В. С. РЯБЕНЬКИЙ
А. Ф. ФИЛИППОВ

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

БИБЛИОТЕКА ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. С. РЯБЕНЬКИЙ и А. Ф. ФИЛИППОВ

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Л. А. ЧУДОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

11-5-4

*Библиотека выпускается под общим руководством кафедры вычислительной математики Московского государственного университета.*

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава 3

## Некоторые признаки устойчивости

## Глава 4

## Исследование устойчивости разностных уравнений по начальным условиям методом разделения переменных



## Глава 5

## Системы разностных уравнений, устойчивые по начальным условиям

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы в связи с широким использованием численных методов решения дифференциальных уравнений, в особенности метода конечных разностей, возникла необходимость более детального изучения тех свойств разностных уравнений, которые непосредственно влияют на пригодность их для практического счета. В частности, возникла необходимость исследовать чувствительность решений разностных уравнений к ошибкам округления, допускаемым в процессе счета. Для некоторых уравнений малые ошибки, допущенные на каком-либо этапе вычисления решения, при дальнейших выкладках сильно возрастают и делают невозможным получение сколько-нибудь пригодного результата. Такие уравнения называют неустойчивыми. С другой стороны, устойчивые уравнения, свободные от этого недостатка, обладают и другим необходимым качеством: их решения при измельчении сетки сходятся к соответствующим решениям дифференциальных уравнений.

В нашей работе изучаются указанные свойства разностных уравнений.

Мы не касаемся вопросов применения метода конечных разностей для доказательства существования решений дифференциальных уравнений, которые рассматриваются в работах [15]—[18], [21], [22], [30], [33], [41], [48] и других, и при доказательстве сходимости предполагаем, что решение дифференциального уравнения существует.

Представление о содержании книги дает подробное оглавление. При первом чтении §§ 3, 5, 7 могут быть пропущены. Для понимания глав 1-й и 2-й, кроме §§ 6 и 7, от читателя требуются самые элементарные сведения из теории уравнений с частными производными и знакомство с определениями нормы и оператора в линейном функциональном пространстве. Для понимания §§ 6 и 7 из главы 2 и глав 3, 4, 5, в дополнение к сказанному выше, требуется знание основ линейной алгебры.

Главы 1, 2, кроме § 8, и глава 3 написаны А. Ф. Филипповым, остальное — В. С. Рябеньким.

Мы очень благодарны за ценные советы и указания акад. С. Л. Соболеву и чл.-корр. АН СССР Л. А. Люстернику, по инициативе которых написана эта книга.

Мы благодарим Л. А. Чудова и С. К. Годунова, которые дали много полезных советов по содержанию книги, а также А. Д. Горбунова и редактора издательства М. М. Горячую за ряд замечаний.

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

**1. Аппроксимация дифференциальных уравнений разностными.** В силу определения производной при малых $h$ имеет место приближенное равенство

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{I}$$

Приближенное равенство типа формулы (I) не единственно. Так, например, имеет место формула

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}\,[f(x+h)-f(x-h)]. \tag{II}$$

Для доказательства формулы (II) разлагаем $f(x+h)$ и $f(x-h)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x$, предполагая, что $f'''$ непрерывна:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\,[f(x+h)-f(x-h)] &= \\ = \frac{1}{2h}\Big[f(x)+hf'(x)&+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta_1 h)\Big]- \\ -\Big[f(x)-hf'(x)&+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x-\theta_2 h)\Big]= \\ &= f'(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x+\theta h),\end{aligned}$$

где

$$0<\theta_1<1; \quad 0<\theta_2<1 \quad \text{и} \quad |\theta|<1.$$

При меньшей гладкости функции $f(x)$ порядок малости остаточного члена будет ниже. Формулы, аналогичные формулам (I) и (II), существуют для производных любого порядка от функций любого числа переменных. Например,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,\,y)}{\partial x\,\partial y} \approx \frac{1}{4h^2}[u(x+h,\,y+h)&-u(x-h,\,y+h)- \\ -u(x+h,\,y-h)&+u(x-h,\,y-h)].\end{aligned} \tag{III}$$

Доказательство справедливости формулы (III) и оценку остаточного члена можно получить, как и выше, с помощью формулы Тейлора.

Приближенные формулы типа (I), (II), (III) можно написать не только для отдельных производных, но и для более общих дифференциальных выражений, в частности, для левой части любого дифференциального уравнения. Для этого, например, достаточно каждую производную в отдельности заменить по соответствующим формулам типа (I), (II), (III); имеются и другие способы (см. [12], стр. 296).

Замена производных линейными комбинациями значений самой функции в отдельных точках используется для численного решения дифференциальных уравнений. Получающиеся после такой замены соотношения носят название *разностных уравнений*. Поясним сказанное примером.

Пример I. Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,\ x), \quad t > 0, \tag{IV}$$

с начальными условиями

$$\mathrm{l}_0 u \equiv u(0,\ x) = \varphi_0(x), \qquad \mathrm{l}_1 u \equiv u'_t(0,\ x) = \varphi_1(x). \tag{V}$$

Заменим уравнение (IV) разностным уравнением

$$\mathrm{R}_h u_h \equiv \frac{u_h(t+\tau,\ x) - 2u_h(t,\ x) + u_h(t-\tau,\ x)}{\tau^2} - \frac{u_h(t,\ x+h) - 2u_h(t,\ x) + u_h(t,\ x-h)}{h^2} = f(t,\ x), \tag{VI}$$

а начальные условия (V) — равенствами

$$\mathrm{r}_{h0} u_h \equiv u_h(0,\ x) = \varphi_0(x), \quad \mathrm{r}_{h1} u_h \equiv \frac{u_h(\tau,\ x) - u_h(0,\ x)}{\tau} = \varphi_1(x). \tag{VII}$$

Уравнение (VI) и начальные условия (VII) будем рассматривать только на множестве точек с координатами вида

$$t = m\tau, \quad x = nh \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots;\ n = 0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

которое будем называть *сеткой*. Всякая функция $u(t,\ x)$, определенная на полуплоскости $t \geqslant 0$, определена, в частности, и на сетке. Поэтому в точках сетки для нее имеют смысл выражения $\mathrm{R}_h u$, $\mathrm{r}_{h0} u$ и $r_{h1} u$. С помощью формулы

Тейлора можно проверить, что в случае достаточной гладкости функции $u(t, x)$, в точках сетки справедливы равенства

$$\mathrm{R}_h u = \mathrm{L}u + O(\tau^2 + h^2) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}_{h1} u = \mathrm{l}_1 u + O(\tau).$$

Отсюда следует, что $\mathrm{R}_h u \to \mathrm{L}u$ при $\tau \to 0$ и $h \to 0$ и $\mathrm{r}_{h1} u \to \mathrm{l}_1 u$ при $\tau \to 0$. Кроме того, $\mathrm{r}_{h0} u = \mathrm{l}_0 u$. Таким образом, уравнение (VI) и начальные условия (VII) аппроксимируют уравнение (IV) и начальные условия (V).

Зная из (VII) значения $u_h(0, x)$ и $u_h(\tau, x)$ и используя (VI), мы можем последовательно вычислить значения функции $u_h$ при $t = 2\tau, 3\tau, \ldots$.

Не следует думать, что во всех случаях решение $u_h$ разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциальное, стремится при измельчении сетки к соответствующему решению $u$ дифференциального уравнения. Так, если в предыдущем примере шаги сетки $\tau$ и $h$ подчинить условию $\frac{\tau}{h} = r > 1$, где $r$ — постоянная, не зависящая от $h$, то $u_h$, вообще говоря, не стремится к $u$ при $h \to 0$.

В самом деле, известно, что значение $u(1, 0)$ решения задачи (IV), (V) зависит от значений функций $u(0, x)$ и $u_t(0, x)$ на отрезке $|x| \leqslant 1$ и не зависит от значений этих функций при $|x| > 1$ *).

Определим $\tau$ равенством $\tau = \frac{1}{m}$, где $m$ — некоторое натуральное число. Тогда точка $(1, 0)$ принадлежит сетке. Значение $u_h(1, 0)$ решения разностного уравнения в точке $(1, 0)$, лежащей на ряде $t = 1$ сетки, выражается в силу уравнения (VI) через значения $u_h$ в трех точках $(1-\tau, -h)$, $(1-\tau, 0)$, $(1-\tau, h)$ предыдущего ряда $t = 1-\tau$ сетки и через значение $u_h(1-2\tau, 0)$ в одной точке сетки, лежащей на ряде $t = 1-2\tau$. Три значения $u_h(1-\tau, -h)$, $u_h(1-\tau, 0)$ и $u_h(1-\tau, h)$ в свою очередь выражаются через значения $u_h$ в пяти точках сетки, лежащих на ряде $t = 1-2\tau$, и в трех точках сетки, лежащих на ряде $t = 1-3\tau$, и т. д. В конечном счете значение $u_h(1, 0)$ выражается через значения $u_h$ в $2m-1$ точках сетки ряда $t = \tau$ и в $2m-3$ точках сетки ряда $t = 0$. Для вычисления этих значений $u_h$ в силу начальных условий (VII)

*) Отрезок $|x| \leqslant 1$ высекается на оси $ox$ двумя характеристиками уравнения (IV), проходящими через точку $t = 1$, $x = 0$.

используются значения $u\ (0,\ x)$ и $u'_t\ (0,\ x)$ только на отрезке $|x| \leqslant mh = \frac{1}{r} m\tau = \frac{1}{r} < 1$. Если при $h \to 0$ имеется сходимость $u_h$ к $u$, то достаточно изменить начальные условия $u\ (0,\ x) = \varphi_0(x)$ и $u'_t\ (0,\ x) = \varphi_1(x)$ в промежутках $\frac{1}{r} < |x| < 1$ таким образом, чтобы изменилось значение $u\ (1,\ 0)$, и сходимость нарушится, так как это изменение начальных условий не отразится на значениях $u_h\ (1,\ 0)$.

Если сходимость $u_h$ к $u$ при $h \to 0$ не имеет места, то разностное уравнение, очевидно, не пригодно для численного решения дифференциального уравнения. Таким образом, важно установить достаточные признаки того, что решение разностного уравнения при измельчении сетки стремится к решению дифференциального уравнения. Такой признак будет указан позже. Он использует понятие устойчивости разностного уравнения, имеющее самостоятельное значение.

**2.** Понятие об устойчивости разностного уравнения. Ошибки округления, неизбежные при задании граничных условий и правой части разностного уравнения, влияют на значения решения разностного уравнения. Это влияние не должно становиться слишком сильным при измельчении сетки, т. е. разностное уравнение должно быть *устойчиво* (относительно возмущения граничных условий и правой части). В противном случае разностное уравнение практически не пригодно для численного решения дифференциального уравнения, так как при крупной сетке нет оснований ожидать, что решение разностного уравнения мало отличается от соответствующего решения дифференциального уравнения, а при мелкой сетке малые ошибки, допущенные в граничных условиях и правой части, недопустимо искажают решение разностного уравнения.

Понятие устойчивости разностного уравнения относительно возмущения граничных условий и правой части аналогично понятию непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от граничных условий и правой части.

Для пояснения сказанного приведем примеры неустойчивого и устойчивого разностных уравнений.

Пример II. Неустойчивое уравнение. В разностном уравнении (VI) положим $\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 = \frac{4}{3} > 1$. Сообщим начальным условиям (VII) возмущения, положив

$$u_h(0,\ nh) = \varphi_0(nh) + \tau(-1)^n \varepsilon$$

и

$$\frac{u_h(\tau,\ nh) - u_h(0,\ nh)}{\tau} = \varphi_1(nh) - 4(-1)^n \varepsilon.$$

Функция $\tilde{u}_h$, которая прибавится в результате этого к решению задачи (VI), (VII), удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (VI), и начальным условиям

$$u_h(0,\ nh) = \tau(-1)^n \varepsilon, \qquad \tilde{u}_h(\tau,\ nh) = -3\tau(-1)^n \varepsilon.$$

Непосредственно проверяется, что она имеет вид

$$\tilde{u}_h(m\tau,\ nh) = (-1)^{m+n} 3^m \tau\varepsilon.$$

Возмущения, сообщенные начальным условиям, можно понимать как ошибки округления, допущенные при задании начальных условий, а $\tilde{u}_h$ как соответствующую ошибку в значениях решения. При $\tau \to 0$ и фиксированном $t = m\tau$ множитель $3^m\tau$, входящий в выражение $\tilde{u}_h(m\tau,\ nh)$, быстро растет, т. е. чувствительность решения уравнения (VI) к ошибкам округления, допущенным при задании начальных условий, быстро увеличивается.

Так, при $t = 1$ и $\tau = \frac{1}{4}$ имеем $3^m\tau \approx 20$, а при $\tau = \frac{1}{20}$ множитель $3^m\tau$ превосходит $10^8$. Уравнение (VI) при $\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 = \frac{4}{3}$ естественно считать неустойчивым.

Существование неустойчивых разностных уравнений и неудобство таких уравнений для практических целей выдвигает задачу об исследовании устойчивости разностных уравнений.

Пример III. Устойчивое уравнение. В разностном уравнении (VI) положим $\tau = h$. Тогда оно примет вид

$$u_h(t+\tau,\ x) + u_h(t-\tau,\ x) - \\ - u_h(t,\ x+h) - u_h(t,\ x-h) = h^2 f(t,\ x).$$

Изменим правые части начальных условий (VII) и правую часть уравнения (VI), прибавив к ним соответственно функции $\tilde{\varphi}_{h0}(x)$, $\tilde{\varphi}_{h1}(x)$ и $\tilde{f}_h(t,\ x)$. Функция $\tilde{u}_h(t,\ x)$, которая прибавится при этом к решению задачи (VI), (VII), удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}_h(t+\tau, x)+\tilde{u}_h(t-\tau, x)-\tilde{u}_h(t, x+h)-\tilde{u}_h(t, x-h)= \\ =h^2\tilde{f}_h(t, x) \quad \text{(VIII)}$$

и начальным условиям

$$\tilde{u}_h(0, x)=\tilde{\varphi}_{h0}(x); \quad \frac{\tilde{u}_h(\tau, x)-\tilde{u}_h(0, x)}{\tau}=\tilde{\varphi}_{h1}(x). \qquad \text{(IX)}$$

Перейдем к оценке значения $\tilde{u}_h(t_0, 0)$, где $t_0=m_0\tau$, а $m_0$ — положительное целое число, которое для определенности будем считать нечетным.

Построим треугольник, ограниченный осью $ox$ и прямыми $t=x+t_0$ и $t=-x+t_0$ характеристиками уравнения (IV), проходящими через точку $(t_0, 0)$. Для каждой точки $(m\tau, nh)$ сетки, которая лежит строго внутри указанного треугольника и для которой $m+n$ есть четное число, напишем уравнения (VIII) и затем сложим эти уравнения почленно. Значения $\tilde{u}_h$ в тех точках $(m\tau, nh)$ сетки, для которых $m+n$ — четное число, не входят ни в одно из рассматриваемых уравнений (VIII) и поэтому не войдут и в уравнение, полученное их суммированием. Если $m+n$ — нечетное число и точка $(m\tau, nh)$ вместе с ближайшими к ней четырьмя соседними точками сетки $[(m+1)\tau, nh]$, $[m\tau, (n+1)h]$, $[(m-1)\tau, nh]$ и $[m\tau, (n-1)h]$ лежит строго внутри треугольника, то значение $\tilde{u}_h(m\tau, nh)$ входит в четыре уравнения (VIII), составленные для этих соседних точек, соответственно с коэффициентами 1, $-1$, 1 и $-1$, и поэтому после приведения подобных членов $\tilde{u}_h(m\tau, nh)$ тоже не войдет в уравнение, полученное суммированием уравнений (VIII). Подсчитывая подобным образом коэффициенты при $\tilde{u}_h(m\tau, nh)$ для всех точек сетки $(m\tau, nh)$, лежащих внутри и на границе указанного выше треугольника, результат почленного сложения уравнений (VIII) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{u}_h(t_0, 0)+\sum_{m=-\frac{m_0-1}{2}}^{\frac{m_0-3}{2}}\tilde{u}_h[0, (2m+1)h]-\sum_{m=-\frac{m_0-1}{2}}^{\frac{m_0-1}{2}}\tilde{u}_h(\tau, 2mh)= \\ =h^2\sum\sum\tilde{f}_h(m\tau, nh),$$

где двойная сумма распространена на те точки сетки, по которым производилось суммирование уравнений (VIII). Отсюда

$$\tilde{u}_h(t_0, 0) = h \sum_{m=\frac{-m_0+3}{2}}^{\frac{m_0-1}{2}} \frac{\tilde{u}_h(\tau, 2mh) - \tilde{u}_h[0, (2m-1)h]}{h} +$$
$$+ \tilde{u}_h[\tau, -(m_0-1)h] + h^2 \sum\sum \tilde{f}_h(m\tau, nh).$$

Заменяя в последнем равенстве $\tilde{u}_h(0, x)$ и $\tilde{u}_h(\tau, x)$ их выражениями $\tilde{u}_h(0, x) = \tilde{\varphi}_{h0}(x)$ и $\tilde{u}_h(\tau, x) = \tilde{\varphi}_{h0}(x) + h\tilde{\varphi}_{h1}(x)$, которые следуют из начальных условий (IX) и равенства $\tau = h$, получим следующую оценку для $\tilde{u}_h(t_0, 0)$:

$$|\tilde{u}_h(t_0, 0)| \leqslant h \sum_{m=\frac{-m_0+3}{2}}^{\frac{m_0-1}{2}} \left( \left| \frac{\tilde{\varphi}_{h0}(2mh) - \tilde{\varphi}_{h0}[(2m-1)h]}{h} \right| + \right.$$
$$\left. + |\tilde{\varphi}_{h1}(2m\tau)| \right) + |\tilde{\varphi}_{h0}[-(m_0-1)h]| + h|\tilde{\varphi}_{h1}[-(m_0-1)h]| +$$
$$+ h^2 \sum\sum |\tilde{f}_h(m\tau, nh)| \leqslant \max_{|x| \leqslant t_0} |\tilde{\varphi}_{h0}(x)| +$$
$$+ 2t_0 \left( \max_{|x| \leqslant t_0} \left| \frac{\tilde{\varphi}_{h0}(x+h) - \tilde{\varphi}_{h0}(x)}{h} \right| + \max_{|x| \leqslant t_0} |\tilde{\varphi}_{h1}(x)| \right) +$$
$$+ t_0^2 \max_{\Delta} |\tilde{f}_h(t, x)|,$$

где $\max\limits_{\Delta}$ означает максимум, взятый по тем точкам сетки, по которым производилось суммирование уравнений (VIII). Итак,

$$|\tilde{u}_h(t_0, 0)| \leqslant C \left( \max_{|x| \leqslant t_0} |\tilde{\varphi}_{h0}(x)| + \max_{|x| \leqslant t_0} \left| \frac{\tilde{\varphi}_{h0}(x+h) - \tilde{\varphi}_{h0}(x)}{h} \right| + \right.$$
$$\left. + \max_{|x| \leqslant t_0} |\tilde{\varphi}_{h1}(x)| + \max_{\Delta} |\tilde{f}_h(t, x)| \right), \qquad \text{(X)}$$

где $C$ зависит только от $t_0$, но не зависит от $h$.

Неравенство типа (X) остается, очевидно, справедливым для значений $\tilde{u}_h$ в точках сетки, не лежащих на оси $t$. Это неравенство означает устойчивость разностного уравнения (VI) при $\tau = h$, а именно: малому изменению функций $\varphi_1$, $f$ и функции $\varphi_0$ вместе с ее разностным отношением $\frac{\varphi_0(x+h) - \varphi_0(x)}{h}$ соответствует независимо от $h$ малое изменение решения $u_h$.

Можно показать, что неравенство типа (X) сохраняется, если $\tau < h$, то есть устойчивость разностного уравнения (VI) имеет место и в этом случае.

**3. Сходимость как следствие устойчивости.** Докажем, что при $\tau = h$ решение $u_h$ задачи (VI), (VII) стремится к решению $u$ задачи (IV), (V). При этом мы используем только неравенство (X), т. е. устойчивость уравнения (VI), а также соотношения $\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u \equiv \varepsilon(t, x, h)$, $\mathrm{l}_0 u - \mathrm{r}_{h0} u = 0$, $\mathrm{l}_1 u - r_{h1} u \equiv \varepsilon_1(x, h)$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon_1 \to 0$ при $h \to 0$, имеющие место для всякой гладкой функции, т. е. аппроксимацию дифференциального уравнения (IV) и начальных условий (V) разностным уравнением (VI) и начальными условиями (VII).

Введем обозначение $v_h \equiv u - u_h$, где $u$ — решение задачи (IV), (V), а $u_h$ — задачи (VI), (VII). Функция $v_h$ удовлетворяет уравнению (VIII) и начальным условиям (IX), где $\tilde{f}_h$, $\tilde{\varphi}_{h0}$ и $\tilde{\varphi}_{h1}$ надо заменить соответственно на $\varepsilon(t, x, h)$, 0 и $\varepsilon_1(x, h)$.

Из неравенства (X), примененного к $v_h$, следует, что $v_h \to 0$, когда $h \to 0$, т. е. $\lim\limits_{h \to 0} u_h = u$.

В конце п. 1 было показано, что в случае $\frac{\tau}{h} = r > 1$, ($r$ — постоянное) сходимость при $h \to 0$ решения $u_h$ задачи (VI), (VII) к решению $u$ задачи (IV), (V) не имеет места. Это указывает на неустойчивость разностного уравнения (VI) при любом $r > 1$. При $r = \sqrt{\frac{4}{3}}$ неустойчивость уравнения (VI) была установлена непосредственно (см. пример 2).

Таким образом, неустойчивое разностное уравнение может оказаться непригодным для численного решения дифференциального уравнения не только из-за сильного влияния ошибок округления, о чем подробно говорилось в начале п. 2, но и из-за отсутствия сходимости решения $u_h$ разностного уравнения к решению $u$ дифференциального уравнения при измельчении сетки.

Сущность установленной связи между устойчивостью и сходимостью легко усмотреть из доказательства следующей теоремы (видоизменение теоремы Л. В. Канторовича, см. [10], стр. 107, замечание 1):

Теорема. *Пусть $U$ и $F$ — два линейных нормированных пространства функций, соответственно с нормами $\| \ \|_U$ и $\| \ \|_F$; пусть, далее, $A$ и $A_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — линейные операторы, переводящие функции из $U$ в функции из $F$.*

*Предположим, что*

1) *Уравнение $Au=f$ имеет решение $u$ из $U$ при заданной фиксированной функции $f$ из $F$.*

2) *Уравнение $A_n u_n = f$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ аппроксимирует уравнение $Au=f$, т. е. для любой функции $u$ из $U$ имеем* $\|Au - A_n u\|_F \to 0$ при $n \to \infty$.

3) *Операторы $A_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеют обратные операторы, ограниченные в совокупности: для любой функции $f$ из $F$ выполнено неравенство $\|A_n^{-1} f\|_U \leqslant M \|f\|_F$, где постоянная $M$ не зависит от $n$ и $f$* *).

*Тогда решение $u_n$ уравнения $A_n u_n = f$ стремится к решению $u$ уравнения $Au=f$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|u-u_n\|_U = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\|u-u_n\|_U = \|A_n^{-1} A_n (u-u_n)\|_U.$$

Ввиду ограниченности операторов $A_n^{-1}$ это выражение не превосходит $M\|A_n(u-u_n)\|_F$. Так как $Au=f$ и $A_n u_n = f$, то

$$M\|A_n(u-u_n)\|_F = M\|A_n u - Au + Au - A_n u_n\|_F =$$
$$= M\|A_n u - Au + f - f\|_F =$$
$$= M\|A_n u - Au\|_F.$$

*) Условие 3) можно назвать условием устойчивости уравнения $A_n u = f$ относительно возмущения правой части.

Итак,

$$\|u - u_n\|_U \leqslant M \|\mathrm{A}_n u - \mathrm{A} u\|_F.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как операторы $\mathrm{A}_n$ аппроксимируют оператор А. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \|u - u_n\|_U = 0.$$

Теорема доказана.

ГЛАВА 1

# СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО

В этой главе вводится понятие корректности разностного уравнения и доказывается, что в случае корректности решение разностного уравнения сходится к решению дифференциального уравнения, если последнее решение существует. Приведены также оценки разности между этими решениями. Все изложенное справедливо как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для любых типов уравнений с частными производными при любых граничных условиях.

Для некоторых типов уравнений вопрос о связи устойчивости и сходимости рассматривался в работах [21], [23], [36]. Понятие корректности является близким к понятию устойчивости разностного уравнения и позволяет рассмотреть вопрос сходимости для более общего класса уравнений.

## § 1. Основные определения

**1.** Разностное уравнение и граничные условия. Пусть в области $D$ с границей $\Gamma$ дано дифференциальное уравнение

$$\mathrm{L}u = f, \tag{1}$$

где $u$ — искомая функция, $f$ — данная функция, $\mathrm{L}$ — дифференциальный оператор, и граничные условия

$$\mathrm{l}_i(u) = \varphi_i \quad \text{на} \quad \Gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{2}$$

где $\varphi_i$ — данные функции, $\mathrm{l}_i$ — операторы (например, $\mathrm{l}_i(u) = u$, или $\mathrm{l}_i(u) = \frac{\partial u}{\partial t}$, или $\mathrm{l}_i(u)$ — производная по нормали к границе, и т. п.), $\Gamma_i$ — заданные части границы $\Gamma$, различные $\Gamma_i$

могут иметь общие куски. В замкнутой области $D+\Gamma$ для любого $h$ (для $0<h<h_0$ или для $h=h_1, h_2, \ldots, \to 0$) определено некоторое множество точек, которое мы назовем сеткой $D_h$. Итак, $D_h \subset D+\Gamma$. Пусть $\mathrm{R}_h$ — разностный (точнее, сеточный) оператор, т. е. преобразующий любую функцию $u_h$, определенную на сетке $D_h$, в функцию $\mathrm{R}_h u_h$, определенную на некотором множестве $D_h^0 \subset D+\Gamma$. Мы предполагаем, что в любой окрестности любой точки области $D$ найдутся точки, принадлежащие $D_h$, и точки, принадлежащие $D_h^0$ при достаточно малых $h$.

Рассмотрим разностное уравнение на сетке $D_h$

$$\mathrm{R}_h u_h = f, \tag{3}$$

правая часть которого определена на $D_h^0$ и равна там правой части уравнения (1), и граничные условия

$$\mathrm{r}_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{4}$$

Каждое из $s$ граничных условий (4) состоит из конечного числа равенств, связывающих значения искомой функции $u_h$ в некоторых точках сетки $D_h$. Множество тех точек сетки $D_h$, которые входят в $i$-е условие из (4), обозначим $\Gamma_{hi}$. Правые части в равенствах (4) получаются следующим образом. При замене дифференциального уравнения (1) разностным уравнением (3) надо указать способ перехода от граничных условий (2) дифференциального уравнения к граничным условиям (4) разностного уравнения. При этом заданным в (2) функциям $\varphi_i$ ставятся в соответствие функции $\varphi_{hi}$, определенные на некоторых множествах $\Gamma_{hi}^0$. Итак,

$$\varphi_{hi} = [\varphi_1, \ldots, \varphi_s]_{hi},$$

где $[\ \ ]_{hi}$ — известный оператор, который можно назвать оператором переноса граничных условий с границы $\Gamma$ на «граничные» точки $\Gamma_{hi}$ сетки $D_h$. Для краткости вместо $[\varphi_1, \ldots, \varphi_s]_{hi}$ будем писать $[\varphi_i]_{hi}$. Если $\Gamma_{hi}^0 \subseteq \Gamma_i$, то обычно полагают $[\varphi_i]_{hi} = \varphi_i$.

Пример 1. $D$ — прямоугольник $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant X$, а $\Gamma_1$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$ — части его границы, лежащие на прямых $t=0$, $x=0$, $x=X$; $\Gamma_2$ совпадает с $\Gamma_1$. Сетка $D_h$ — множество точек $t=m\tau$, $x=nh$ ($m=0, 1, 2, \ldots, M$; $n=0, 1, 2, \ldots, N$; $Nh=X$, $M\tau \leqslant T < (M+1)\tau$); $h \to 0$, пробегая последовательность $h_1$, $h_2$, ... (где $Nh_N = X$), $\tau = h\,\mathrm{const}$. Уравнения (1) и (3) пусть имеют такой вид:

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \tag{5}$$

$$\mathrm{R}_h u_h \equiv \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{\tau^2} - \\ - \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{h^2} = f(m\tau, nh), \tag{6}$$

где $u_{m,n} = u_h(m\tau, nh)$, а граничные условия (2) и (4) пусть будут таковы:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x), u(t, 0) = \varphi_3(t), u(t, X) = \varphi_4(t); \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_h(0, nh) = \varphi_{h1}(nh), \ \frac{1}{\tau}(u_h(\tau, nh) - u_h(0, nh)) = \varphi_{h2}(nh), \\ &u_h(m\tau, 0) = \varphi_{h3}(m\tau), \qquad u_h(m\tau, X) = \varphi_{h4}(m\tau), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $f$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ — данные функции, $\varphi_{hi} = \varphi_i (i = 1, 3, 4)$,

$$\varphi_{h2}(nh) = \varphi_2(nh) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\varphi_{h2}(0) = \frac{1}{\tau}(\varphi_3(\tau) - \varphi_3(0)), \qquad \varphi_{h2}(Nh) = \frac{1}{\tau}(\varphi_4(\tau) - \varphi_4(0)). \tag{9}$$

Объясним, откуда получены равенства (9). Точка (0, 0) принадлежит одновременно $\Gamma_{h1}$, $\Gamma_{h2}$ и $\Gamma_{h3}$, точка $(\tau, 0)$ — $\Gamma_{h2}$ и $\Gamma_{h3}$, поэтому значения функции $u_h$ в этих точках можно вычислить разными путями. Из 1-го и 2-го граничных условий получим

$$u_h(0, 0) = \varphi_{h1}(0), \qquad u_h(\tau, 0) = \varphi_{h1}(0) + \tau\varphi_{h2}(0),$$

а из 3-го условия

$$u_h(0, 0) = \varphi_{h3}(0), \qquad u_h(\tau, 0) = \varphi_{h3}(\tau).$$

Следовательно, должны быть выполнены *условия согласования*

$$\varphi_{h1}(0) = \varphi_{h3}(0), \qquad \varphi_{h1}(0) + \tau\varphi_{h2}(0) = \varphi_{h3}(\tau). \tag{10}$$

Из (10) и аналогичных равенств для точек $(0, Nh)$ и $(\tau, Nh)$ получаем (9). Тогда в этом примере

$$\mathrm{l}_1(u) = u, \quad \mathrm{l}_2(u) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \mathrm{l}_3(u) = u, \quad \mathrm{l}_4(u) = u;$$

$$\mathrm{r}_{h1}(u_h) = u_h(0,\ nh), \quad \mathrm{r}_{h2}(u_h) = \frac{1}{\tau}(u_h(\tau,\ nh) - u_h(0,\ nh)),$$

$$\mathrm{r}_{h3}(u_h) = u_h(m\tau,\ 0), \quad \mathrm{r}_{h4}(u_h) = u_h(m\tau,\ X),$$

$D_h^0$ состоит из точек $(m\tau, nh)$, где $m = 1, 2, \ldots, M-1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$; $\Gamma_{h1}$ — из точек $(0, nh)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$; $\Gamma_{h2}$ — из точек $(0, nh)$ и $(\tau, nh)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, N$; $\Gamma_{h3}$ — из точек $(m\tau, 0)$, а $\Gamma_{h4}$ — из точек $(m\tau, X)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, M$; $\Gamma_{hi}^0 = \Gamma_{hi}$ $(i = 1, 3, 4)$, $\Gamma_{h2}^0 = \Gamma_{h1}^0$.

Замечание. В этом примере функции $\varphi_{hi}$ должны удовлетворять равенствам (10) и аналогичным равенствам вблизи точки $x = Nh$, $t = 0$. Точно так же и для других разностных уравнений необходимо согласовывать граничные условия между собой (аналогично согласованию начальных и граничных условий для дифференциального уравнения).

Мы называем *условиями согласования* условия, связывающие значения различных функций $\varphi_{hi}$ в отдельных точках и являющиеся необходимыми и достаточными для существования хотя бы одной функции $u_h$, удовлетворяющей граничным условиям (4). (Эта функция $u_h$ может и не удовлетворять уравнению (3).)

**2. Нормировка функций.** Пусть $U$ — класс функций, определенных в области $D$ и таких, что для $u \in U$ выражения $\mathrm{L}u$ и $\mathrm{l}_i(u)$ имеют смысл; кроме того, можно наложить еще какие угодно ограничения, например потребовать, чтобы функции класса $U$ имели непрерывные производные до какого-нибудь порядка. Пусть $F$ и $\Phi_i$ — классы функций, определенных соответственно в $D$ и на $\Gamma_i$, причем, если $u \in U$, то $\mathrm{L}u \in F$, $\mathrm{l}_i(u) \in \Phi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Пусть для функций $u \in U$, $f \in F$, $\varphi_i \in \Phi_i$ определены нормы $\|u\|_U$, $\|f\|_F$, $\|\varphi_i\|_{\Phi i}$, удовлетворяющие обычным аксиомам нормы.

Например, нормы могут быть таковы:

а) $\|u\|_U = \max\limits_D |u|$;

б) $\|u\|_U = \max\limits_D \dfrac{|u(x_1, \ldots, x_n)|}{M(x_1, \ldots, x_n)}$, где $M(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная в $D$ непрерывная положительная функция, называемая весом;

в) $\|u\|_U = \left(\int \underset{D}{\cdots} \int |u|^p \, dx_1, \ldots, dx_n\right)^{\frac{1}{p}}$, где $p \geqslant 1$ — заданное число;

г) $\|u\|_U$ есть корень квадратный из интеграла по области $D$ от суммы квадратов функции $u$ и всех ее частных производных до порядка $k$:

д) $\|u\|_U$ есть сумма максимума модуля функции и максимумов модулей ее частных производных до порядка $k$ и т. п.

Пусть для функций $u_h$, заданных на сетке $D_h$, определена норма $\|u_h\|_{Uh}$ *); для $f$, заданных на $D_h^0$, — норма $\|f\|_{Fh}$; для $\varphi_{hi}$, заданных на $\Gamma_{hi}^0$, — норма $\|\varphi_{hi}\|_{\Phi hi}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Если функции $u \in U$, $f \in F$ определены во всей области $D$, то мы можем рассматривать значения функций $u$, $f$, $\mathrm{L}u$ только в точках сетки $D_h$; тогда будут иметь смысл выражения $\mathrm{R}_h u$, $\mathrm{r}_{hi}(u)$, $\|u\|_{Uh}$, $\|f\|_{Fh}$, $\|\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u\|_{Fh}$ и т. п.

Пусть для любых функций $u \in U$, $f \in F$, $\varphi_i \in \Phi_i$ при $h \to 0$

$$\left.\begin{array}{l} \|u\|_{Uh} \to \|u\|_U, \quad \|f\|_{Fh} \to \|f\|_F, \\ \|[\varphi_i]_{hi}\|_{\Phi hi} \to \|\varphi_i\|_{\Phi i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \end{array}\right\} \tag{11}$$

**3. Определение аппроксимации.** Уравнение (3) и граничные условия (4) *аппроксимируют* уравнение (1) и граничные условия (2) на классе функций $U$, если для любой функции $u \in U$ при $h \to 0$

$$\|\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u\|_{Fh} \to 0, \tag{12}$$

$$\|[\mathrm{l}_i(u)]_{hi} - \mathrm{r}_{hi}(u)\|_{\Phi hi} \to 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{13}$$

где $[\ \ ]_{hi}$ — введенный ранее оператор переноса граничных условий с границы $\Gamma$ на граничные точки сетки. Говорят,

---

*) Если $D_h$ состоит из бесконечного числа точек, то для некоторых $u_h$ может быть $\|u_h\|_{Uh} = \infty$, но для любой $u \in U$ должно быть $\|u_h\|_{Uh} < \infty$, где $u_h$ определена в $D_h$ и равна там функции $u$. Аналогичные требования предъявляются и к нормам $\|\ \ \|_{Fh}$ и $\|\ \ \|_{\Phi hi}$.

