{2\kappa} + n_2\sin\frac{3\pi}{2\kappa} +\right.$$

$$\left. + n_3\sin\frac{5\pi}{2\kappa} + \cdots + n_{2\kappa}\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2\kappa}\right)\right]$$

или, поскольку

$$\cos\frac{\pi}{2\kappa} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2\kappa}\right); \qquad \sin\frac{\pi}{2\kappa} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2\kappa}\right),$$

$$K(\mu',0) = \frac{1}{n}\left[(n_1 + n_{2\kappa})\cos\frac{\pi}{2\kappa} + (n_2 + n_{2\kappa-1})\cos\frac{3\pi}{2\kappa} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (n_\kappa + n_{\kappa+1})\cos\frac{(2\kappa-1)\pi}{2\kappa}\right] + \frac{i}{n}\left[(n_1 - n_{2\kappa})\sin\frac{\pi}{2\kappa} +\right.$$

$$\left. + (n_2 - n_{2\kappa-1})\sin\frac{3\pi}{2\kappa} + \cdots + (n_\kappa - n_{\kappa+1})\sin\frac{(2\kappa-1)\pi}{2\kappa}\right].$$

Для $K\,(0,\,\nu')$ получаем аналогичные формулы, отличающиеся от предыдущих лишь тем, что вместо произведения $\mu'\delta g'$ в них входит произведение $\nu'\delta G'$. Число κ следует брать не менее 20 и более, в зависимости от желаемой точности.

Если необходимо определить ЧКХ для большого числа частот μ' или ν', лучше применить метод, основанный на приеме гармонического анализа, с помощью которого определяются сразу все коэффициенты разложения функции $n\,(\delta g')$ или $n\,(\delta G')$ в ряд Фурье.

Пусть A и B (рис. X.25) — точки на контуре пятна рассеяния, проекции которых на ось OZ (перпендикулярную выбранному направлению штрихов) A_1 и B_1 наиболее отдалены друг от друга. Расстояние A_1B_1 делим на κ полос равной ширины и отсчитываем

число точек пересечения лучей с плоскостью изображения, лежащих внутри этих полос, n_1; n_2; $n_к$; . . .; n_p. Выполняем график значений n как функции от координаты z, принимая A_1 за начало. В случае необходимости сглаживаем кривую с целью устранения случайных отклонений величин n от точных значений. Функцию $n = f(z)$ подвергаем гармоническому анализу для нахождения значений ЧКХ, соответствующих частотам R, $2R$, $3R$ и т. д., где $R = \frac{1}{A_1B_1}$.

Рис. X.25

Подробности о том, как проводится этот анализ, можно найти в курсах приближенных вычислений.

Вычисление на ЭВМ

Вычисление ЧКХ на ЭВМ выполняется по ранее описанной методике с учетом особенностей ЭВМ. Кроме того, желательно использовать, насколько это возможно, те приемы, которые были применены при вычислении ЧКХ в дифракционном варианте (см. стр. 634), т. е. через оптическую систему направлять такое же семейство лучей. На ЭВМ вычисляются составляющие аберраций $\delta g'$ и $\delta G'$ (отсчитанные от точки пересечения главного луча с плоскостью установки).

Рассмотрим случай, когда штрихи параллельны меридиональной плоскости. Величины $\delta G'$ группируют в зависимости от их значений. К первой группе относят те лучи, для которых $\delta G'$ лежит в пределах от z_0 до $(z_0 + \Delta)$; ко второй — лучи, для которых $\delta G'$ лежит в пределах $(z_0 + \Delta) \div (z_0 + 2\Delta)$ и т. д.; машина считает число лучей $n_к$, попадающих в указанные промежутки. Далее производится гармонический анализ функции $n(\Delta g')$, т. е. вычисляется на машине сумма величин $n_к \cos 2\pi R z_к$, где $z_к = z_0 + \left(к - \frac{1}{2}\right)\Delta$, т. е.

$$n_1 \cos 2\pi R\left(z_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + n_2 \cos 2\pi R\left(z_0 + \frac{3\Delta}{2}\right) + n_3 \cos 2\pi R\left(z_0 + \frac{5\Delta}{2}\right) + \cdots$$

Величине R можно дать либо одно основное значение, по которому оценивается качество изучаемой оптической системы, либо ряд значений, позволяющий строить ЧКХ для большого диапазона частот. В последнем случае может оказаться выгодным использование приема, заимствованного из гармонического анализа и

описанного выше, но желательно брать случай 24 ординат, так как при 12 ординатах число достоверных амплитуд высших гармоник очень мало. Подробности о выборе промежутка Δ и числа лучей мы здесь опускаем; ограничимся указанием, что число лучей не должно быть менее 200—400 с тем расчетом, чтобы могла быть осуществлена интерполяция значений $\delta G'$. Промежуток Δ следует брать не меньше двадцатой доли диаметра кружка рассеяния в рассматриваемом направлении.

Поскольку для ЭВМ наибольшая часть времени тратится на расчет хода лучей, а остальные операции занимают мало времени, можно по одной и той же программе вычислить ЧКХ дифракционное и ЧКХ на основании геометрической оптики.

В тех случаях, когда необходима высокая точность результатов, следует увеличить число точек, используя интерполяцию на середину (например, с двумя разностями), согласно формуле

$$y\left(a+\frac{h}{2}\right)=\frac{y(a)+y(a+h)}{2}-\frac{1}{8}\Delta^2 y,$$

где $\Delta^2 y$ — вторая разность функции $y(a)$, получаемая по значениям этой функции для значений аргумента a, $a+h$, $a+2h$.

Такая интерполяция, выполненная по обоим направлениям $\delta g'$ и $\delta G'$, позволяет учетверить число точек и намного повысить точность результатов.

Расчет ЧКХ для штрихов, параллельных экваториальной плоскости, производится точно так же, только величины $\delta G'$ заменяются величинами $\delta g'$.

Некоторые простейшие случаи вида кривой $n = f(z)$

1. В том случае, когда $f(z)$ постоянна в пределах от нуля до $z_{\max}$ (это происходит при коме третьего порядка, когда штрихи перпендикулярны меридиональной плоскости), имеем

$$K(R)=\frac{\sin 2\pi R z_m}{2\pi R z_m}. \qquad (X.71)$$

Если мира обладает распределением яркости как в тесте Фуко, т. е. состоит из равномерных светлых полос, разделенных темными полосами той же ширины, то контраст $\frac{E_{\max}-E_{\min}}{E_{\max}+E_{\min}}$ изображения определяется по формуле

$$K(R)_{\text{п}}=\frac{1}{2Rz}-1, \qquad (X.72)$$

где $2z$ — ширина изображения бесконечно тонкой щели. Формула действительна для тех значений R и z, при которых ЧКХ не выходит из пределов 0—1.