что *порядок аппроксимации равен* $k$, если для любой $u \in U$ при $0 < h < h_0$

$$\| \mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u \|_{F_h} \leqslant h^k M, \tag{14}$$

$$\| [\mathrm{l}_i(u)]_{hi} - \mathrm{r}_{hi}(u) \|_{\Phi hi} \leqslant h^k M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{15}$$

где числа $M$ и $M_i$ зависят только от $u$, но не от $h$.

Если предыдущие неравенства имеют место в том случае, когда в качестве $U$ взят класс функций, дифференцируемых несколько раз и удовлетворяющих данному уравнению $\mathrm{L}u = f$, то мы будем говорить, что имеет место аппроксимация на классе решений. Порядок аппроксимации на классе решений в некоторых случаях бывает выше, чем порядок аппроксимации на классе произвольных достаточно гладких функций.

Поясним сказанное примерами.

Пример 2. а) Для уравнения из примера 1 можно взять за $U$ класс функций с непрерывными $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в области $D$, за $F$ и $\Phi_i$ взять классы непрерывных функций соответственно в $D$ и на $\Gamma_i$;

$$\| u \|_U = \max_D |u|, \quad \| f \|_F = \max_D |f|, \quad \| \varphi_i \|_{\Phi i} = \max_{\Gamma_i} |\varphi_i|; \tag{16}$$

$$\| u_h \|_{U_h} = \max_{D_h} |u_h|, \quad \| f \|_{F_h} = \max_{D_h^0} |f|, \quad \| \varphi_{hi} \|_{\Phi hi} = \max_{\Gamma_{hi}^0} |\varphi_{hi}|. \tag{17}$$

Тогда условия (11) выполнены. Легко проверить, что условия (12) и (13) тоже выполнены.

б) Если мы хотим добиться выполнения условий (14) и (15), то надо потребовать бо́льшей гладкости от функций класса $U$. Пусть $U$ — класс функций с непрерывными $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Тогда для любой $u \in U$ и уравнения из примера 1 при $h \to 0$, $\tau = ch$ получим, разлагая по формуле Тейлора значения $u$, входящие в $\mathrm{R}_h u$ и $\mathrm{r}_{hi}(u)$,

$$| \mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u | \leqslant \frac{h^2}{12} \left( c^2 \max_D \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right| + \max_D \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \right),$$

$$| [\mathrm{l}_2(u)]_{h2} - \mathrm{r}_{h2}(u) | \leqslant \frac{ch}{2} \max_D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \tag{18}$$

а при $i=1, 3, 4$ $[\mathrm{l}_i(u)]_{hi}-\mathrm{r}_{hi}(u)=0$, так как $\mathrm{l}_i(u)=$ $=\mathrm{r}_{hi}(u)=u$.

Мы имеем аппроксимацию первого порядка. Можно получить аппроксимацию второго порядка, если граничное условие $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(x)$ аппроксимировать более точно (см. ниже пример 7).

Пример 3. Уравнение $\mathrm{L}u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ аппроксимируется на сетке $t=m\tau$, $x=nh$ ($m$, $n$ — целые, $\tau=\sigma h^2$, $\sigma=\mathrm{const}$ при $h\to 0$) уравнением

$$\mathrm{R}_h u_h\equiv\frac{u_{m+1,\,n}-u_{m,\,n}}{\tau}-\frac{u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1}}{h^2}=0,$$

где $u_{m,n}=u_h(m\tau, nh)$. С помощью формулы Тейлора получим

$$\mathrm{L}u-\mathrm{R}_h u=h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+h^4\left(\frac{1}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-\frac{\sigma^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)+o(h^4).$$

Если $\sigma=\frac{1}{6}$, то на классе достаточно гладких функций имеем аппроксимацию 2-го порядка, а на классе решений — аппроксимацию 4-го порядка, что вытекает из следующего. Пусть $u$ — решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$. Дифференцируя обе части уравнения, получим: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Поэтому при $\sigma=\frac{1}{6}$ имеем

$$\mathrm{L}u-\mathrm{R}_h u=h^4\left(\frac{1}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-\frac{\sigma^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)+o(h^4).$$

4. Определения корректности и устойчивости. Будем говорить, что для данного разностного уравнения (3) краевая задача, состоящая в отыскании решения этого уравнения при данных граничных условиях (4), поставлена *корректно* (короче: «уравнение (3) с граничными условиями (4) *корректно*»), если при достаточно малых $h$ его решение существует при любых $f$, $\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hs}$ *) и непрерывно зависит от правой части уравнения $f$ и правых

---

*) Подчиненных, как всегда, условию согласованности (см. замечание после примера 1).

частей граничных условий, причем эта непрерывная зависимость *равномерна* по $h$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от $h$ при $0 < h < h_0$, что для данного $u_h$, удовлетворяющего (3) и (4), и любого такого $\tilde{u}_h$, что

$$R_h\tilde{u}_h = \tilde{f}, \quad r_{hi}(\tilde{u}_h) = \tilde{\varphi}_{hi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{19}$$

$$\|\tilde{f} - f\|_{F_h} < \delta, \quad \|\tilde{\varphi}_{hi} - \varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}} < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{20}$$

при любом $h$, $0 < h < h_0$, имеем

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{U_h} < \varepsilon. \tag{21}$$

Для некоторых нелинейных уравнений решение может существовать не при всяких $f$ и $\varphi_{hi}$ в (3) и (4). В этих случаях будем говорить, что имеет место *корректность в окрестности данного решения*, если решение уравнения (3), (4) существует при данных $f$ и $\varphi_{hi}$, а решение уравнения (19) существует и удовлетворяет неравенству (21) при $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}_{hi}$, мало отличающихся от $f$ и $\varphi_{hi}$ (т. е. удовлетворяющих неравенствам (20)).

Понятие корректности может приобретать несколько различный смысл в зависимости от выбора норм $\|u_h\|_{U_h}$, $\|f\|_{F_h}$, $\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}$. Одно и то же уравнение может быть при одних нормах корректным, а при других некорректным. Для того чтобы разностное уравнение могло быть использовано в практических вычислениях, в большинстве случаев достаточно его корректности хотя бы при каком-нибудь одном выборе норм, аналогичных нормам а), б), в), г), д) из § 1. Например, можно взять в качестве норм $\| \quad \|_{F_h}$ и $\| \quad \|_{\Phi_{hi}}$ суммы максимума модуля функции и максимумов модуля ее разностных отношений до некоторого порядка, а в качестве $\|u_h\|_{U_h}$ — среднее арифметическое значений $|u_h|$ в точках сетки $D_h$.

Уравнение (3) с граничными условиями (4) называется *устойчивым по правой части*, если его решение существует и (21) выполняется для любых $\tilde{u}_h$, удовлетворяющих (19) при

$$\|\tilde{f} - f\|_{F_h} < \delta, \qquad \tilde{\varphi}_{hi} = \varphi_{hi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s); \tag{22}$$

оно называется *устойчивым по граничным условиям*

$$r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \text{где}\ p \leqslant s), \tag{23}$$

если то же имеет место при $\tilde{f} = f$, $\tilde{\varphi}_{hi} = \varphi_{hi}$ $(i = p+1,\ \ldots,\ s)$, $\|\tilde{\varphi}_{hi} - \varphi_{hi}\|_{\Phi hi} < \delta\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ вместо (22). При $p = s$ мы имеем устойчивость по всем граничным условиям, а при $p < s$ имеем устойчивость по некоторым из граничных условий. Если условия (23) называются начальными условиями, то мы говорим, что имеет место *устойчивость по начальным условиям.*

В работах [4], [23], [34], [36], [44] в большинстве случаев рассматривается именно устойчивость по начальным условиям (иногда с небольшими видоизменениями). Приведенное выше определение устойчивости по начальным условиям совпадает с определением, данным В. С. Рябеньким в [36]. Устойчивость решения относительно ошибок, возникающих из-за округления значений решения в каждой точке сетки (сильная устойчивость в [4]) по существу является устойчивостью по правой части. В § 4 будет показано, что для широкого класса уравнений из устойчивости по начальным условиям следует устойчивость по правой части.

Если уравнение (3) и граничные условия (4) линейны, то приведенное выше определение корректности равносильно следующему: уравнение (3) с граничными условиями (4) называется *корректным*, если его решение $u_h$ существует при любых $f$, $\varphi_{hi}$ и $0 < h < h_0$, причем

$$\|u_h\|_{Uh} \leqslant N\|f\|_{Fh} + \sum_{i=1}^{s} N_i \|\varphi_{hi}\|_{\Phi hi}, \tag{24}$$

где числа $N$ и $N_i$ не зависят от $f$, $\varphi_{hi}$ и $h$.

Если уравнение (3) и граничные условия (4) линейны, то для исследования корректности этого уравнения достаточно исследовать корректность соответствующего линейного однородного уравнения

$$R_h(u_h) = 0, \qquad r_{hi}(u_h) = 0.$$

Это вытекает из линейности уравнения. Если это однородное уравнение с однородными граничными условиями будет корректным, то и неоднородное уравнение (3), (4) будет корректным; справедливо и обратное утверждение.

## § 2. Теоремы о сходимости

1. Связь корректности и сходимости. Введенное выше понятие корректности означает равномерную по $h$ непрерывность (в линейном случае ограниченность) оператора $R_h^{-1}$, обратного данному разностному оператору $R_h$. Поэтому основная мысль теоремы, которую мы сейчас сформулируем, — та же, что в теореме о сходимости последовательности равномерно ограниченных обратных операторов, доказанной во введении.

Теорема 1. *Если*

1) *решение дифференциального уравнения* (1) *с граничными условиями* (2) *существует и принадлежит* $U$,

2) *разностное уравнение* (3) *и граничные условия* (4) *аппроксимируют уравнение* (1) *и граничные условия* (2) *на классе* $U$,

3) *уравнение* (3) *с граничными условиями* (4) *корректно, то:*

а) *при* $h \to 0$ *решение* $u_h$ *разностного уравнения стремится к решению* $u$ *дифференциального уравнения, т. е.*

$$\|u - u_h\|_{Uh} \to 0;$$

б) *если уравнения* (1) *и* (3) *и граничные условия* (2) *и* (4) *линейны и порядок аппроксимации равен* $k$, *то имеет место такая оценка скорости сходимости* *):

$$\|u - u_h\|_{Uh} \leqslant h^k \left(MN + \sum_{i=1}^{s} M_i N_i\right), \tag{25}$$

(обозначения здесь те же, что в (14), (15) и (24)). *Кроме того, для* $u \in U$

$$\|u\|_U \leqslant N \|f\|_F + \sum_{i=1}^{s} N_i \|\varphi_i\|_{\Phi i}. \tag{26}$$

Доказательство. а) Пусть $u \in U$, $Lu = f$, $l_i(u) = \varphi_i$, $0 < h < h_0$; $R_h u$ обозначим через $\tilde{f}$, $r_{hi}(u)$ — через $\tilde{\varphi}_{hi}$. В силу (12) и (13) при достаточно малом $h$

$$\|f - \tilde{f}\|_{Fh} < \delta, \qquad \|\varphi_{hi} - \tilde{\varphi}_{hi}\|_{\Phi hi} < \delta. \tag{27}$$

*) В нелинейном случае тоже можно дать оценку скорости сходимости, но она имеет более сложный вид.

Неравенства (20) выполнены, поэтому в силу корректности имеем $\|u_h - u\|_{Uh} < \varepsilon$.

б) Так как $R_h u_h = f = Lu$, $r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} = [\varphi_i]_{hi} = [l_i(u)]_{hi}$, и операторы $R_h$ и $r_{hi}$ линейны, то

$$Lu - R_h u = R_h u_h - R_h u = R_h (u_h - u) = R_h v_h,$$
$$[l_i(u)]_{hi} - r_{hi}(u) = r_{hi}(u_h) - r_{hi}(u) = r_{hi}(v_h),$$

где $v_h = u_h - u$. Отсюда в силу (14) и (15) получим

$$\|R_h v_h\|_{Fh} \leqslant h^k M, \qquad \|r_{hi}(v_h)\|_{\Phi hi} \leqslant h^k M_i. \tag{28}$$

В силу корректности для любой функции $u_h$ имеет место неравенство

$$\|u_h\|_{Uh} \leqslant N \|R_h u_h\|_{Fh} + \sum_{i=1}^{8} N_i \|r_{hi}(u_h)\|_{\Phi hi}$$

(см. формулу (24)). Применяя это неравенство к функции $v_h$ и пользуясь оценками (28), получим неравенство (25).

Чтобы доказать (26), заметим, что

$$\|u\|_{Uh} \leqslant \|u - u_h\|_{Uh} + \|u_h\|_{Uh}.$$

При $h \to 0$ левая часть этого неравенства стремится к $\|u\|_U$, а в правой части первое слагаемое стремится к нулю согласно а), а второе слагаемое удовлетворяет неравенству (24). В силу (11) в пределе получим неравенство (26).

Замечание 1. В некоторых случаях для обеспечения сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального достаточно требовать меньше, чем в теореме 1. Если некоторые из граничных условий (2) аппроксимируются точно, т. е. при некоторых $i$ $\Gamma_{hi}^0 \subset \Gamma_i$ и для рассматриваемых функций $u$ имеем $r_{hi}(u) \equiv l_i(u)$ на $\Gamma_{hi}^0$, $\varphi_{hi} = [\varphi_i]_{hi} = \varphi_i$, то в теореме 1 требование устойчивости по соответствующим граничным условиям можно отбросить, при этом утверждение а) теоремы 1 сохраняет силу.

Так, в примере 1 граничные условия при $i = 1, 3, 4$ аппроксимируются точно, поэтому для сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального не нужно требовать устойчивости по этим трем граничным условиям ($i = 1, 3, 4$), т. е. достаточно требовать устойчивость по правой части и по второму ($i = 2$) граничному условию.

Вообще, если рассматривается задача с какими угодно начальными условиями (при $t=t_0$) и граничными условиями вида $u=\varphi$ на границе, причем эти граничные условия переносятся на сетку совершенно точно, то в теореме 1 вместо корректности достаточно требовать устойчивости по начальным условиям и устойчивости по правой части.

Замечание 2. В случае аппроксимации порядка $k$ для доказательства сходимости в теореме 1 требование корректности можно заменить более слабым требованием. Достаточно, чтобы при любых $\varepsilon$ и $h$ можно было взять

$$\delta=\delta(\varepsilon,\ h)=h^m\eta(\varepsilon)>0,$$

где $\eta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, а число $m$ меньше, чем порядок аппроксимации $k$.

Пример 4. Применение теоремы о сходимости. Пусть в области $D$ с границей $\Gamma$ имеем уравнение

$$a(x,\ y)\,u_{xx}+b(x,\ y)\,u_{yy}+c(x,\ y)\,u_x+d(x,\ y)\,u_y+\\ +e(x,\ y)\,u=f(x,\ y),\quad u|_\Gamma=\varphi, \tag{29}$$

причем $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a+b\geqslant q$, $|c|\leqslant Ma$, $|d|\leqslant Mb$, $e\leqslant 0$, где $q$ и $M$ — положительные постоянные, область $D$ лежит в круге $x^2+y^2<r^2$, все функции в (29) непрерывны в $D+\Gamma$. Пусть $D_h$ состоит из точек $x=mh$, $y=nh$ ($m$, $n$ — целые), лежащих в $D+\Gamma$; $\Gamma_h$ — множество граничных точек сетки. Точка $(x,\ y)$ сетчатой области $D_h$ — граничная, если хоть одна из четырех соседних точек $(x\pm h,\ y)$ и $(x,\ y\pm h)$ лежит вне $D+\Gamma$. Пусть разностное уравнение и граничные условия таковы:

$$R_hu_h\equiv\frac{a}{h^2}(u_{m+1,\,n}-2u_{m,\,n}+u_{m-1,\,n})+\frac{b}{h^2}(u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+\\ +u_{m,\,n-1})+\frac{c}{2h}(u_{m+1,\,n}-u_{m-1,\,n})+\frac{d}{2h}(u_{m,\,n+1}-u_{m,\,n-1})+\\ +eu_{m,\,n}=f,\qquad u_h|_{\Gamma_h}=\varphi_1|_{\Gamma_h}, \tag{30}$$

где $u_{m,\,n}=u_h(mh,\ nh)$, $h<\frac{2}{M}$, а функция $\varphi_1$ получена из $\varphi$ в (29) непрерывным продолжением на всю область $D$. Покажем, что краевая задача (30) поставлена корректно.

Пусть

$$v(x,\ y)=e^{A(r^2+1)}-e^{A(x^2+y^2)},$$

где $A=\frac{M^2+1}{4}$. Тогда можно показать, что

$$R_h v < -\frac{2}{3}Aq, \qquad v > e^A - 1$$

в $D+\Gamma$. Если $u_h$ — решение уравнения (30), где

$$|f| < \frac{2}{3}Aq\delta, \quad |\varphi| < (e^A-1)\delta,$$

то $u_h - v\delta \leqslant 0$, так как из того, что $h<\frac{2}{M}$, $R_h(u_h - v\delta) > 0$ в $D_h$, $u_h - v\delta < 0$ на $\Gamma_h$ следует, что $u_h - v\delta$ не может иметь положительного максимума ни во внутренних точках сетки $D_h$, ни на $\Gamma_h$. Аналогично получим $u_h + v\delta \geqslant 0$. Значит, $|u_h| \leqslant v\delta$ и

$$\|u_h\|_{Uh} = \max_{D_h} |u_h| \leqslant \delta e^{A(r^2+1)}. \tag{31}$$

Отсюда следует, что однородная задача ($R_h u_h = 0$, на $\Gamma_h$ $u_h = 0$) имеет только нулевое решение. Значит, если (30) рассматривать как систему линейных уравнений, в которой неизвестными служат значения $u_h$ в точках сетки, то детерминант системы не равен нулю, и система (30) имеет решение при любых $f$ и $\varphi$. Это решение непрерывно зависит от $f$ и $\varphi$ в силу (31), причем оценка (31) не зависит от $h$.

Итак, корректность доказана, если взять за нормы $\| \ \|_{Uh}$, $\| \ \|_{Fh}$, $\| \ \|_{\Phi hi}$ в (24) максимум модуля. Следовательно, если задача (29) имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение $u$, то в силу теоремы 1 при $h \to 0$ $u_h$ равномерно сходится к $u$.

Теорема 2. *Если для данного дифференциального уравнения* (1), (2) *существует хотя бы одно разностное уравнение, удовлетворяющее условиям теоремы* 1, *то решение уравнения* (1), (2) *в классе* $U$ *единственно.*

*Если, кроме того, операторы* $[\ \ ]_{hi}$, *с помощью которых мы получаем правые части* $\varphi_{hi}$ *граничных условий* (4), *равномерно (относительно* $h$ *при* $0<h<h_0$) *непрерывны, то решение дифференциального уравнения* (1) *непрерывно зависит от правой части уравнения и от граничных условий, т. е. если* $u$ *и* $\tilde{u}$ *принадлежат* $U$ *и удовлетворяют уравнениям* (1), (2) *и*

$$L\tilde{u} = \tilde{f}, \qquad l_i(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s), \tag{32}$$

*где*

$$\|f-\tilde{f}\|_F<\eta, \qquad \|\varphi_i-\tilde{\varphi}_i\|_{\Phi i}<\eta \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{33}$$

*то*

$$\|u-\tilde{u}\|_U<\varepsilon(\eta),$$

*где* $\varepsilon(\eta)\to 0$ *при* $\eta\to 0$.

Здесь мы говорим, что операторы $[\quad]_{hi}$ *равномерно непрерывны при* $0<h<h_0$, если из (33) при $0<h<h_0$ следует

$$\|\varphi_{hi}-\tilde{\varphi}_{hi}\|_{\Phi hi}<\zeta(\eta) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{34}$$

где $\zeta(\eta)$ не зависит от $h$ и стремится к нулю при $\eta\to 0$,

$$\varphi_{hi}=[\varphi_i]_{hi}, \qquad \tilde{\varphi}_{hi}=[\tilde{\varphi}_i]_{hi}.$$

Доказательство. Из неравенств (33) в силу (11) и (34) следует, что при малых $h$

$$\|f-\tilde{f}\|_{Fh}<2\eta, \qquad \|\varphi_{hi}-\tilde{\varphi}_{hi}\|_{\Phi hi}<\zeta(\eta).$$

То есть при достаточно малых $h$ для разностных уравнений (3), (4) и (19) выполнены условия (20). Поэтому вследствие корректности

$$\|u_h-\tilde{u}_h\|_{Uh}<\varepsilon_1(\eta).$$

С другой стороны, при достаточно малых $h$ в силу пункта а) теоремы 1 имеем

$$\|u-u_h\|_{Uh}<\varepsilon_1(\eta), \qquad \|\tilde{u}_h-\tilde{u}\|_{Uh}<\varepsilon_1(\eta).$$

Из трех последних неравенств имеем

$$\|u-\tilde{u}\|_{Uh}<3\varepsilon_1(\eta).$$

При $h\to 0$ и таком $\eta$, что $4\varepsilon_1(\eta)<\varepsilon$, получим в силу (11)

$$\|u-\tilde{u}\|_U<\varepsilon.$$

**2. Асимптотическое представление разности $u_h-u$.** Покажем, что во многих случаях

$$u_h-u=h^k w+o(h^k),$$

где функция $w$ не зависит от $h$. Это значит, что при измельчении сетки разность $u_h-u$ во всех точках уменьшается почти в одно и то же число раз, пропорционально некоторой степени числа $h$. Это позволит обосновать известный прием ([28], стр. 73; [12], стр. 11), применяемый для оценки разности $u - u_h$ между решениями уравнений (1) и (3) и получения более точного приближения к решению дифференциального уравнения.

Теорема 3. *Пусть*

1) *уравнение* (3) *и граничные условия* (4) *линейны*;

2) *выполнены условия теоремы* 1;

3) *аппроксимация* (14), (15) *такова, что существуют пределы*

$$\lim_{h\to 0} h^{-k}(\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u) = \psi, \qquad \lim_{h\to 0} h^{-k}([\mathrm{l}_i(u)]_{hi} - \mathrm{r}_{hi}(u)) = \psi_i \tag{35}$$

(*где* $u$ — *решение уравнения* (1) *с граничными условиями* (2); *число* $k$ *обычно равно порядку аппроксимации*), *т. е. существуют такие функции* $\psi$ *и* $\psi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, *что при* $h \to 0$

$$\left.\begin{aligned} &\| h^{-k}(\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u) - \psi \|_{Fh} \to 0, \\ &\| h^{-k}([\mathrm{l}_i(u)]_{hi} - \mathrm{r}_{hi}(u)) - [\psi_i]_{hi} \|_{\Phi hi} \to 0; \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

4) *решение уравнения*

$$\mathrm{L}w = \psi, \quad \mathrm{l}_i(w) = \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{37}$$

*существует и принадлежит некоторому классу функций* $W$, *на котором* $\mathrm{R}_h$ *и* $\mathrm{r}_{hi}$ *аппроксимируют* $\mathrm{L}$ *и* $\mathrm{l}_i$ *в смысле* (12), (13).

*Тогда* $h^{-k}(u_h - u) \to w$ *при* $h \to 0$, *где* $w$ — *решение уравнения* (37), *т. е.*

$$\lim_{h\to 0} \| h^{-k}(u_h - u) - w \|_{Uh} = 0. \tag{38}$$

Заметим, что условия 3) и 4) обычно выполняются, если решение $u$ достаточно гладко. В этом случае можно найти пределы (35), разлагая $\mathrm{R}_h u$ и $\mathrm{r}_{hi}(u)$ по формуле Тейлора.

Доказательство. Пусть $u$ удовлетворяет уравнениям (1), (2), $u_h$ — уравнениям (3), (4). Пусть $\mathrm{R}_h u = \tilde{f}$, $\mathrm{r}_{hi}(u) = \tilde{\varphi}_{hi}$. В силу (36)

$$h^{-k}(f - \tilde{f}) = \psi + \alpha_h, \qquad h^{-k}(\varphi_{hi} - \tilde{\varphi}_{hi}) = [\psi_i]_{hi} + \alpha_{hi},$$

где при $h \to 0$

$$\|\alpha_h\|_{Fh} \to 0, \qquad \|\alpha_{hi}\|_{\Phi hi} \to 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} h^{-k}(\mathrm{R}_h u_h - \mathrm{R}_h u) &= \psi + \alpha_h, \\ h^{-k}(\mathrm{r}_{hi}(u_h) - \mathrm{r}_{hi}(u)) &= [\psi_i]_{hi} + \alpha_{hi}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

С другой стороны, пусть $w$ — решение уравнения (37). В силу (12), (13) $\mathrm{R}_h w = \psi + \beta_h$, $\mathrm{r}_{hi}(w) = [\psi_i]_{hi} + \beta_{hi}$; при $h \to 0$ $\|\beta_h\|_{Fh} \to 0$, $\|\beta_{hi}\|_{\Phi hi} \to 0$. Так как $\mathrm{R}_h$ и $\mathrm{r}_{hi}$ линейны, то отсюда и из (39) следует

$$\mathrm{R}_h(h^{-k}(u_h - u) - w) = \alpha_h - \beta_h,$$
$$\mathrm{r}_{hi}(h^{-k}(u_h - u) - w) = \alpha_{hi} - \beta_{hi}.$$

При $h \to 0$ правые части стремятся к нулю; вследствие корректности этих уравнений справедливо (38).

Воспользуемся теоремой 3 для оценки ошибки в решении, получаемой от замены дифференциального уравнения разностным.

Пусть вычислены два решения $u_1$ и $u_2$ уравнения (3) с граничными условиями (4) при разных $h$: при $h = h_1$ и $h = h_2$, где $h_1 = ch_2$, $c > 1$, и сетка $D_{h_1}$ есть часть сетки $D_{h_2}$. Тогда пользуются следующей приближенной формулой для определения величины ошибки решения $u_2$

$$u - u_2 \approx \frac{1}{c^k - 1}(u_2 - u_1), \tag{40}$$

где $k$ — порядок аппроксимации.

Покажем, что если выполнены условия теоремы 3, то разность между правой и левой частями в (40) бесконечно мала по сравнению с $h_2^k$ (при $h_1 = ch_2$, $h_2 \to 0$, $c = \mathrm{const}$).

Из (38) следует, что

$$u_1 = u + h_1^k w + o(h_1^k), \qquad u_2 = u + h_2^k w + o(h_2^k).$$

Исключая из этих равенств $w$, получим

$$u = u_2 + \frac{1}{c^k - 1}(u_2 - u_1) + o(h_2^k). \tag{41}$$

Отбрасывая $o(h_2^k)$, этой формулой иногда пользуются для получения более точного (чем $u_2$) приближения к решению $u$. В тех случаях, когда в (35) и (36) $\psi=0$, $\psi_i=0$, непосредственное применение формулы (41) невыгодно: она может давать менее точное приближение, чем $u_2$. В этих случаях число $k$ следует увеличить так, чтобы хоть одна из функций $\psi$ и $\psi_i$ в (35) и (36) не была нулем. Например, в тех случаях, когда порядок аппроксимации на классе решений (см. § 1) больше, чем порядок аппроксимации на классе всех гладких функций, число $k$ надо брать равным порядку аппроксимации на классе решений.

Пример 5. Уравнение $\mathrm{L}u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,\ x)=\varphi_1(x)$, $u(t,\ 0)=0$, $u(t,\ X)=0$ аппроксимируется на сетке $t=m\tau$, $x=nh$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ Nh=X,\ M\tau\leqslant T<(M+1)\tau;\ \tau=\sigma h^2,\ \sigma=\mathrm{const}\leqslant\frac{1}{2}$ при $h\to 0)$ уравнением

$$\mathrm{R}_h u_h\equiv\frac{1}{\tau}(u_{m+1,\,n}-u_{m,\,n})-\\-\frac{1}{h^2}(u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1})=0, \qquad (42)$$

где $u_{m,\,n}=u_h(m\tau,\ nh)$, с граничными условиями $u_{0,\,n}=\varphi_1(nh)$, $u_{m,\,0}=0$, $u_{m,\,N}=0$. Эта аппроксимация — второго порядка, так как

$$\mathrm{L}u-\mathrm{R}_h u=h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+o(h^2),\quad \mathrm{l}_i(u)-\mathrm{r}_{hi}(u)=0.$$

Покажем, что при $\sigma\leqslant\frac{1}{2}$ уравнение (42) с данными граничными условиями корректно. Пусть $u_h$ удовлетворяет уравнению $\mathrm{R}_h u_h=f$, где $\mathrm{R}_h$ — то же, что в (42), $|f|\leqslant\delta$, и граничным условиям $u_{0,\,n}=\varphi_1$, $u_{m,\,0}=\varphi_2$, $u_{m,\,N}=\varphi_3$, где $|\varphi_i|\leqslant\delta$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Таким образом,

$$u_{m+1,\,n}=\sigma u_{m,\,n-1}+(1-2\sigma)u_{m,\,n}+\sigma u_{m,\,n+1}+\tau f(m\tau,\ nh)$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1),$$
$$u_{m+1,\,0}=\varphi_2,\qquad u_{m+1,\,N}=\varphi_3.$$

Учитывая, что $u_{0,n}=\varphi_1$, $|\varphi_i|\leqslant\delta$, $|f|\leqslant\delta$, $0<\sigma\leqslant\frac{1}{2}$, получим:

$$|u_{1,n}|\leqslant\delta+\tau\delta,\quad |u_{2,n}|\leqslant\delta+2\tau\delta,\quad \ldots,\quad |u_{m,n}|\leqslant\delta+m\tau\delta.$$

Итак, при $m\leqslant M$ имеем $|u_{m,n}|\leqslant\delta+M\tau\delta\leqslant(1+T)\delta$. Корректность доказана, так как полученная оценка не зависит от $h$. Если решение $u$ достаточно гладко, то можно применить теорему 3 при $k=2$. Например, пусть вычислены два решения $u_1$ и $u_2$ уравнения (42) при $h=h_1$ и $h=h_2$, где $h_1=2h_2$. Тогда в силу (40) $u-u_2\approx\frac{1}{3}(u_2-u_1)$.

Если же $\sigma=\frac{1}{6}$, то имеем аппроксимацию 4-го порядка на классе решений (см. § 1). Значит, если $\sigma=\frac{1}{6}$ и решение $u(t, x)$ достаточно гладкое, то в (35) и (40) надо взять $k=4$.

## § 3. Обобщение полученных результатов

**1.** Системы разностных уравнений. Теоремы 1—3 остаются справедливыми и для системы разностных уравнений, аппроксимирующей систему дифференциальных уравнений. В этом случае следует считать, что (1) и (3) есть запись этих систем в векторной форме.

**2.** Метод прямых. Все сказанное также применимо к решению дифференциальных уравнений методом прямых (т. е. когда заменяются разностями производные не по всем независимым переменным). В этом случае сетка $D_h$ состоит не из отдельных точек, а из прямых линий.

**3.** Сетка, зависящая от нескольких параметров. Требование, чтобы сетка $D_h$ зависела только от одного параметра $h$ (см. § 1), можно заменить более слабым. Сетка $D_h$ может зависеть от конечного числа параметров $h_1, h_2, \ldots, h_k$ (обычно параметрами являются шаги сетки по $x$, $y$, ...), связанных между собой некоторыми неравенствами. Эти неравенства должны задаваться вместе с разностным уравнением $R_h u_h=f$.

Например, для уравнения (6) можно взять неравенство вида $\tau\leqslant ch$, где $c$ — заданная постоянная; для уравнения (42) можно взять $\tau\leqslant ch^2$. Для некоторых уравнений не надо налагать никаких ограничений в виде неравенств, например, для многих разностных уравнений, аппроксимирующих эллиптические уравнения второго порядка. В каждом отдельном случае следует налагать на $h_1, h_2, \ldots, h_n$ такие ограничения, которые обеспечивают аппроксимацию данного дифференциального уравнения разностным и корректность (или устойчивость) разностного уравнения.

Будем говорить, что *разностное уравнение* $\mathrm{R}_h u_h = f$ *аппроксимирует дифференциальное уравнение* $\mathrm{L}u = f$ *при заданных ограничениях на параметры сетки* $h_1, h_2, \ldots, h_n$, если $\|\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u\|_{F_h} \to 0$, когда все $h_1, \ldots, h_n$ стремятся к нулю, но стремятся не совсем произвольно, а так, что все время выполняются эти ограничения. Аналогичным образом обобщается определение корректности. При этом теоремы 1 и 2 остаются справедливыми.

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$$

с начальными условиями $u(0, x) = \varphi(x)$ и разностное уравнение

$$\mathrm{R}_h u_h \equiv \frac{1}{\tau}\left[u_{m+1, n} - \frac{1}{2}(u_{m, n+1} + u_{m, n-1})\right] - \\ - \frac{1}{2h}(u_{m, n+1} - u_{m, n-1}) = f(m\tau, nh)$$

с начальными условиями $u_{0, n} = \varphi(nh)$; значение функции $u_h$ в точке $t = m\tau$, $x = nh$ обозначено через $u_{m, n}$. Разлагая $\mathrm{R}_h u$ по формуле Тейлора, получим

$$\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots$$

Если $h$ и $\tau$ стремятся к нулю независимо друг от друга, то $\frac{h^2}{2\tau}$ не стремится к нулю, и аппроксимации не будет. Если же наложить ограничение $\tau \geqslant ch$, где $c = \mathrm{const} > 0$, то аппроксимация имеет место, так как при $h \to 0$, $\tau \to 0$, $\tau \geqslant ch$ имеем $\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u \to 0$.

С другой стороны, покажем, что если $\tau \leqslant h$ и область $D$ лежит в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, то разностное уравнение при данных начальных условиях корректно. Пусть $|\varphi| < \delta$, $|f| < \delta$, тогда из разностного уравнения при $\tau \leqslant h$ получим, что

$$|u_{1,n}| < \delta + \tau\delta, \ |u_{2,n}| < \delta + 2\tau\delta, \ \ldots, \ |u_{m,n}| < \delta + m\tau\delta.$$

Так как $m\tau = t$, то при $\delta = \frac{\varepsilon}{1+T}$ и любых $h$ и $\tau (\tau \leqslant h)$ имеем $|u_h| < \varepsilon$ во всей области $0 \leqslant t \leqslant T$. Итак, при $\tau \leqslant h$ имеем корректность.

При $ch \leqslant \tau \leqslant h$ имеют место и аппроксимация, и корректность. В силу теоремы 1 решение разностного уравнения сходится к решению дифференциального, если $h$ и $\tau$ так стремятся к нулю, что $ch \leqslant \tau \leqslant h$, где $c = \text{const} > 0$.

Заметим, что подобные двусторонние ограничения на шаги сетки часто создают затруднения при практических вычислениях, особенно для уравнений с переменными коэффициентами.

**4.** Сетка, выходящая за пределы области. Укажем, какие изменения надо внести в сказанное в § 1 и § 2, чтобы охватить и тот случай, когда в разностное уравнение входят значения $u_h$ не только в точках области $D+\Gamma$, но и в некоторых точках вне этой области. Обозначим через $D_h$ множество всех точек, входящих в разностное уравнение. Множество $D_h$ уже не будет целиком содержаться в $D+\Gamma$. Пусть $D^*$ — такая область, содержащая данную область $D$, что $D_h \subset D^*$ при $0 < h < h_0$. Пусть $D_h^0 \subset D + \Gamma$ и пусть указан способ продолжения в область $D^*$ каждой функции $u \in U$. Продолженную этим способом функцию обозначим через $u^*$. Во всех определениях и теоремах § 1 и § 2 заменим $R_h u$, $r_{hi}(u)$, $\|u\|_{U_h}$ и т. п. через $R_h u^*$, $r_{hi}(u^*)$, $\|u^*\|_{U_h}$ и т. п. Тогда теоремы 1—3 остаются справедливыми.