2. В том случае, когда кривая $f(z)$ представляет собой две наклонные прямые, образующие с осью Z равнобедренный

треугольник вида __/__, причем расстояние между точками пересечения прямых с осью Z равно $2z$ (такой случай встречается при аберрации типа комы третьего порядка, когда штрихи направлены параллельно меридиональной плоскости), выражение для ЧКХ принимает вид

$$K(R) = \frac{\sin^2 \pi R z_m}{(\pi R z_m)^2}. \qquad (X.73)$$

3. Для чистой комы третьего порядка $f(z)$ при указанном направлении штриха имеет вид

$$f(z) = \lg \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}, \qquad (X.74)$$

что вытекает из выражения для освещенности E в точках $\delta g'$, $\delta G'$, а именно [4]:

$$E = \frac{1}{\frac{\partial(\delta g')}{\partial m'} \frac{\partial(\delta G')}{\partial M'} - \frac{\partial(\delta g')}{\partial M'} \frac{\partial(\delta G')}{\partial m'}}.$$

Если подставить в эту формулу выражения для $\delta g'$ и $\delta G'$ через m' и M', получаем для E выражение, пропорциональное $\frac{1}{\sqrt{m'^2 - 3M'^2}}$; заменяя обратно m' и M' через $\delta g'$ и $\delta G'$, окончательно получаем

$$E(\delta g', \delta G') \approx \frac{1}{\sqrt{\delta g'^2 - 3\delta G'^2}}.$$

Переход от освещенности в точке к потоку вдоль вертикальной полосы приводит к формуле (X.74) для $f(z)$.

Полученная для комы третьего порядка функция $f(z) = \lg \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}$ может быть заменена с небольшой погрешностью кривой в виде сторон равнобедренного треугольника, соответствующая $K(R)$ может быть написана в виде $\frac{\sin^2 \pi R z_m}{(\pi R z_m)^2}$, где z_m — абсолютное значение абсцисс точек пересечения прямых, наиболее близких к кривой $f(z)$.

4. Случай дефокусировки при квадратном зрачке представляет особый интерес по той причине, что для него $K(R)$ может быть рассчитана точно по простым формулам как для дифракционного варианта, так и для геометрического. Как было показано на стр. 641, для дифракционного варианта ЧКХ определяется по формуле

$$K(R) = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} a\Delta(2 - \Delta)}{\frac{4\pi a \Delta}{\lambda}}, \qquad (X.75)$$

где $2a$ — волновая аберрация на концах диагонали пятна рассеяния; $\Delta = \frac{\lambda R}{n' \sin u'_m}$.

Эту формулу легко привести к виду

$$K(R) = \frac{\sin 2\pi z R \left(1 - \frac{R}{R_{пред}}\right)}{2\pi z R}, \qquad (X.75^*)$$

где $2z$ — размер пятна рассеяния; R — частота; $R_{пред} = \frac{2n' \sin u'}{\lambda}$.

Геометрический вариант относится, очевидно, к случаю, когда $f(z)$ постоянна в пределах от $-z_m$ до $+z_m$, и, следовательно, можно воспользоваться приведенной на стр. 649 формулой

$$K(R) = \frac{\sin 2\pi R z_m}{2\pi R z_m}.$$

Сравнивая формулы для обоих вариантов, мы видим, что они отличаются лишь множителем $\left(1 - \frac{R}{R_{пред}}\right)$, который равен единице для нулевой частоты и постепенно уменьшается при увеличении частоты R, достигая нуля при $R = R_{пред}$, т. е. $\frac{2n' \sin u'}{\lambda}$.

Этот простой пример не следует обобщать для любых случаев, но он дает некоторое представление о том, насколько различаются значения ЧКХ при дифракционном и геометрическом рассмотрении. Чем дальше частота R от нуля, тем больше друг от друга отличаются значения ЧКХ.

Вычисление ЧКХ аподизированных оптических систем

Аподизация оптических систем имеет целью изменение распределения энергии в изображении точки, штриха или иной фигуры либо для увеличения разрешающей силы системы, либо для уменьшения фона вокруг изображения. Это достигается введением амплитудных, или фазовых, или даже фазово-амплитудных фильтров, изменяющих коэффициент прозрачности и фазу колебаний на входном зрачке по определенному закону.

Для оценки результатов аподизации удобно пользоваться ЧКХ, так как она дает наглядную картину разрешающей силы, точнее — яркости фона при различных частотах.

При вычислениях по первому методу (случай малых волновых аберраций) аподизация вводится посредством множителя τ (коэффициентов прозрачности), зависящего от положения точки пересечения луча на входном зрачке (или на сфере сравнения). Фаза может быть учтена добавлением к волновой аберрации приращения оптического пути $n\delta$, вытекающего из принятого для

аподизации закона изменения фазы. Таким образом, в отличие от формулы (X.61) нужно писать

$$C = \int\int \tau(\beta'\gamma')\,\tau(\beta' - \lambda\mu',\ \gamma' - \lambda\nu')\cos k\,[N(\beta'\gamma') + n\delta(\beta'\gamma') -$$

$$- N(\beta' - \lambda\mu',\ \gamma' - \lambda\nu') - n\delta(\beta' - \lambda\mu',\ \gamma' - \lambda\nu')\,d\beta'\,d\gamma'], \quad (X.76)$$

где $k = 2\pi$, и аналогично для S (с заменой cos на sin).

При вычислениях по второму методу (случай больших волновых аберраций, интегрирование по зрачку) достаточно применить вышеуказанный прием введения для каждого элемента ds множителя $\tau(\beta'\gamma')$, соответствующего этому элементу.

При вычислении по третьему методу (случай больших волновых аберраций, интегрирование по изображению) при подсчете числа точек n необходимо учесть «удельный вес» каждой точки, вводя множитель τ, соответствующий тому элементу площади зрачка (или идеальной сферы сравнения), через который проходит рассматриваемый луч.