Пример 7. В примере 1 мы имеем аппроксимацию 1-го порядка, при этом граничное условие $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_2(x)$ было аппроксимировано с меньшей точностью, чем уравнение и остальные граничные условия (см. формулу (18)). Чтобы улучшить аппроксимацию, заменим в этом граничном условии производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ симметричным разностным отношением

$$r_{h2}(u_h) \equiv \frac{1}{2\tau}(u_h(\tau, nh) - u_h(-\tau, nh)).$$

При вычислении значений $u_h$ в точках сетки, лежащих на трех прямых: $t = -\tau$, $t = 0$, $t = \tau$, поступим следующим образом. Из граничного условия $u_h(0, nh) = \varphi_{h1}(nh)$ известно $u_h$

при $t=0$ а $u_h(\tau, nh)$ и $u_h(-\tau, nh)$ находим из системы двух уравнений: граничного условия

$$\frac{1}{2\tau}(u_h(\tau, nh) - u_h(-\tau, nh)) = \varphi_{h2}(nh)$$

и разностного уравнения (6), положив в нем $m=0$. Зная $u_h$ при $t=0$ и $t=\tau$, можно вести счет дальше обычным способом.

Чтобы применить к этому уравнению изложенные выше теоремы, мы должны в сетке $D_h$ примера 1 добавить точки $(-\tau, nh)$, а к $\overset{0}{D}_h$ — точки $(0, nh)$, так как мы пользовались уравнением (6) при $m=0$. Пусть $U$ — класс функций, имеющих непрерывные $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ в области $D$. Каждую функцию $u \in U$ продолжаем в область $D^*$ $(-\tau \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant X)$ с сохранением непрерывности этих производных. Получим аппроксимацию второго порядка, так как неравенство (18) заменяется таким:

$$|[\mathrm{l}_2(u)]_{h2} - \mathrm{r}_{h2}(u)| \leqslant \frac{\tau^2}{6} \max_{D^*} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|; \quad \tau = ch.$$

**5.** Более сложный способ аппроксимации уравнения и граничных условий. Пусть при составлении граничных условий (4) $\varphi_{hi}$ может зависеть не только от $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$, но и от $f$, т. е. $\varphi_{hi} = [f, \varphi_1, \ldots, \varphi_s]_{hi}$. Можно также в правой части уравнения (3) вместо $f$ поставить другую функцию $f_h$, которая зависит от $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$, т. е. $f_h = [f, \varphi_1, \ldots, \varphi_s]_h$. Если везде в предыдущем тексте заменить $[\varphi_i]_{hi}$ на $[f, \varphi_1, \ldots, \varphi_s]_{hi}$, $[\mathrm{l}_i(u)]_{hi}$ — на $[\mathrm{L}u, \mathrm{l}_1(u), \ldots, \mathrm{l}_s(u)]_{hi}$, $\|f\|_{Fh}$ — на $\|f_h\|_{Fh}$, $\mathrm{L}u - \mathrm{R}_h u$ — на $[\mathrm{L}u, \mathrm{l}_1(u), \ldots, \mathrm{l}_s(u)]_h - \mathrm{R}_h u$ и т. п., то теоремы 1 и 2 остаются справедливыми.

Пример 8. Пусть область $D$, сетка $D_h$, уравнения и граничные условия — те же, что в примере 1, кроме условия $\mathrm{r}_{h2}(u_h) = \varphi_2$, которое заменим таким:

$$\frac{1}{\tau}(u_h(\tau, nh) - u_h(0, nh)) = \varphi_2(nh) + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1(nh)}{\partial x^2} + f(0, nh)\right). \quad (43)$$

Это равенство получается из формулы Тейлора

$$\frac{1}{\tau}(u(\tau, nh) - u(0, nh)) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t^2} + O(\tau^2),$$

если заметить, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$ в силу (5); $\frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}$. Следовательно, эта аппроксимация — второго порядка. В (43) мы имеем

$$\varphi_{h2} = [f, \varphi_1, \ldots, \varphi_s]_{h2} = \varphi_2(nh) + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1(nh)}{\partial x^2} + f(0, nh)\right).$$

Можно также $\frac{\partial^2 \varphi_1(nh)}{\partial x^2}$ заменить на $\frac{1}{h^2}(\varphi_1(n+1)h - 2\varphi_1(nh) + \varphi_1((n-1)h))$.

6. Об определении корректности для нелинейных уравнений*). Определение корректности, данное в § 1, можно обобщить и на тот случай, когда разностное уравнение $R_h u_h = f$ с данными граничными условиями может иметь более одного решения, т. е. когда обратный оператор $R_h^{-1}$ может быть многозначным.

Уравнение (3) с граничными условиями (4) называется *корректным в окрестности функции* $u$, если при любых $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}_{hi}$, близких к $f$ и $\varphi_{hi}$, в окрестности функции $u$ существует решение $\tilde{u}_h$ задачи (19), и любое решение задачи (19) из этой окрестности стремится при $\tilde{f} \to f$, $\tilde{\varphi}_{hi} \to \varphi_{hi}$ к решению задачи (3), (4) равномерно по $h$ (и равномерно по всем решениям $\tilde{u}_h$ из этой окрестности, если таких решений бесконечно много).

Точнее, уравнение (3) с граничными условиями (4) называется *корректным в окрестности функции* $u$ класса $U$, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, не зависящее от $h$, что выполнены следующие условия. Обозначим через $\omega_h$ множество таких функций $\tilde{u}_h$, определенных на $D_h$, что $\|u - \tilde{u}_h\|_{U_h} < \varepsilon_0$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\eta > 0$ и $\delta > 0$ ($\delta$ не зависит от $h$), что при $h < \eta$ и при любых **) $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}_{hi}$, удовлетворяющих неравенствам (20),

1) существует решение $\tilde{u}_h$ задачи (19), принадлежащее $\omega_h$,

2) для любого решения $\tilde{u}_h$, принадлежащего $\omega_h$, имеем

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{U_h} < \varepsilon,$$

где $u_h$ — любое решение задачи (3), (4), принадлежащее $\omega_h$.

Если в теоремах 1 и 2 корректность понимать в смысле этого определения, а класс $U$ заменить на множество функций $\tilde{u}$ класса $U$, удовлетворяющих неравенству $\|\tilde{u} - u\|_U < \varepsilon_0$, где $u$ — решение уравнения (1), (2), то утверждения о сходимости $\|u_h - u\|_{U_h} \to 0$ и единственности решения $u$ остаются справедливыми.

*) Содержание п. 6 не используется нигде в дальнейшем.

**) Подчиненных, как всегда, условиям согласования (см. замечание после примера 1).

# ГЛАВА 2

# РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УСТОЙЧИВОСТИ

В этой главе мы рассмотрим различные виды устойчивости и связь между ними. Знание этой связи часто позволяет при исследовании устойчивости разностного уравнения ограничиться проверкой, будет ли оно устойчиво по начальным условиям. В конце главы мы рассмотрим итерационные процессы, исследование которых имеет много общего с исследованием устойчивости разностных уравнений.

## § 4. Устойчивость по начальным условиям

**1.** Начальные условия для разностного уравнения. Примем обозначения, введенные в § 1 гл. 1. Пусть разностное уравнение

$$R_h u_h = f \tag{3}$$

с граничными условиями

$$r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s) \tag{4}$$

удовлетворяет требованиям, сформулированным в § 1.

Выделим класс разностных уравнений, для которых имеет смысл говорить о начальных условиях (аналогично начальным условиям для гиперболических и параболических дифференциальных уравнений). Пусть выполнены следующие требования:

1) Сетка $D_h$ лежит в той части пространства $(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, где $t \geqslant T_0$, и состоит из слоев $S_0$, $S_1$, $S_2$, …; слой $S_m$ есть множество точек сетки, лежащих в плоскости $t = t_0(\tau) + m\tau$; $t_0(\tau) \to t_0$ при $\tau \to 0$.

2) Из $s$ граничных условий (4) первые $p$ условий

$$r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p) \tag{44}$$

(назовем их начальными условиями) однозначно определяют значения $u_h$ в точках слоев $S_0$, $S_1$, …, $S_{q-1}$.

3) Уравнения (3) и (4) есть сокращенная запись системы уравнений, в которой искомыми величинами являются значения $u_h$ в точках сетки. Мы требуем, чтобы для любого $m$ ($m=q,\ q+1, \ldots$), зная значения $u_h$ только в точках слоев $S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots, S_{m-q}$ и пользуясь только теми уравнениями, в которые входят значения $u_h$ только в точках слоев $S_m$, $S_{m-1}, \ldots, S_{m-q}$, можно было однозначно определить значения $u_h$ во всех точках слоя $S_m$.

В силу 2) из начальных условий (44) определяются значения $u_h$ в $S_0, S_1, \ldots, S_{q-1}$, а затем в силу 3) можно найти значения $u_h$ сначала в $S_q$, затем в $S_{q+1}$, потом в $S_{q+2}$ и т. д.*). Итак, при выполнении требований 1) — 3) решение уравнения (3) с граничными условиями (4) существует и единственно.

Большинство разностных уравнений, применяемых для аппроксимации гиперболических и параболических дифференциальных уравнений, удовлетворяет требованиям 1) — 3). Им удовлетворяют, в частности, примеры 1, 5, 8 (гл. 1). Уравнение примера 4 и другие разностные уравнения, связанные с краевыми задачами для эллиптических дифференциальных уравнений, не удовлетворяют этим требованиям.

Пример 9. Пусть дифференциальное уравнение, область $D$ и сетка $D_h$ те же, что в примере 5, а разностное уравнение и граничные условия таковы:

$$\mathrm{R}_h u_h \equiv \frac{1}{\tau}\left(\frac{2}{3}u_{m,n} - \frac{1}{2}u_{m-1,n} - \frac{1}{6}u_{m-3,n}\right) - \\ - \frac{1}{h^2}(u_{m-1,n+1} - 2u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}) = 0,$$

$$\tau \leqslant \frac{1}{3}h^2;\quad \mathrm{r}_{h1}(u_h) \equiv u_{m,n} = \varphi_1(m\tau,\ nh)$$

$$(m=0,\ 1,\ 2;\quad n=0,\ 1, \ldots, N;\quad Nh=X);$$

$$\mathrm{r}_{h2}(u_h) \equiv u_{m,0} = 0,$$

$$\mathrm{r}_{h3}(u_h) \equiv u_{m,N} = 0 \qquad (m=0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Здесь из условия $\mathrm{r}_{hi}(u_h) = \varphi_1$ определяются значения $u_h$ в $S_0$, $S_1$ и $S_2$, затем из уравнения $\mathrm{R}_h u_h = 0$ и условий

*) Предполагаем, что в этом процессе вычисления $u_h$ будут использованы все уравнения, содержащиеся в разностном уравнении $\mathrm{R}_h u_h = f$, т. е. что разностное уравнение $\mathrm{R}_h u_h = f$ не содержит лишних соотношений между значениями $u_h$ в точках сетки.

$\mathrm{r}_{h2}(u_h)=0$, $\mathrm{r}_{h3}(u_h)=0$ определяются значения $u_h$ последовательно на $S_3$, $S_4$, $S_5$, ... Требования 1) — 3) выполнены при $p=1$, $q=3$.

Пример 10. Пусть дано дифференциальное уравнение $\mathrm{L}u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,\ x)$. Область $D$, сетка $D_h$ и граничные условия — те же, что в примере 5.

$$\mathrm{R}_h u_h\equiv\frac{1}{\tau}(u_{m,\,n}-u_{m-1,\,n})-\frac{1}{h^2}(u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1})=$$
$$=f_{m,\,n}.$$

Здесь, чтобы найти $u_h$ в слое $S_m$ (если известно $u_h$ в слое $S_{m-1}$), надо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} u_{m,\,n}-\frac{\tau}{h^2}(u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1})=f_n^{(m)} \\ (n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1), \\ u_{m,\,0}=0,\ u_{m,\,N}=0, \end{array}\right\} \tag{45}$$

где $f_n^{(m)}=u_{m-1,\,n}+\tau f_{m,\,n}$ — известная величина.

Если мы покажем, что система уравнений (45) всегда имеет единственное решение, то требование 3) будет выполнено при $q=1$. Требования 1) и 2) здесь тоже выполнены.

Разностное уравнение называется *явным*, если при любом $m$ в каждое из уравнений, связывающих значения функции $u_h$ в точках слоев $S_m$, $S_{m-1}$, ..., $S_{m-q}$, входит лишь одна точка слоя $S_m$, так что можно вычислить значение $u_h$ в каждой *) точке слоя $S_m$ отдельно, независимо от значений $u_h$ в других точках этого слоя. В противном случае, т. е. когда для определения значений $u_h$ в слое $S_m$ мы получаем систему уравнений, связывающих значения $u_h$ в точках этого слоя, разностное уравнение называется *неявным*.

Уравнения примеров 1, 5, 9 — явные, а уравнение примера 10 — неявное.

**2.** Равномерная устойчивость по начальным условиям. Если разностное уравнение удовлетворяет требованиям 1) — 3), то начальные условия, аналогичные условиям (44), можно задавать на любых $q$ соседних слоях $S_{m-q+1}$, $S_{m-q+2}$, ..., $S_m$ (вместо слоев $S_0$, $S_1$, ..., $S_{q-1}$); при этом

*) Не считая точек, входящих в граничные условия.

решение будет однозначно определено на слоях $S_{m+1}$, $S_{m+2}, \ldots$ Для таких начальных условий введем обозначение

$$r_{mhi}(u_h) = \varphi_{mhi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{46}$$

В частности, для примера 1 имеем $p = q = 2$,

$$r_{h1}(u_h) \equiv u_h(0, nh), \qquad r_{h2}(u_h) \equiv \frac{1}{\tau}(u_h(\tau, nh) - u_h(0, nh)),$$

следовательно,

$$r_{mh1}(u_h) \equiv u_h((m-1)\tau, nh), \quad r_{mh2}(u_h) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\tau}(u_h(m\tau, nh) - u_h((m-1)\tau, nh)). \tag{47}$$

Пусть $\|r_{mhi}(u_h)\|_{\Phi hi}$ означает норму функции $r_{mhi}(u_h)$, вполне аналогичную норме $\|r_{hi}(u_h)\|_{\Phi hi} (i = 1, 2, \ldots, p)$. Например, если

$$r_{h1}(u_h) = u_h(0, nh), \quad \|r_{h1}(u_h)\|_{\Phi h1} = \max_n |u_h(0, nh)|,$$

а $r_{mh1}$ то же, что в (47), то следует положить

$$\|r_{mh1}(u_h)\|_{\Phi h1} = \max_n |u_h((m-1)\tau, nh)|.$$

Норма $\|u_h\|_{Uh}$, введенная в § 1, характеризует поведение функции $u_h$ на всей сетке $D_h$. Введем теперь нормы, характеризующие поведение функции $u_h$ *на каждом слое сетки отдельно*. Обозначим через $\|u_h\|_{S_m}$ норму, зависящую только от значений функции $u_h$ в точках слоя $S_m$. При разных $m$ эти нормы должны быть вполне аналогичны друг другу. Например, можно взять

$$\|u_h\|_{S_m} = \max_{S_m} |u_h|, \qquad \|u_h\|_{S_{m+1}} = \max_{S_{m+1}} |u_h|,$$

и т. д. Нормы $\|u_h\|_{S_m}$ должны быть согласованы с нормой $\|u_h\|_{Uh}$ следующим образом: для любой функции $u_h$ должно выполняться неравенство

$$\|u_h\|_{Uh} \leqslant c_0 \max_m \|u_h\|_{S_m}, \tag{48}$$

где постоянная $c_0$ не зависит от $h$ и $u_h$.

Определение. Уравнение (3) с граничными условиями (4), удовлетворяющее требованиям 1) — 3), называется *равномерно устойчивым по начальным условиям* в области $D_h$, если существуют такие постоянные $c_1$, $\delta_0$ и $h_0$, что при любых $m \geqslant q-1$, $\delta < \delta_0$ и $h < h_0$ для любых $u_h$ и $\tilde{u}_h$, заданных на слоях $S_{m-q+1}$, $S_{m-q+2}$, ..., из соотношений

$$\|\mathrm{r}_{mhi}(u_h) - \mathrm{r}_{mhi}(\tilde{u}_h)\|_{\Phi hi} < \delta < \delta_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\mathrm{r}_{hi}(u_h) \equiv \mathrm{r}_{hi}(\tilde{u}_h) \qquad (i = p+1, p+2, \ldots, s),$$

$$\mathrm{R}_h(u_h) \equiv \mathrm{R}_h(\tilde{u}_h)$$

следует при любом $M \geqslant m-q+1$ и $S_M \subset D_h$

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{S_M} < c_1\delta,$$

т. е. если начальные условия, заданные на любых $q$ соседних слоях, изменить меньше чем на $\delta$, а прочие граничные условия ($i = p+1, \ldots, s$) и правую часть уравнения не менять, то решение изменится меньше чем на $c_1\delta$, на любом слое $S_M$ сетки $D_h$ (при $M \geqslant m-q+1$.) Подчеркнем, что изменения начальных условий должны быть таковы, чтобы остальные граничные условия $\mathrm{r}_{hi}(u_h) = \varphi_{hi}$ ($i = p+1, \ldots, s$) не нарушались.

Очевидно, из равномерной устойчивости по начальным условиям всегда следует устойчивость по начальным условиям в смысле § 2 гл. 1.

Если уравнение (3) и граничные условия (4) линейны, то требование равномерной устойчивости по начальным условиям означает, что из

$$\mathrm{R}_h u_h = 0, \quad \|\mathrm{r}_{mhi}(u_h)\|_{\Phi hi} < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\mathrm{r}_{hi}(u_h) = 0 \qquad (i \geqslant p+1)$$

при $M \geqslant m-q+1$, $S_M \subset D_h$ следует

$$\|u_h\|_{S_M} \leqslant c_1\delta, \tag{49}$$

где $c_1$ не зависит от $m$, $M$, $h$, $\delta$.

Таким образом, в линейном случае определение равномерной устойчивости по начальным условиям напоминает определение равномерной корректности задачи Коши для дифференциального уравнения, данное И. Г. Петровским [31], стр. 2. Равномерная устойчивость по начальным условиям рассматривалась в [36].

**3.** Признак равномерной устойчивости по начальным условиям. Приводимая ниже теорема 4 устанавливает, что для равномерной устойчивости по начальным условиям достаточно, чтобы любая ошибка, допущенная при вычислении решения, при переходе от каждого слоя сетки к следующему не возрастала или возрастала (по норме) не более чем в $1+c\tau$ раз (где $\tau$ — шаг сетки по $t$, $c=\mathrm{const}$; предполагается, что область $D$ лежит в полосе $T_0 \leqslant t \leqslant T_0+T$).

Заметим, что в работах [4], [44] уравнение называется устойчивым только в том случае, когда ошибка не возрастает при переходе от каждого слоя сетки к следующему. Это ограничение является слишком жестким, так как для многих дифференциальных уравнений (в частности, для уравнения примера 15 при $c>0$ или для уравнения статьи [13]) вообще не может существовать устойчивых в смысле [4] разностных уравнений.

Далее, в теореме 4 норма $\| \quad \|_q^{(m)}$, в которой измеряется решение (или ошибка) в данный момент $t$, может зависеть от значений функции на нескольких соседних слоях сетки, и, следовательно, характеризовать не только величину функции в данный момент $t$, но и скорость ее возрастания, что очень важно в случае уравнений выше первого порядка по $t$.

Теорема 4. *Пусть уравнения* (3), (4) *линейны и удовлетворяют требованиям* 1) — 3) § 4, *область $D$ лежит в полосе $T_0 \leqslant t \leqslant T_0+T$. Пусть при любом $m \geqslant q-1$ для любой функции, заданной на $q$ соседних слоях сетки $S_{m-q+1}, S_{m-q+2}, \ldots, S_m$, определена норма $\| \quad \|_q^{(m)}$.*

*Если при любом $m \geqslant q-1$ для любой функции $v_h$, заданной на слоях $S_{m-q+1}, \ldots, S_{m+1}$ и удовлетворяющей уравнениям*

$$\mathrm{R}_h v_h = 0, \qquad \mathrm{r}_{hi}(v_h) = 0 \qquad (i = p+1, \ldots, s), \tag{50}$$

*имеем*

$$\| v_h \|_q^{(m+1)} \leqslant (1+c\tau) \| v_h \|_q^{(m)}, \tag{51}$$

*где $c$ не зависит от $m$, $h$ и $v_h$, то уравнение* (3), (4) *равномерно устойчиво по начальным условиям при любых* *нормах* $\| \ \|_{\Phi hi}$ и $\| \ \|_{S_m}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\|v_h\|_{S_m} \leqslant \bar{c}_1 \|v_h\|_q^{(m)}, \qquad \|v_h\|_q^{(m)} \leqslant \bar{c}_2 \sum_{i=1}^{p} \|\mathrm{r}_{mhi}(v_h)\|_{\Phi hi}, \tag{52}$$

*где* $\mathrm{r}_{mhi}$ *те же, что в* (46), $\bar{c}_1$ *и* $\bar{c}_2$ *не зависят от* $h$, $m$ и $v_h$.

Доказательство. Пусть $u_h$ определена в слоях $S_{m-q+1}$, $S_{m-q+2}, \ldots$ и удовлетворяет уравнениям (50). В силу (51) при любом $M \geqslant m$

$$\|u_h\|_q^{(M)} \leqslant (1+c\tau)^{M-m} \ \|u_h\|_q^{(m)}.$$

Так как в области $D_h$ имеем $(M-m)\tau \leqslant T$, то $(1+c\tau)^{M-m} \leqslant e^{cT}$. Пользуясь неравенствами (52), получим

$$\|u_h\|_{S_M} \leqslant \bar{c}_1 \bar{c}_2 e^{cT} \sum_{i=1}^{p} \|\mathrm{r}_{mhi}(u_h)\|_{\Phi hi},$$

т. е. выполнено неравенство (49). Значит, имеет место равномерная устойчивость по начальным условиям.

Замечание. В теореме 4 можно отбросить требование линейности уравнений (3), (4). Тогда для равномерной устойчивости по начальным условиям достаточно, чтобы при любом $m \geqslant q-1$ для любых функций $u_h$ и $\tilde{u}_h$, заданных в $S_{m-q+1}, S_{m-q+2}, \ldots, S_{m+1}$ и удовлетворяющих уравнениям

$$\mathrm{R}_h u_h = f, \quad \mathrm{R}_h \tilde{u}_h = f; \qquad \mathrm{r}_{hi}(u_h) = \varphi_{hi}, \quad \mathrm{r}_{hi}(\tilde{u}_h) = \varphi_{hi}$$
$$(i = p+1, \ldots, s),$$

имело место неравенство (51), где $v_h = u_h - \tilde{u}_h$; остальные условия теоремы 4 (кроме (50)) сохраняются.

Пример 11. Область $D$, сетка $D_h$ и граничные условия те же, что в примере 5. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t,\ x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(t,\ x)\frac{\partial u}{\partial x} - c(t,\ x)\,u = f(t,\ x),$$

где $0 \leqslant a_0 \leqslant a(t,\ x) \leqslant A$, $|b(t,\ x)| \leqslant B$, $|c(t,\ x)| \leqslant C$, аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{1}{\tau}(u_{m+1,\,n} - u_{m,\,n}) - \frac{a_{m,\,n}}{h^2}(u_{m,\,n+1} - 2u_{m,\,n} + u_{m,\,n-1}) -$$
$$- \frac{b_{m,\,n}}{2h}(u_{m,\,n+1} - u_{m,\,n-1}) - c_{m,\,n}u_{m,\,n} = f_{m,\,n}, \tag{53}$$

где $u_{m,\,n} = u_h(m\tau,\ nh)$ и т. д.; $Bh \leqslant 2a_0$, $2A\tau \leqslant h^2$.

Проверим выполнение условий теоремы 4. При $f \equiv 0$ из (53) имеем

$$u_{m+1, n} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2} a_{m, n}\right) u_{m, n} + \tau c_{m, n} u_{m, n} +$$
$$+ \left(\frac{\tau}{h^2} a_{m, n} + \frac{\tau}{2h} b_{m, n}\right) u_{m, n+1} + \left(\frac{\tau}{h^2} a_{m, n} - \frac{\tau}{2h} b_{m, n}\right) u_{m, n-1}.$$

Все коэффициенты в правой части, кроме $\tau c_{m, n}$, неотрицательны, поэтому сумма их модулей не превосходит $1 + C\tau$. Значит,

$$\max_n |u_{m+1, n}| \leqslant (1 + C\tau) \max_n |u_{m, n}|.$$

Условия теоремы 4 выполнены, если

$$\| u_h \|_{S_m} = \| u_h \|_q^{(m)} = \max_n | u_{m, n} |, \qquad \| \varphi_1 \|_{\Phi h1} = \max_n | \varphi(nh) |.$$

Итак, уравнение (53) равномерно устойчиво по начальным условиям.

Другие примеры применения теоремы 4 см. в п. 3 § 10.

**4.** Связь равномерной устойчивости по начальным условиям с устойчивостью по правой части. Введем некоторые обозначения, необходимые для формулировки теоремы 5. Разностное уравнение (3) и граничные условия (4) есть система уравнений, в которой искомыми величинами являются значения функции $u_h$ в точках сетки $D_h$. Разобьем эту систему на группы, включив в $m$-ю группу уравнения, которые содержат значения $u_h$ в $S_m$, но не содержат значений $u_h$ в точках слоев $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots$ Уравнения, входящие в $m$-ю группу (при $m \geqslant q$), запишем так:

$$R_h^{(m)} u_h = f, \qquad r_{hi}^{(m)}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i = p + 1, \ldots, s). \tag{54}$$

Если известны значения $u_h$ в $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$, то, согласно требованию 3), уравнения (54) однозначно разрешимы относительно значений $u_h$ в точках слоя $S_m$.

В уравнения (54) входят значения $f$ и $\varphi_{hi}$ не во всех точках, в которых определены эти функции, а только в некоторых из этих точек. Так, в примере 10 в $m$-ю группу уравнений входят значения $f$ в точках $t = m\tau$, $x = nh$ $(n = 1, 2, \ldots, N - 1)$; в примере 1 уравнение (6) входит в $(m + 1)$-ю группу и содержит $f(m\tau, nh)$, следовательно, в $m$-ю группу уравнений войдут значения $f((m-1)\tau,\ nh)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ N-1)$.

Обозначим через $\|f\|^{(m)}$ норму, зависящую только от тех значений функции $f$, которые входят в уравнения $m$-й группы (54). В частности, в примере 1 можно взять

$$\|f\|^{(m)} = \max_{n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1} |f(m-1)\tau,\ nh|. \tag{55}$$

Норма $\|f\|^{(m)}$ должна быть согласована с $\|f\|_{F_h}$ следующим образом. Для произвольной функции $f$, заданной на $D_h^0$, должно выполняться неравенство

$$\max_m \|f\|^{(m)} \leqslant c_2 \|f\|_{F_h}, \tag{56}$$

где $c_2$ не зависит от $h$ и $f$. Например, для норм (55) и (17) это условие выполнено.

Если разностное уравнение и граничные условия линейны, то (56) можно заменить требованием

$$\tau \sum_m \|f\|^{(m)} \leqslant c_2 \|f\|_{F_h}. \tag{57}$$

В случае конечной области $D$ требование (57) слабее, чем (56).

Поясним теперь на простом примере основную мысль формулируемой ниже теоремы 5.

Пример 12. Уравнение (6) с граничными условиями (8) (см. § 1) удовлетворяет требованиям 1) — 3) п. 1 § 4, причем $p=2$, $q=2$. Покажем, что если это уравнение равномерно устойчиво по начальным условиям, то оно устойчиво по правой части.

Пусть $u_h$ — решение этого уравнения при данной правой части $f$ и данных граничных условиях (8). Изменим правую часть меньше чем на $\delta$ в точках одного слоя сетки, например слоя $S_{m-1}$. Взяв норму (55), можно написать

$$\|\tilde{f} - f\|^{(m)} = \max_{n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1} \left|\tilde{f}((m-1)\tau,\ nh) - \right.$$
$$\left. - f((m-1)\tau,\ nh)\right| < \delta, \tag{58}$$

где $\tilde{f}$ — правая часть после произведенного изменения. Тогда значения $u_h$ в слоях $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ не изменятся, а в слое $S_m$

изменятся меньше чем на $\tau^2\delta$ в силу уравнения (6):

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{S_m} = \max_{n=0,1,\dots,N} |\tilde{u}_h(m\tau, nh) - u_h(m\tau, nh)| < \tau^2\delta, \tag{59}$$

где $\tilde{u}_h$ — решение уравнения при правой части $\tilde{f}$.

Выясним теперь, как отличается $\tilde{u}_h$ от $u_h$ в слоях $S_{m+1}$, $S_{m+2}, \dots, S_M$. Можно сказать, что в области $t \geqslant m\tau$ функции $\tilde{u}_h$ и $u_h$ — решения одного и того же уравнения (6) (так как $\tilde{f} \not\equiv f$ лишь при $t = (m-1)\tau$) при различных начальных условиях, заданных на слоях $S_{m-1}$ и $S_m$ ($\tilde{u}_h \not\equiv u_h$ в слое $S_m$). Для рассматриваемого примера начальные условия, заданные на слоях $S_{m-1}$ и $S_m$, записываются в форме (47). Из соотношений $\tilde{u}_h \equiv u_h$ в $S_{m-1}$ и (47) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\|\mathrm{r}_{mh1}(\tilde{u}_h) - \mathrm{r}_{mh1}(u_h)\|_{\Phi h1} = 0, \\ &\|\mathrm{r}_{mh2}(\tilde{u}_h) - \mathrm{r}_{mh2}(u_h)\|_{\Phi h2} \leqslant \frac{1}{\tau}\|\tilde{u}_h - u_h\|_{S_m}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где в качестве нормы взят максимум модуля. Отсюда и из (59) следует, что

$$\|\mathrm{r}_{mhi}(\tilde{u}_h) - \mathrm{r}_{mhi}(u_h)\|_{\Phi hi} < \tau\delta \qquad (i = 1,\ 2).$$

Если имеет место равномерная устойчивость по начальным условиям, то из последнего неравенства следует, что при любом $M \geqslant m-1$

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{S_M} < c_1\tau\delta.$$

Итак, если правую часть $f$ на одном каком-нибудь слое изменить меньше чем на $\delta$, то решение $u_h$ изменится меньше чем на $c_1\tau\delta$. В области $0 \leqslant t \leqslant T$ имеется $\frac{T}{\tau}$ слоев. Значит, если на каждом из них изменить $f$ меньше чем на $\delta$, то решение $u_h$ изменится меньше чем на $c_1\tau\delta\frac{T}{\tau}$, т. е. меньше чем на $c_1T\delta$. Так как полученная оценка не зависит от шага сетки, то имеет место устойчивость по правой части.

Чтобы обобщить эти рассуждения на случай произвольного уравнения, удовлетворяющего требованиям 1)—3) п. 1 § 4, заметим следующее: мы использовали, во-первых, то, что из неравенства (58) следует (59), и, во-вторых, то, что имеет место (60), если $\tilde{u}_h \equiv u_h$ в $S_{m-1}$, $S_{m-2}$, ... Если имеется дифференциальное уравнение $p$-го порядка относительно $t$, то соответствующее разностное уравнение может иметь вид

$$a\frac{u_h(m\tau, x_1, \ldots, x_n)}{\tau^p} + \ldots = f.$$

Следовательно, от изменения $f$ на $\delta$ решение $u_h$ в $S_m$ может измениться на $\frac{1}{a}\tau^p\delta$. Значит, в этом случае в неравенстве (59) вместо $\tau^2\delta$ можно поставить $c_3\tau^p\delta$, т. е. надо требовать, чтобы из соотношений $\tilde{u} = u_h$ в $S_{m-1}$, $S_{m-2}$, ..., $R_h\tilde{u}_h = \tilde{f}$, $R_h u_h = f$, $\|\tilde{f} - f\|^{(m)} \leqslant \delta$ вытекало неравенство

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{S_m} \leqslant c_3\tau^p\delta. \tag{61}$$

Далее, так как в начальные условия для дифференциального уравнения могут входить производные по $t$ до $(p-1)$-го порядка, то начальные условия для разностного уравнения могут содержать множитель $\frac{1}{\tau^{p-1}}$, поэтому неравенство (60) надо заменить таким: если $\tilde{u}_h \equiv u_h$ в $S_{m-1}$, $S_{m-2}$, ..., $S_{m-q+1}$, то

$$\|r_{mhi}(\tilde{u}_h) - r_{mhi}(u_h)\|_{\Phi hi} \leqslant c_4\frac{1}{\tau^{p-1}}\|\tilde{u}_h - u_h\|_{S_m}. \tag{62}$$

Остальные рассуждения не меняются. Итак, если выполнены (61) и (62) и уравнение линейно, то из равномерной устойчивости по начальным условиям следует устойчивость по правой части. Кроме того, из всего сказанного ясно, что условия (61) и (62) довольно естественны и выполняются для широкого класса уравнений.

Изложенные соображения делают более понятной формулировку следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *разностное уравнение* (3) *с граничными условиями* (4) *в области $D_h$ удовлетворяет требованиям* 1)—3) п. 1 § 4 *и равномерно устойчиво по начальным условиям* *),

*) В нелинейном случае надо еще требовать, чтобы то же имело место для уравнения $R_h u_h = \tilde{f}$ при любой такой $f$, что $\|\tilde{f} - f\|_{Fh} < \delta_0$.

б) *область* $D_h$ *лежит в полосе* $T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + T$,

в) *существуют такие постоянные* $c_3$, $\delta_0$, $h_0$, *что для любых* $m \geqslant q$, $\delta < \delta_0$, $h < h_0$ *и любых таких* $u_h$ *и* $\tilde{u}_h$, *что* $u_h = \tilde{u}_h$ *в слоях* $S_{m-1}$, $S_{m-2}$, ... *и что*

$$\| \mathrm{R}_h^{(m)} u_h - \mathrm{R}_h^{(m)} \tilde{u}_h \|^{(m)} \leqslant \delta, \qquad \mathrm{r}_{hi}^{(m)}(u_h) = \mathrm{r}_{hi}^{(m)}(\tilde{u}_h), \tag{63}$$

*значения* $u_h$ *и* $\tilde{u}_h$ *на* $S_m$ *удовлетворяют неравенству*

$$\| u_h - \tilde{u}_h \|_{S_m} \leqslant c_3 \tau^p \delta; \tag{64}$$

г) *для любых* $u_h$ *и* $\tilde{u}_h$, *равных между собой в слоях* $S_{m-1}$, $S_{m-2}$, ..., *выполняется неравенство*

$$\| \mathrm{r}_{mhi}(u_h) - \mathrm{r}_{mhi}(\tilde{u}_h) \|_{\Phi hi} \leqslant c_4 \tau^{-p+1} \| u_h - \tilde{u}_h \|_{S_m}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{65}$$

*где* $c_4$ — *постоянная* (обозначения в (63) — (65) те же, что в (46), (48), (54), (56)), *а* $p$ — *порядок дифференциального уравнения относительно* $t$.

*Тогда уравнение* (3) *с граничными условиями* (4) *устойчиво по правой части* (*если взять нормы* $\|u_h\|_{Uh}$ *и* $\|f\|_{Fh}$, *удовлетворяющие условиям* (48) *и* (56), *в линейном случае* (56) *можно заменить на* (57)).