В заключение отметим, что предложенная здесь единообразная методика расчета ЧКХ для всех трех рассматриваемых случаев разработана специально с учетом свойств ЭВМ, позволяющих свести работу к наиболее простым логическим схемам и привести к минимальной продолжительности расчета. Вместе с тем, требуется еще большая работа по доведению этой методики до оптимального состояния и по определению наилучших условий (выбор числа точек, определение ширины полос и т. д.) в связи с желаемой степенью точности определения ЧКХ.

ЧКХ с учетом хроматической аберрации

До сих пор ЧКХ рассматривалась в предположении, что свет монохроматичен. Однако дисперсия стекла, вызывающая появление хроматических аберраций, влияя на распределение световой энергии в пятне рассеяния, тем самым влияет и на значение ЧКХ, причем это влияние направлено в сторону ухудшения ее, поскольку аберрации в системе, как правило, больше для лучей, длина волны λ которых отличается от основной λ_0.

При распространении понятия ЧКХ на широкую спектральную область встает вопрос о законности этого обобщения. Следует выяснить, является ли изображение синусоидальной решетки также синусоидальным. Условие синусоидальности связано с условием изопланатизма; последнее требует неизменности картины изображения точки при изменении положения объекта; это приводит к необходимости выполнения условия постоянства увеличения при изменении длины волны, т. е. к необходимости исправления хроматической аберрации увеличения всех порядков.

В дальнейшем будем полагать, что это условие выполнено. Как в разделе о монохроматическом источнике света, рационально

рассмотреть два случая: 1) волновые аберрации не превышают одной-двух волн; 2) волновые аберрации превышают несколько длин волн.

Случай, когда волновые аберрации не превышают нескольких длин волн. Применить ранее изложенную методику с использованием формул (X.61) здесь нельзя, так как она относится лишь к монохроматическому излучению. Удобный прием расчета ЧКХ с учетом хроматической аберрации был предложен Д. Ю. Гальперном [7].

Изложим основы метода Д. Ю. Гальперна и приведем численный пример для случая, когда система идеально исправлена для основной длины волны и в предположении, что входной зрачок представляет собой квадрат.

Предположим, что распределение удельной спектральной светности в плоскости предмета задано уравнением

$$\mathbf{E}_\lambda = \mathbf{E}_{0\lambda} + E_\lambda \cos 2\pi R y, \qquad (X.77)$$

где $\mathbf{E}_{0\lambda}$ — энергетическая освещенность равномерного фона, соответствующая длине волны λ; E_λ — амплитуда колебания освещенности в плоскости предмета вдоль оси OY, проходящей через точку на оси; R — частота решетки, т. е. число периодов решетки, укладывающихся на 1 *мм* длины; y — координата точки.

В плоскости изображения распределению светности, задаваемому равенством (X.61), соответствует распределение

$$\mathbf{E}'_\lambda = \mathbf{E}'_{0\lambda} + E'_\lambda \cos\left(2\pi R' y' + \varphi'_\lambda\right),$$

где φ'_λ — фаза, соответствующая смещению штрихов (равная нулю, если поверхность волны симметрична относительно оси).

Напомним, что ЧКХ есть отношение контраста изображения к контрасту объекта, причем под контрастом k подразумеваются следующие величины:

контраст объекта

$$k_\lambda = \frac{\mathbf{E}_{\lambda\,\max} - \mathbf{E}_{\lambda\,\min}}{\mathbf{E}_{\lambda\,\max} + \mathbf{E}_{\lambda\,\min}} = \frac{E_\lambda}{E_{0\lambda}};$$

контраст изображения

$$k'_\lambda = \frac{E'_\lambda}{\mathbf{E}'_{0\lambda}}.$$

Поскольку световые колебания, принадлежащие разным спектральным областям, некогерентны между собой, освещенности на изображении, соответствующие определенной частоте R', складываются и можно писать

$$\mathbf{E}'_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda \mathbf{E}'_{0\lambda}\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda E'_\lambda \cos\left(2\pi R' y' + \varphi'_\lambda\right) d\lambda,$$

где положено $y' = y\beta$; $R' = \frac{R}{\beta}$ (β — линейное увеличение оптической системы); τ_λ — спектральная чувствительность приемника.

Обозначим $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda \mathbf{E}'_{0\lambda}\, d\lambda$ через $\mathbf{E}'_0$; тогда

$$\mathbf{E}'_\lambda = \mathbf{E}'_{0\lambda} + \cos 2\pi R' y' \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda E'_\lambda \cos \varphi'_\lambda\, d\lambda - \sin 2\pi R' y' \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda E'_\lambda \sin \varphi'_\lambda\, d\lambda =$$

$$= \mathbf{E}'_0 + \overline{E}'_\lambda \cos (2\pi R' \lambda + \theta),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}'^2_\lambda &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\tau_\lambda E'_\lambda \cos \varphi'_\lambda\, d\lambda)^2 + \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\tau_\lambda E'_\lambda \sin \varphi'_\lambda\, d\lambda)^2; \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda E'_\lambda \sin \varphi'_\lambda\, d\lambda}{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda E'_\lambda \cos \varphi'_\lambda\, d\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (X.78)$$

Контраст в изображении равен $k'(R) = \frac{\overline{E}'}{\mathbf{E}'_0}$. С другой стороны, как было указано выше, ЧКХ $K_\lambda(R)$ в монохроматическом свете по определению равна

$$K_\lambda(R) = \frac{k'_\lambda(R)}{k_\lambda(R)} = \frac{E'_\lambda}{E_\lambda} \frac{\mathbf{E}_{0\lambda}}{\mathbf{E}'_{0\lambda}},$$

откуда

$$E'_\lambda = K_\lambda(R) E_\lambda \frac{\mathbf{E}'_{0\lambda}}{\mathbf{E}_{0\lambda}}.$$

Но освещенность изображения равномерного фона связана с освещенностью фона в пространстве объектов соотношением

$$\frac{\mathbf{E}'_{0\lambda}}{\mathbf{E}_{0\lambda}} = \frac{\sin^2 u'_m}{\sin^2 u_m} \bar{\tau}_\lambda = \frac{\bar{\tau}_\lambda}{\beta^2 \frac{n'^2}{n^2}},$$

где $\bar{\tau}_\lambda$ — коэффициент пропускания всех сред по лучу для данной длины волны λ.

Отсюда следует

$$E'_\lambda = K_\lambda(R) E_\lambda \frac{\bar{\tau}_\lambda n^2}{\beta^2 n'^2}.$$

Подставляя это выражение E'_λ в формулу (X.78) и переходя к формуле для полихроматической ЧКХ, получаем

$$K(R) = \frac{k'(R)}{k(R)} = \frac{\overline{E}'(R)\,\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}_0' E(R)} = \frac{\overline{E}'(R)}{E(R)}\,\beta^2 \frac{n'^2}{n^2\overline{\tau}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda \overline{\tau}_\lambda k_\lambda(R)\, E_\lambda \cos\varphi_\lambda\, d\lambda\right]^2 + \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda \overline{\tau}_\lambda k_\lambda(R)\, E_\lambda \sin\varphi_\lambda\, d\lambda\right]^2}}{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{\tau}_\lambda \tau_\lambda E_\lambda\, d\lambda}. \quad (X.79)$$

В этом выводе предполагалось, что n и n' для всех длин волн постоянны, что справедливо, когда первая и последняя среды — воздух.

В случае симметричных аберраций последняя формула значительно упрощается; обозначим через $\overline{\overline{\tau}}_\lambda$ произведение $\overline{\tau}_\lambda \tau_\lambda E_\lambda d\lambda$, тогда

$$K(R) = \frac{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{\overline{\tau}}_\lambda k_\lambda(R)\, d\lambda}{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_\lambda\, d\lambda} \quad (X.80)$$

чрезвычайно простая формула, выражающая далеко не очевидный результат, что полихроматическая ЧКХ представляет среднюю взвешенную от всех цветных ЧКХ. Весовой коэффициент есть спектральный коэффициент чувствительности приемника. Если приемник одинаково чувствителен ко всем длинам волны, полихроматическая ЧКХ оказывается равной средней арифметической от всех монохроматических.

Д. Ю. Гальперн [7] применяет предложенную им методику к следующему примеру. Рассматриваются два длиннофокусных ($F = 500$ *мм*) объектива с относительным отверстием 1 : 10; первый — обычный ахромат, второй — апохромат из специальных сортов стекла. Оба объектива предполагаются идеально исправленными в отношении сферической аберрации для всех длин волн (что при выбранном относительном отверстии весьма близко к действительности). Входной зрачок объективов предполагается квадратным, благодаря чему вычисление ЧКХ может быть выполнено по простой формуле вида

$$K_\lambda(R) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left[\pi R\,(2\sin u' - \lambda R)\,\Delta(\lambda)\right]}{\pi R\,\Delta(\lambda)\sin u'}, \quad (X.81)$$

где $\Delta(\lambda)$ — продольная хроматическая аберрация лучей с длиной волны λ.

Частота R выбрана такая, что она соответствует пределу разрешения двух объективов при круглом зрачке в 50 *мм*; основная длина волны принята равной $\lambda_0 = 0{,}580 \cdot 10^{-3}$ *мм*; приемником служит сетчатка глаза, поэтому $\tau_\lambda = \nu_\lambda$ — спектральная чувствительность глаза.

Величина $K(R)$, т. е. ЧКХ безаберрационной системы с приемником, имеющим одинаковую спектральную чувствительность для всех длин волн, равна 0,22. Для полуапохромата и ахромата с хроматической аберрацией $\Delta\lambda$ (табл. X.4) $K(R)$ равна соответственно значениям 0,20 и 0,17. Если в качестве приемника принять сетчатку человеческого глаза или любой приемник с такой же спектральной чувствительностью, получаем для полуапохромата 0,20, для ахромата 0,16. Таким образом, все рассмотренные здесь полихроматические ЧКХ очень мало отличаются от ЧКХ идеального объектива и можно было бы сделать вывод, что даже в таких длиннофокусных системах, какие рассматривались здесь, хроматическая аберрация, точнее — вторичный спектр, практически не сказывается.

Таблица X.4

λ в *мкм*	Полуапохромат с $\Delta(\lambda)$	Ахромат с $\Delta(\lambda)$	λ в *мкм*	Полуапохромат с $\Delta(\lambda)$	Ахромат с $\Delta(\lambda)$	λ в *мкм*	Полуапохромат с $\Delta(\lambda)$	Ахромат с $\Delta(\lambda)$
0,440	0,17	0,67	0,520	0,01	0,00	0,600	0,04	0,04
0,460	0,10	0,35	0,540	0,00	0,02	0,620	0,08	0,09
0,480	0,06	0,24	0,560	0,00	0,01	0,640	0,14	0,16
0,500	0,03	0,09	0,580	0,00	0,00	0,660	0,22	0,27

Однако следует учесть то обстоятельство, что в статье Д. Ю. Гальперна [7] значения ЧКХ для различных объективов и приемников рассчитаны для периода p, весьма близкого к предельно возможному. Как было отмечено выше, ЧКХ как для малых частот, для которых она равна единице, так и для предельно больших при наличии сколь угодно больших аберраций стремится к одному и тому же пределу, и в этом отношении вывод о малом влиянии хроматической аберрации не очень убедителен. Было бы желательно повторить, проделанные в статье [7] вычисления для периода p, примерно равного половине предельно разрешаемого, так как именно здесь наблюдается наибольшее отступление от того, что дает идеальная оптическая система.

Случай, когда аберрации велики. Прием, изложенный выше, вполне пригоден для систем с большими аберрациями, поскольку в выводах Д. Ю. Гальперна не ставится никаких ограничительных условий относительно природы распространения света (можно исходить и из дифракционной теории света, и из геометрической).

Однако в случае больших аберраций имеет смысл, главным образом в целях контроля, применить прием, описанный выше для случая больших аберраций в монохроматическом свете; только нужно добавить расчет ряда пучков для различных спектральных областей (не менее 5—8) с учетом коэффициентов удельной спектральной светности источника света, пропускания оптических сред и спектральной чувствительности приемника. Имея картину общей освещенности E от всех элементарных спектральных областей в виде точек разных весов, заполняющих плоскость изображения, отсчитывают количество «взвешенных» точек по полосам, делящим изображение, и производят гармонический анализ кривой зависимости потока от положения полосы.

Некоторые полезные формулы для вычисления ЧКХ в области геометрической оптики

Приводится ряд формул, вывод которых не представляет затруднений. Зрачок предполагается круглым.

1. Случай дефокусировки:

$$K(R) = \frac{2J_1(2\pi rR)}{2\pi rR},$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода; r — радиус пятна рассеяния [8].