Доказательство. Пусть функции $u_h$ и $\tilde{u}_h$ удовлетворяют уравнениям $\mathrm{R}_h u_h = f$, $\mathrm{R}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}$, где $\|\tilde{f} - f\|_{Fh} \leqslant \delta$, и одним и тем же граничным условиям $\mathrm{r}_{hi}(u_h) = \varphi_{hi}$, $\mathrm{r}_{hi}(\tilde{u}_h) = \varphi_{hi}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Дальше для краткости будем писать $\tilde{u}$ и $u$ вместо $\tilde{u}_h$ и $u_h$. Рассмотрим еще функции $u_m$ (где $m = q - 1$, $q$, ..., $M$), удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям $\mathrm{r}_{hi}(u_m) = \varphi_{hi}$, но разным уравнениям. Пусть в слоях $S_0$, $S_1$, ..., $S_m$ функция $u_m$ равна $u_h$, следовательно, удовлетворяет уравнению $\mathrm{R}_h u_m = f$, а в слоях $S_{m+1}$, $S_{m+2}$, ... значения функции $u_m$ определяются из уравнений

$$\mathrm{R}_h u_m = \tilde{f}, \qquad \mathrm{r}_{hi}(u_m) = \varphi_{hi}. \tag{66}$$

Оценим разность $u_{m-1} - u_m$. Функции $u_{m-1}$ и $u_m$ совпадают в слоях $S_0$, $S_1$, ..., $S_{m-1}$, а в $S_m$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{R}_h^{(m)} u_{m-1} = \tilde{f},\ \mathrm{r}_{hi}^{(m)}(u_{m-1}) = \varphi_{hi}; \quad \mathrm{R}_h^{(m)} u_m = f,\ \mathrm{r}_{hi}^{(m)}(u_m) = \varphi_{hi}.$$

(в обозначениях (54)). Из неравенств $\|\tilde{f}-f\|_{Fh} \leqslant \delta$ и (56) следует, что

$$\|\tilde{f}-f\|^{(m)} \leqslant c_2\delta,$$

т. е. для функций $u_{m-1}$ и $u_m$ выполнены условия, аналогичные (63). Поэтому, в силу условия в) теоремы

$$\|u_{m-1}-u_m\|_{S_m} \leqslant c_3c_2\tau^p\delta.$$

Следовательно, в силу (65) имеем

$$\|\mathfrak{r}_{mhi}(u_{m-1})-\mathfrak{r}_{mhi}(u_m)\|_{\Phi hi} \leqslant c_4c_3c_2\tau\delta \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p). \tag{67}$$

В слоях $S_{m+1}$, $S_{m+2}$, ... значения обеих функций $u_{m-1}$ и $u_m$ удовлетворяют одним и тем же уравнениям вида (66), а начальные условия для $u_{m-1}$ и $u_m$ мало отличаются (см. (67)). В силу равномерной устойчивости по начальным условиям из (67) следует, что при $M \geqslant m$

$$\|u_{m-1}-u_m\|_{S_M} \leqslant c_1c_2c_3c_4\tau\delta. \tag{68}$$

Так как в $S_0$, $S_1$, ..., $S_{q-1}$ имеем $u_{q-1}=u_h=\tilde{u}_h$, а в $S_q$, $S_{q+1}$, ... функции $u_{q-1}$ и $\tilde{u}_h$ определяются из одинаковых уравнений, то $u_{q-1} \equiv \tilde{u}_h$. С другой стороны, на $S_M$ имеем $u_M=u_h$. Поэтому, написав неравенства (68) для $m=q$, $q+1$, ..., $M$ и сложив их, мы получим

$$\|\tilde{u}_h-u_h\|_{S_M} \leqslant c_1c_2c_3c_4(M-q+1)\tau\delta. \tag{69}$$

При любом $\tau$ из условия б) следует, что в области $D_h$ имеем $M\tau \leqslant T$, поэтому правая часть (69) меньше $\delta\cdot\mathrm{const}$. В силу (48) отсюда следует, что при достаточно малом $\delta$ имеем $\|\tilde{u}_h-u_h\|_{Uh} < \varepsilon$. Так как эти оценки не зависят от $h$, то устойчивость по правой части доказана.

Для явных разностных уравнений выполнение условий в) и г) теоремы 5 проверяется просто (см. пример 12); в этом примере неравенства (59) и (60) являются требуемыми неравенствами (64) и (65).

Для неявных разностных уравнений выполнение условия в) теоремы 5 проверяется сложнее.

Пример 13. Рассмотрим уравнение примера 10. Пусть $u_h$ и $\tilde{u}_h$ такие, как в условии в), $u_h(m\tau, nh)-\tilde{u}_h(m\tau, nh)=v_n$. Из (45) получим

$$v_n-\frac{\tau}{h^2}(v_{n+1}-2v_n+v_{n-1})=g_n \tag{70}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1),$$
$$v_0=0,\ v_N=0,$$

где $g_n=\tau(R_h^{(m)}u_h-R_h^{(m)}\tilde{u}_h)_{x=nh}$; $|g_n|<\tau\delta$ в силу (63). Покажем, что тогда $|v_n|<\tau\delta$.

В самом деле, если бы $\max v_n=v_{n_1}\geqslant\tau\delta$, то при $n=n_1$ левая часть (70) была бы не меньше $\tau\delta$, а правая часть меньше $\tau\delta$. Итак, $v_h<\tau\delta$. Аналогично получим $v_n>-\tau\delta$, т. е. (64) доказано (при $p=1$). Так как здесь $r_{mhi}(u_h)\equiv\equiv u_h(m\tau, nh)$, то (65) тоже выполнено при $p=1$ (везде за норму взят максимум модуля).

Остается проверить выполнение требования 3) п. 1 § 4. Так как мы доказали, что из $|g_n|<\tau\delta$ следует $|v_n|<\tau\delta$, то при $g_n\equiv 0$ система линейных алгебраических уравнений (70) имеет только нулевое решение $v_n\equiv 0$. Значит, детерминант системы не равен нулю, и система (70), а вместе с ней система (45) (см. пример 10), имеет единственное решение при любой правой части. То есть значения $u_h$ в слое $S_m$ всегда можно найти из системы (45) и притом однозначно. Требование 3) п. 1 § 4 выполнено.

Заметим, что при проверке выполнения условия в) нам пришлось доказывать устойчивость уравнения (70) по правой части. Вообще, в линейном случае *проверка условия* в) *сводится к исследованию устойчивости* (*по правой части*) *вспомогательного уравнения*, получаемого из уравнения (54) заменой на нуль значений $u_h$ во всех точках, кроме точек слоя $S_m$, и умножением левой части на $\tau^p$.

Если условие в) теоремы 5 не выполнено, то из равномерной устойчивости уравнения по начальным условиям, вообще говоря, не следует его устойчивость по правой части, как показывает следующий пример.

Пример 14. В области $0\leqslant t\leqslant\pi$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ дано дифференциальное уравнение $\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=f(t,\ x)$ с граничными условиями $u(0,\ x)=\varphi(x)$, $u(t,\ 0)=0$, $u(t,\ \pi)=0$. Сетка $D_h$ состоит из точек $t=mh$, $x=nh$ $(m,\ n=0,\ 1,\ \ldots,\ N;$

$\tau = h = \frac{\pi}{N}\Big)$, разностное уравнение и граничные условия таковы ($u_{m,n}$ означает $u_h(mh, nh)$):

$$\frac{1}{h^3}(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1} - u_{m-1,n+1} + 2u_{m-1,n} - u_{m-1,n-1}) + \\ + \frac{1}{h}(u_{m,n} - u_{m-1,n}) = f(mh, nh);$$

$$u_{0,n} = \varphi(nh), \quad u_{m,0} = 0, \quad u_{m,N} = 0.$$

а) Уравнение равномерно устойчиво по начальным условиям. Пусть $f(t, x) \equiv 0$. Тогда уравнение можно записать так:

$$v_{n+1} - (2 - h^2)v_n + v_{n-1} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1),$$
$$v_0 = v_N = 0,$$

где $v_n = u_{m,n} - u_{m-1,n}$. Пользуясь теорией линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами ([8], стр. 392—395), получим, что общее решение имеет вид

$$v_n = C_1 \cos \omega n + C_2 \sin \omega n,$$

где $\cos\omega = 1 - \frac{h^2}{2}$; $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Из условия $v_0 = 0$ следует $C_1 = 0$. Далее, так как $C_2 \sin\omega N = v_N = 0$, то или $\sin\omega N = 0$, или $C_2 = 0$. Предположим, что $\sin\omega N = 0$. Тогда $\omega N = \pi k$ ($k$ — целое). Значит,

$$\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi k}{2N}.$$

Сравнивая это с равенством $\cos\omega = 1 - \frac{h^2}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{2N^2}$, найденным ранее, получим

$$\frac{\pi}{2N} = \left|\sin\frac{\pi k}{2N}\right|.$$

При целых $k$ и $N$ это равенство невозможно, так как при $k = 1$ правая часть меньше левой, а при $k = 2, 3, \ldots, N$ — больше левой; при $k = N + 1, N + 2, \ldots$ правая часть принимает те же значения, что при $k = N - 1, N - 2, \ldots$

Полученное противоречие показывает, что $\sin\omega N \neq 0$. Значит, $C_2 = 0$. Тогда $v_n \equiv 0$. Следовательно, $u_{m,n} \equiv u_{m-1,n}$. Это справедливо при любом $m$. Отсюда вытекает равномерная устойчивость по начальным условиям.

б) Уравнение неустойчиво по правой части. Пусть $f(t, x) = \delta \sin x$. Тогда решение таково: $u_{m,n} = mH\delta \sin nh$, где $H = \dfrac{h^3}{\left(h^2 - 4\sin^2 \dfrac{h}{2}\right)} = \dfrac{12}{h} + O(h)$. При $t \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, т. е. $m \geqslant \dfrac{\pi}{2h}$ имеем $u_{m,n} \geqslant (6\pi h^{-2} + O(1))\delta \sin nh \to \infty$, когда $h \to 0$. При любой норме $\|u_h\|_{U_h}$ уравнение неустойчиво.

## § 5. Устойчивость в бесконечной области

1. Характерные особенности устойчивости в бесконечной области. Определение устойчивости, данное в главе 1, а также определения устойчивости по правой части и устойчивости по начальным условиям применимы в случае произвольной области $D$ — конечной или бесконечной. Из устойчивости какого-либо уравнения в любой конечной области не следует его устойчивость в бесконечной области.

Пример 15. Уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu = 0$ с граничными условиями $u(0, x) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0$ аппроксимируется (на такой же сетке, как в примере 5) уравнением

$$\frac{1}{\tau}(u_{m+1, n} - u_{m, n}) - \frac{1}{h^2}(u_{m, n+1} - 2u_{m, n} + u_{m, n-1}) - cu_{m, n} = 0, \tag{71}$$

$$u_{0, n} = \varphi(nh), \quad u_{m, 1} - u_{m, 0} = 0, \quad u_{m, N} - u_{m, N-1} = 0. \tag{72}$$

В конечной области $0 \leqslant t \leqslant T$ уравнение равномерно устойчиво по начальным условиям при $\tau \leqslant h^2/2$ (как в примере 11). Если $c > 0$, то в бесконечной области $0 \leqslant t < \infty$ уравнение неустойчиво по начальным условиям при норме $\|u_h\|_{U_h} = \sup |u_h|$, так как оно имеет решение $u_{m,n} = (1 + c\tau)^m \delta$, для которого $|\varphi| = \delta$, $\|u_h\|_{U_h} = \infty$.

Понятие устойчивости по правой части в случае бесконечной области может приобретать существенно различный смысл в зависимости от выбора нормы $\|f\|_{F_h}$. В случае бесконечной области выбор нормы $\|f\|_{F_h}$ налагает ограничения не только на гладкость функции $f$, но и на ее поведение при $t \to \infty$. Одно и то же уравнение может быть устойчивым и неустойчивым в зависимости от поведения при $t \to \infty$ возмущений $\tilde{f}$, вносимых в правую часть уравнения (мы говорим, что в правую часть уравнения вносятся возмущения $\tilde{f}(t, x)$, если к ней добавляется слагаемое $+\tilde{f}(t, x)$). Если решение мало меняется от внесения малых возмущений $\tilde{f}$ в правую часть уравнения, то уравнение называется *устойчивым по правой части*. Если при этом малыми возмущениями $\tilde{f}(t, x)$ считаются такие, для которых $|\tilde{f}(t, x)| \leqslant \delta$ при всех $t$ и $x$, то такую устойчивость назовем *устойчивостью по постоянно действующим возмущениям*. Если же малыми считаются возмущения, для которых $\int\limits_D\int |\tilde{f}(t, x)|\,dt\,dx \leqslant \leqslant \delta$ $\left(\text{точнее, на сетке } D_h \sum\limits_m \sum\limits_n |\tilde{f}(m\tau, nh)|\,\tau h \leqslant \delta\right)$, то мы скажем, что имеет место *устойчивость по отношению к возмущениям с конечным суммарным импульсом*.

Название «возмущения с конечным импульсом» основано на следующей физической аналогии. Если дано уравнение струны, то правая часть уравнения $f(t, x)$ есть сила, приложенная к единице длины струны (точнее, к каждому бесконечно малому отрезку $[x, x+\Delta x]$ приложена сила $f(t, x)\Delta x$). Тогда $\int\limits_0^l f(t, x)\,dx$ — сила, приложенная ко всей струне длины $l$, а $\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^l f(t, x)\,dx\right)dt$ — импульс этой силы за промежуток времени $0 < t < \infty$.

Пример 16. Рассмотрим уравнение (71) при $c = 0$, $\tau \leqslant \frac{h^2}{2}$, в правую часть добавим возмущения $\tilde{f}_{m, n}$. Из (71) и (72) получим

$$\sum_{n=1}^{N-1} |u_{m+1, n}| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} |u_{m, n}| + \tau \sum_{n=1}^{N-1} |\tilde{f}_{m, n}|.$$

Следовательно, если

$$\|u_h\|_{U_h} = \sup_m h \sum_{n=1}^{N-1} |u_{m, n}|, \quad \|\tilde{f}\|_{F_h} = \tau h \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N-1} |\tilde{f}_{m, n}|.$$

то

$$\|u_h\|_{Uh} \leqslant h \sum_{n=1}^{N-1} |\varphi(nh)| + \|\tilde{f}\|_{Fh},$$

т. е. имеем устойчивость по отношению к возмущениям с конечным суммарным импульсом, а также устойчивость по начальным условиям. Устойчивости по постоянно действующим возмущениям здесь нет, так как если взять

$$\tilde{f}(t, x) \equiv \delta, \quad \|\tilde{f}\|_{Fh} = \sup|\tilde{f}|, \quad \varphi \equiv 0,$$

то уравнение имеет решение

$$u_{m,n} = m\tau\delta, \qquad \|u_h\|_{Uh} = \infty.$$

Пример 17. Рассмотрим уравнение (71) при $c < 0$, $\tau \leqslant \frac{h^2}{2 - ch^2}$, с правой частью, равной $\tilde{f}_{m,n}$. Тогда из (71) и (72) следует, что

$$\max_n |u_{m+1,n}| \leqslant (1 + c\tau) \max_n |u_{m,n}| + \tau \max_n |\tilde{f}_{m,n}|.$$

По индукции доказывается, что для любых $m$ и $M$, $M > m$, имеем

$$\max_n |u_{M,n}| \leqslant \max\left\{\max_n |u_{m,n}|;\ \frac{1}{|c|} \sup_{k,n} |\tilde{f}_{k,n}|\right\},$$

то есть имеет место равномерная устойчивость по начальным условиям и устойчивость по постоянно действующим возмущениям при норме

$$\|\tilde{f}\|_{Fh} = \sup|\tilde{f}|.$$

Пример 18. Рассмотрим пример 15 при $c > 0$, $\tau \leqslant \frac{h^2}{2}$, взяв

$$\left.\begin{aligned} \|u_h\|_{S_m} &= (1 + c\tau)^{-m} \max_n |u_{m,n}|, \\ \|u_h\|_{Uh} &= \sup_{m,n} |(1 + c\tau)^{-m} u_{m,n}|. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Тогда уравнение (71), (72) будет равномерно устойчиво по начальным условиям в области $0 \leqslant t < \infty$, так как из (71) и (72) следует, что $(1 + c\tau)^{-m} \max_n |u_{m,n}|$ не может возрастать с ростом $m$.

Введение нормы (73) приводит к тому, что устойчивость по начальным условиям будет пониматься в таком смысле, что от малого изменения начальных условий мало меняется отношение $\frac{u_h}{(1+c\tau)^m}$ (а не само решение $u_h$). В данном случае любое решение $u_{m,n}$ разностного уравнения (если начальные условия таковы, что $u_{0,1}+u_{0,2}+\ldots+u_{0,N-1}\neq 0$) возрастает при $m\to\infty$ так же, как функция $(1+c\tau)^m$. Поэтому устойчивость в норме (73) означает, что малая ошибка в начальных условиях влечет малую относительную ошибку в решении.

Если сеточная область $D_h$ бесконечна по $x_1, \ldots, x_n$, то, взяв, например, как в [23], норму $\|u_h\|_{Uh} = \sup\limits_{D_h}\left|\frac{u_h(t, x_1, \ldots, x_n)}{M(x_1, \ldots, x_n)}\right|$, можно изучать решения $u_h$, которые растут (или убывают) при $x_1, \ldots, x_n\to\infty$ со скоростью, определяемой выбором функции $M(x_1, \ldots, x_n)$.

**2.** Признаки устойчивости в бесконечной области. Теорема 4 была доказана в предположении, что область $D$ лежит в полосе $T_0\leqslant t\leqslant T_0+T$. Сформулируем аналогичные условия, достаточные для устойчивости в области, бесконечной по $t$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *кроме условия, что область $D$ лежит в полосе $T_0\leqslant t\leqslant T_0+T$.* Тогда:

А. *Если* (51) *выполнено при $c=0$, то утверждение теоремы* 4 *остается справедливым; если, кроме того, выполнены условия* а), в), г) *теоремы* 5, *то уравнение устойчиво по правой части в любой норме $\|f\|_{Fh}$, удовлетворяющей* (57), *т. е. устойчиво по отношению к возмущениям с конечным суммарным импульсом.*

Б. *Если* (51) *выполнено при каком-нибудь $c<0$ и если выполнены условия* а), в), г) *теоремы* 5, *то уравнение устойчиво по правой части в любой норме $\|f\|_{Fh}$, удовлетворяющей* (56), *т. е. уравнение устойчиво по постоянно действующим возмущениям.*

Доказательство утверждения А проводится так же, как в теоремах 4 и 5.

Для доказательства утверждения Б сначала проводятся такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 5, вплоть до получения неравенства (67). Далее, из (52) и (67) следует

$$\|u_{m-1}-u_m\|_q^{(m)} \leqslant p\bar{c}_2c_4c_3c_2\tau\delta. \qquad (74)$$

В $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots$ разность $u_{m-1}-u_m=v_m$ удовлетворяет однородным уравнениям (50). Поэтому из (52), (51) и (74) следует

$$\|u_{m-1}-u_m\|_{S_M} \leqslant \bar{c}_1\|u_{m-1}-u_m\|_q^{(M)} \leqslant$$
$$\leqslant \bar{c}_1(1+c\tau)^{M-m}\|u_{m-1}-u_m\|_q^{(m)} \leqslant p(1+c\tau)^{M-m}\bar{c}_1\bar{c}_2c_4c_3c_2\tau\delta.$$

Суммируя эти неравенства от $m=q$ до $m=M$ и замечая, что $c<0$, получим аналогично (69)

$$\|\tilde{u}_h-u_h\|_{S_M} \leqslant \frac{1}{|c|}p\bar{c}_1\bar{c}_2c_4c_3c_2\delta. \qquad (75)$$

Из (48) и (75) следует, что $\|\tilde{u}_h-u_h\|_{U_h}<\delta\cdot\text{const}$, что и требовалось доказать.

## § 6. Оценка собственных значений

Изложим простейшие методы отыскания границ области (на плоскости комплексного переменного), в которой заключены собственные значения линейного разностного оператора $\mathrm{R}_h$. Оценки для этих границ используются в § 7 и § 10.

Функция $v_h$ называется собственной функцией, а число $\rho$ — собственным значением оператора $\mathrm{R}_h$ с граничными условиями $\mathrm{r}_{hi}(v_h)=0$, если $v_h \not\equiv 0$, $\mathrm{R}_hv_h=\rho v_h$, $\mathrm{r}_{hi}(v_h)=0$.

1. Использование собственных значений дифференциального оператора. Для многих разностных операторов $\mathrm{R}_h$ доказано, что их собственные функции и собственные значения сходятся при измельчении сетки к соответствующим собственным функциям и собственным значениям дифференциального оператора $\mathrm{L}$ (см. [21], [37], [48]). В этих случаях несколько первых собственных значений $\mathrm{R}_h$ можно считать приближенно равными соответствующим собственным значениям оператора $\mathrm{L}$.

2. Построение области, содержащей все собственные значения разностного оператора. Пусть оператор $\mathrm{R}_h$ имеет вид

$$\mathrm{R}_hu_h(x, y)=a_0u_h(x, y)+\sum_{k,l}a_{k,l}u_h(x+kh_1, y+lh_2), \qquad (76)$$

$u_h$ определена на $D_h$, $\mathrm{R}_h u_h$ — на $D_h^0$ (в обозначениях § 1), $a_0$ вещественно, $a_0$ и $a_{k,l}$ могут зависеть от $h_1$, $h_2$, $x$, $y$. Пусть граничные условия таковы, что для любой функции $u_h$, удовлетворяющей им,

$$\max_{D_h - D_h^0} |u_h| \leqslant \max_{D_h^0} |u_h|.$$

Это требование часто удовлетворяется при аппроксимации граничных условий вида $u|_\Gamma = 0$, или $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, или $\left(u + a\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma = 0$, где $a \leqslant 0$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внутренней нормали к границе.

Тогда при фиксированных $h_1$ и $h_2$ все собственные значения $\rho$ оператора $\mathrm{R}_h$ лежат в комплексной плоскости в круге, у которого концами диаметра служат следующие две точки, лежащие на вещественной оси:

$$\min_{x,y}\left(a_0 - \sum_{k,l} |a_{k,l}|\right); \qquad \max_{x,y}\left(a_0 + \sum_{k,l} |a_{k,l}|\right).$$

Покажем это. Пусть $v_h$ — собственная функция. Тогда $\max |v_h|$ достигается в точке, принадлежащей $D_h^0$. Приравняв правую часть (76) в этой точке выражению $\rho v_h(x, y)$, получим $|\rho - a_0(x, y)| \leqslant \sum_{k,l} |a_{k,l}(x, y)|$. Отсюда следует наше утверждение.

**3. Признак самосопряженности разностного оператора.** Пусть оператор $\mathrm{R}_h$ с вещественными коэффициентами имеет вид (76). В правой части (76) значения $u_h$ в точках $D_h - D_h^0$ выразим с помощью граничных условий $\mathrm{r}_{hi}(u_h) = 0$ через значения $u_h$ в точках $D_h^0$. Получим

$$\mathrm{R}_h u_h(x, y) = b_0(x, y)\, u_h(x, y) + \\ + \sum_{k,l} b_{k,l}(x, y)\, u_h(x + kh_1, y + lh_2).$$

Если $b_{k,l}(x, y) = b_{-k,-l}(x + kh_1, y + lh_2)$ при любых $k$, $l$ и $(x, y) \in D_h^0$ (т. е. для любых двух точек $A(x, y)$ и $B(x + kh_1, y + lh_2)$ сетки $D_h^0$ значение $u_h(B)$ входит в $\mathrm{R}_h u_h(A)$ *с тем же коэффициентом*, с каким $u_h(A)$ входит в $\mathrm{R}_h u_h(B)$), то оператор $\mathrm{R}_h$ — самосопряженный при скалярном произведении $(u_h, v_h) = h_1 h_2 \sum u_h v_h$ (сумма по всем точкам $D_h^0$). Самосопряженность оператора $\mathrm{R}_h$ вытекает из симметричности его матрицы в ортонормальном базисе, состоящем из функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в одной точке сетки.

Следовательно, все собственные значения оператора $\mathrm{R}_h$ вещественны, а система собственных функций ортогональна и полна.

Утверждения п. 2 и п. 3 справедливы при любом числе независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

**4.** Вычисление собственных значений в простейших случаях. В некоторых случаях собственные функции и собственные значения можно вычислить точно.

Пример 19. Найти собственные значения задачи

$$\mathrm{B}_h v(n) \equiv \frac{1}{h^2}(v(n+1) - 2v(n) + v(n-1)) = \rho v(n) \quad (77)$$
$$(n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1), \quad v(0) = 0,\ v(N) = 0.$$

Общее решение линейного разностного уравнения (77) с постоянными коэффициентами имеет вид ([8], стр. 392) $v(n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — корни характеристического уравнения

$$\alpha^2 - (2 + \rho h^2)\alpha + 1 = 0. \quad (78)$$

Из $v(0) = 0$ следует $C_2 = -C_1$; тогда из $v(N) = 0$ получим

$$\alpha_1^N - \alpha_2^N = 0, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt[N]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{N}}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2} = e^{i\frac{\pi k}{N}}$$

(так как в силу (78) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$). После преобразований получим

$$v(n) = C \sin\frac{\pi k n}{N}, \quad \rho = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \quad (79)$$

Легко проверить, что эта система собственных функций ортогональна $\left(\text{т. е. } \sum_{n=1}^{N-1} \sin\frac{\pi k n}{N} \sin\frac{\pi l n}{N} = 0 \text{ при } k \neq l\right)$ и полна (т. е. любую функцию $w(n)$, которая определена в точках $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$ и удовлетворяет граничным условиям $w(0) = 0$, $w(N) = 0$, можно представить в виде линейной комбинации этих собственных функций).

Пример 20. Найти собственные значения задачи

$$\mathrm{R}_h u_h = \rho u_h, \qquad u_h|_{\Gamma_h} = 0, \tag{80}$$

где

$$\mathrm{R}_h u_h \equiv \frac{1}{h^2}(u_{n+1,p} - 2u_{n,p} + u_{n-1,p}) + \\ + \frac{1}{h^2}(u_{n,p+1} - 2u_{n,p} + u_{n,p-1}) = 0,$$

$$u_{n,p} = u_h(nh, ph),$$

область $D_h$ прямоугольная; $x = 0, h, 2h, \ldots, Nh$, $y = 0, h, 2h, \ldots, Ph$; $\Gamma_h$ — граница $D_h$.

Применяя метод разделения переменных (как при решении аналогичной задачи для дифференциального уравнения [11], стр. 84), положим $u_h(nh, ph) = v(n)\,w(p)$. Получим, что функции $v$ и $w$ должны удовлетворять уравнениям, аналогичным (77). Следовательно, для задачи (80)

$$u_h(nh, ph) = \sin\frac{\pi kn}{N}\sin\frac{\pi lp}{N}, \quad \rho = -\frac{4}{h}\sin^2\frac{\pi k}{2N} - \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi l}{2P} \tag{81}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N-1; \quad l = 1, 2, \ldots, P-1).$$

**5. Вариационные и другие методы оценки собственных значений.** Во многих случаях можно применять вариационные методы оценки собственных значений, аналогичные вариационным методам для дифференциальных уравнений. Например, первое собственное значение задачи $\tilde{\mathrm{R}}_h u_h = \rho u_h$, $u_h|_{\tilde{\Gamma}_h} = 0$, где $\tilde{\Gamma}_h$ — граница сетчатой области $\tilde{D}_h$, $a(x, y) > 0$, $b(x, y) > 0$,

$$\tilde{\mathrm{R}}_h u_h \equiv \frac{1}{h^2}\left[a\left(x+\frac{h}{2}, y\right)(u_h(x+h, y) - u_h(x, y)) - \right. \\ \left. - a\left(x-\frac{h}{2}, y\right)(u_h(x, y) - u_h(x-h, y))\right] + \\ + \frac{1}{h^2}\left[b\left(x, y+\frac{h}{2}\right)(u_h(x, y+h) - u_h(x, y)) - \right. \\ \left. - b\left(x, y-\frac{h}{2}\right)(u_h(x, y) - u_h(x, y-h))\right] + c(x,y)\,u_h(x, y)$$

может лишь увеличиться от замены переменных коэффициентов $a$, $b$, $c$ на постоянные, равные $\min a$, $\min b$, $\max c$ и области $\tilde{D}_h$ на бóльшую область $D_h$. (Доказывается так же, как для дифференциальных уравнений, см. [29], стр. 176—177, 218—219.) В случае прямоугольной области $D_h$ и постоянных коэффициентов оценка собственных значений проводится как в примере 20, и мы получим

$$\rho \leqslant \frac{4}{h^2}\left(-\min a \sin^2 \frac{\pi}{2N} - \min b \sin^2 \frac{\pi}{2P} + \max c\right),$$

где $Nh$ и $Ph$ — стороны прямоугольника $D_h$, содержащего область $\tilde{D}_h$.

Для приближенного вычисления собственных значений можно воспользоваться и другими методами: методом, аналогичным методу Ритца для дифференциальных уравнений ([11], стр. 310—321; [44], раздел 3) или итерационными методами [20], [42], [51].

## § 7. Итерационные процессы и исследование устойчивости некоторых уравнений

1. Постановка задачи. Теоремы 4 и 5 позволяют исследовать устойчивость разностных уравнений, удовлетворяющих требованиям 1) —3) § 4, т. е. таких уравнений, решение которых можно вычислять постепенно: сначала вычислить значения решения в точках одного слоя сетки, затем в точках следующего слоя и т. д. Существуют уравнения, не удовлетворяющие этим требованиям, например:

$$\left.\begin{aligned} R_h u_h \equiv \frac{1}{h^2}(u_{n+1,p} - 2u_{n,p} + u_{n-1,p}) + \\ + \frac{1}{h^2}\left(u_{n,p+1} - 2u_{n,p} + u_{n,p-1}\right) = 0, \\ u_h|_{\Gamma_h} = \varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

где $u_{n,p} = u_h(nh, ph)$, $\varphi$ — известная функция, заданная на границе $\Gamma_h$ области $D_h$ (уравнение (82) аппроксимирует уравнение Лапласа). Решение уравнения (82) можно получить как предел последовательных приближений $u_h^{(m)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Например, $u_h^{(0)}$ можно взять произвольно, а $u_h^{(1)}$, $u_h^{(2)}$, ... вычислить по формуле

$$u_h^{(m)}(x, y) = \frac{1}{4}\left(u_h^{(m-1)}(x+h, y) + u_h^{(m-1)}(x-h, y) + \right.$$
$$\left. + u_h^{(m-1)}(x, y+h) + u_h^{(m-1)}(x, y-h)\right), \quad u_h^{(m)}|_{\Gamma_h} = \varphi. \qquad (83)$$

В § 7 мы рассмотрим два вопроса:

1) При каких условиях процесс последовательных приближений сходится к решению уравнения $R_h u_h = f$? (этот вопрос — алгебраический и может формулироваться так: дана система линейных алгебраических уравнений, при каких условиях процесс последовательных приближений сходится к решению этой системы?).

2) При каких условиях из сходимости этого процесса следует устойчивость уравнения $R_h u_h = f$ по правой части?

Для различных разностных операторов, аппроксимирующих оператор Лапласа, эти (и другие) вопросы рассмотрены в [21].

**2. Условия сходимости итерационного процесса.**

Лемма. *Пусть уравнение и граничные условия*

$$R_h u_h = f, \quad r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{84}$$

*линейны, $u_h$ определена на сетке $D_h$, состоящей из конечного числа точек, а $R_h u_h$ и $f$ — на непустом множестве $D_h^0 \subseteq D$. Пусть $r_{hi}$ таковы, что любую функцию $v_h$, заданную на $D_h^0$, можно (и только одним способом) продолжить на $D_h$ так, чтобы $r_{hi}(v_h) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Пусть граничные условия согласованы между собой, т. е. $\varphi_{hi}$ таковы, что существует по крайней мере одна функция $w_h$, определенная на $D_h$ и удовлетворяющая условиям $r_{hi}(w_h) = \varphi_{hi}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда*

а) *любую функцию $u_h$, заданную на $D_h^0$, можно (и только одним способом) продолжить на $D_h$ так, чтобы*

$$r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

б) *если $\rho = 0$ не является собственным значением оператора $R_h$, то уравнения (84) имеют решение (и только одно) при любых $f$ и $\varphi_{hi}$. Если же $\rho = 0$ — собственное значение оператора $R_h$, то, каковы бы ни были $\varphi_{hi}$, уравнения (84) имеют решение не при любом $f$.*

Доказательство. а) Пусть $u_h$ задана на $D_h^0$. Существует такая $w_h$, что $r_{hi}(w_h) = \varphi_{hi}$. Так как функцию $v_h = u_h - w_h$, заданную на $D_h^0$, можно однозначно продолжить на $D_h$ с соблюдением условий $r_{hi}(v_h) = 0$, то только одна функция, а именно $u_h = v_h + w_h$, удовлетворяет условиям $r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi}$ и принимает заданные значения на $D_h^0$.

б) Пусть $\varphi_{hi}$ даны, $w_h$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям $\mathrm{r}_{hi}(w_h) = \varphi_{hi}$. Тогда уравнения (84) равносильны уравнениям

$$\mathrm{R}_h v_h = f^*, \quad \mathrm{r}_{hi}(v_h) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{85}$$

где $v_h = u_h - w_h$, $f^* = f - \mathrm{R}_h w_h$. Так как функции, удовлетворяющие условиям $\mathrm{r}_{hi}(v_h) = 0$, образуют конечномерное линейное пространство $L$, то для однозначной разрешимости уравнений (85) при любом $f^*$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$\mathrm{R}_h v_h = 0, \quad \mathrm{r}_{hi}(v_h) = 0$$

имело только решение $v_h \equiv 0$, т. е., чтобы $\rho = 0$ не было собственным значением оператора $\mathrm{R}_h$. Если же $\rho = 0$ — собственное значение, то оператор $\mathrm{R}_h$ переводит пространство $L$ в пространство меньшего числа измерений, т. е. уравнение (85) разрешимо не при всяком $f^*$. Лемма доказана.

Рассмотрим процесс последовательных приближений к решению уравнения (84). Обозначим $m$-е приближение через $u_h^{(m)}$. Пусть $u_h^{(0)}, u_h^{(1)}, \ldots, u_h^{(q-1)}$ — произвольны, а при $m \geqslant q$ $m$-е приближение выражается через предыдущие так:

$$u_h^{(m)} = \sum_{k=1}^{q} [a_k u_h^{(m-k)} + b_k (R_h u_h^{(m-k)} - f)], \quad \mathrm{r}_{hi}(u_h^{(m)}) = \varphi_{hi} \tag{86}$$

(из первого равенства находим $u_h^{(m)}$ на $D_h^0$, а затем из граничных условий $\mathrm{r}_{hi}(u_h^{(m)}) = \varphi_{hi}$ находим $u_h^{(m)}$ на $D_h - D_h^0$, что возможно в силу утверждения а) леммы). Необходимые и достаточные условия сходимости такого процесса устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 7. *Пусть сетка $D_h$, уравнение и граничные условия* (84) *такие же, как в лемме, а последовательные приближения строятся по формуле* (86).

*Для того чтобы предел $\lim\limits_{m \to \infty} u_h^{(m)} = u_h$ при любых $f$, $u_h^{(0)}, \ldots, u_h^{(q-1)}$ существовал и удовлетворял уравнениям* (84), *необходимо и достаточно выполнение условий*

1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_q = 1$,

2) *все корни характеристического уравнения*

$$\lambda^q - \sum_{k=1}^{q} (a_k + b_k \rho) \lambda^{q-k} = 0 \tag{87}$$

по модулю меньше 1 при всех $\rho$, являющихся собственными значениями оператора $\mathrm{R}_h$.

Доказательство. Обозначив $u_h^{(m)} - u_h^{(m-1)} = v_m$, получим из (86)

$$v_m = \sum_{k=1}^{q} (a_k v_{m-k} + b_k \mathrm{R}_h v_{m-k}), \quad \mathrm{r}_{hi}(v_m) = 0. \tag{88}$$

Рассмотрим оператор T, переводящий вектор-функцию $(v_{m-q}, v_{m-q+1}, \ldots, v_{m-1})$ (где все $v_n$ удовлетворяют граничным условиям $\mathrm{r}_{hi}(v_n) = 0$) в вектор-функцию $(v_{m-q+1}, v_{m-q+2}, \ldots, v_m)$, где $v_m$ определяется из (88). Покажем, что все собственные значения оператора T совпадают с корнями уравнения (87), где $\rho$ пробегает все собственные значения оператора $\mathrm{R}_h$.

а) Если $v_{m-q}$ — собственная функция для $\mathrm{R}_h$, то при любом $\lambda$, удовлетворяющем (87), вектор-функция $(v_{m-q}, \ldots, v_{m-1})$, где $v_{m-q+j} = \lambda^j v_{m-q}$ $(j = 1, 2, \ldots, q-1)$, является собственной функцией оператора T в силу равенств $\mathrm{R}_h v_{m-q} = \rho v_{m-q}$, (87) и (88).

б) Если $(v_{m-q}, \ldots, v_{m-1})$ — собственная функция для T, то $\mathrm{r}_{hi}(v_{m-q}) = 0$, $v_{m-q+j} = \lambda^j v_{m-q}$ $(j = 1, 2, \ldots, q-1)$ и из (88) имеем

$$\left(\lambda^q - \sum_{k-1}^{q} a_k \lambda^{q-k}\right) v_{m-q} = \left(\sum_{k=1}^{q} b_k \lambda^{q-k}\right) \mathrm{R}_h v_{m-q}.$$

Поэтому, если $\sum_{k=1}^{q} b_k \lambda^{q-k} \neq 0$, то $v_{m-q}$ — собственная функция для $\mathrm{R}_h$ и ее собственное значение $\rho$ связано с $\lambda$ равенством (87). Если же $\sum_{k=1}^{q} b_k \lambda^{q-1} = 0$, то в силу предыдущего равенства $\lambda^q - \sum_{k=1}^{q} a_k \lambda^{q-k} = 0$, и данное значение $\lambda$ удовлетворяет уравнению (87) при любом $\rho$.

Для существования (при любых $f$, $u_h^{(0)}, \ldots, u_h^{(q-1)}$) предела $\lim\limits_{m\to\infty} u_h^{(m)}$ (т. е. для сходимости ряда $u_h^{(q)} + v_{q+1} + v_{q+2} + \ldots$, где $v_m = u_h^{(m)} - u_h^{(m-1)}$, и следовательно,

$\mathfrak{r}_{hi}(v_m)=0$ при $m>q$) достаточно, чтобы при любой вектор-функции

$$W=(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_q),\qquad \mathfrak{r}_{hi}(w_j)=0$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$$

сходился ряд $W+\mathrm{T}W+\mathrm{T}^2W+\ldots$

Это утверждение следует из того, что при $m=q+1$, $q+2, \ldots$ в силу (86) функции $v_m$ удовлетворяют равенствам (88), и взяв $w_j=v_{q+j}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$, получим $\mathrm{T}^mW=(v_{q+1+m},\ v_{q+2+m},\ \ldots,\ v_{2q+m})$.

Для сходимости при любом $W$ ряда $W+\mathrm{T}W+\mathrm{T}^2W+\ldots$, как известно ([42], стр. 64—66), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора $\mathrm{T}$ были по модулю меньше 1.

Итак, если все $\lambda$ удовлетворяют неравенству $|\lambda|<1$, то $\lim\limits_{m\to\infty} u_h^{(m)}=u_h$ существует. Переходя к пределу в (86), получим, что $u_h$ удовлетворяет уравнениям (84), если $\sum a_k=1$, $\sum b_k\neq 0$. Случай $|\lambda|<1$, $\sum a_k=1$, $\sum b_k=0$ невозможен, так как при $\sum a_k=1$, $\sum b_k=0$ число $\lambda=1$ удовлетворяет уравнению (87).

Докажем теперь необходимость условий 1) и 2).

1) Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} u_h^{(m)}=u_h$ существует. Переходя к пределу в (86), получим

$$\left(1-\sum_{k=1}^{q} a_k\right)u_h=\sum_{k=1}^{q} b_k(\mathrm{R}_h u_h-f),\quad \mathfrak{r}_{hi}(u_h)=\varphi_{hi}.$$

Если $\sum a_k\neq 1$ и $u_h$ удовлетворяет уравнению (84), то $u_h=0$ в $D_h^0$, т. е. $u_h$ в $D_h^0$ не зависит от $f$; в силу утверждения а) леммы $u_h$ в $D_h$ тоже не зависит от $f$. Значит, если $\sum a_k\neq 1$, то $u_h$ не может удовлетворять уравнению (84) при любом $f$. Итак, условие $\sum a_k=1$ необходимо.

2) Пусть $\sum a_k=1$. Рассмотрим случай, когда все собственные значения оператора $\mathrm{R}_h$ отличны от нуля (в противном случае в силу леммы уравнение (84) разрешимо не при всяком $f$). В силу леммы уравнение (84) имеет единственное решение $u_h$. Предположим, что $v_1$ — собственная функция оператора $\mathrm{R}_h$, т. е. $\mathrm{R}_h v_1=\rho v_1$, $\mathfrak{r}_{hi}(v_1)=0$, и пусть при этом $\rho$ уравнение (87) имеет корень $\lambda_1$, $|\lambda_1|\geqslant 1$.

Возьмем $u_h^{(m)} = u_h + \lambda_1^m v_1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Эти $u_h^{(m)}$ удовлетворяют уравнению (86), но $\lim\limits_{m\to\infty} u_h^{(m)}$ не существует или не равен решению $u_h$ (так как $|\lambda_1| \geqslant 1$). Необходимость условия 2) доказана.

Рассмотрим простейший частный случай теоремы 7 (см., например, [27], [50]). Пусть уравнение (86) имеет вид

$$u_h^{(m)} = u_h^{(m-1)} + \tau (\mathrm{R}_h u_h^{(m-1)} - f), \quad \mathrm{r}_{hi}(u_h^{(m)}) = \varphi_{hi}. \tag{89}$$

В силу теоремы 7, для того чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} u_h^{(m)} = u_h$ при любых $f$ и $u_h^{(0)}$ существовал и удовлетворял уравнениям (84), необходимо и достаточно выполнение условия $|1 + \tau\rho| < 1$ при всех $\rho$, являющихся собственными значениями оператора $\mathrm{R}_h$.

Очевидно, при данном $\mathrm{R}_h$ подобрать такое $\tau$, быть может, комплексное, чтобы при всех $\rho$ было $|1 + \tau\rho| < 1$, можно тогда и только тогда, когда все собственные значения $\rho$ лежат в комплексной плоскости по одну сторону от какой-либо прямой, проходящей через начало координат. Например, если все $\rho$ вещественны и отрицательны, то надо взять $0 < \tau < \dfrac{2}{\max|\rho|}$.

Пример 21. Задача Дирихле для уравнения Лапласа заменяется разностным уравнением (82). В § 6 показано, что все собственные значения $\rho$ оператора $\mathrm{R}_h$ вещественны, причем $-\dfrac{8}{h^2} < \rho < 0$. Поэтому при $0 < \tau \leqslant \dfrac{h^2}{4}$ последовательные приближения (89) сходятся к решению уравнения (82).

Теорему 7 можно применять не только в разностных уравнениях, но и к любой задаче, приводящейся к системе линейных алгебраических уравнений, если последовательные приближения к решению этой системы вычисляются с помощью формулы, аналогичной (86).

Пример 22. Дана система $N$ линейных алгебраических уравнений (в векторной записи)

$$\mathrm{R}u = f, \tag{90}$$

где $u$ — искомый, $f$ — данный $N$-мерные векторы, $\mathrm{R}$ — квадратная матрица порядка $N$. Пусть известно, что все собственные значения $\rho$ оператора $\mathrm{R}$ удовлетворяют неравенству

$$-\alpha \leqslant \rho \leqslant -\beta < 0. \tag{91}$$

Последовательные приближения к решению системы (90) получаем по формуле, аналогичной (89)

$$u_m = u_{m-1} + \tau (\mathrm{R} u_{m-1} - f), \tag{92}$$

где $u_0$ произвольно. Для сходимости процесса при любом $u_0$, согласно предыдущему, надо взять $0 < \tau < \frac{2}{\alpha}$.

Сходимость будет тем более быстрой, чем меньше число $\Lambda = \max\limits_{-\alpha \leqslant \rho \leqslant -\beta} |\lambda|$. Так как $\lambda = 1 + \tau\rho$, то при $\tau = \frac{2}{\alpha + \beta}$ будет наименьшим и равным $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

**3. Ускорение сходимости.** Простейший процесс последовательных приближений вида (89) или (92) сходится медленно. Существует целый ряд приемов, применяемых для ускорения сходимости, например, способ Люстерника ([20], [28], стр. 62—64), ускорение сходимости с помощью многочленов Чебышева ([3], [50], [24], стр. 199—201), и другие методы, например, [1], [49]. Большой список литературы по итерационным и другим методам решения систем линейных алгебраических уравнений имеется в [51], стр. 1—28.

Рассмотрим еще один итерационный процесс, сходящийся быстрее, чем процесс (92), и отличающийся от него тем, что для получения каждого следующего приближения используются не одно, а два предыдущих приближения. Такие процессы рассматривались в [45].

Пример 23. Будем вычислять последовательные приближения к решению системы (90) по формуле

$$u_m = u_{m-1} + a (u_{m-1} - u_{m-2}) + b (\mathrm{R} u_{m-1} - f), \tag{93}$$

где $u_0$ и $u_1$ произвольны,

$$a = \left( \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} \right)^2, \qquad b = \frac{4}{\alpha (1 + \sqrt{\delta})^2}, \qquad \delta = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{94}$$

Характеристическое уравнение (87) в этом случае таково: $\lambda^2 - (1 + a + b\rho)\lambda + a = 0$. При условии (91) корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ этого уравнения комплексные сопряженные или вещественные равные. Так как $\lambda_1 \lambda_2 = a$, то

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a} = \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} < 1.$$

В силу теоремы 7 $u_m$ сходится к решению системы (90).

При таких $a$ и $b$, как в (94), число $\Lambda = \max|\lambda|$ будет наименьшим из возможных для процесса вида (93).

При практическом применении процесса (93) имеет значение выбор $u_0$ и $u_1$. Процесс сходится при любых $u_0$ и $u_1$, но неудачный выбор $u_0$ и $u_1$ замедляет сходимость. Желательно, чтобы $u_0$ было возможно ближе к искомому решению. Выбрав каким-то образом $u_0$, проще всего вычислить $u_1$ по формуле (92), где $m = 1$, $\tau = \frac{2}{\alpha + \beta}$.

Сравним скорость сходимости процессов (92) и (93) в том случае, когда (90) есть система уравнений вида (82), получаемая при решении задачи Дирихле в квадратной области, если шаг сетки $h$ равен 1/20 стороны области. Тогда

$$\delta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\min|\rho|}{\max|\rho|} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{40}$$

(следует из (81)), т. е. $\delta \approx \frac{1}{160}$. Число последовательных приближений $m$, необходимых для того, чтобы ошибка $m$-го приближения $u_h^{(m)} - u_h$ была в 100 раз меньше, чем $u_h^{(0)} - u_h$, грубо приближенно можно оценить по формуле $\Lambda^m \leqslant 0{,}01$, где $\Lambda = \max\limits_{-\alpha \leqslant \rho \leqslant -\beta} |\lambda|$. Для процесса (92) $\Lambda = \frac{1-\delta}{1+\delta}$, и при $\delta = \frac{1}{160}$ из $\Lambda^m \leqslant 0{,}01$ получим $m \geqslant 370$; для процесса (93) $\Lambda = \frac{1-\sqrt{\delta}}{1+\sqrt{\delta}}$ и мы получим $m \geqslant 30$.

Замечание. Скорость сходимости процесса (93) можно увеличить, заменив постоянные коэффициенты $a$ и $b$ переменными, зависящими от номера приближения. В статье [3] указано, как лучше всего выбирать эти коэффициенты. Однако увеличение скорости сходимости будет небольшим, так как при $p \to \infty$ коэффициенты формулы (20) статьи [3] превращаются в коэффициенты (94) формулы (93).

**4. Исследование устойчивости уравнений, решаемых с помощью итерационных процессов.** Если уравнение (84) решается с помощью процесса последовательных приближений, например процесса (89), то сходимость этого процесса при любом $h > 0$ еще не обеспечивает устойчивости уравнения (84) по правой части. Например, если все собственные значения $\rho$ оператора $R_h$

отрицательны, и при $h \to 0$ $\max \rho \to 0$, то в силу сказанного после теоремы 7 при любом $h$ можно выбрать такое $\tau = \tau(h)$, что процесс (89) будет сходящимся. Но в этом случае уравнение (84) не будет устойчивым по правой части, так как, взяв в качестве $u_h$ нормированную собственную функцию оператора $R_h$, соответствующую наиболее близкому к нулю собственному значению $\rho_h$ (т. е. $R_h u_h = \rho_h u_h$, $\|u_h\|_{Uh} = 1$), получим, что уравнение

$$R_h u_h = f_h, \qquad r_{hi}(u_h) = 0,$$

где $f_h = \rho_h u_h$, при достаточно малом $h$ имеет сколь угодно малую правую часть $f_h$, но $\|u_h\|_{Uh} = 1$. Здесь мы предполагаем, что $\|u_h\|_{Fh} \leqslant c_1 \|u_h\|_{Uh}$, $c_1$ не зависит от $h$.

При некоторых дополнительных условиях из сходимости процесса последовательных приближений следует устойчивость уравнения (84) по правой части. Таким образом, изучение процесса последовательных приближений (итерационного процесса) является одним из методов для исследования устойчивости уравнений, не удовлетворяющих требованиям 1) — 3) § 4.

Теорема 8. *Пусть для уравнения* (84) *имеется такой процесс вида* (89), *что для любых* $v_m$, *удовлетворяющих уравнениям*

$$v_{m+1} = v_m + \tau R_h v_m, \qquad r_{hi}(v_m) = 0, \qquad r_{hi}(v_{m+1}) = 0, \tag{95}$$

*имеем*

$$\|v_{m+1}\|_{Uh} \leqslant (1 - c\tau) \|v_m\|_{Uh}, \tag{96}$$

*где* $\tau > 0$, $\tau$ *может зависеть от* $h$; $c = \mathrm{const} > 0$. *Тогда процесс* (89) *сходится и уравнение* (84) *устойчиво по правой части при такой норме* $\| \ \|_{Fh}$, *что для любой функции* $v$, *удовлетворяющей граничным условиям* $r_{hi}(v) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, *имеем*

$$\|v\|_{Uh} \leqslant c^* \|v\|_{Fh}, \tag{97}$$

*где* $c^*$ *не зависит от* $h$.

Доказательство. Пусть $u_h^{(0)} = 0$, $u_h^{(1)}$, $u_h^{(2)}$, ... удовлетворяют равенствам (89) при $\varphi_{hi} = 0$. Тогда функции $v_m = u_h^{(m)} - u_h^{(m-1)}$ удовлетворяют равенствам (95). В силу (96)

$$\|v_m\|_{Uh} \leqslant (1 - c\tau)^{m-1} \|v_1\|_{Uh}. \tag{98}$$

Из (89) при $m=1$, $u_h^{(0)}=0$ получим: в $D_h^0$ (в обозначениях § 1) $v_1=-\tau f$; в $D_h-D_h^0$ функция $v_1$ определяется из граничных условий $r_{hi}(v_1)=0$. В силу (97) $\|v_1\|_{Uh}\leqslant c^*\tau\|f\|_{Fh}$. Отсюда и из (98) получим

$$\|u_h^{(m)}\|_{Uh}=\Big\|u_h^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}(u_h^{(k)}-u_h^{(k-1)})\Big\|_{Uh}=\Big\|\sum_{k=1}^{m}v_k\Big\|_{Uh}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\|v_k\|_{Uh}\leqslant\sum_{k=1}^{m}(1-c\tau)^{k-1}\|v_1\|_{Uh}\leqslant\frac{c^*}{c}\|f\|_{Fh}.$$

Отсюда следует сходимость ряда $v_1+v_2+\ldots$, существование предела $\lim\limits_{m\to\infty}u_h^{(m)}=u_h$ и неравенство

$$\|u_h\|_{Uh}\leqslant\frac{c^*}{c}\|f\|_{Fh},$$

т. е. уравнение (84) устойчиво по правой части.

Можно показать, что и при любом $u_h^{(0)}$ (таком, что $\|u_h^{(0)}\|_{Uh}<\infty$) процесс сходится к тому же пределу $u_h$, что и в случае $u_h^{(0)}=0$.

**5. Сравнение полученных результатов.** Если в уравнении $R_h u_h=f$ функция $u_h$ зависит от $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то, обозначив $u_h^{(m)}(x_1, \ldots, x_n)$ через $u_h(m\tau, x_1, \ldots, x_n)$, мы можем записать процесс последовательных приближений (89) в виде нового разностного уравнения

$$\frac{1}{\tau}[u_h(m\tau, x_1, \ldots, x_n)-u_h((m-1)\tau, x_1, \ldots, x_n)]-$$
$$-R_h u_h((m-1)\tau, x_1, \ldots, x_n)=-f. \quad (99)$$

Для устойчивости этого уравнения по начальным условиям на любом конечном интервале $T_0\leqslant t\leqslant T_0'+T$ (теорема 4) достаточно, чтобы $\|v_{m+1}\|\leqslant(1+c\tau)\|v_m\|$, $c>0$;

для устойчивости уравнения (99) по начальным условиям на интервале $T_0\leqslant t<\infty$ и для устойчивости по отношению к возмущениям с конечным суммарным импульсом (теорема 6, А) достаточно, чтобы $\|v_{m+1}\|\leqslant\|v_m\|$;

для устойчивости уравнения (99) на интервале $T_0\leqslant t\leqslant\infty$ по правой части в случае постоянно действующих возмущений (теорема 6, Б) и для устойчивости уравнения (84) по правой части (теорема 8) достаточно, чтобы $\|v_{m+1}\| \leqslant \leqslant (1-c\tau)\|v_m\|$, $c>0$; $v_m$ везде означает произвольную функцию, удовлетворяющую уравнениям (95); нормы должны удовлетворять условиям, указанным в соответствующих теоремах.

## § 8. Понятие об устойчивости процесса решения разностного уравнения

В определениях устойчивости, которыми мы до сих пор пользовались, речь шла об устойчивости как свойстве, связанном лишь с разностным уравнением и граничными условиями для него. Тот процесс, который используется для фактического вычисления решения разностного уравнения, при этом не принимался во внимание.

Ниже мы приведем пример, показывающий, что влияние ошибок округления, допущенных при вычислении решения разностного уравнения, на окончательный результат может быстро возрастать с измельчением сетки либо вовсе не возрастать в зависимости от того алгоритма, который используется для вычисления решения. Поэтому имеет смысл говорить об устойчивости процесса решения разностного уравнения.

Пример 24. Рассмотрим разностное уравнение и граничные условия (82), аппроксимирующие задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $D$ $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Будем считать, что граничные точки $\Gamma_h$ сетчатой области $D_h$ лежат на границе квадрата $D$. Укажем три различных процесса для решения задачи (82), из которых два устойчивы и один неустойчив.

а) Устойчивый итерационный процесс. Простейший итерационный процесс (83) для решения уравнения (82) является устойчивым: ошибка округления, допущенная на каком-либо шаге процесса, лишь уменьшается при дальнейших вычислениях.

б) Устойчивый процесс последовательного исключения неизвестных *). Неизвестные значения решения $u_h(x, h)$ выразим через значения $u_h(x, 0)$ и $u_h(x, 2h)$, используя для этого уравнение (82). Затем значения $u_h(x, 2h)$ выразим через значения $u_h(x, h)$, которые уже выражены через

*) Описываемый процесс принадлежит С. Л. Соболеву.

$u_h(x, 0)$ и $u_h(x, 2h)$ и через $u_h(x, 3h)$, а также через заданные значения $u_h$ на сторонах $x=0$ и $x=1$ квадрата $D$. Исключим из полученных равенств $u_h(x, 2h)$. В результате значения $u_h$ в точках сетки прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 3h$ будут выражены через значения $u_h$ в точках границы этого прямоугольника. Продолжим этот процесс исключения неизвестных, пока все неизвестные будут выражены через значения $u_h$ на границах квадрата $D$. Описанный процесс устойчив. Каждый шаг процесса состоит в выражении значений решения в точках некоторой прямоугольной сетчатой области в виде линейных комбинаций значений решения в точках границы этой области, причем коэффициенты каждой из этих линейных комбинаций все неотрицательны и в сумме равны единице.

Действительно, если бы какой-нибудь из коэффициентов был отрицателен, то решение уравнения (82), равное $-1$ в соответствующей точке границы рассматриваемой прямоугольной сетчатой области, а в остальных точках границы равное 0, принимало бы во внутренней точке области положительное значение, что противоречило бы принципу максимума, который имеет место для уравнения (82) (см. [11], стр. 252—253). Справедливость второго утверждения следует из того, что постоянная является решением уравнения (82).

Таким образом, ошибка, допущенная на каком-нибудь шаге процесса, не возрастает при дальнейших вычислениях, так как коэффициенты всех встречающихся в процессе счета линейных комбинаций не больше единицы.

в) Неустойчивый процесс последовательного вычисления неизвестных. Тем или иным способом ([11], стр. 240; [12], стр. 294—296) найдем значения решения $u_h$ в точках сетки на ряде $y=h$, а затем по известным значениям $u_h$ на рядах $y=0$ и $y=h$ вычислим в силу разностного уравнения значения решения последовательно на рядах $y=2h, 3h, \ldots, 1-h$.

Описанный процесс решения разностного уравнения неустойчив: он равносилен решению смешанной задачи для уравнения Лапласа методом конечных разностей. В случае устойчивости этого процесса смешанная задача для уравнения Лапласа в силу теоремы 2 была бы корректно поставлена, что не имеет места ([40], стр. 37—38).

В работе [38] имеется пример неустойчивого процесса для решения разностного аналога интегрального уравнения.

Неустойчивые процессы решения разностных уравнений практически не пригодны в случае мелкой сетки.

Для строгого введения понятия устойчивости процесса решения разностного уравнения нужно ввести норму для функций, получающихся на промежуточных этапах вычислений, а затем определить устойчивость процесса решения аналогично понятию равномерной устойчивости разностных уравнений по начальным условиям (§ 4). При исследовании устойчивости процессов решения можно пользоваться теми же приемами, что и для изучения устойчивости разностных уравнений (индекс, принцип максимума и др., см. гл. 3, 4 и 5).

Отметим, что существование хотя бы одного устойчивого процесса счета в случае естественного согласования норм, введенных при определении корректности уравнения и устойчивости процесса счета, должно обеспечивать, очевидно, корректность уравнения при заданных граничных условиях, так как в ходе вычислений могут допускаться ошибки округления, в частности, в правых частях разностного уравнения и граничных условий.

## ГЛАВА 3

# НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ

В этой главе приведены некоторые опубликованные в математической литературе признаки устойчивости и показано их применение на простейших примерах. Новые результаты, касающиеся исследования устойчивости методом разделения переменных для некоторых классов уравнений и систем уравнений, изложены в главах 4 и 5.

## § 9. Простейшие признаки устойчивости

1. Принцип максимума. Если для разностного уравнения (3), (4) имеет место принцип максимума в той или иной форме (например, если из $R_h u_h > 0$, $r_{hi}(u_h) = 0$ следует, что $u_h$ не может иметь положительного максимума ни внутри, ни на границе области), то часто удается доказать устойчивость по правой части и устойчивость по граничным условиям таким же способом, как для уравнения (30). В [2] этот прием применяется к нелинейному уравнению.

2. Индекс разностной схемы. Пусть разностное уравнение (3), (4) линейно и удовлетворяет требованиям 1) — 3) § 4. Тогда при любом $m \geqslant q-1$ значение $u_h$ в любой точке слоя $S_{m+1}$ можно выразить в виде линейной комбинации значений $u_h$ в точках слоев $S_m$, $S_{m-1}$, ... плюс член, зависящий только от правых частей уравнений (3), (4). Максимум (по всем точкам сетки, включая граничные) суммы модулей коэффициентов этой линейной комбинации называется индексом $J$ разностной схемы ([12], стр. 230). Если $J \leqslant 1 + c\tau$, где $\tau$ — шаг сетки по $t$, $c$ не зависит от $h$ и $\tau$, а область $D$ конечна, то уравнение равномерно устойчиво по начальным условиям при нормах

$$\|u_h\|_{S_m} = \max_{S_m} |u_h|, \qquad \|r_{h1}(u_h)\|_{\Phi h1} = \max_{S_0, S_1, \ldots, S_{q-1}} |u_h|.$$

Это утверждение прямо следует из теоремы 4, так как неравенства (51) и (52) будут выполнены, если взять

$$\|u_h\|_q^{(m)} = \max_{s_{m-q+1}, \ldots, s_m} |u_h|.$$

Условие $J \leqslant 1 + c\tau$, конечно, не является необходимым для устойчивости. В частности, для разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения выше первого порядка по $t$, всегда $J > \mathrm{const} > 1$, и сформулированный признак устойчивости ничего не дает.

Пример 25. В области $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant X$ дифференциальное уравнение $u_t = u_{xx}$ аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{1}{\tau}(u_{m+1,n} - u_{m,n}) = \frac{1}{h^2}(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}), \qquad (100)$$

где $u_{m,n} = u_h(m\tau, nh)$. Сетка состоит из точек $t = m\tau$, $x = nh$, причем $\tau = rh^2$, $r = \mathrm{const} \leqslant \frac{1}{2}$, $Nh = 1$, $N$ — целое. Из уравнения (100) получим:

$$u_{m+1,n} = ru_{m,n-1} + (1 - 2r)u_{m,n} + ru_{m,n+1}. \qquad (101)$$

а) Пусть граничные условия для дифференциального уравнения таковы:

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad u(t, 0) = 0, \quad u(t, X) = 0,$$

а для разностного уравнения

$$u_{0,n} = \varphi(nh), \qquad u_{m,0} = 0, \qquad u_{m,N} = 0. \qquad (102)$$

Из (101) и (102) получаем, что $J = 1$. Следовательно, разностное уравнение устойчиво.

б) Заменим граничное условие $u(t, 0) = 0$ на условие $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + au\right)\Big|_{x=0} = 0$, а для разностного уравнения—на условие

$$\frac{u_{m,1} - u_{m,0}}{h} + au_{m,0} = 0. \qquad (103)$$

Следовательно, $u_{m+1,0} = \frac{u_{m+1,1}}{1 - ah}$. Отсюда, из (101) и из граничного условия $u_{m+1,N} = 0$ получаем $J = \max\left\{1, \frac{1}{1 - ah}\right\}$. При $a \leqslant 0$ уравнение устойчиво.

в) Если же $a>0$, то индекс равен $\frac{1}{1-ah}=1+O(\sqrt{\tau})$, т. е. больше требуемого. Однако здесь можно уменьшить индекс, сделав в уравнении (100), (103) замену искомой функции $u_{m,n}=v_{m,n}\operatorname{ch}\alpha(2nh-X)$. При достаточно большом $\alpha$ (не зависящем от $h$) индекс после замены равен $1+4\alpha\tau+O(\tau^2)$, т. е. имеем устойчивость для уравнения, полученного после замены. Так как $|v_h|\leqslant|u_h|\leqslant|v_h|\operatorname{ch}\alpha X$, где $\alpha$ и $X$ не зависят от $h$, то и первоначальное уравнение устойчиво.

Пример 26. Пусть дифференциальное и разностное уравнения те же, что в примере 25. Пусть граничные условия для дифференциального уравнения таковы:

$$u(0,\ x)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(t,\ 0)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(t,\ X)}{\partial x}=0. \qquad (104)$$

а) Если граничные условия (104) аппроксимировать так:

$$u_{0,n}=\varphi(nh), \qquad u_{m,1}-u_{m,0}=0, \qquad u_{m,N}-u_{m,N-1}=0, \qquad (105)$$

то разностное уравнение будет устойчиво, так как из (101) и (105) следует, что $J=1$.

б) Если те же граничные условия (104) аппроксимировать так:

$$\left.\begin{aligned} u_{0,n}&=\varphi(nh),\\ 3u_{m,2}-4u_{m,1}+u_{m,0}&=0,\\ 3u_{m,N}-4u_{m,N-1}+u_{m,N-2}&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

то, выражая $u_{m+1,0}$ через $u_{m,n}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ с помощью равенства (106) (где $m$ заменено на $m+1$) и (101), получим, что при любом $r$ сумма модулей коэффициентов больше или равна $2\frac{4}{5}$. Следовательно, $J\geqslant 2\frac{4}{5}$. Покажем, что уравнение неустойчиво. Пусть $\varphi(nh)=\frac{\varepsilon}{3^n}$, где $\varepsilon$ сколь угодно мало. Тогда функция $u_{m,n}=\frac{\varepsilon}{3^n}\left(1+\frac{4}{3}r\right)^m$ удовлетворяет уравнению (100) и граничным условиям (106). Норма начальных условий $\|\varphi\|_{\Phi h1}=\max\limits_n|u_{0,n}|=\varepsilon$. При $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant 1$ имеем

$$m\geqslant\frac{1}{2\tau}=\frac{1}{2rh^2}=\frac{N^2}{2r},$$

следовательно,

$$u_{m,n} \geqslant \frac{\varepsilon}{3^N}\left(1+\frac{4}{3}r\right)^{\frac{N^2}{2r}} \to \infty$$

при $r = \mathrm{const}$, $N \to \infty$. Отсюда следует, что уравнение (100) с граничными условиями (106) неустойчиво при любом $r$.

В этом примере $J \geqslant 2\frac{4}{5}$ из-за влияния граничных условий. Если бы при подсчете $J$ мы не учли граничных условий (106), то мы получили бы $J = 1$ и сделали бы ошибочное заключение, что уравнение устойчиво.

**3.** Исследование устойчивости путем изучения роста единичной ошибки. Дано разностное уравнение (3) с граничными условиями (4), удовлетворяющее требованиям 1)—3) § 4. Пусть при вычислении его решения мы сделали ошибку, равную $\varepsilon$, только в одной точке слоя $S_m$, а в других точках сетки мы не делаем никаких новых ошибок, т. е. значения $u_h$ в этих точках в точности удовлетворяют уравнениям (3), (4). Допущенная в $S_m$ ошибка $\varepsilon$ вызовет ошибки в некоторых точках слоев $S_{m+1}$, $S_{m+2}$, ... Если величины этих ошибок быстро растут с возрастанием номера слоя, то можно предполагать, что разностное уравнение неустойчиво, а если они не растут — можно предполагать, что оно устойчиво (см. [12], стр. 206—213, 228).

Исходя из этих соображений, можно дать признак устойчивости, применимый ко многим явным (см. § 4) разностным уравнениям.

Пусть область $D$ конечна, независимые переменные $t$, $x_1, \ldots, x_n$; шаги сетки $\tau$, $h_1, \ldots, h_n$; разностное уравнение (3) с граничными условиями (4) линейно, удовлетворяет требованиям 1)—3) § 4 и имеет вид

$$\frac{a}{\tau^p} u_h(m\tau, x_1, \ldots, x_n) + \Sigma = f,$$

где $a = a(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant a_0 > 0$, $\Sigma$ означает сумму членов, зависящих от значений $u_h$ только в слоях $S_{m-1}$, $S_{m-2}, \ldots, S_{m-q}$.

Пусть $v_h$ — решение однородного уравнения (50), равное нулю во всех точках слоев $S_{m-q+1}, \ldots, S_m$, кроме какой-нибудь одной точки слоя $S_m$, где $v_h = 1$. Если любое такое решение на любом слое $S_M$ $(M > m)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{S_M} |v_h| \leqslant c_1 (M - m)^{p-1}, \tag{107}$$

где $c_1$ не зависит от $m$, $M$, от шагов сетки и от выбора точки, в которой $v_h = 1$, то уравнение (3), (4) устойчиво по правой части в норме

$$\|u_h\|_{U_h} = \tau h_1 \ldots h_n \sum_{D_h} |u_h|, \qquad \|f\|_{F_h} = \tau h_1 \ldots h_n \sum_{D_h^0} |f|.$$

Для доказательства достаточно представить $f$ в виде суммы функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в одной точке сетки; тогда решение $u_h$ будет суммой решений, аналогичных $v_h$ и оцениваемых с помощью (107).

В тех случаях, когда в разностное уравнение входят значения $u_h$ только в двух соседних слоях сетки (т. е. когда выполняются требования 1) — 3) § 4 при $q = 1$), подобное рассуждение позволяет доказать и равномерную устойчивость по начальным условиям.

В большинстве случаев полная проверка выполнения условия (107) бывает связана с большими трудностями. Поэтому часто ограничиваются проверкой выполнения условия (107) только для нескольких значений $M$, как это сделано в примере 27.

Пример 27. Уравнение, сетка и граничные условия те же, что в примере 5. В таблицах 1 и 2 приведены значения

Таблица 1

$$\tau = \frac{h^2}{4}$$

| $m$ \ $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
| $m+1$ | 0 | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0 | 0 | ... |
| $m+2$ | 0 | 0,06 | 0,25 | 0,38 | 0,25 | 0,06 | 0 | ... |
| $m+3$ | 0 | 0,09 | 0,23 | 0,31 | 0,23 | 0,09 | 0,02 | ... |
| $m+4$ | 0 | 0,10 | 0,22 | 0,27 | 0,22 | 0,11 | 0,03 | ... |
| $m+5$ | 0 | 0,10 | 0,20 | 0,24 | 0,20 | 0,12 | 0,04 | ... |

Таблица 2

$\tau = h^2$

| $m \backslash n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
| $m+1$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | ... |
| $m+2$ | 0 | 1 | $-2$ | 3 | $-2$ | 1 | 0 | ... |
| $m+3$ | 0 | $-3$ | 6 | $-7$ | 6 | $-3$ | 1 | ... |
| $m+4$ | 0 | 9 | $-16$ | 19 | $-16$ | 10 | $-4$ | ... |
| $m+5$ | 0 | $-25$ | 44 | $-51$ | 45 | $-30$ | 15 | ... |

$v_h(m\tau, nh)$, вычисленные из разностного уравнения и граничных условий в предположении, что в слое $S_m$ в одной точке $v_h = 1$, а в других $v_h = 0$.

При $\tau = \frac{h^2}{4}$ получаем, что $v_h$ не растет (табл. 1) — это случай устойчивости, а в случае $\tau = h^2$ функция $v_h$ быстро растет (табл. 2) — это случай неустойчивости.

Конечно, заключение об устойчивости или неустойчивости, сделанное на основании такой частичной проверки, не может считаться строго обоснованным.

## § 10. Более сильные признаки устойчивости

1. Предварительное понятие о методе разделения переменных. В статье [4] предложен метод исследования устойчивости линейных разностных уравнений, основанный на разделении переменных. Здесь мы покажем на простейших примерах, как применяется этот метод. Дальнейшее развитие этого метода дано в главах 4 и 5.

В статье [4] линейное уравнение (3) с граничными условиями (4), удовлетворяющее требованиям 1) — 3) § 4, называется устойчивым, если любое решение соответствующего однородного уравнения (50) остается ограниченным при $t \to \infty$. Это определение близко к нашему определению устойчивости по начальным условиям, но отличается от него тем, что требуется ограниченность решения при $t \to \infty$, а не при $h \to 0$.