2. Аксиально симметричная функция рассеяния типа ядро—ореол (предполагается, что и ядро и фон равномерны):

$$K(R) = p\,\frac{2J_1(2\pi r_1R)}{2\pi r_1R} + (1-p)\,\frac{2J_1(2\pi r_2R)}{2\pi r_2R},$$

где r_1 — радиус ядра; r_2 — радиус ореола; p — доля всей энергии, попадающая в пределы ядра [9].

3. Формула для перехода от ЧКХ к контрасту при мире Фуко в случае симметричного распределения освещенности:

$$K_{\text{П}} = \frac{4}{\pi}\left[K(R) - \frac{1}{3}K(3R) + \frac{1}{5}K(5R) - \cdots\right].$$

8. О НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ СПОСОБАХ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ, ДАВАЕМОГО ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Из числа приемов, применяемых в научной фотографии для оценки качества изображения, даваемого оптическими приборами, довольно широко распространен метод, согласно которому определяется скорость падения освещенности изображения прямолинейной границы светлого поля в направлении, перпендикулярном этой границе. Эта скорость связана с распределением света в картине изображения следующим образом. Пусть граница поля совпадает с осью Z; $O(y, z) = 1$, если $y \geqslant 0$.

Имеем

$$I(y', z') = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(y'-y, z'-z)\,dy\,dz = \int_0^{+\infty} S(y'-y)\,dy,$$

где

$$S(y') = \int |E(y', z')|^2\,dz' = \frac{R^2}{\lambda}\int |f(\gamma', y')|^2\,d\gamma',$$

причем

$$f(\gamma', y') = \int F(\beta', \gamma')\,h(-k\beta' y')\,d\beta'.$$

Более подробный вывод можно найти у Марешаля и Франсона [10] на стр. 75—78. Напомним, что F — распределение комплексной амплитуды по зрачку. Как видно из приведенных формул, определение контраста границы поля требует вычисления двух простых интегралов и одного преобразования Фурье и представляет большие вычислительные трудности.

Одним из наиболее распространенных является критерий качества изображения, основанный на оценке отличия фактического распределения световой энергии в изображении от идеального. Пусть $O(y, z)$ — распределение яркостей на объекте; $I'(\beta y, \beta z)$ — распределение освещенности на изображении. При идеальной оптической системе и отсутствии дифракции соблюдается точно равенство

$$I'(\beta y, \beta z) = kO(y, z),$$

где k — некоторый постоянный множитель. Присутствие аберрации, дифракции и других возможных дефектов оптической системы приводит к тому, что указанное равенство нарушается и

$$I'(\beta y, \beta z) - kO(y, z) = \varepsilon(\beta y, \beta z).$$

Критерием качества изображения в некоторой области S, ограниченной контуром $f(y, z) = 0$, является функция Δ, представляющая суммы квадратов указанных отступлений, а именно

$$\Delta = a\iint_S \varepsilon^2(\beta y, \beta z)\,dy\,dz,$$

где a — некоторый множитель, подлежащий нормировке.

Применение этого критерия в общем случае практически невозможно, да и не представляет большой ценности, так как не поддается простому толкованию; оно может принести пользу, когда объект имеет простую форму: небольшое число линий, система клеток и т. д. Преимущество такого критерия заключается в том, что он характеризует качество воспроизведения объекта одним числом, что иногда бывает желательно; область распространения критерия произвольна, что также ценно. Однако вычисление значения этого критерия настолько трудоемко, что навряд ли

он найдет место среди определяемых заранее (до изготовления оптической системы) критериев качества.

Отметим еще один простой и наглядный, хотя и имеющий лишь ориентировочное значение, критерий, основанный на рассмотрении кривых равных волновых аберраций, отнесенных к зрачку (картины, подобные тем, какие получаются с помощью интерферометра Тваймана). Кривая, соответствующая волновой аберрации $\frac{\lambda}{4}$, дает довольно ясное представление о порядке величины разрешающей способности системы в разных направлениях; предполагается, что картина равных волновых аберраций вычислена для наилучшей плоскости установки. Предположим, например, что кривая $\frac{\lambda}{4}$ имеет вид эллипса с длиной осей $2a$ и $2b$, причем большая ось перпендикулярна меридиональной плоскости. Пусть ω_a' и ω_b' — углы, под которыми a и b видны из изображения точки. Тогда можно считать, что наименьшее разрешаемое расстояние в обоих направлениях равно соответственно

$$z_1 = \frac{0{,}6\lambda}{\sin \omega_a'}, \qquad z_2 = \frac{0{,}6\lambda}{\sin \omega_b'}.$$

Поскольку фон, возникающий от зон зрачка, находящихся вне рассматриваемой кривой, учесть без серьезных вычислений нельзя, его влияние трудно оценить; в большинстве случаев можно считать этот фон равномерным, пропорциональным площади части зрачка, на которой волновые аберрации больше 0,5—1λ, и обратно пропорциональным площади кружка рассеяния, вычисляемого на основании расчета хода лучей.

Для определения площади зрачка, внутри которой волновая аберрация N меньше $\frac{\lambda}{4}$, можно использовать то обстоятельство что малые аберрации обычно вызываются членами третьего порядка малости. Уточнение требуется лишь для астигматизма (и кривизны) в случае, когда оптическая система широкоугольна; тогда лучше заменить величины астигматизма и кривизны, полученные на основании коэффициентов S_{III} и S_{IV}, величинами, вытекающими из расчета хода бесконечно тонких астигматических пучков.

Для определения на зрачке контура, на котором $N = \frac{\lambda}{4}$, следует использовать формулы, дающие значения N как функции от координат на зрачке и коэффициентов Зейделя $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, \ldots, S_{\mathrm{V}}$ (для широкоугольных систем нужно учесть указанное выше замечание). Эти формулы легко получить, исходя из соотношений $\frac{\delta g'}{r} = \frac{\partial N}{\partial y'}$; $\frac{\delta G'}{r} = \frac{\partial N}{\partial z'}$, где y' и z' — координаты точки пересечения луча со сферой сравнения, радиус которой равен r. Если

относительное отверстие системы и наклон главного луча не очень велики и сфера сравнения проходит через центр выходного зрачка, т. е. $r = s' - x'$, можно считать, что $y' = m'$ и $z' = M'$. Переходя путем интегрирования от поперечных аберраций к волновым, получаем

$$N(m', M') = \frac{(m'^2 + M'^2)^2}{4} S_1 + (m'^2 + M'^2) m' \operatorname{tg} w_1 S_{II} +$$

$$+ \frac{m'^2}{2} \operatorname{tg}^2 w_1 (3S_{III} + S_{IV}) + \frac{M'^2}{2} \operatorname{tg}^2 w_1 (S_{III} + S_{IV}) + m' \operatorname{tg}^3 w_1 S_V.$$

Рис. X.26

Рис. X.27

Если известны коэффициенты $S_I, \ldots, S_V$, то для заданного угла поля w_1 легко получить кривую $f(m', M') = \frac{\lambda}{4}$, которая ограничивает полезную область зрачка.

Рис. X.28

Рис. X.29

Для облегчения довольно трудоемкой работы по определению контура $f(m', M')$ приводим четыре рисунка семейств кривых постоянных волновых аберраций $N(m', M') - C = 0$ для следующих случаев:

1) при наличии сферической аберрации третьего порядка (рис. X.26);

2) при наличии комы третьего порядка (рис. X.27);

3) при наличии астигматизма третьего порядка (рис. X.28);

4) при наличии комы, астигматизма третьего порядка и дефокусировки (рис. X.29).

ЛИТЕРАТУРА

1. Слюсарев Г. Г. Изд. АН СССР, Сер. матем. и естеств. наук, 1937, № 6.
2. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 2-е. Л., АН СССР, 1933.
3. Buxton A. Monthly notices of the Royal Astronomical Society, vol. 81, 1921.
4. Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика. М. — Л., АН СССР, 1946.
5. Born M., Wolff E. Principles of Optics. London, New Jork. Paris, Los Angeles, Pergamon Press, 1959.
6. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. Т. 1. Изд. 2-е. М. — Л., АН СССР, 1948.
7. Гальперн Д. Ю. Опт.-мех. пром., 1964, № 9.
8. Hopkins H. H. Proc. R. Soc., A231, 91, 1955.
9. Jeness J. R. Appl. Optics, 5, 421, 1966.
10. Марешаль А., Франсон М. Структура оптического изображения. М., изд-во «Мир», 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Расчет хода лучей через центрированные оптические системы из сферических поверхностей** 5

1. Введение . . . . . —

2. Расчет хода луча в меридиональной плоскости 6

Обозначения и знаки . . . . . —

Формулы 7

Параксиальные лучи 8

Основные формулы . . . . . —

Формулы для расчета хода параксиального луча через систему бесконечно тонких соприкасающихся линз 10

Соотношения, связывающие координаты двух параксиальных лучей . . . . . —

Определение кардинальных точек оптической системы по координатам двух произвольных параксиальных лучей 11

Расчет хода лучей по Смиту 13

3. Расчет хода лучей в пространстве 17

Расчет хода лучей в пространстве с помощью формул аналитической геометрии . . . . . —

Расчет косого луча через отражающую поверхность второго порядка 22

Формулы Федера 24

Расчет хода луча через сферическую поверхность . . . . . —

Расчет хода луча через поверхность второго порядка 27

4. Бесконечно тонкие астигматические пучки 30

Определения . . . . . —

Формулы Аббе—Юнга для определения положения астигматических фокусов 31

Случай одной преломляющей поверхности . . . . . —

Случай нескольких центрированных поверхностей 33

5. Разностные формулы 36
Разностные формулы для сферической аберрации . . . . . —
Разностные формулы для внеосевых пучков 40
Разностные формулы для волновой аберрации 43
6. Некоторые формулы преломления 45
7. Отражение от сферических поверхностей . . . . . —
8. Техника вычислений. Ошибки и их нахождение 46

Глава II. **Теория аберраций центрированной оптической системы** 48

1. Аберрации монохроматических лучей . . . . . —
Гауссова теория изображения и эйконалы . . . . . —
Общий вид выражений для аберраций третьего порядка 53
Уравнение поверхности волны 56
Каноническая форма уравнения поверхности волны 59
Изображение точек при наличии аберраций 61
Сферическая аберрация 63
Кома 66
Астигматизм и кривизна поля 68
Дисторсия 73
Комбинированные аберрации 75
Определение коэффициентов аберраций третьего порядка центрированной оптической системы 79
Выражения сумм S через коэффициенты b . . . . . —
Определение коэффициентов b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 83
Вычисление коэффициентов b для одной сферической поверхности 85
Выражения сумм S через радиус, показатели и увеличения τ и τ' 87
Выражения сумм S через α и β . . . . . —
Выражения сумм S через s и x 91
Две формулы Зейделя 93
Выражения сумм S после исключения величины Q_x 96
Частные случаи 98
Пример вычисления сумм S для фотографического объектива 100
Выражения сумм S после исключения величин y 101
Влияние перемещения входного зрачка на аберрации третьего порядка 104
Влияние положения предмета на аберрации третьего порядка . 105
Аберрации третьего порядка центрированных систем с несферическими поверхностями 106
Отступление от отношения синусов и кома 112

Применение формул для аберраций третьего порядка к частным случаям 128
Простая, бесконечно тонкая линза . . . . . —
Влияние формы простой линзы на величины P и W 137
Апланатические точки преломляющей поверхности 139
Афокальный мениск конечной толщины . . . . . —
Аберрации высших порядков 140
Приближенные способы вычисления аберраций пятого и более высоких порядков 146
Сферическая аберрация высших порядков тонких склеенных систем . . . . . —
Сферическая аберрация высших порядков систем значительной длины 147
Интерполяционный метод вычисления коэффициентов аберраций высших порядков 148
Аберрации высшего порядка для точек, не лежащих на оси системы 150
Сложение аберраций 151
2. Хроматические аберрации 153
Зависимость показателя преломления от длины волны . . . . . —
Классификация хроматических аберраций 169
Хроматическая аберрация положения 170
Хроматическая аберрация увеличений 175
Хроматическая аберрация высших порядков 184
Вторичный спектр или остаточная хроматическая аберрация положения . . . . . —
Двухлинзовые объективы 185
Вычисление величины вторичного спектра для любой спектральной области 188
Вторичный спектр сложных систем 193
Устранение вторичного спектра 194
Трехлинзовые системы 196
Хроматическая разность сферических аберраций 197
Хроматическая разность увеличений высших порядков 204
Зависимость хроматических аберраций от положения предмета и входного зрачка 205
Хроматическая аберрация положения . . . . . —
Хроматическая разность увеличений 207
Вычисление хроматических аберраций кардинальных точек . . . 209
3. Вычисление аберраций тригонометрическим путем и их графическое представление 211
Аберрации для точки на оси ($w = 0$) 212