Пример 28. Уравнение, сетка и граничные условия те же, что в примере 1. Для исследования устойчивости надо взять уравнение и граничные условия (кроме начальных условий) однородными, т. е. в (6) $f\equiv 0$, $u_h(m\tau,\ 0)=0$, $u_h(m\tau,\ Nh)=0$ и применить способ разделения переменных, положив $u_h(m\tau,\ nh)=p(m)\,v(n)$. Здесь, как и во всех случаях, когда коэффициенты уравнения не зависят от $t$, можно взять $p(m)=\lambda^m$. Подставляя $u_h=\lambda^m v(n)$ в уравнение, получим, что $v(n)$ должна удовлетворять уравнениям (77), а $\lambda$ — уравнению

$$\lambda^2-(2+\tau^2\rho)\lambda+1=0, \tag{108}$$

называемому характеристическим уравнением. Функции $v(n)$ и числа $\rho$, удовлетворяющие уравнениям (77), даются формулами (79). Эта система функций $v$ полна, т. е. любую функцию $w(x)$, заданную в точках $x=0,\ h,\ 2h,\ \ldots,\ Nh$ и удовлетворяющую граничным условиям $w(0)=0$, $w(Nh)=0$, можно представить в виде линейной комбинации функций $v$.

В таком случае для устойчивости (в смысле [4]) необходимо и достаточно, чтобы при всех рассматриваемых $\rho$ все корни $\lambda$ уравнения (108) по модулю не превосходили 1 и чтобы не было кратных корней $\lambda$, по модулю равных 1 (следует из того, что любое решение $u_h$ представляется в виде линейной комбинации решений вида $(c_0+c_1m+\ldots+c_{r-1}m^{r-1})\lambda^m v(n)$, где $r$ равно кратности корня $\lambda$).

В (108) $\lambda_1\lambda_2=1$, поэтому для того, чтобы $|\lambda_1|\leqslant 1$, $|\lambda_2|\leqslant 1$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, корни должны быть комплексными, дискриминант квадратного уравнения (108) должен быть отрицателен, т. е. $4\tau^2\rho+\tau^4\rho^2<0$,

$$-4<\tau^2\rho<0. \tag{109}$$

Для таких $\rho$, как в (79), неравенство (109) выполняется при $\frac{\tau}{h}<\sec\frac{\pi}{2N}$. Это есть условие устойчивости в смысле [4].

Подчеркнем, что этот способ исследования устойчивости может дать неверный результат в том случае, когда система собственных функций не полна. Это показывает следующий пример.

Пример 29 *). Пусть уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$ в области $0\leqslant x\leqslant X$, $0\leqslant t\leqslant T$ с граничными условиями $u(0,\ x)=\varphi(x)$,

*) Пример сообщен С. К. Годуновым.

$u(t, X)=0$ аппроксимируется так:

$$\frac{1}{\tau}(u_{m+1, n}-u_{m, n})-\frac{1}{h}(u_{m, n+1}-u_{m, n})=0,$$

$$u_{0, n}=\varphi(nh), \quad u_{m, N}=0;$$

сетка та же, что в примере 28. После подстановки $u_{m, n}=\lambda^m v(n)$; разделения переменных и использования граничных условий легко получить, что существует только одна собственная функция:

$$v(n)=0 \quad (n=1, 2, \ldots, N), \qquad v(0)=1.$$

Ей соответствует число $\lambda=1-r$, где $r=\frac{\tau}{h}$. При $1<r<2$ имеем $|\lambda|<1$, но устойчивости нет, так как функция

$$u_{m, n}=(-1)^{m+n}(2r-1)^m\delta,$$

являющаяся решением в области $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, $m+n\leqslant N$, может быть сколь угодно малой при $t=0$ и сколь угодно большой при $t=m\tau=\text{const}>0$, $\tau\to 0$, $m\to\infty$.

Пример 30 (линейная неустойчивость). В примере 28 заменим граничные условия $u_h(m\tau, 0)=0$ и $u_h(m\tau, Nh)=0$ такими:

$$u_h(m\tau, h)-u_h(m\tau, 0)=0,$$
$$u_h(m\tau, Nh)-u_h(m\tau, Nh-h)=0,$$

аппроксимирующими граничные условия $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=X}=0$.

Подставляя $u_h(m\tau, nh)=\lambda^m v(n)$ в уравнение, получим, что $v(n)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h^2}(v(n+1)-2v(n)+v(n-1))=\rho v(n),\\ &v(1)-v(0)=0, \quad v(N)-v(N-1)=0, \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

а $\lambda$ — уравнению (108). Решая уравнение (110) так же, как (77), получим

$$\left.\begin{aligned} &v(n)=\cos\frac{k\pi(2n-1)}{2(N-1)}, \quad \rho=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2(N-1)}\\ &(k=0, 1, 2, \ldots, N-2). \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

В частности, при $k=0$ имеем $\rho=0$, $v(n)\equiv 1$, и уравнение (108) имеет кратный корень $\lambda_1=\lambda_2=1$. Ему соответствует решение

$$u_h(m\tau,\ nh)=C_0+C_1 m,$$

линейно растущее вместе с $m$, а решения, соответствующие другим значениям $\rho$ из (111), будут ограничены, если $\tau < h\sec\frac{\pi}{2(N-1)}$; это получается из (109). Такой случай в статье [4] называется линейной неустойчивостью.

Если для какого-либо разностного уравнения имеет место линейная неустойчивость, то это еще не значит, что данное разностное уравнение непригодно для практических вычислений. В некоторых случаях (в частности, в примере 30) линейная неустойчивость неизбежна. Если среди решений линейного однородного дифференциального уравнения есть линейно растущее решение, например $u(t,\ x)=t$, то среди решений соответствующего разностного уравнения тоже должны быть растущие решения, значит, в этом случае не может быть устойчивости в смысле [4]. С другой стороны, в тех случаях, когда дифференциальное уравнение не имеет растущих решений, линейная неустойчивость нежелательна, она может создать затруднения при счете.

Многие разностные уравнения, для которых имеет место линейная неустойчивость в смысле [4], оказываются корректными и устойчивыми в смысле гл. 1 и гл. 2 этой книги. В частности, уравнение примера 30 устойчиво по начальным условиям и по правой части при $\tau\leqslant h$. Не приводя здесь доказательства этого утверждения, поясним на более простом примере, почему наличие линейно растущего решения не всегда приводит к неустойчивости.

Пример 31. Уравнение $\frac{d^2u}{dt^2}=0$ с начальными условиями и $u(0)=a_1$, $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=a_2$ аппроксимируем так:

$$\frac{1}{\tau^2}(u_{m+1}-2u_m+u_{m-1})=0, \qquad u_0=a_1,\ \frac{1}{\tau}(u_1-u_0)=a_2,$$

где $u_m=u_h(m\tau)$. Несмотря на наличие линейно растущего решения $u_m=Cm\tau$ ($C=\text{const}$), уравнение устойчиво по начальным условиям в области $0\leqslant t\leqslant T$, так как из $|u_0|<\delta$.

$\left.\frac{1}{\tau}(u_1 - u_0)\right| < \delta$ очевидно следует $|u_m| \leqslant \delta + m\tau\delta \leqslant (T+1)\,\delta$ при $m\tau = t \leqslant T$, т. е. при $\delta = \frac{\varepsilon}{(T+1)}$ имеем $|u_m| \leqslant \varepsilon$ независимо от $\tau$.

Для разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения с частными производными, дело обстоит аналогично.

В теореме 13 гл. 4 будет дан признак равномерной устойчивости по начальным условиям (в смысле гл. 2), основанный на методе разделения переменных и изучении поведения корней $\lambda$ характеристического уравнения.

**2. Исследование устойчивости уравнений с переменными коэффициентами.** В статье [4] предложен способ исследования устойчивости уравнений с переменными коэффициентами путем сравнения с уравнениями, имеющими постоянные коэффициенты.

В уравнении с переменными коэффициентами заменим коэффициенты постоянными, равными значению переменных коэффициентов в произвольной точке $M$ области. Если при любом выборе точки $M$ полученное уравнение с постоянными коэффициентами будет устойчиво, то и первоначальное уравнение с переменными коэффициентами тоже устойчиво (область предполагается конечной).

Этот признак устойчивости уравнений с переменными коэффициентами до сих пор не доказан. Если устойчивость понимается в смысле статьи [4], то этот признак опровергается примером, приведенным в заметке [13]. Однако в этом примере разностное уравнение с переменными коэффициентами является устойчивым (в области $0 \leqslant t \leqslant T$) в смысле гл. 1 и 2, и вполне пригодно для практических вычислений. Таким образом, этот пример не опровергает сформулированный признак устойчивости, если область конечна и устойчивость понимать в смысле гл. 1 и 2. Выяснение условий, при которых справедлив этот признак устойчивости, имело бы большое значение.

Можно ли применять этот признак к уравнениям, встречающимся в практике? Повидимому, можно. В имеющихся примерах условия устойчивости, получаемые из этого признака, являются достаточными для устойчивости по начальным условиям и правой части (если область лежит в полосе $T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + T$) и очень близки к необходимым.

Пример 32. Дифференциальное уравнение $u_{tt}=a(x)u_{xx}$, где $a(x)=x$, с граничными условиями $u(0, x)=\varphi_1(x)$, $u_t(0, x)=\varphi_2(x)$, $u(t, 0)=0$, $u(t, 1)=0$ заменяется разностным уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\tau^2}(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})=\\ &\qquad=a(nh)\frac{1}{h^2}(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1}),\\ &u_{0,n}=\varphi_1(nh), \qquad \frac{1}{\tau}(u_{1,n}-u_{0,n})=\varphi_2(nh),\\ &\qquad u_{m,0}=0, \qquad u_{m,N}=0, \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

где $n=0, 1, 2, \ldots, N$; $Nh=1$, $u_{m,n}=u_h(m\tau, nh)$.

Пользуясь способом разделения переменных, как в примере 28, получим

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{B}_h v=a(nh)\frac{1}{h^2}(v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}) \quad (n=1, 2, \ldots, N-1);\\ &\qquad\qquad v_0=v_N=0. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Чтобы оценить собственные значения $\rho$ оператора $\mathrm{B}_h$, заменим переменный коэффициент $a(nh)=nh$ на постоянный, равный $a$, где $h\leqslant a\leqslant 1-h$. Полученный оператор отличается от (77) лишь множителем $a$, поэтому аналогично (79)

$$\rho=-\frac{4a}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2} \qquad (k=1, 2, \ldots, N-1),$$

$$\min\rho=-\frac{4(1-h)}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}.$$

Уравнение (108) имеет корни $|\lambda|\leqslant 1$ при условии (109). Отсюда

$$\tau\leqslant\sqrt{-\frac{4}{\min\rho}}=\frac{h}{\sqrt{1-h}\cos\frac{\pi h}{2}}.$$

Например, при $h=0{,}25$ получаем $\tau\leqslant 0{,}312$.

Для сравнения вычислим точно собственные значения оператора (113) при $h=0{,}25$, $a(nh)=nh$. Из $\mathrm{B}_h v=\rho v$ получим

$$4(v_2-2v_1)=\rho v_1; \quad 8(v_3-2v_2+v_1)=\rho v_2;$$
$$12(-2v_3+v_2)=\rho v_3.$$

Приравнивая нулю детерминант этой системы, получим кубическое уравнение с корнями $\rho_1 = -3{,}76$, $\rho_2 = -13{,}2$, $\rho_3 = -31{,}0$. Из условия (109) получим $\tau \leqslant 0{,}359$, что мало отличается от оценки, полученной путем замены коэффициентов в (113) на постоянные. При малых $h$ относительная ошибка в оценке будет еще меньше.

**3.** Изучение роста решения при переходе от каждого слоя сетки к следующему. Во многих случаях можно исследовать устойчивость с помощью теоремы 4 (гл. 2), подбирая подходящее выражение для нормы $\|v_h\|_q^{(m)}$, зависящей от значений функции $v_h$ на $q$ соседних слоях сетки. Если при переходе от слоев $S_{m-q}, \ldots, S_{m-1}$ к слоям $S_{m-q+1}, \ldots, S_m$ эта норма увеличивается не более, чем в $1+c\tau$ раз для любой функции $v_h$, удовлетворяющей уравнениям (50), то имеет место равномерная устойчивость по начальным условиям. Для отыскания такой нормы нет общих правил, поэтому мы рассмотрим отдельные примеры.

На сетке $D_h(t = m\tau,\ x = nh;\ m = 0, 1, 2, \ldots;\ m\tau \leqslant T;\ n = 0, 1, \ldots, N;\ Nh = X)$ рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau}(u_{m,n} - u_{m-2,n}) &- \\ - \frac{a_{m-1,n}}{h^2}(u_{m-1,n+1} - u_{m,n} &- u_{m-2,n} + u_{m-1,n-1}) - \\ - \frac{b_{m-1,n}}{2h}(u_{m-1,n+1} &- u_{m-1,n-1}) - \\ &- \frac{c_{m-1,n}}{2}(u_{m,n} + u_{m-2,n}) = 0, \qquad (114)\end{aligned}$$

где $u_{m,n} = u_h(m\tau, nh)$, $a_{m-1,n} = a((m-1)\tau, nh)$, ..., $a(t, x) \geqslant 0$, с граничными условиями вида (112).

При $h \to 0$; $\frac{\tau}{h} \to 0$ уравнение (114) аппроксимирует параболическое дифференциальное уравнение

$$u_t - a(t, x)\, u_{xx} - b(t, x)\, u_x - c(t, x)\, u = 0;$$

при $h \to 0$, $\frac{\tau}{h} = r = \mathrm{const}$ уравнение (114) аппроксимирует гиперболическое дифференциальное уравнение

$$r^2 a(t, x)\, u_{tt} - a(t, x)\, u_{xx} + u_t - b(t, x)\, u_x - c(t, x)\, u = 0. \qquad (115)$$

Разобьем всю сетку $D_h$ на две сетки: $D_{h1}$, состоящую из точек, где $m+n$ нечетно, и $D_{h2}$, где $m+n$ четно. Будем рассматривать только сетку $D_{h2}$, так как с помощью уравнения (114) можно вычислить значения $u_{m,n}$ во всех точках сетки $D_{h2}$, не вычисляя значений $u_{m,n}$ на $D_{h1}$.

Пример 33 (см. [44]). Пусть в (114) $b \equiv c \equiv 0$. Положим

$$\| u_h \|_q^{(m-1)} = \left[ \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{N} (u_{m-j,n} - u_{m-i,n-1})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{116}$$

где $i=1$, $j=2$ при четном $m+n$, $i=2$, $j=1$ при нечетном $m+n$; т. е. в сумму (116) входят квадраты разностей значений $u_{m,n}$ в соседних точках слоев $S_{m-2}$ и $S_{m-1}$ сетки $D_{h2}$. Покажем, что если $u_{m,n}$ удовлетворяет уравнению (114) и $u_{m,0} = u_{m,N} = 0$, то $\| u_h \|_q^{(m)} \leqslant \| u_h \|_q^{(m-1)}$.

Пусть $m+n$ четно, $u_{m-2,n}$, $u_{m-1,n+1}$, $u_{m-1,n-1}$ произвольны, а $u_{m,n}$ определяется из уравнения (114). Обозначим

$$u_{m-2,n} - u_{m-1,n-1} = r_1, \qquad u_{m-1,n+1} - u_{m-2,n} = r_2,$$
$$u_{m,n} - u_{m-1,n-1} = r_3, \qquad u_{m-1,n+1} - u_{m,n} = r_4;$$
$$\alpha = 2\tau h^{-2} a_{m-1,n}.$$

Тогда из (114) следует при $b \equiv c \equiv 0$, $\alpha \geqslant 0$

$$(1+\alpha) r_3 = r_1 + \alpha r_2, \qquad (1+\alpha) r_4 = \alpha r_1 + r_2.$$

Отсюда получаем, что $r_3^2 + r_4^2 \leqslant r_1^2 + r_2^2$.

Сумма в (116) состоит из квадратов разностей, аналогичных $r_1^2$ и $r_2^2$, а сумма в выражении для $\| u_h \|_q^{(m)}$ состоит из квадратов разностей, аналогичных $r_3^2$ и $r_4^2$. Поэтому из неравенства $r_3^2 + r_4^2 \leqslant r_1^2 + r_2^2$ получаем $\| u_h \|_q^{(m)} \leqslant \| u_h \|_q^{(m-1)}$; при четном $m$ надо еще принять во внимание, что $(u_{m-1,1} - u_{m-2,0})^2 = (u_{m-1,1} - u_{m,0})^2$, так как в силу граничных условий $u_{m-2,0} = u_{m,0} = 0$; такие же соображения имеют место и в окрестности другой границы ($x = Nh$). Требования теоремы 4 выполнены, значит, имеет место равномерная устойчивость по начальным условиям.

Пример 34. В статье [44] поставлен, но не решен вопрос об устойчивости уравнения (114) при $c(t, x) \not\equiv 0$. Пусть в (114) $|c(t, x)| \leqslant C$, $\left|\frac{\partial c}{\partial t}\right| \leqslant L$, $\left|\frac{\partial c}{\partial x}\right| \leqslant L$,

$$a(t, x) \geqslant 0, \qquad h\,|b(t, x)| \leqslant 2a\,t, x),$$

$$\tau C < 1, \qquad \tau\,|b(t, x)| \leqslant h,\ \tau \leqslant hr,$$

где $r = \mathrm{const}$. Введем обозначения:

$$\alpha = 2\tau h^{-2} a_{m-1, n}, \qquad \beta = \tau h^{-1} b_{m-1, n},$$

$$\gamma = \tau c_{m-1, n}, \qquad \gamma^{+} = \tau c_{m, n+1}, \qquad \gamma^{-} = \tau c_{m, n-1};$$

$$r_1 = (1+\gamma)\, u_{m-2, n} - u_{m-1, n-1}, \quad r_2 = u_{m-1, n+1} - (1+\gamma)\, u_{m-2, n},$$

$$r_3 = u_{m, n} - (1+\gamma^{-})\, u_{m-1, n-1}, \quad r_4 = (1+\gamma^{+})\, u_{m-1, n+1} - u_{m, n};$$

$$Q_m = \sum_{0 \leqslant n \leqslant N-1} |(1+\tau c_{m, n+1})\, u_{m-1, n+1} - u_{m, n}| + \\ + \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} |u_{m, n} - (1+\tau c_{m, n-1})\, u_{m-1, n-1}|; \tag{117}$$

в обеих суммах $n$ принимает лишь такие значения, что $m+n$ четно.

С помощью (114) можно выразить $r_3$ и $r_4$ через $r_1$, $r_2$ и $u_{m-2, n}$. Рассматривая отдельно случаи $r_3 r_4 \geqslant 0$ и $r_3 r_4 < 0$ и пользуясь неравенствами $|\beta| \leqslant 1$, $|\beta| \leqslant \alpha$, $\tau \leqslant hr$,

$$\max\{|\gamma|, |\gamma^{+}|, |\gamma^{-}|\} \leqslant C\tau < 1,$$

$$\max\{|\gamma - \gamma^{+}|, |\gamma - \gamma^{-}|\} \leqslant 2\tau h(1+r)L,$$

получим, что в обоих случаях

$$|r_3| + |r_4| \leqslant (1 + C_0\tau)(|r_1| + |r_2|) + \tau h C_1 |u_{m-2, n}|, \tag{118}$$

где $C_0$ и $C_1$ — постоянные. Так как $u_{m-1, 0} = u_{m-2, 0} = 0$, то

$$|(1+\tau c_{m-1, n})\, u_{m-2, n}| \leqslant Q_{m-1}. \tag{119}$$

Разобьем сумму (117) на пары слагаемых, аналогичные $|r_3| + |r_4|$; могут остаться слагаемые, содержащие значения $u_{m, n}$ в точках, соседних с граничными. Разобьем $Q_{m-1}$ на пары слагаемых, аналогичные $|r_1| + |r_2|$. Пользуясь неравенствами (118) и (119) для таких пар и очевидными оценками для слагаемых, не вошедших в пары, получим

$$Q_m \leqslant (1 + C_0\tau)\, Q_{m-1} + \frac{\tau C_1 N h}{1 - C\tau}\, Q_{m-1}. \tag{120}$$

Так как $Nh = X = \mathrm{const}$, то при $\|u_h\|_q^{(m)} = Q_m$ неравенство (51) выполнено и устойчивость по начальным условиям доказана.

Пример 35. Рассмотрим уравнение (114), где при $h \to 0$ $\frac{\tau}{h} = r = \mathrm{const}$. Это уравнение аппроксимирует гиперболическое дифференциальное уравнение (115). Пусть коэффициенты $a$, $b$, $c$ удовлетворяют тем же неравенствам, что в примере 34. Все рассуждения примера 34, а значит и неравенство (120), остаются справедливыми и в этом случае. Пусть граничные условия имеют вид (112),

$$\|\varphi_1\|_{\Phi h1} = \sum_{n-1}^{N} |\varphi_1(nh) - \varphi_1((n-1)h)|,$$

$$\|\varphi_2\|_{\Phi h2} = h \sum_{n=0}^{N} |\varphi_2(nh)|.$$

Тогда все условия теорем 4 и 5 выполнены (в теореме 5 имеем $p = 2$). Поэтому уравнение устойчиво по начальным условиям и правой части. В силу теоремы 1 и замечания 1 § 2 его решение сходится к решению уравнения (115) при $h \to 0$.

**4.** Замечание о выборе норм. При выборе нормы начальных условий и нормы $\|\ \|_q^{(m)}$ следует учитывать характер непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий. Например, в случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (n > 1) \tag{121}$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = \varphi_1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2$, для того, чтобы обеспечить в конечной области $D$ неравенство $|u(t, x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$, недостаточно требовать выполнения условий $|\varphi_1| < \delta$, $|\varphi_2| < \delta$. Нужно еще, чтобы производные от $\varphi_1$ и $\varphi_2$ по $x_1, \ldots, x_n$ до определенного порядка (зависящего от $n$) были тоже малы. Поэтому ни одно разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (121), не может быть устойчивым при нормах (17) (в противном случае, согласно теореме 2, решение уравнения (121) должно было бы непрерывно зависеть от начальных условий в нормах (16), а это, как известно, не имеет места.

По тем же соображениям для уравнения (121) нельзя взять $\| u_h \|_q^{(m)} = \max\limits_{s_{m-q+1}, \ldots, s_m} | u_h |$, если мы хотим доказать неравенство вида (51).

Нормы $\| \; \|_{\Phi h1}$, $\| \; \|_{\Phi h2}$ и $\| \; \|_q^{(m)}$ должны явно зависеть от разностных отношений, соответствующих тем производным от функций $\varphi_1$, $\varphi_2$, $u$, которые входят в формулировку теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий.

**5.** Другие способы исследования устойчивости. В работе [18] подробно исследована смешанная задача для линейных гиперболических уравнений 2-го порядка. В главе III работы [18] методом конечных разностей доказано существование решения гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j-1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - au = f$$

в цилиндрической области $Q = \Omega \times [0 \leqslant t \leqslant l]$, где $\Omega$ — конечная область в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$, с начальными условиями $u = \varphi$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi$ при $t = 0$ и граничным условием $u = 0$ на боковой поверхности цилиндра. Доказана сходимость к $u$ решения $u_h$ соответствующего разностного уравнения. Заметим, что основное неравенство (25) гл. III [18] можно записать так:

$$(\| u_h \|_{Uh})^2 \leqslant C [(\| \varphi \|_{\Phi h1})^2 + (\| \psi \|_{\Phi h2})^2 + (\| f \|_{Fh})^2],$$

где нормы суть квадратные корни из соответствующих сумм в формуле (25) гл. III [18]. Это неравенство выражает устойчивость разностного уравнения (9) гл. III [18] по правой части и начальным условиям. Таким образом, методы доказательства этого неравенства, изложенные в § 2 и § 6 гл. III [18], являются, в сущности, методами исследования устойчивости разностных уравнений.

Во многих других работах, где применяется метод конечных разностей, например [2], [14], [15], [46] для доказательства сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального тоже сначала доказываются некоторые неравенства, выражающие устойчивость разностного уравнения.

Методы исследования устойчивости разностных уравнений, аппроксимирующих обыкновенные дифференциальные уравнения, изложены в статьях [34], [47] в объеме, достаточном для практических приложений.

## § 11. Влияние граничных условий и других факторов на устойчивость

На устойчивость разностного уравнения влияют не только тип дифференциального уравнения и характер краевой задачи для него, способ замены старших производных разностями и отношение шагов сетки по $t$ и $x$, но и другие факторы, в частности вид граничных условий для разностного уравнения.

1. Влияние способа перехода от граничных условий дифференциального уравнения к граничным условиям разностного уравнения.

В примере 26 (§ 9) рассматривается дифференциальное уравнение $u_t = u_{xx}$ с граничными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, X) = 0.$$

Его можно аппроксимировать разностным уравнением (100). Если при этом граничные условия аппроксимировать условиями (105), то разностное уравнение будет устойчиво (пример 26, а), а если их аппроксимировать условиями (106), то разностное уравнение будет неустойчиво (пример 26, б).

2. Влияние членов низшего порядка в уравнении.

Пример 36. В области $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ дано дифференциальное уравнение $u_t = u_{xx} + au_x$, где $a = \text{const}$, с граничными условиями $u(0, x) = \varphi(x)$, $u(t, 0) = 0$, $u(t, \pi) = 0$. На сетке $t = m\tau$, $x = nh$, где $\tau = \frac{h^2}{2}$, $h = \frac{\pi}{N}$, рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\tau}(u_{m+1,n} - u_{m,n}) =$$

$$= \frac{1}{h^2}(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) + \frac{a}{h}(u_{m,n+1} - u_{m,n}), \quad (122)$$

где $u_{m,n}=u_h(m\tau,\ nh)$, с граничными условиями

$$u_{0,n}=\varphi(nh), \qquad u_{m,0}=0, \qquad u_{m,N}=0. \tag{123}$$

Если $-\frac{1}{h}\leqslant a\leqslant 0$, то уравнение устойчиво, так как индекс разностной схемы (§ 9) равен 1.

Пусть $a>0$. Исследуем устойчивость методом п. 1 § 10. Ищем решение в виде $u_{m,n}=\lambda^m v(n)$, где $v(n)$ — собственная функция оператора

$$B_h(v)=\frac{1}{h^2}(v(n+1)-2v(n)+v(n-1))+\frac{a}{h}(v(n+1)-v(n)),$$
$$v(0)=v(N)=0,$$

получаемого из (122), (123). Собственные функции и собственные значения находим тем же способом, что в примере 19. Получим

$$v(n)=(1+ah)^{-\frac{n}{2}}\sin knh,$$
$$\rho=\frac{1}{h^2}(2\sqrt{1+ah}\cos kh-2-ah) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

Следовательно, $\max\rho<0$; взяв $k=N-1$, получим

$$\min\rho=-\frac{1}{h^2}(2+ah+2\sqrt{1+ah}\cos h).$$

Подставляя $u_{m,n}=\lambda^m v(n)$; $B_h(v)=\rho v$ в уравнение (122), получим характеристическое уравнение, имеющее корень $\lambda=1+\tau\rho$. Поэтому $\max\lambda<1$,

$$\min\lambda=1-\frac{\tau}{h^2}(2+ah+2\sqrt{1+ah}\cos h)=-1-ah+O(h^2),$$

так как $2\tau=h^2$. Значит, $\max|\lambda|=1+a\sqrt{2\tau}+O(\tau)$.

Покажем, что из этой оценки для $\lambda$ вытекает неустойчивость разностного уравнения. Функция $u_{m,n}=\lambda^m v(n)$ является решением разностного уравнения и возрастает в $|\lambda|$ раз при переходе от каждого слоя сетки к следующему. В области $0\leqslant t\leqslant t_1$ она возрастет в $|\lambda|^m$ раз, где $m=\frac{t_1}{\tau}$. В нашем примере наибольшее по модулю $\lambda$ таково, что $|\lambda|\geqslant 1+\alpha(\tau)$, где $\alpha(\tau) \to 0$, $\frac{\alpha(\tau)}{\tau} \to +\infty$ при $\tau \to 0$. Следовательно,

$$|\lambda|^{\frac{t_1}{\tau}} \geqslant (1+\alpha(\tau))^{\frac{t_1}{\tau}} = \left[(1+\alpha(\tau))^{\frac{1}{\alpha(\tau)}}\right]^{\frac{\alpha(\tau)}{\tau} t_1}. \qquad (124)$$

Так как выражение в квадратных скобках стремится к $e = 2{,}718\ldots$ при $\tau \to 0$, а показатель степени стремится к $+\infty$, то все выражение (124) при $\tau \to 0$ тоже стремится к $\infty$. Возьмем в качестве начальных условий ту собственную функцию $v$ оператора $B_h$, которой соответствует наибольшее по модулю $\lambda$, умноженную на сколь угодно малое число. Если норма начальных условий равна $\delta$, то норма решения на любом слое сетки $t = \mathrm{const}$ при $t_1 < t \leqslant T$ будет больше, чем $\delta$, умноженное на выражение (124), которое сколь угодно велико при малых $\tau$. Имеем неустойчивость.

Если же последний член уравнения (122) заменить на $\frac{a}{2h}(u_{m,n+1} - u_{m,n-1})$, и если $h \leqslant \frac{2}{|a|}$, то будем иметь устойчивость, так как индекс разностной схемы равен 1.

Итак, наличие в дифференциальном уравнении членов низших порядков и способ замены их разностями в разностном уравнении могут влиять на устойчивость разностного уравнения.

Нетрудно построить такой же пример для гиперболического уравнения.

ГЛАВА 4

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе мы будем изучать признаки устойчивости линейных разностных уравнений по начальным условиям в тех случаях, когда переменные отделяются. Как уравнения, так и краевые условия, не ограничивая общности, будем считать однородными. Метод разделения переменных использовался для изучения устойчивости некоторых разностных уравнений по начальным условиям при $t \to \infty$ в работе [4] (см. § 10, гл. 3 этой книги) и при $h \to 0$ (т. е. устойчивости в смысле гл. 2) в работах [21], [35] и других.

## § 12. Постановка задачи

1. Предварительное описание класса рассматриваемых уравнений. Пусть $G$ — ограниченная область переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с границей $\gamma$. В цилиндре $D = G \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{p} a_k(t) \frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathrm{L}_k u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (125)$$

с краевыми и начальными условиями, соответственно

$$\mathrm{l}_i(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{\text{бок}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (126)$$

где $\Gamma_{\text{бок}}$ — боковая поверхность цилиндра $D$, и

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1). \qquad (127)$$

Здесь $\mathrm{L}_k$ $(k=0, 1, \ldots, p)$ и $\mathrm{l}_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ — линейные дифференциальные операторы по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами, не зависящими от $t$.

Будем пользоваться прямоугольной сеткой, точки которой имеют координаты вида $(m\tau, r_1h, r_2h, \ldots, r_nh)$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $m$ — всевозможные целые числа, $0 \leqslant m\tau \leqslant T$. Относительно шагов сетки $h > 0$ и $\tau > 0$ будем предполагать, что $h$ достаточно мало, что $\tau$ зависит от $h$ и при $h \to 0$ также и $\tau \to 0$.

Обозначим через $G_h$ совокупность тех точек сетки в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые принадлежат $G+\gamma$; через $S_m$ совокупность точек сетки, лежащих на плоскости $t=m\tau$, проекции которых в пространство $x$-ов принадлежат $G_h$.

Заменим уравнение (125) на сетке разностным уравнением $\mathrm{R}_h u_h = 0$, имеющим вид

$$\sum_{k=0}^{p} a_k(t)\frac{\bar{\Delta}_t^k}{\tau^k}\mathrm{R}_{hk}u_h(t, x_1, \ldots, x_n)=0, \tag{128}$$

где

$$\mathrm{R}_{hk}u_h(t, x_1, \ldots, x_n)= \\ =\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} b_{hk}^{(k_1, \ldots, k_n)}u_h(t, x_1+k_1h, \ldots, x_n+k_nh) \tag{129}$$

и $b_{hk}^{(k_1, \ldots, k_n)}=b_{hk}^{(k_1, \ldots, k_n)}(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые коэффициэнты. Относительно разностных отношений $\frac{\bar{\Delta}_t^k}{\tau^k}$, аппроксимирующих производные $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, будем предполагать, что они имеют вид

$$\frac{\bar{\Delta}_t^k u_h(t, x)}{\tau^k}=\frac{1}{\tau^k}\sum_{r=q_0-q}^{q_0} a_r^{(k)}u_h(t+r\tau, x) \tag{130}$$
$$(k=0, 1, \ldots, p),$$

где $q > 0$ и $a_r^{(k)}$ — некоторые числа. Здесь и в дальнейшем мы пишем $x$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким образом, уравнение (128) связывает значения $u_h$ на $q+1$ последовательных слоях сетки $S_{m-q}, S_{m-q+1}, \ldots, S_m$ и как разностное уравнение по $t$ имеет порядок $q$; $q \geqslant p$, поскольку уравнение (128) аппроксимирует дифференциальное уравнение (125), порядок которого по $t$ равен $p$.

Краевые условия (126) заменим линейными однородными разностными краевыми условиями

$$r_{hi}[u_h(m\tau,\ x)] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s;\ m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{131}$$

Мы будем предполагать, что при фиксированном $m$ условия (131) линейно независимы и связывают значения $u_h$ только в точках слоя $S_m$. Условия (131) имеют смысл и для функций, зависящих только от $x$ и определенных на $G_h$.

**2. Форма задания начальных условий.** Зададим значения $u_h$ на $q$ слоях $S_0, S_1, \ldots, S_{q-1}$ так, чтобы на этих слоях выполнялись краевые условия (131). В силу (128) и (131) решение $u_h$ определится, вообще говоря, на слое $S_q$, а затем, шаг за шагом, и на последующих слоях. Отметим, что значения $u_h$ на $S_0, S_1, \ldots, S_{q-1}$ можно задавать с помощью равенств, напоминающих начальные условия (127) для дифференциального уравнения, а именно в форме

$$\frac{\Delta_t^k u_h(0,\ x)}{\tau^k} = \varphi_{hk}(x) \qquad (k = 0,\ 1, \ldots, p-2), \tag{132}$$

$$\frac{\Delta_t^{p-1}}{\tau^{p-1}} u_h[(k-p+1)\tau,\ x] = \varphi_{hk}(x) \qquad (k = p-1,\ p, \ldots, q-1), \tag{133}$$

где $\varphi_{hk}$ — заданные функции, а разности $\Delta_t^k$ определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} \Delta_t^0 u(t,\ x) &= u(t,\ x);\\ \Delta_t u_h(t, x) = \Delta_t^1 u_h(t,\ x) &= u_h(t+\tau,\ x) - u_h(t,\ x);\\ \Delta_t^k u(t,\ x) &= \Delta_t \Delta_t^{k-1} u_h(t,\ x)\,^{*}). \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Функции $\varphi_{hk}(x)$ $(k = 0,\ 1, \ldots, q-1)$ определены на $G_h$ и должны удовлетворять условиям (131), так как левые части равенств (132), (133) являются линейными комбинациями функций $u_h(m\tau,\ x)$ $(m = 0,\ 1, \ldots, q-1)$, которые удовлетворяют этим условиям. С точки зрения изучения устойчи-

*) В случае, если $p = 1$, остаются только условия (133), а условия (132) отбрасываются.

вости уравнения (128) по начальным условиям, безразлично, как именно функции $\varphi_{hk}$ ($k=0, 1, \ldots, q-1$) выражаются через функции $\varphi_k$ ($k=0, 1, \ldots, p-1$), входящие в (127).

Поясним введенные обозначения на примере.