Техника вычисления производной от $f(\sin u')$ 214
Степень применяемости упрощенной формулы для комы 215
Аберрации для точки вне оси ($w \neq 0$) 216
Аберрации главных лучей и бесконечно тонких пучков, направленных вдоль этих лучей 218
Выбор плоскости наилучшего изображения 220
Контроль результатов расчетов 221
4. Сводка важнейших формул 224
Формулы, связывающие координаты двух произвольных параксиальных лучей, проходящих через одну и ту же оптическую систему —
Формулы для проекций поперечных аберраций третьего порядка в переменных x и s 225
Аберрации в переменных α 226
Разложение аберраций по координатам на выходном зрачке . . . 227
Влияние асферичности поверхностей 228
Телескопические системы 229
Изменение сумм при перемещении предмета и входного зрачка . . —
Вычисление комы на основании отступления от отношения синусов 230
Аберрации третьего порядка простой бесконечно тонкой линзы 231
Определение коэффициентов сферической аберрации высших порядков на основании тригонометрического расчета хода лучей 234
Хроматические аберрации 235

Глава III. **Аберрации третьего порядка систем из бесконечно тонких линз** 240
1. Аберрации третьего порядка бесконечно тонкого компонента . . —
2. Хроматические аберрации 246
Хроматическая аберрация положения . . . . . —
Хроматическая разность увеличений 247
Величина C_l в простейших компонентах 248
3. Теория основных параметров 249
Основные параметры бесконечно тонкого компонента 251
Некоторые свойства бесконечно тонких компонентов, вытекающие из теории основных параметров 258
Устранение сферической аберрации бесконечно тонкой системы для нескольких положений предмета . . . . . —
Обращение хода луча в бесконечно тонкой системе. Аберрации третьего порядка при обращении хода 259
Случай, когда n и n' не равны единице 260
4. Основные параметры в простейших оптических системах . . . 261
5. Афокальные бесконечно тонкие компоненты 266
Двухлинзовые бесконечно тонкие компоненты 267

Предел коррекционных возможностей афокальных бесконечно тонких компенсаторов и способы их расширения 269

6. Сводка основных формул 270

Аберрации третьего порядка бесконечно тонкого компонента . . . —

Основные параметры бесконечно тонкого компонента 271

Основные параметры бесконечно тонкой простой линзы 272

Афокальные бесконечно тонкие компоненты . . . . . —

Глава IV. **Влияние изменения температуры на изображение, даваемое оптическими системами** 273

1. Введение . . . . . —

2. Термооптические аберрации при отсутствии градиента температуры 274

Изменение фокусного расстояния бесконечно тонкой линзы . . . 275

Системы с большими воздушными промежутками 277

Коэффициент V оптических стекол 280

3. Влияние температурного градиента стекла на качество изображения 285

Изменение формы оптической детали и вызванное им отклонение луча 286

Отклонение луча под влиянием градиента в предположении, что форма поверхности не изменилась 288

Некоторые частные случаи 291

Несимметричное распределение градиента . . . . . —

Распределение градиента, симметричное вокруг оптической оси 293

4. Сводка основных формул 295

Случай, когда градиент температуры отсутствует . . . . . —

Влияние температурного градиента 296

Глава V. **Предварительный расчет конструкций оптических систем** 298

1. Введение . . . . . —

2. Основания для габаритного расчета оптических систем . . . . . —

3. Параметры оптической системы 299

4. Соотношения между внешними элементами оптических систем и требованиями, предъявляемыми к оптической характеристике системы 300

5. Различные конструкции оптических систем, состоящих из тонких компонентов и оборачивающих призм 304

Оптические системы из двух компонентов . . . . . —

Оборачивающие призмы 305

Качающиеся призмы 311

Оптические системы с обрачивающими системами линз 312
Земные зрительные трубы с одной оборачивающей системой . . —
Перископы (с одной или несколькими оборачивающими системами) 314
6. Оптические системы, не входящие в перечисленные группы . . . 322
7. Предварительные данные об аберрациях наиболее часто применяемых компонентов оптических систем 323
Простые линзы 324
Двухлинзовые склеенные системы 325
Трехлинзовые склеенные комбинации . . . . . —
Несклеенные двухлинзовые системы 326
Несколько бесконечно тонких линз, разделенных бесконечно малыми воздушными промежутками 327
Окуляры 329
Глава VI. **Методика расчета оптических систем** 334
1. Введение . . . . . —
2. Основные уравнения алгебраического метода 336
Составление уравнений, их решение 337
Выбор аберраций, подлежащих исправлению 340
Исправление кривизны изображения 342
Исправление астигматизма 344
Исправление аберрации по отдельным компонентам 345
Определение свободных членов аберрационных уравнений . . . 347
Решение уравнений и определение конструктивных элементов в первом приближении 348
Второе приближение. Учет толщин и аберраций высших порядков 351
Определение толщин линз . . . . . —
Толщина как средство исправления аберраций 353
Переход к системе с конечными толщинами линз 355
Вычисление конструктивных элементов системы 360
3 Тригонометрический контроль 361
Сферическая аберрация 363
Кома 364
Астигматизм и кривизна изображения 367
Дисторсия 368
Хроматическая аберрация положения 369
Хроматическая разность увеличений . . . . . —
4. Численные значения аберраций наиболее распространенных категорий оптических систем 371
5. Нахождение элементов окончательной системы 375

Глава VII. **Методы автоматического расчета оптических систем** 378

1. Введение . . . . . —

2. Программа для автоматического расчета двухкомпонентных систем 381

3. Универсальные методы автоматического расчета 386

Общие соображения . . . . . —

Метод Ньютона 390

Первая модификация метода Ньютона 399

Вторая модификация метода Ньютона 414

Метод наименьших квадратов и его модификации 431

Методы минимизации функции качества 438

Некоторые трудности, связанные с использованием метода Ньютона 446

Ускорение сходимости итерационного процесса путем вариации направления 450

Пример автоматического расчета объектива для микроскопа . . . 455

4. Проблемы и перспективы автоматизации расчетов 466

Глава VIII. **Основы расчета допусков в оптических системах** . . . 471

1. Общие соображения . . . . . —

2. Определение частных производных 472

3. Определение максимально допустимого отклонения отдельного параметра . . . . . —

4. Определение значений допустимых отклонений при совокупном действии всех параметров оптической системы 473

5. Влияние изменения параметров системы на аберрационные характеристики . . . . . —

6. Децентрировка 481

7. Некоторые дополнительные соображения по вопросу допусков 499

8. Окончательное значение допуска 500

9. Уточнение системы допусков 502

10. Допустимая неоднородность оптических стекол 503

11. Допустимое отклонение углов отражательных призм 506

12. Допустимое отклонение от плоскости для плоских отражающих зеркал, нормаль к которым образует с осью угол i 509

13. Установление допусков на ошибки изготовления углов призм и на пирамидальность 510

Глава IX. **Асферические поверхности** 520

А. Оптические системы, обладающие осью симметрии . . . . . —

1. Введение . . . . . —

2. Малые отступления от сферических поверхностей 520
Расчет с помощью логарифмических таблиц . . . . . —
Деформирование поверхности 525
3. Точный расчет хода лучей через поверхности второго порядка с помощью таблиц логарифмов 526
4. Ряды, определяющие меридианное сечение асферических поверхностей, и их обращение 529
5. Расчет хода лучей на ЭВМ 531
6. Расчет бесконечно тонких астигматических пучков 532
7. Расчет астигматического пучка для слегка деформированных поверхностей 538
8. Децентрированные поверхности второго порядка 540
9. Расчет центрированных систем, содержащих несферические поверхности, в области аберраций третьего порядка 542
10. Исправление аберраций высших порядков деформацией преломляющих (отражающих) поверхностей 545
11. Вычисление волновых аберраций . . . . . —
Вычисление волновой аберрации для точки на оси 549
Вычисление волновой аберрации для точки вне оси 552
Правило знаков для волновой аберрации 553
12. Деформирование одной поверхности 554
13. Деформирование двух и более поверхностей 556
14. Случай трех и более деформированных поверхностей 559
15. Применение дифференциальных уравнений для расчета оптических систем с несферическими поверхностями . . . . . —
Случай одной отражающей поверхности 560
Преломляющая поверхность . . . . . —
Апланатическая система двух зеркал 563
16. Применение торических поверхностей в оптических системах . . 568
17. Сводка основных формул 572
Б. Анаморфоты 574
18. Введение . . . . . —
19. Гауссова оптика анаморфотов 576
20. Аберрации третьего порядка анаморфотов 580
21. Вычисление дополнительного члена $W_\tau - W_H$ 584
Глава X. **Оценка качества изображения** 596
1. Введение . . . . . —
2. Геометрический и физический луч 598

3. Распределение энергии в изображении точки 606

4. Изображения, симметричные относительно оси 612

Дефокусировка идеальной оптической системы с круглым зрачком —

Вычисление распределения энергии в пятне рассеяния, вызываемом дефокусировкой, при круглом зрачке 613

Распределение освещенности при произвольных аберрациях . . . 615

5. Преобразование Фурье и его основные свойства 618

6. Передача пространственных частот 621

Некогерентное освещение 622

Частотно-контрастная характеристика при наличии аберраций 623

Влияние малых аберраций на ЧКХ 625

Переход к случаю больших волновых аберраций 627

Вычисление ЧКХ для точки на оси при малых $\mu\delta g'$ 630

Когерентное освещение 631

7. Методика численного определения ЧКХ 634

Случай малых аберраций, не превышающих нескольких длин волн —

Вычисление ЧКХ для очень малых частот 643

Вычисление ЧКХ в случае больших волновых аберраций (геометрическое приближение) 646

Вычисление на ЭВМ 648

Некоторые простейшие случаи вида кривой $n = f(z)$ 649

Вычисление ЧКХ аподизированных оптических систем 651

ЧКХ с учетом хроматической аберрации 652

Случай, когда волновые аберрации не превышают нескольких длин волн 653

Случай, когда волновые аберрации велики 656

Некоторые полезные формулы для вычисления ЧКХ в области геометрической оптики 657

8. О некоторых других способах оценки качества изображения, даваемого оптическими системами . . . . . —

Георгий Георгиевич Слюсарев

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Редактор издательства *Т. С. Васильева* Переплет художника *Б. П. Седова* Технический редактор *А. А. Бардина*. Корректоры *З. П. Смоленцева* и *М. С. Шмуклер*

Сдано в производство 7/II 1969 г. Подписано к печати 19/IX 1969 г. Формат бумаги 60×90 1/16. Печ. л. 42 Уч.-изд. л. 37,2 Тираж 8000 экз. Заказ 108. Цена 2 р. 15 к. М-15847.

Ленинградское отделение издательства «МАШИНОСТРОЕНИЕ», Ленинград, Д-65, ул. Дзержинского, 10

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА „МАШИНОСТРОЕНИЕ“

выпустило в 1969 году следующие книги по приборостроению:

■ ■ ■

В. Б. ВЕЙНБЕРГ д-р техн. наук, лауреат Государственной премии, **Д. К. САТТАРОВ** канд. техн. наук. Оптика световодов. 20 л. 2 р. 13 к.

Первая монография в нашей стране, посвященная теории и экспериментальным исследованиям прозрачных световодов и представляющая большое научное и практическое значение.

■ ■ ■

З. В. БАБАК инж., **П. Д. ИВАНОВ** канд. техн. наук, лауреат Государственной премии, **Б. Н. КОТЛЕЦОВ** инж. и др. Подводная фотография. 10 л. 75 коп.

Описана уникальная гидроаппаратура для подводной фотографии, создатели которой удостоены Государственной премии.

■ ■ ■

Г. Е. СКВОРЦОВ, В. А. ПАНОВ, Н. И. ПОЛЯКОВ кандидаты техн. наук и др. Микроскопы. 40 л. 2 р. 50 к.

Капитальная монография, в которой систематизированы и обобщены накопленные теорией и практикой богатейшие материалы по микроскопии.

■ ■ ■

М. А. СЕРГЕЕВ канд. техн. наук. Наземные гирокомпасы. 12 л. 1 р. 35 к.

Теория и применение наземных гирокомпасов, применяющихся в настоящее время в различных отраслях народного хозяйства и получающих все большее развитие.

Издательство заказов не выполняет