Пример 37. Дифференциальное уравнение вида (125)

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

начальные и краевые условия

$$u(0, x)=\varphi_0(x), \qquad u(t, 0)=u(t, 1)=0$$

заменим на сетке разностным уравнением

$$\frac{1}{2\tau}[u_h(t+\tau, x)-u_h(t-\tau, x)]-\frac{1}{2h^2}\{[u_h(t+\tau, x+h)- \\ -2u_h(t+\tau, x)+u_h(t+\tau, x-h)]+[u_h(t-\tau, x+h)- \\ -2u_h(t-\tau, x)+u_h(t-\tau, x-h)]\}=0$$

$\left(\text{где } h=\frac{1}{\tilde{N}}, \tilde{N}\text{ — натуральное число}\right)$, начальными условиями

$$\Delta_t^0 u_h(0, x)\equiv u_h(0, x)=\varphi_{h0}(x),$$
$$\Delta_t^0 u_h(\tau, x)\equiv u_h(\tau, x)=\varphi_{h1}(x),$$

и краевыми условиями

$$u_h(t, 0)=u_h(t, 1)=0.$$

Здесь

$$p=1, \quad q=2,$$
$$\mathrm{L}_0 u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathrm{L}_1 u\equiv\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$a_0(t)\equiv-1, \qquad a_1(t)\equiv 1,$$
$$\mathrm{R}_{h0}u_h(t, x)\equiv\frac{u_h(t, x+h)-2u_h(t, x)+u_h(t, x-h)}{h^2},$$
$$\mathrm{R}_{h1}u_h(t, x)\equiv u_h(t, x),$$
$$\overline{\Delta}_t^0\psi(t, x)=\frac{\psi(t+\tau, x)+\psi(t-\tau, x)}{2};$$
$$\frac{\overline{\Delta}_t^1\psi(t, x)}{\tau}=\frac{\psi(t+\tau, x)-\psi(t-\tau, x)}{2\tau}.$$

Начальные условия для разностного уравнения записаны в нашем примере в форме (133); условия (132) ввиду того, что $p=1$, пропадают. Функции $\varphi_{h0}$ и $\varphi_{h1}$ можно определить, например, так:

$$\varphi_{h0}(x)=\varphi_0(x),\qquad \varphi_{h1}(x)=\varphi_0(x)+\tau\varphi_0''(x).$$

Замечание. $q-p+1$ равенств (133) можно было бы считать одним равенством

$$\tau^{-(p-1)}\Delta_t^{p-1}u_h(r\tau,\ x)=\varphi_{hp-1}(r\tau,\ x),$$

которое понимается как равенство двух функций, определенных на слоях $S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_{q-p}$, как это делается в примере 9. В главе 4 мы будем пользоваться записью начальных условий в форме (132), (133) ради краткости формулировок.

3. Введение норм. Для того чтобы ввести нормы и определить устойчивость, а также выделить тот класс разностных уравнений и краевых условий вида (128), (131), которые будут исследоваться в этой главе, рассмотрим линейное пространство $\Psi^{(h)}$ всех функций $\psi(x)$, определенных на $G_h$ и удовлетворяющих краевым условиям (131). Отметим, что если какая-нибудь функция $\varphi(x)$ определена на $G_h$, то функция $R_{hk}\varphi(x)$ определена в силу (129) лишь на некотором подмножестве множества $G_h$, так что уравнение (128) определено не для всех точек множества $S_m$, а только для точек, проекции которых в пространство $x$-ов принадлежат некоторому подмножеству $G_h^0$ множества $G_h$. Мы будем предполагать, что всякую функцию $\tilde{\psi}$, определенную на $G_h^0$, можно единственным способом доопределить на $G_h-G_h^0$ так, чтобы выполнялись краевые условия (131). В частности, в примере 37 линейное пространство $\Psi^{(h)}$ состоит из всех функций $\psi(nh)$ $(n=0,\ 1,\ \ldots,\ \tilde{N})$, обращающихся в нуль при $n=0$ и $n=\tilde{N}$; множество $G_h^0$ состоит из точек $x=nh$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ \tilde{N}-1$.

Введем в $\Psi^{(h)}$ скалярное произведение $(\psi_1,\ \psi_2)_h$, относительно которого предположим, что для всякой достаточно гладкой функции $\varphi(x)$, определенной всюду на $G_h$ и удовлетворяющей краевым условиям (126), имеет место соотношение

$$\lim_{h\to 0}(\tilde{\varphi},\ \tilde{\varphi})_h=(\varphi,\ \varphi), \tag{135}$$

где $\tilde{\varphi}$ — функция из $\Psi^{(h)}$, совпадающая с $\varphi$ на $G_h^0$, а $(\varphi, \varphi)$ — некоторый положительно определенный квадратичный функционал.

Определим норму $\|u_h\|_{\text{нач}}^{(h)}$ начальных условий (132), (133) и норму $\|u_h\|_{S_m}$ решения $u_h$ на слое $S_m$ равенствами

$$\|u_h\|_{\text{нач}}^{(h)} = [(\varphi_0, \varphi_0)_h + \ldots + (\varphi_{q-1}, \varphi_{q-1})_h]^{\frac{1}{2}}, \tag{136}$$

$$\|u_h\|_{S_m} = [(u_h(m\tau, x), u_h(m\tau, x))_h]^{\frac{1}{2}}. \tag{137}$$

Предположение о скалярном произведении, выраженное равенством (135), обеспечивает выполнение требований (11), предъявляемых к нормам в гл. 1, для норм (136) и (137).

Устойчивость по начальным условиям в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$ согласно определению из гл. 1 ввиду линейности рассматриваемой задачи означает, что при достаточно малых $h$ задача (128), (131), (132), (133) однозначно разрешима при любых функциях $\varphi_{hk}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, q-1)$, удовлетворяющих условиям (131), и что существует постоянная $A$, не зависящая от $h$, $m$, $0 \leqslant m\tau \leqslant T$, и от выбора функций $\varphi_{hk}$ такая, что

$$\|u\|_m^{(h)} \leqslant A \|u\|_{\text{нач}}^{(h)}. \tag{138}$$

Если существует такая постоянная $A$, что неравенство (138) имеет место для $m > q_0$ в случае задания начальных условий на любых $q$ последовательных слоях $S_{q_0-q+1}, \ldots, S_{q_0}$, $q_0\tau < T$, то в соответствии с определением из гл. 2 устойчивость по начальным условиям будет равномерной.

**4. Точное описание класса рассматриваемых уравнений.** Сформулируем теперь основное условие, которому должны удовлетворять уравнения вида (128) с краевыми условиями вида (131), изучаемые в этой главе. Предположим, что в пространстве $\Psi^{(h)}$ существуют ортонормальный базис

$$\psi_1^{(h)}(x), \psi_2^{(h)}(x), \ldots, \psi_{N(h)}^{(h)}(x) \tag{139}$$

и базис

$$\tilde{\psi}_1^{(h)}(x), \tilde{\psi}_2^{(h)}(x), \ldots, \tilde{\psi}_{N(h)}^{(h)}(x) \tag{140}$$

такие, что

$$R_{hk}\psi_i^{(h)}(x) = \rho_{ki}^{(h)}\tilde{\psi}_i^{(h)}(x) \tag{141}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, p;\ i = 1, 2, \ldots, N(h)),$$

где $\rho_{ki}^{(h)}$ — некоторые числа. В равенствах (141) и в дальнейшем мы считаем, что оператор $R_{hk}$ переводит всякую функцию $\psi$ из $\Psi^{(h)}$ в функцию $R_{hk}\psi$, также принадлежащую $\Psi^{(h)}$, причем функция $R_{hk}\psi$ в точках $G_h^0$ определяется в силу формулы (129), а затем доопределяется в остальных точках множества $G_h$ так, чтобы выполнялись краевые условия (131).

Предположение о существовании базисов (139) и (140), удовлетворяющих условию (141), является ограничением на $R_{hk}$ и равносильно следующему: операторы $R_{hk}$ получаются из некоторых операторов $A_k$ $(k=0, 1, \ldots, p)$, имеющих общую систему собственных функций, которая образует ортогональный базис в пространстве $\Psi^{(h)}$, умножением на некоторый невырожденный оператор $R_h$ слева: $R_{hk}=R_h A_k$.

Пример 38. В примере 37 линейное пространство $\Psi^{(h)}$ состоит из всех функций $\psi(nh)$ $(n=0, 1, \ldots, \tilde{N})$, равных нулю при $n=0$ и $n=\tilde{N}$. Введем в этом пространстве скалярное умножение $(\psi_1, \psi_2)_h$, положив

$$(\psi_1, \psi_2)_h = h\sum_{n=1}^{\tilde{N}-1}\psi_1(nh)\,\psi_2(nh).$$

Тогда роль базисов (139) и (140) играет система функций

$$\psi_k^{(h)}(nh)=a_k\sin\frac{\pi kn}{\tilde{N}} \qquad (k=1, 2, \ldots, \tilde{N}-1),$$

являющихся собственными функциями оператора $R_{h0}$. Это следует из рассмотрений примера 19 (оператор $B_h$ в примере 19 совпадает с оператором $R_{h0}$). Собственные функции $\psi_k^{(h)}$ при соответствующем выборе множителей $a_k$ образуют полную ортонормальную систему векторов в $\Psi^{(h)}$, так как оператор $R_{h0}$ является самосопряженным в смысле выбранного скалярного произведения (см. признак самосопряженности, § 6, п. 3).

Замечание 1. Последнее условие (существование ортогонального базиса (139) и базиса (140), для которых имеют место равенства (141), может выполняться или не выполняться в зависимости от выбора скалярного произведения $(\psi_1, \psi_2)_h$, удовлетворяющего условию (135). В начале § 15 будет указан прием, позволяющий во многих случаях подходящим образом выбирать скалярное произведение.

Замечание 2. Если среди операторов $R_{hk}$ есть такой $R_{hl}$, что уравнение $R_{hl}\psi(x)=0$ при условиях (131) имеет лишь тривиальное решение, то линейная независимость системы функций (140) является следствием линейной независимости функций (139) и равенств (141).

## § 13. Сведение исследования устойчивости уравнения «в частных разностях» к изучению свойств разностного уравнения от функции одного переменного

Всюду в § 13 мы будем предполагать, что рассматриваемые разностные уравнения вида (128) с краевыми условиями вида (131) удовлетворяют всем требованиям, сформулированным в § 12.

Пользуясь методом разделения переменных, будем искать решения уравнения (128), удовлетворяющие условиям (131), в виде

$$u_i^{(h)}(t,\ x)=v_i^{(h)}(t)\,\psi_i^{(h)}(x) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N(h)). \tag{142}$$

Подставим (142) в уравнение (128). Учитывая (141) и сокращая на $\tilde{\psi}_i^{(h)}$, получим разностное уравнение для $v_i^{(h)}(t)$, имеющее порядок $q$. При $t=(m-q_0)\tau$ это уравнение имеет следующий вид:

$$\left.\begin{gathered}\sum_{k=0}^{p} a_k[(m-q_0)\tau]\,\rho_{ki}^{(h)}\frac{\overline{\Delta}_t^k}{\tau^k}v_i^{(h)}[(m-q_0)\tau]=0\\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N(h)).\end{gathered}\right\} \tag{143}$$

Уравнение (143) в силу (130) связывает значения

$$v_i^{(h)}[(m-q)\tau],\ v_i^{(h)}[(m-q+1)\tau],\ \ldots,\ v_i^{(h)}(m\tau).$$

В § 13 мы установим связь между свойствами уравнений (143) и (128) с тем, чтобы свести изучение уравнения в «частных разностях» (128) к изучению «обыкновенного» разностного уравнения (143), зависящего от параметра $i$. Дальнейшим шагом (§ 14) будет рассмотрение уравнения (143). Такой путь исследования устойчивости имеет много общего с методом И. Г. Петровского [31] изучения корректности постановки задачи Коши для систем линейных уравнений с частными производными. Разложение функций, определенных на сетках, в ряды (или интегралы) Фурье по некоторому базису использовали для изучения решений разностных уравнений Л. А. Люстерник [20], [21], О. А. Ладыженская [17], Леви [19] и другие.

1. Признак разрешимости уравнения в «частных разностях».

Теорема 9. *Для однозначной разрешимости задачи* (128), (131), (132), (133) *необходимо и достаточно, чтобы сумма коэффициентов, с которыми входит значение* $v_i^{(h)}(m\tau)$ *в уравнение* (143) *и которую мы обозначим* $c_i$, *была отлична от нуля для всех* $i = 1, 2, \ldots, N(h)$ *и* $m$, $q\tau \leqslant m\tau \leqslant T$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (128), в которое входят значения $u_h$ в точках слоя $S_m$, но не входят значения $u_h$ в точках слоев $S_{m+1}$, $S_{m+2}$, ... Пусть значения $u_h$ уже определены в точках слоев $S_{m-q}$, $S_{m-q+1}$, ..., $S_{m-1}$. В уравнении (128) члены, содержащие неизвестные значения $u_h(m\tau, x)$, оставим в левой части, а остальные — известные — перенесем в правую часть, которую обозначим $f(x)$. Уравнение (128) примет вид

$$\sum_{k=0}^{p} \beta_k R_{hk} u_h(m\tau, x) = f(x), \tag{144}$$

где $\beta_k$ — некоторые числа. Для чисел $c_i$, введенных в условии теоремы, в силу (141) имеем

$$c_i = \beta_0 \rho_{0i}^{(h)} + \beta_1 \rho_{1i}^{(h)} + \ldots + \beta_p \rho_{pi}^{(h)}. \tag{145}$$

Подставим в уравнение (144) вместо $u_h(m\tau, x)$ линейную комбинацию $a_1\psi_1^{(h)} + a_2\psi_2^{(h)} + \ldots + a_{N(h)}\psi_{N(h)}^{(h)}$ функций базиса (139). В силу (141) и (145) получим

$$\sum_{k=0}^{p} \beta_k R_{hk} \left( \sum_{i=1}^{N(h)} a_i \psi_i^{(h)}(x) \right) = \sum_{i=1}^{N(h)} a_i c_i \tilde{\psi}_i(x). \tag{146}$$

Если хотя бы одно из чисел $c_i$, например $c_1$, равно нулю, то, полагая $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{N(h)} = 0$, мы видим, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (144), имеет нетривиальное решение $\psi_1(x)$, удовлетворяющее условиям (131). Если $c_i \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N(h)$, то правая часть (146) ввиду линейной независимости функций (140) равна нулю только в том случае, если $a_1 = a_2 = \ldots \ldots a_{N(h)} = 0$, и однородное уравнение, соответствующее (144), при условиях (131) имеет лишь тривиальное решение.

Замечание 1. Условия теоремы остаются, очевидно, необходимыми и достаточными условиями однозначной разрешимости и в том случае, если уравнение (128) и условия (131) не являются однородными, так как однозначная разрешимость системы линейных алгебраических уравнений зависит только от определителя системы и не зависит от правых частей.

Замечание 2. Можно показать, что если ослабить условия на систему функций (140) и допустить, чтобы функции (140) были линейно зависимы, единственность решения задачи (128), (131), (132), (133) нарушается.

**2. Признак устойчивости по начальным условиям.**

Теорема 10. *Для устойчивости уравнения* (128) *по начальным условиям в полосе* $0 \leqslant t \leqslant T$ *необходимо и достаточно, чтобы при всех достаточно малых положительных* $h$ *выполнялось условие теоремы 9* ($c_i \neq 0$) *и чтобы при всех* $m$ ($0 \leqslant m\tau \leqslant T$) *решения* $v_{i,k}^{(h)}(m\tau)$ *уравнения* (143), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$\left.\begin{array}{c} \tau^{-l}\Delta_t^l v_{i,k}^{(h)}\, 0 = \delta_{l,k} \\ (l = 0, 1, \ldots, p-2;\ k = 0, 1, \ldots, q-1), \\ \tau^{-(p-1)}\Delta_t^{(p-1)} v_{i,k}^{(h)}\, [(l-p+1)\tau] = \delta_{l,k} \\ (l = p-1, p, \ldots, q-1;\ k = 0, 1, \ldots, q-1), \end{array}\right\} \quad (147)$$

*были ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной, не зависящей от* $i, k, h$ ($0 < h < h_0$):

$$\left.\begin{array}{c} |v_{i,k}^{(h)}(m\tau)| < A \\ (i = 1, 2, \ldots, N(h);\ k = 0, 1, \ldots, q-1). \end{array}\right\} \quad (148)$$

Доказательство. В случае невыполнения первого условия ($c_i \neq 0$) теоремы нарушается единственность решения задачи (128), (131), (132), (133), и устойчивость места не имеет, Пусть теперь первое условие ($c_i \neq 0$) выполнено. Тогда, очевидно, решение $v_{i,k}^{(h)}$ задачи (143), (147) существует. Покажем, что выполнение неравенства (148) необходимо для устойчивости.

Пусть не существует $A$, при котором (148) выполнено. Тогда найдется $k$, $0 \leqslant k \leqslant q-1$, последовательности чисел $i_r$, $h_r$, $A_r$ такие, что $h_r \to 0$, $A_r \to \infty$, когда $r \to \infty$, и такие $m_\tau \tau_r$, $0 \leqslant m_r \tau_r \leqslant T$, что

$$v_{i_r, k}^{(h_r)}(m_r \tau_r) = A_r. \tag{149}$$

Норма начальных условий (136) для решения вида (142)

$$u_{i_r}^{(h_r)}(t, x) = v_{i_r k}^{(h_r)}(t) \psi_{i_r}(x)$$

уравнения (128) в силу (147) и нормированности функций (139) равна единице, в то время как согласно (149) при $r \to \infty$ получаем $\|u_{i_r}^{(h_r)}\|_{S_{m(r)}} = A_r \to \infty$ (где $m(r) \equiv m_r$), и устойчивость места не имеет.

Докажем, что выполнение неравенства (148) влечет за собой устойчивость. Разложим функции $\varphi_{hk}(x)$, входящие в условия (132), (133), по базису (139):

$$\left.\begin{gathered}\varphi_{hk} = c_{k1}\psi_1^{(h)} + c_{k2}\psi_2^{(h)} + \ldots + c_{kN(h)}\psi_{N(h)}^{(h)} \\ (k = 0, 1, \ldots, q-1)\end{gathered}\right\} \tag{150}$$

Ввиду ортонормальности базиса (139)

$$(\varphi_{hk}, \varphi_{hk})_h = c_{k1}^2 + c_{k2}^2 + \ldots + c_{kN(h)}^2. \tag{151}$$

Решение задачи (128), (131), (132), (133) можно записать в виде

$$u_h(t, x) = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=1}^{N(h)} c_{kj} v_{jk}^{(h)} \psi_j^{(h)}(x). \tag{152}$$

В самом деле, функция (152) удовлетворяет условиям (131) и уравнению (128) как линейная комбинация решений вида (142). Начальные условия (132), (133) выполняются в силу (147) и (150). Из (152), меняя порядок суммирования, получим

$$\|u_h\|_{S_m}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N(h)} \left( \sum_{k=0}^{q-1} c_{kj} v_{jk}^{(h)}(m\tau) \right) \psi_j^{(h)}(x) \right\|_{S_m}^2.$$

По определению нормы (137) и в силу ортонормальности базиса (139) отсюда следует

$$\|u_h\|^2_{S_m} = \sum_{j=1}^{N(h)} \left( \sum_{k=0}^{q-1} c_{kj} v_{jk}^{(h)} \right)^2.$$

Так как мы предполагаем, что неравенства (148) выполнены, то из последнего равенства следует

$$\|u_h\|^2_{S_m} \leqslant A^2 \sum_{j=1}^{N(h)} \left( \sum_{k=0}^{q-1} |c_{kj}| \right)^2 \leqslant qA^2 \sum_{j=1}^{N(h)} \sum_{k=0}^{q-1} c_{kj}^2.$$

Меняя в правой части последнего неравенства порядок суммирования и используя равенство (151) и определение нормы начальных условий (136), получим

$$\|u_h\|^2_{S_m} \leqslant qA^2 \sum_{k=0}^{q-1} \left( \sum_{j=1}^{N(h)} c_{kj}^2 \right) =$$

$$= qA^2 \sum_{k=0}^{q-1} (\varphi_{hk}, \varphi_{hk})_h = qA^2 (\|u\|^{(h)}_{\text{нач}})^2,$$

что и означает устойчивость разностного уравнения по начальным условиям. Теорема доказана.

Непосредственная проверка выполнения второго условия теоремы 10 обычно затруднительна. Поэтому в § 14 мы дадим более простые достаточные алгебраические признаки устойчивости и неустойчивости разностного уравнения (128) по начальным условиям.

**3.** Признак устойчивости по правой части. В теореме 5 гл. 2 были указаны требования (условия а), б), в), г)), при выполнении которых разностное уравнение устойчиво по правой части. Признаки выполнения условия а) даны в первых двух пунктах этого параграфа. Условия б) и г) в рассматриваемом в этой главе случае, как легко видеть, всегда выполняются. Укажем признак выполнения условия в) теоремы 5 для рассматриваемых в настоящей главе уравнений.

Теорема 11. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *При всех достаточно малых $h$ выполнено условие теоремы* 9 ($c_i \neq 0$).

432—O

2) *Среди операторов* $\mathrm{R}_{hk}$ *в разностном уравнении* (128) *имеется хотя бы один такой* $\mathrm{R}_{hl}$, *что уравнение*

$$\mathrm{R}_{hl}\psi(x)=f(x) \tag{153}$$

*устойчиво по правой части при краевых условиях* (131), *т. е.*

$$\|\psi\|=\sqrt{(\psi,\ \psi)_h}\leqslant c\,\|f\|^{(m)}, \tag{154}$$

*где* $c$ *не зависит от* $h$ *и от* $f$ (норма $\|f\|^{(m)}$ введена в § 4).

3) *Существует постоянная* $c'$, *не зависящая от* $h$ *и от* $i$, *такая, что*

$$\left|\frac{\rho_{li}^{(h)}}{c_i}\right|<c'\tau^p \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N(h)), \tag{155}$$

*где* $\rho_{li}^{(h)}$ *то же, что в формуле* (141), *а* $c_i$ — в (145).

*Тогда выполнено условие* в) *теоремы* 5 *из гл.* 2, *которое ввиду линейности рассматриваемой задачи примет вид*

$$\|u\|_{S_m}\leqslant c''\tau^p\,\|f\|^{(m)},$$

*где* $c''$ *не зависит от* $h$.

Доказательство. Разложим решение $\psi$ уравнения 153) по базису (139). Получим

$$\psi(x)=b_1\psi_1^{(h)}(x)+b_2\psi_2^{(h)}(x)+\ \ldots\ +b_{N(h)}\psi_{N(h)}^{(h)},$$

откуда в силу (141) и (153)

$$b_1\rho_{l1}^{(h)}\tilde{\psi}_1+\ \ldots\ +b_{N(h)}\rho_{lN(h)}^{(h)}\tilde{\psi}_{N(h)}^{(h)}=f. \tag{156}$$

Запишем решение уравнения (144) в виде

$$a_1\psi_1^{(h)}+\ \ldots\ +a_{N(h)}\psi_{N(h)}^{(h)}.$$

Тогда в силу (141), (144) и (156)

$$\sum_{k=0}^{p}\beta_k\sum_{i=1}^{N(h)}\rho_{ki}^{(h)}a_i\tilde{\psi}_i=\sum_{i=1}^{N(h)}b_i\rho_{li}^{(h)}\tilde{\psi}_i.$$

В силу (145) и линейной независимости функций (140)

$$c_ia_i=b_i\rho_{li}^{(h)};\qquad a_i^2=\left(\frac{\rho_{li}^{(h)}}{c_i}\right)^2 b_i^2.$$

Суммируя последнее равенство по $i$, учитывая (155), ортонормальность базиса (139) и неравенство (154), получим

$$\|u_h\|_{S_m} \leqslant c'\tau^k \|\psi\| \leqslant cc'\tau^k \|f\|^{(m)}.$$

Теорема доказана.

Проиллюстрируем использование теоремы 11 примером.

Пример 39. Проверим выполнение всех условий теоремы 11 для разностного уравнения примера 37. Будем предполагать, что скалярное произведение $(\psi_1, \psi_2)_h$ в пространстве $\Psi^{(h)}$ введено так, как в примере 38, а норма $\|f\|^{(m)}$ определена равенством

$$\|f\|^{(m)} = \left[h \sum_{n=1}^{\widetilde{N}-1} f^2(m\tau, nh)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Левая часть уравнения (144) в этом случае имеет вид

$$-\frac{1}{2h^2} R_{h0} + \frac{1}{2\tau} R_{h1},$$

т. е. $\beta_0 = -\frac{1}{2h^2}$ и $\beta_1 = \frac{1}{2\tau}$.

Роль базисов (139) и (140) играет в этом случае система функций

$$\psi_k^{(h)}(nh) = a_k \sin\frac{\pi kn}{\widetilde{N}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \widetilde{N}-1),$$

являющихся, как отмечалось в примере 38, собственными функциями оператора $R_{h0}$.

Числа $\rho_{ki}^{(h)}$, участвующие в равенствах (141), имеют следующие значения:

$$\rho_{0i}^{(h)} = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi i}{2\widetilde{N}}$$

(см. равенство (79)) и

$$\rho_{1i}^{(h)} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widetilde{N}-1).$$

Числа $c_i$, определенные равенствами (145), имеют значения

$$c_i = \frac{2}{h^4}\sin^2\frac{\pi i}{2\widetilde{N}} + \frac{1}{2\tau} \geqslant \frac{1}{2\tau} > 0.$$

Таким образом, $c_i \neq 0$, и первое условие теоремы выполнено. Второе условие теоремы также выполнено: в качестве $R_{hl}$ можно взять, очевидно, $R_{h1}$. Выполнение третьего условия проверяется непосредственно, если использовать выражения $\rho_{1i}^{(h)}$ и $c_i$, выписанные выше.

## § 14. Алгебраические признаки устойчивости

Непосредственная проверка выполнения второго условия теоремы 10 часто бывает затруднительна. Мы установим поэтому алгебраические признаки устойчивости по начальным условиям, причем ограничимся случаем, когда коэффициенты уравнений (128) и (143) не зависят от $t$. Отметим, что устойчивость по начальным условиям равносильна в этом случае равномерной устойчивости по начальным условиям.

Будем искать решения уравнения (143), имеющие вид

$$v(m\tau) = \lambda^m. \tag{157}$$

Подставляя (157) в (143), после сокращений получим алгебраическое уравнение степени $q$ относительно $\lambda$, которое называется *характеристическим уравнением* для (143).

1. Необходимое условие устойчивости. Докажем следующую теорему.

Теорема 12. *Для устойчивости уравнения* (128) *по по начальным условиям необходимо, чтобы все корни*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \tag{158}$$

*характеристического уравнения при любом $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N(h)$ и достаточно малых $h$ удовлетворяли неравенству*

$$|\lambda| < 1 + \tau\left(\frac{p-1}{T}\ln\frac{1}{\tau} + \varepsilon\right), \tag{159}$$

*где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная, не зависящая от $i$ и $h$, $p$ — порядок по $t$ уравнения* (125), *а $T$ — ширина полосы $0 \leqslant t \leqslant T$, в которой исследуется устойчивость.*

Доказательство. В случае нарушения условия теоремы найдутся последовательности $i_r$, $h_r$, $\varepsilon_r$ такие, что $h_r \to 0$, $\varepsilon_r \to \infty$ при $r \to \infty$ и корень $\lambda = \lambda(i_r, h_r)$ характеристического уравнения такой, что для $\lambda$ при всех $r$ $(r = 1, 2, 3 \ldots)$ выполнено неравенство, обратное неравенству (159). Не уменьшая общности, будем считать, что $\tau_r \ln\frac{1}{\tau_r}\,\varepsilon_r \to 0$ при $r \to \infty$.

Решение

$$u_{i_r}(m\tau_r,\ x) \equiv \tau_r^{p-1}\lambda^{m-q}\psi_{i_r}(x)$$

вида (142) удовлетворяет уравнению (128), краевым условиям (131) и некоторым начальным условиям, норма которых остается ограниченной при $r \to \infty$. Покажем, что

$$\| u_{i_r} \|_{S_m} \to \infty$$

при $r \to \infty$, если $m = \left[\frac{T}{\tau}\right]$ $\left(\text{где } \left[\frac{T}{\tau}\right]\text{ — целая часть числа } \frac{T}{\tau}\right)$, и устойчивость места не имеет. Для этого достаточно установить, что $\tau_r^{p-1}\lambda^{m_r} \to \infty$, когда $r \to \infty$ $\left(m_r = \frac{T}{\tau_r}\right)$.

При проведении необходимых оценок воспользуемся равенством $(1+z)^{\frac{1}{z}} = e + O(z)$, имеющим место при малых $z$.

$$|\tau_r^{p-1}|\lambda|^{m_r} > \tau_r^{p-1}\left[1 + \tau_r\left(\frac{p-1}{T}\ln\frac{1}{\tau_r} + \varepsilon_r\right)\right]^{m_r} =$$

$$= \tau_r^{p-1}\left(e + O\left(\tau_r \ln\frac{1}{\tau_r}\right)\right)^{(p-1)\ln\frac{1}{\tau_r} + T\varepsilon_r} \geqslant$$

$$\geqslant \tau_r^{p-1} e^{(p-1)\ln\frac{1}{\tau_r} + \varepsilon_r T}\left(1 + O\left(\tau_r \ln\frac{1}{\tau_r}\right)\right)^{(p-1)\ln\frac{1}{\tau_r} T\varepsilon_r} =$$

$$= e^{T\varepsilon_r}(1 + O(1)) \to \infty$$

при $r \to \infty$.

Теорема 12 доказана.

Из доказанной теоремы следует, что уравнение примера 36 неустойчиво.

**2.** Достаточный признак устойчивости. В следующей теореме 13 мы укажем достаточный признак устойчивости разностного уравнения по начальным условиям.

Теорема 13. *Уравнение* (128) *устойчиво по начальным условиям, если существуют положительные постоянные* $C_1$, $C_2$, $C_3$ *и* $C_4$, $C_4 < 1$, *не зависящие от* $h$ *и от* $i$ $(i = 1, 2, \ldots, N(h))$, *такие, что для корней* (158) *при всех достаточно малых* $h$ *выполнены следующие условия:*

1) *все корни* (158) *лежат на комплексной плоскости в круге*

$$|\lambda| < 1 + C_1\tau;$$

2) *в круге* $|1 - \lambda| < C_2$ *лежат не более* $p$ *корней* (158).

3) *для любых двух корней* $\lambda_l$ *и* $\lambda_r$, *лежащих вне круга* $|\lambda| < C_4$, *выполнено неравенство*

$$|\lambda_l - \lambda_r| \geqslant C_3(|\lambda_l - 1| + |\lambda_r - 1|).$$

Условия 1)—3) означают, что корни характеристического уравнения не должны существенно выходить за пределы единичного круга $|\lambda| < 1$ и что они могут сближаться между собой только в круге $|\lambda| < C_4 < 1$ или в точке $\lambda = 1$, где число сближающихся корней не должно превосходить $p$ — порядка по $t$ дифференциального уравнения (125), причем каждые два корня не должны сближаться между собой быстрее, чем они приближаются к единице.

Существенность первого условия теоремы 13 следует из теоремы 12. Ниже будут приведены примеры, показывающие, что от двух других условий теоремы 13 также нельзя отказаться.

Доказательство. В случае выполнения условий теоремы, не ограничивая общности, можно считать, что существует положительная постоянная $C_5$ такая, что

$$|\lambda_l - \lambda_r| > C_5, \tag{160}$$

если $|\lambda_l| \leqslant C_4$, а $|\lambda_r| > C_4$; этого всегда можно добиться, заменяя постоянную $C_4$ несколько большей.

Мы проверим, что условия теоремы обеспечивают выполнение неравенства (148) с постоянной $A$, зависящей только от $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и $C_5$.

Фиксируем номер $i$ уравнения (143) и параметр $h$ сетки и будем обозначать решение $v_{i,k}^{(h)}$ задачи (143), (147) просто $v_k$. Рассмотрим сначала случай, когда корни (158) различны. Введем функции $w^k(m\tau)$:

$$w^k(m\tau) = \frac{\tau^{\tilde{k}}}{\prod\limits_{l>r}(\lambda_l - \lambda_r)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ (\lambda_1 - 1)^1 & \ldots & (\lambda_q - 1)^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ (\lambda_1 - 1)^{k-1} & \ldots & (\lambda_q - 1)^{k-1} \\ \lambda_1^m & \ldots & \lambda_q^m \\ (\lambda_1 - 1)^{k+1} & \ldots & (\lambda_q - 1)^{k+1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ (\lambda_1 - 1)^{q-1} & \ldots & (\lambda_q - 1)^{q-1} \end{vmatrix}, \tag{161}$$

$$\left(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ q-1; \qquad \tilde{k} = \min(k,\ p-1)\right).$$

функции (161) являются решениями уравнения (143), как линейные комбинации решений $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_q^m$ вида (157). Можно проверить, используя равенство $\Delta^r f(0) = (\lambda - 1)^r$ (где $f(m\tau) \equiv \lambda^m$), которое доказывается индукцией по $r$, что $\tau^{-\widetilde{k}} \Delta_t^r w^k(0) = \delta_{r,k}$ ($r = 0, 1, \ldots, q-1$; $k = 0, 1, \ldots \ldots, q-1$). Отсюда следует, что решение $v_k$ уравнения (143), удовлетворяющее условиям (147), в случае $k \leqslant p-2$ совпадает с решением $w^k$, а в случае $k \geqslant p-1$ является линейной комбинацией решений $w^k, w^{k+1}, \ldots, w^{q-1}$ с коэффициентами, зависящими только от $k$, $p$ и $q$, но не зависящими от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ и от $h$. Таким образом, достаточно показать, что функции (161) на отрезке $0 \leqslant m\tau \leqslant T$ ограничены постоянной, зависящей только от $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и $C_5$. К этому мы и переходим.

Обозначим остаток от деления многочлена $\lambda^m$ на многочлен $(\lambda - 1)^{\widetilde{k}}$ через $R_{\widetilde{k}}^{(m)}(\lambda)$. Вычтем из элементов $\lambda_i^m$, стоящих в $(k+1)$-й строке определителя (161), многочлены $R_{\widetilde{k}}^{(m)}(\lambda_j)$. Определитель от этого не изменится, так как это равносильно вычитанию из $(k+1)$-й строки некоторой линейной комбинации предыдущих строк. Получим

$$w^k(m\tau) = \frac{\tau^{\widetilde{k}}}{\prod\limits_{l>r}(\lambda_l - \lambda_r)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ (\lambda_1-1)^1 & \ldots & (\lambda_q-1)^1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\lambda_1-1)^{k-1} & \ldots & (\lambda_q-1)^{k-1} \\ (\lambda_1-1)^{\widetilde{k}} Q(\lambda_1) & \ldots & (\lambda_q-1)^{\widetilde{k}} Q(\lambda_q) \\ (\lambda_1-1)^{k+1} & \ldots & (\lambda_q-1)^{k+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\lambda_1-1)^{q-1} & \ldots & (\lambda_q-1)^{q-1} \end{vmatrix}, \quad (162)$$

где многочлен $\widetilde{Q}(\lambda)$ определяется равенством

$$(\lambda - 1)^{\widetilde{k}} Q(\lambda) \equiv \lambda^m - R_{\widetilde{k}}^m(\lambda).$$

Обозначим те корни (158), которые лежат внутри круга $|\lambda| < C_4 < 1$, через $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \ldots, \lambda_{r_s}$. Представим правую часть равенства (162) в виде суммы двух слагаемых $w_1^k$ и $w_2^k$, первое из которых получится, если заменить элементы

$(k+1)$-й строки, которые соответствуют корням $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \ldots$ $\ldots, \lambda_{r_s}$, нулями, а второе, если сохранить в $(k+1)$-й строке те элементы, которые содержат $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \ldots, \lambda_{r_s}$, а остальные элементы этой строки заменить нулями. Оценим в отдельности $w_1^k$ и $w_2^k$ по модулю и докажем их ограниченность.

Разложим определитель, входящий в выражение функции $w_1^k(m\tau)$, по элементам $(k+1)$-й строки:

$$w_1^k(m\tau) = \sum_{j \neq r_1, r_2, \ldots, r_s} \frac{\tau^{\tilde{k}}}{\prod\limits_{l>r}(\lambda_l - \lambda_r)} (\lambda_j - 1)^{\tilde{k}} Q(\lambda_j) A_{k+1,j}, \tag{163}$$

где $A_{k+1,j}$ — алгебраическое дополнение элемента $(\lambda_j - 1)^{\tilde{k}} Q(\lambda_j)$ в определителе (162). Покажем, что каждое слагаемое в правой части (163) ограничено по модулю постоянной, зависящей только от $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и $C_5$.

Для коэффициентов $b_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-k)$ многочлена $Q(\lambda)$ справедлива оценка

$$|b_i| < D_1 m^{\tilde{k}-1}, \tag{164}$$

где постоянная $D_1$ не зависит от $m$. Неравенство (164) следует из того, что многочлен $Q(\lambda)$ совпадает с той частью разложения функции $\lambda^m (\lambda - 1)^{-\tilde{k}}$ в ряд по целым степеням $\lambda$, которая состоит из неотрицательных степеней $\lambda$:

$$Q(\lambda) \equiv \frac{1}{(\tilde{k}-1)!} \sum_{s=0}^{m-\tilde{k}} (s+1)(s+2) \ldots (s+\tilde{k}-1) \lambda^{m-\tilde{k}-s}.$$

Число слагаемых, входящих в $Q(\lambda)$, меньше $m+2$, а величина $|\lambda_j|^m$ не превосходит $e^{C_1 T}$ в силу первого условия теоремы, так как $m \leqslant \frac{T}{\tau}$. Поэтому

$$|\tau^{\tilde{k}} Q(\lambda_j)| < \tau^{\tilde{k}} D_1 m^{\tilde{k}-1} (m+2) e^{C_1 T} \leqslant D_1 (T^{\tilde{k}} + 2\tau T^{\tilde{k}-1}) e^{C_1 T} \leqslant D_2. \tag{165}$$

Очевидно,

$$\left.\begin{aligned} A_{k+1,j} &= \prod_{l>r,\ l\neq j,\ r\neq j} (\lambda_l - \lambda_r) R(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{j-1}, \tilde{\lambda}_{j+1}, \ldots, \tilde{\lambda}_q), \\ \tilde{\lambda} &= \lambda - 1, \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

где $R$ есть многочлен по $\tilde{\lambda}$. Поскольку $A_{k+1,j}$ есть однородный многочлен по $\tilde{\lambda}$ степени $\frac{1}{2}(q-1)q-k$, а произведение $\prod(\lambda_l-\lambda_r)$, входящее в (166), есть однородный многочлен степени $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$, то $R$ есть однородный многочлен степени $q-k-1$. Аналогичное рассуждение показывает, что $R$ есть многочлен первой степени по каждому из своих аргументов. Учитывая (166) и (165), можно оценить соответствующее слагаемое в правой части (163) по модулю величиной

$$D_2\left|\frac{\tilde{\lambda}_j^{\tilde{k}}R}{(\lambda_1-\lambda_j)(\lambda_2-\lambda_j)\ldots(\lambda_{j-1}-\lambda_j)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\ldots(\lambda_q-\lambda_j)}\right|. \tag{167}$$

Выражение под знаком абсолютной величины (167) распадается на слагаемые вида

$$a\frac{\tilde{\lambda}_j^{\tilde{k}}\tilde{\lambda}_{s_1}\tilde{\lambda}_{s_2}\ldots\tilde{\lambda}_{s_{q-k-1}}}{(\lambda_1-\lambda_j)(\lambda_2-\lambda_j)\ldots(\lambda_{j-1}-\lambda_j)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\ldots(\lambda_q-\lambda_j)} \tag{168}$$

($s_l\neq s_r$, если $l\neq r$), где постоянная $a$ и число слагаемых вида (168) не зависят от $m$. Если $\lambda_j$ лежит вне круга $|\lambda-1|<C_2$, то в силу третьего условия теоремы и неравенства (160) знаменатель (168) превосходит по модулю постоянную $D_3$, $D_3=\min[(C_2C_3)^{q-1}, C_5^{q-1}]$, и слагаемое (168) ограничено. Пусть $\lambda_j$ лежит в круге $|\lambda-1|<C_2$. Будем считать, что число $C_2$ с самого начала выбрано настолько малым, что этот круг не пересекается с кругом $|\lambda|<C_4$. Пусть $\lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}, \ldots, \lambda_{l_{p'}}$ — остальные корни, лежащие в круге $|\lambda-1|<C_2$; по второму предположению теоремы $p'\leqslant p-1$. В силу третьего условия теоремы для $l=l_1, l_2, \ldots, l_{p'}$ имеем

$$|\lambda_l-\lambda_j|\geqslant C_3|\tilde{\lambda}_l|; \qquad |\lambda_l-\lambda_j|\geqslant C_3|\tilde{\lambda}_j|. \tag{169}$$

Среди чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{q-k-1}$ (см. числитель (168)) и чисел $l_1, l_2, \ldots, l_{p'}$ не меньше чем $p'-k$ общих, так как натуральные числа, составляющие каждую из этих групп, все различны и могут принимать лишь $q-1$ значений $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, q$. Пусть для определенности $l_1=s_1$, $l_2=s_2$, $\ldots$, $l_{p'-k}=l_{p'-k}$. Заменим каждую из скобок $(\lambda_{s_1}-\lambda_j)$, $(\lambda_{s_2}-\lambda_j)$, $\ldots$, $(\lambda_{s_{p'-k}}-\lambda_j)$ в знаменателе (168) правой частью первого неравенства (169), написанного соответственно для $l=s_1, s_2, \ldots, s_{p'-k}$. Число скобок $(\lambda_l-\lambda_j)$ $(l=l_{p'-k+1}, l_{p'-k+2}, \ldots, l_{p'})$ не превосходит $\tilde{k}=\min(k, p-1)$. Заменим каждую из этих скобок правой частью второго неравенства (169). Модуль выражения (168) от этого может лишь увеличиться. После сокращения дроби, получившейся из (168) в результате описанной замены множителей $(\lambda_l-\lambda_j)$ $(l=l_1, l_2, \ldots, l_{p'})$, входящих в знаменатель, в знаменателе останутся лишь множители, которые в силу третьего условия теоремы или в силу неравенства (160) превосходят по модулю соответственно $C_2C_3$ или $C_5$. Итак, дробь (168) ограничена по модулю, и наше утверждение относительно функции (163) доказано.

Докажем ограниченность модуля функции $w_2^k(m\tau)$. Разложим для этого определитель, входящий в выражение $w_2^k$, по минорам порядка $s$, составленным из элементов столбцов $r_1, r_2, \ldots, r_s$. Алгебраическое дополнение любого из этих миноров не зависит от $m$. Из этого алгебраического дополнения можно выделить множитель

$$\prod(\lambda_l-\lambda_r)(l>r,\ l\neq r_1, r_2, \ldots, r_s;\ r\neq r_1, r_2, \ldots, r_s). \quad (170)$$

Рассмотрим теперь сами миноры. В каждом из них от $m$ зависит не более одной строки. Вычтем первый столбец минора из всех остальных столбцов. После этого из 2-го, 3-го и т. д. столбцов можно вынести множители $(\lambda_{r_2}-\lambda_{r_1})$, $(\lambda_{r_3}-\lambda_{r_1})$, $\ldots$, $(\lambda_{r_s}-\lambda_{r_1})$. В столбце $r_l$ в той строке, которая зависит от $m$, после этого будет стоять выражение вида

$$\sum_{j=0}^{m-1} b'_{j+1}\sum_{i=0}^{j}\lambda_{r_1}^i\lambda_{r_0}^{j-i}, \quad (171)$$

где коэффициенты $b'_j$ оцениваются в силу (164) величиной $D_4m^{\tilde{k}-1}$; $D_4$ зависит только от $C_2$. Внутренняя сумма (171) ограничена по модулю независимо от $j$, так как ее члены не превосходят по модулю членов геометрической прогрессии $\sum_{i=0}^{\infty}C_4^i$. Таким образом, выражение (171) ограничено по модулю величиной $D_5m^{\tilde{k}}$, где $D_5$ зависит только от $C_2$ и $C_4$.

Вычитая из 3-го, 4-го и т. д. столбцов определителя, получившегося после первого преобразования минора, второй столбец, можно вынести затем из 3-го, 4-го и т. д. столбцов соответственно множители $(\lambda_{r_3}-\lambda_{r_2})$, $(\lambda_{r_4}-\lambda_{r_2})$, ..., $(\lambda_{r_s}-\lambda_{r_2})$. Элементы строки, зависящей от $m$, оцениваются по модулю величиной $D_6 m^{\widetilde{k}}$, где $D_6$ не зависит от $m$. Продолжая процесс, мы выделим в результате из минора произведение

$$\prod (\lambda_{r'}-\lambda_{r''}), \tag{172}$$

где $r' > r''$ и индексы $r'$ и $r''$ пробегают значения $r_1, r_2, \ldots, r_s$ независимо друг от друга. Элементы той строки определителя, оставшегося после выделения множителя (172), которая зависит от $m$, оцениваются по модулю величиной вида $Dm^{\widetilde{k}}$, а остальные элементы ограничены. Следовательно, оценка вида $Dm^{\widetilde{k}}$, быть может, с большей постоянной $D$, имеет место и для всего определителя. После сокращения выражений (170) и (172) с произведением $\prod\limits_{l>r}(\lambda_l-\lambda_r)$, входящим в знаменатель выражения $w_2^k$, в знаменателе останутся лишь множители, которые в силу (160) превосходят $C_5$. Учитывая оценку $Dm^{\widetilde{k}}$ для определителя, а также множитель $\tau^{\widetilde{k}}$ и то, что $m \leqslant \frac{T}{\tau}$, мы убеждаемся, что функция $w_2^k(m\tau)$ ограничена по модулю постоянной, зависящей только от $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и $C_5$ (при фиксированном $T$).

Таким образом, ограниченность функций (161), а вместе с тем и теорема, доказаны для случая, когда среди корней (158) нет кратных. Справедливость неравенства (148) в общем случае устанавливается предельным переходом от случая, когда все корни (158) различны. Предельный переход возможен потому, что постоянная $A$ в неравенстве (148), как мы установили, зависит от $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и $C_5$, но не от степени близости корней (158) друг к другу. Теорема доказана.

Первое условие теоремы 13 нельзя существенно ослабить, как следует из примера 36 гл. 3 и теоремы 12. Следующий пример 40 показывает, что выполнение второго условия теоремы 13 не следует из того, что уравнение (128) аппроксимирует уравнение (125) и что от этого условия нельзя отказаться.

Пример 40. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, $u(0, x)=\varphi(x)$, заменим на сетке в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ разностным уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_h[(m+2)\tau, nh]-u_h(m\tau, nh)}{2\tau}= \\ &=-\Delta_t \frac{u_h[m\tau,(n+1)h]-2u_h(m\tau, nh)+u_h[m\tau,(n-1)h]}{h^2}; \\ &\qquad u_h(m\tau, 0)=u_h(m\tau, \tilde{N}h)=0, \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

где $\Delta_t f(m\tau)=f[(m+1)\tau]-f(m\tau)$, $\tilde{N}$—целое число и $\tilde{N}h=1$. Здесь $p=1$ и $q=2$. В качестве ортонормальной системы функций (139) и базиса (140) при скалярном умножении

$$(\varphi, \psi)_h=h\{\varphi(h)\psi(h)+\varphi(2h)\psi(2h)+\ldots \\ \ldots+\varphi[(\tilde{N}-1)h]\psi[(\tilde{N}-1)h]\}$$

служит система (79)

$$\psi_l^{(h)}(nh)=c_l \sin\frac{l\pi n}{\tilde{N}} \qquad (l=1, 2, \ldots, \tilde{N}-1).$$

Для корней $\lambda$, полагая $4\tau=h^2$ и учитывая (79), имеем

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2\sin^2\frac{l\pi}{2\tilde{N}}-1.$$

При $l=\tilde{N}-1$ корень $\lambda_2 \to \lambda_1=1$, когда $h \to 0$ $(\tilde{N}\to\infty)$. Первое и третье условия теоремы 13 выполнены, второе не выполнено. Можно проверить, что функция

$$u_h(m\tau, nh)=(-1)^n \frac{1-\cos^m\frac{\pi}{\tilde{N}}}{2\sin^2\frac{\pi}{2\tilde{N}}}\sin\frac{n\pi}{\tilde{N}}$$

$$\left(n=0, 1, \ldots, \tilde{N};\ m=0, 1, \ldots;\ m\tau \leqslant T\right)$$

является неограниченным при $h \to 0$ решением уравнения (173), которое удовлетворяет ограниченным начальным условиям

$$\Delta_t^0 u_h(0, nh) \equiv u_h(0, nh)=0,$$

$$\Delta_t^0 u_h(\tau, nh) \equiv u_h(\tau, nh)=(-1)^n \sin\frac{n\pi}{\tilde{N}}.$$

Устойчивость места не имеет.

Следующий пример 41 показывает, что нельзя освободиться от третьего условия теоремы, которое исключает сближение корней (158) где-либо вне круга $|\lambda| < C_4 < 1$, кроме точки $\lambda = 1$.

Пример 41. Рассмотрим на сетке в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ уравнение (6) при $f \equiv 0$ и $\tau = h$ с краевыми условиями $u_h(m\tau,\ 0) = u_h(m\tau,\ 1) = 0$; $\tilde{N}h = 1$. Тогда, учитывая (79), имеем $\lambda_1 = e^{\frac{i\pi l}{N}}$, $\lambda_2 = e^{-\frac{i\pi l}{N}}$ $(l = 1,\ 2,\ \ldots,\ \tilde{N} - 1)$. Первое и второе условия теоремы 13 выполнены. При $l = \tilde{N} - 1$ имеем $\lambda_1 = e^{i\left(\pi - \frac{1}{\tilde{N}}\right)}$, $\lambda_2 = e^{-i\left(\pi - \frac{1}{\tilde{N}}\right)}$, следовательно, при $h \to \infty$ $(\tilde{N} \to \infty)$ получим $\lambda_1 \to -1$, $\lambda_2 \to -1$. Можно проверить, что неограниченная при $h \to \infty$ функция

$$u_h(m\tau,\ nh) = (-1)^{m+n} \frac{2 \sin \frac{(2m-1)\pi}{2\tilde{N}} \cos \frac{\pi}{2\tilde{N}} \sin \frac{n\pi}{\tilde{N}}}{\sin \frac{\pi}{\tilde{N}}}$$

удовлетворяет разностному уравнению (6) при $f \equiv 0$, граничным условиям

$$u_h(m\tau,\ 0) = u_h(m\tau,\ \tilde{N}h) = 0$$

и ограниченным начальным условиям

$$u_h(0,\ nh) = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{\tilde{N}}, \qquad \frac{\Delta_t u_h(0,\ nh)}{\tau} = 0.$$

Устойчивость не имеет места.

## § 15. Построение устойчивых по начальным условиям разностных уравнений, аппроксимирующих некоторые дифференциальные уравнения

В § 15 приведены примеры использования результатов §§ 13 и 14 для построения устойчивых по начальным условиям и правым частям разностных уравнений, аппроксимирующих некоторые дифференциальные уравнения математической физики.

Для выбора скалярного произведения $(\psi_1, \psi_2)_h$ (стр. 100), при котором удается доказать существование ортогональной системы функций (139) и системы функций (140), удовлетворяющих условиям (141), во всех рассматриваемых ниже случаях используется признак самосопряженности разностных операторов (§ 6, п. 3) и следующая теорема, известная из курса линейной алгебры.

Теорема 14. *Пусть $\Psi$ — конечномерное вещественное пространство векторов $\psi$, в котором определено скалярное произведение $[\psi_1, \psi_2]$. Пусть* A *и* B — *самосопряженные линейные операторы, определенные на $\Psi$, причем $[B\psi, \psi] > 0$, если $\psi \neq 0$. Введем в $\Psi$ новое скалярное произведение $(\psi_1, \psi_2)$, положив*

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv [B\psi_1, \psi_2].$$

*Тогда существует система собственных векторов (с вещественными собственными значениями $\rho$) задачи $A\psi = \rho B\psi$, образующая ортонормальный в смысле скалярного произведения $(\psi_1, \psi_2)$ базис пространства $\Psi$.*

Доказательство. Для случая, когда B — единичное преобразование, доказательство см. [6], стр. 142. В общем случае положим $B^{\frac{1}{2}}\psi = \eta$. Тогда уравнение $A\psi = \rho B\psi$ примет вид $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\eta = \rho\eta$, причем $B^{-\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ самосопряженный оператор, так что получим уже рассмотренный случай. Учитывая, что

$$[\eta_1, \eta_2] = [B^{\frac{1}{2}}\psi_1, B^{\frac{1}{2}}\psi_2] = [B\psi_1, \psi_2] = (\psi_1, \psi_2),$$

убеждаемся в справедливости теоремы.

1. Аппроксимация параболического уравнения. Для параболического уравнения и краевых условий (см. [25], [26])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + b(x)u - \frac{\partial}{\partial t}[c(x)u] = 0, \\ &u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \qquad a(x) > 0; \qquad c(x) \geqslant c_0 > 0, \end{aligned}\right\} \quad (174)$$

рассмотрим на сетке $t = m\tau$, $x = nh\,(m = 0, 1, \ldots; n = 0, 1, \ldots, N+1;\ (N+1)h = 1)$ разностные аппроксимации

$$\mathrm{R}_{h0}u_h(t, x) - c(x)\,\frac{u_h(t+\tau, x) - u_h(t, x)}{\tau} = 0, \tag{175}$$

$$\mathrm{R}_{h0}u_h(t, x) - c(x)\,\frac{u_h(t, x) - u_h(t-\tau, x)}{\tau} = 0, \tag{176}$$

$$\mathrm{R}_{h0}u_h(t, x) - c(x)\,\frac{3u_h(t, x) - 4u_h(t-\tau, x) + u_h(t-2\tau, x)}{2\tau} = 0, \tag{177}$$

где

$$\mathrm{R}_{h0}u_h(t, x) = \frac{1}{h^2}\Big[a\left(x + \frac{h}{2}\right)(u_h(t, x+h) - u_h(t, x)) - {}$$
$$- a\left(x - \frac{h}{2}\right)(u_h(t, x) - u_h(t, x-h))\Big] + b(x)\,u_h(t, x). \tag{178}$$

Краевые условия $u_h(t, 0) = u_h(t, 1) = 0$ сохраним для всех трех разностных уравнений. Будем искать решения уравнений (175), (176), (177) вида $u_h(m\tau, nh) = v(m\tau)\,\psi(nh)$, где $\psi$ удовлетворяет краевым условиям $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Для $\psi$ получим уравнение

$$\mathrm{R}_{h0}\psi = \rho\mathrm{R}_{h1}\psi, \tag{179}$$

где $\mathrm{R}_{h1}\psi(nh) = c(nh)\,\psi(nh)$.

Пространство функций $\Psi^{(h)}$ в этом случае состоит из всех функций, определенных в точках $x = nh$ $(n = 0, 1, \ldots, N+1)$ и равных нулю при $n = 0$ и $n = N+1$. Множество $G_h^0$ состоит из точек $x = nh$ $(n = 1, \ldots, N)$. Операторы $\mathrm{R}_{h0}$ и $\mathrm{R}_{h1}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 14, если скалярное произведение $[\psi_1, \psi_2]$ определено равенством

$$[\psi_1, \psi_2] = h\,\{\psi_1(h)\,\psi_2(h) + \ldots + \psi_1(Nh)\,\psi_2(Nh)\}$$

и в качестве B выбран оператор $\mathrm{R}_{h1}$. Самосопряженность $\mathrm{R}_{h0}$ и $\mathrm{R}_{h1}$ проверяется с помощью признака самосопряженности операторов (§ 6, п. 3); положительная определенность $\mathrm{R}_{h1}$ следует из $c > 0$. Поэтому существует система собственных функций $\psi_1^{(h)}, \psi_2^{(h)}, \ldots, \psi_N^{(h)}$ задачи (179), ортонормальная в смысле скалярного произведения

$$(\psi_1, \psi_2)_h \equiv [\mathrm{R}_{h1}\psi_1, \psi_2] = h\sum_{n=1}^{N} c(nh)\,\psi_1(nh)\,\psi_2(nh). \tag{180}$$

Очевидно, что для скалярного произведения (180) выполнено требование (135), а именно, для всякой непрерывной функции $\varphi(x)$ имеем

$$\lim_{h\to 0}(\tilde{\varphi},\ \tilde{\varphi})_h=\int_0^1 \varphi^2(x)\,c(x)\,dx.$$

Нормы (136) и (137) введем с помощью скалярного произведения (180). За базис (139) примем ортонормальную в смысле скалярного произведения (180) систему собственных функций $\psi_1^{(h)}, \ldots, \psi_N^{(h)}$ задачи (179). Роль базиса (140) будет играть система функций $\tilde{\psi}_i^{(h)} \equiv \mathrm{R}_{h1}\psi_i^{(h)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Линейная независимость системы функций $\tilde{\psi}_i^{(h)}$ имеет место в силу замечания 2 из § 12, роль $\mathrm{R}_{hl}$ здесь играет, например, $\mathrm{R}_{h1}$.

Собственные числа $\rho$ задачи (179) вещественны и совпадают с собственными числами задачи $c^{-1}\mathrm{R}_{h0}\psi=\rho\psi$. Поэтому в силу (178) и результатов § 6, п. 2 справедливы неравенства

$$[-4h^{-2}\max a-\max|b|]\,[\min c]^{-1}\leqslant\rho\leqslant\max|b|\,[\min c]^{-1}. \tag{181}$$

Числа $\rho_{0i}^{(h)}$ в равенствах (141), написанных при $k=0$, совпадают с собственными числами $\rho$ задачи (179) и для них выполнены неравенства (181). Числа $\rho_{1i}^{(h)}$ в равенствах (141) все равны 1. Уравнение (143), написанное для уравнений (175), (176), (177), имеет соответственно следующий вид:

$$\rho_{0i}v_i(t)-\tau^{-1}\,[v_i(t+\tau)-v_i(t)]=0, \tag{182}$$

$$\rho_{0i}v_i(t)-\tau^{-1}\,[v_i(t)-v_i(t-\tau)]=0, \tag{183}$$

$$\rho_{0i}v_i(t)-(2\tau)^{-1}\,[3v_i(t)-4v_i(t-\tau)+v_i(t-2\tau)]=0. \tag{184}$$

(Индекс $(h)$ мы опускаем.) В силу второго неравенства (181) при достаточно малых $h$ (а следовательно, и $\tau$) выполнены условия теоремы 9, что доказывает однозначную разрешимость уравнений (175), (176) и (177) при заданных начальных условиях.

Впрочем, для уравнения (175) однозначная разрешимость непосредственно очевидна, и нет нужды пользоваться теоремой 9. Используя второе неравенство (181), легко проверить также, что для уравнений (175), (176) и (177) выполнены условия теоремы 11. При этом роль $R_{hl}$ в этой теореме играет $R_{h1}$, а норму $\|f\|^{(m)}$ можно ввести, например, равенством

$$\|f\|^{(m)} = \sqrt{(f, f)_h} \qquad (f = f(m\tau, x)).$$

Характеристические уравнения для уравнений (182), (183) и (184) имеют вид соответственно

$$\rho_{0i} - \tau^{-1}(\lambda - 1) = 0, \quad \rho_{0i}\lambda - \tau^{-1}(\lambda - 1) = 0,$$
$$\rho_{0i}\lambda^2 - (2\tau)^{-1}(3\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0.$$

Исследуя расположение корней этих уравнений на комплексной плоскости $\lambda$, принимая во внимание неравенства (181), можно установить, что все условия теоремы 13 выполнены для первого из этих уравнений при следующем соотношении шагов $\tau$ и $h$ сетки

$$\tau \leqslant \frac{1}{2} \min c\, [\max a]^{-1} h^2,$$

а для двух других — при произвольном соотношении шагов. Таким образом, уравнение (145) устойчиво по начальным условиям при указанном соотношении шагов сетки, а уравнения (146) и (147) — при произвольном соотношении шагов.

Порядок аппроксимации уравнения (174) уравнениями (175), (176) и (177) есть соответственно $O(h^2)$, $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$. Поэтому увеличение шага $\tau$ в уравнении (176) (по сравнению с уравнением (175)) до $\tau = h$ хотя и не нарушает устойчивости, но понижает порядок аппроксимации. Увеличение шага $\tau$ до значения $\tau = h$ в случае уравнения (177) не нарушает устойчивости и не понижает порядка аппроксимации.

**2. Аппроксимация гиперболического уравнения.** Для гиперболического уравнения и краевых условий

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + b(x)\,u - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[c(x)\,u] = 0, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \tag{185}$$

рассмотрим на сетке две разностные аппроксимации

$$R_{h0}u_h(t,\ x)-c(x)\,\frac{u_h(t+\tau,\ x)-2u_h(t,\ x)+u_h(t-\tau,\ x)}{\tau^2}=0, \tag{186}$$

$$\frac{R_{h0}u_h(t+\tau,\ x)+R_{h0}(t-\tau,\ x)}{2}-\\-c(x)\,\frac{u_h(t+\tau,\ x)-2u_h(t,\ x)+u_h(t-\tau,\ x)}{\tau^2}=0, \tag{187}$$

где $R_{h0}$ определяется равенством (178). Краевые условия $u_h(t,\ 0)=u_h(t,\ 1)=0$ сохраним для обоих уравнений (186) и (187). Разделяя переменные как при рассмотрении уравнения (176), придем к тому же уравнению (179) для $\psi$. Функции (139), (140), скалярное произведение (180) и нормы (136), (137) те же, что и при рассмотрении уравнения (176). Уравнение (143) для уравнений (186) и (187) примет соответственно следующий вид:

$$\rho_{0i}v_i(t)-\tau^{-2}[v_i(t+\tau)-2v_i(t)+v_i(t-\tau)]=0, \tag{188}$$

$$\rho_{0i}\,\frac{v_i(t+\tau)+v_i(t-\tau)}{2}-\frac{v_i(t+\tau)-2v_i(t)+v_i(t-\tau)}{\tau^2}=0. \tag{189}$$

Выполнение условий теорем 9 и 11 проверяется, как в п. 1 этого параграфа. Характеристические уравнения для (188), (189) имеют соответственно вид

$$\rho_{0i}\lambda-\tau^{-2}(\lambda^2-2\lambda+1)=0, \tag{190}$$

$$\rho_{0i}\,\frac{\lambda^2+1}{2}-\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\tau^2}=0. \tag{191}$$

Для (190) имеем $\lambda_{1,2}=\frac{2+\tau^2\rho_{0i}}{2}\pm\sqrt{\tau^2\rho_{0i}+\frac{\tau^4\rho_{0i}^2}{4}}$. Если $\rho_{0i}>0$, то в силу второго неравенства (181) найдется постоянная $C_1$ такая, что $|\lambda|<1+C_1\tau$. При этом корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ лежат на вещественной оси по разные стороны от точки $\lambda=1$. Если $\rho_{0i}<0$, то в случае $4+\tau^2\rho_{0i}>0$ дискриминант уравнения (190) отрицателен, и корни $\lambda$ равны по модулю 1, так как они комплексно сопряженные и $\lambda_1\lambda_2=1$ в силу теоремы Виета. В силу первого неравенства (181), для того чтобы было $4+\tau^2\rho_{0i}>0$, достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение между $\tau$ и $h$:

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)^2<[\max a]^{-1}\min c-\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная, благодаря наличию которой исключено сближение корней $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в точке $\lambda = -1$, если $h$ достаточно мало. Все условия теоремы 13 выполнены.

Для корней уравнения (191) все условия теоремы 13 выполнены при произвольном соотношении шагов сетки. Порядок аппроксимации уравнения (185) уравнениями (186) и (187) в обоих случаях $O(\tau^2 + h^2)$.

Отметим, что нормы (136) и (137), введенные с помощью скалярного умножения (180), эквивалентны нормам, введенным с помощью скалярного умножения

$$(\psi_1, \psi_2)_h = h\{\psi_1(h)\psi_2(h) + \psi_1(2h)\psi_2(2h) + \ldots \\ \ldots + \psi_1(Nh)\psi_2(Nh)\}.$$

Результаты, изложенные в пп. 1 и 2, изменятся лишь несущественно, если число пространственных переменных больше одного.

**3. Аппроксимация уравнения типа С. Л. Соболева.** Для уравнения типа С. Л. Соболева [39], [5] и краевого условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \text{ на } D = G \times [0 \leqslant t \leqslant T], \quad u\big|_{\Gamma_{\text{бок}}} = 0 \tag{192}$$

(где $G$ — ограниченная область переменных $x, y$ с границей $\gamma$ и $\Gamma_{\text{бок}}$ — боковая поверхность цилиндра $D$) рассмотрим аппроксимацию

$$R_{h0}u_h(x, y, t) + \\ + \frac{R_{h2}u_h(t+\tau, x, y) - 2R_{h2}u_h(t, x, y) + R_{h2}u_h(t-\tau, x, y)}{\tau^2} = 0 \tag{193}$$

$$\text{на } D_h^0 = G_h^0 \times [\tau \leqslant m\tau \leqslant T - \tau];$$

$$u_h = 0 \text{ на } \Gamma_{h\,\text{бок}} = \gamma_h \times [0 \leqslant m\tau \leqslant T].$$

Здесь

$$R_{h0}u_h(t, x, y) = \frac{u_h(t, x+h, y) - 2u_h(t, x, y) + u_h(t, x-h, y)}{h^2},$$

$$R_{h2}u_h(t, x, y) = \frac{u_h(t, x+h, y) + u_h(t, x, y+h)}{h^2} + \\ + \frac{u_h(t, x-h, y) + u_h(t, x, y-h) - 4u_h(t, x, y)}{h^2}.$$

К $G_h$ относятся все те точки сетки $(x, y)$, которые принадлежат $G+\gamma$; к $G_h^0$ относятся те точки $(x, y)$, принадлежащие $G_h$, для которых все четыре «соседние» точки $(x \pm h, y \pm h)$ тоже принадлежат $G_h$. Множество $\gamma_h$ определяется равенством $\gamma_h = G_h - G_h^0$.

Пространство $\Psi^{(h)}$ состоит в данном случае из всех функций $\psi(x, y)$, определенных на $G_h$ и равных нулю на $\gamma_h$. Для того чтобы выбрать скалярное произведение в $\Psi^{(h)}$ и построить систему функций (139), будем искать решения вида: $u_h(x, y, t) = \psi(x, y)\, v(t)$. Для $\psi(x, y)$ получим уравнение

$$\mathrm{R}_{h2}\psi = \rho \mathrm{R}_{h0}\psi, \qquad \psi|_{\gamma_h} = 0. \tag{194}$$

Для функций $\psi$ из $\Psi^{(h)}$ имеют место неравенства

$$-[\mathrm{R}_{h0}\psi, \psi] \geqslant K[\psi, \psi], \tag{195}$$

$$[\mathrm{R}_{h0}\psi, \mathrm{R}_{h0}\psi] \geqslant K[\psi, \psi], \tag{196}$$

где $[\psi_1, \psi_2] = h^2 \sum \psi_1(ih, jh)\psi_2(ih, jh)$, суммирование распространяется по всем точкам $G_h^0$ и $K > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от диаметра области $G$. Неравенства (195) и (196) мы докажем позже независимо. Учитывая неравенство (195) и используя признак самосопряженности (§ 6, п. 3), легко проверить, что для уравнения (193) выполнены все условия теоремы 14, причем роль В играет оператор $-\mathrm{R}_{h0}$. Поэтому существует базис пространства $\Psi^{(h)}$, состоящий из собственных функций $\psi_1^{(h)}, \ldots, \psi_N^{(h)}$ задачи (194) и ортонормальный в смысле скалярного произведения

$$(\psi_1, \psi_2)_h = -[\mathrm{R}_{h0}\psi_1, \psi_2]. \tag{197}$$

Очевидно, что для скалярного произведения (197) выполнено требование (135), а именно, для всякой дважды непрерывно дифференцируемой по $x$ функции $\psi(x, y)$, удовлетворяющей условию

$$\psi|_\gamma = 0,$$

выполнено равенство

$$\lim_{h \to 0} (\tilde{\psi}, \tilde{\psi})_h = -\iint_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \psi \, dx\, dy = \iint_G \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 dx\, dy.$$

Нормы (136) и (137) введем с помощью скалярного произведения (197). За базис (139) примем ортонормальную в смысле скалярного произведения (197) систему $\psi_1^{(h)}, \ldots, \psi_N^{(h)}$ собственных функций задачи (194). Роль базиса (140) будет играть система функций

$$\tilde{\psi}_i^{(h)} \equiv R_{h0}\psi_i^{(h)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Собственные числа $\rho$ задачи (194) вещественны и удовлетворяют неравенству $\rho > 1$. Действительно, если параметр $\rho$ удовлетворяет неравенству $\rho \leqslant 1$, то решение уравнения (194) достигает максимального по абсолютной величине значения на границе $\gamma_h$ области $G_h$, что доказывается, как для разностного аналога уравнения Лапласа ([11], стр. 252), и в силу краевого условия $\psi|_{\gamma_h} = 0$ решение тождественно равно нулю. Числа $\rho_{0i}^{(h)}$ в равенствах (141) все равны 1, а числа $\rho_{2i}^{(h)}$ совпадают с собственными числами задачи (194), и поэтому $\rho_{2i}^{(h)} > 1$. Уравнение (143), составленное для (193), имеет вид

$$v_i(t) + \frac{v_i(t+\tau) - 2v_i(t) + v_i(t-\tau)}{\tau^2}\,\rho_{2i} = 0 \qquad (198)$$

(индекс $h$ мы опустили).

В силу $\rho_{2i} > 1$ при $\tau^2 < 2$ выполнены условия теоремы 9, что доказывает однозначную разрешимость уравнения (193) при заданных начальных условиях.

Проверим выполнение условий теоремы 11. В качестве $R_{hl}$ в теореме 11 возьмем $R_{h0}$ и $\|f\|^{(m)}$ определим равенством $\|f\|^{(m)} = [f, f]^{\frac{1}{2}}$. Покажем, что в нашем случае выполняется (154). Действительно, в силу неравенства Буняковского и неравенства (196) имеем

$$\|\psi\|^4 = (\psi, \psi)_h^2 = [-R_{h0}\psi, \psi]^2 \leqslant [R_{h0}\psi, R_{h0}\psi]\,[\psi, \psi] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{K}[R_{h0}\psi, R_{h0}\psi]^2 = \frac{1}{K}[f, f]^2 = \frac{1}{K}(\|f\|^{(m)})^4.$$

Выполнение неравенства (155) проверяется непосредственно.

Характеристическое уравнение для (198) будет

$$\lambda + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)\frac{\rho_{2i}}{\tau^2} = 0.$$

Учитывая $\rho_{2i} > 1$, видим, что при $\tau^2 < 2$ корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ этого квадратного уравнения комплексно-сопряженные числа с положительной вещественной частью, по модулю равные единице. Все условия теоремы 13 выполнены при любом соотношении шагов $\tau$ и $h$.

Разностное уравнение (193) устойчиво по начальным условиям.

Докажем неравенства (195), (196). Установим для этого, что

$$-\{R_{h0}\psi(x, jh), \psi(x, jh)\}_j > \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \{\psi(x, jh), \psi(x, jh)\}, \quad (199)$$

$$\{R_{h0}\psi(x, jh), R_{h0}\psi(x, jh)\}_j > \frac{\pi^4}{4a^4} \{\psi(x, jh)\psi(x, jh)\}, \quad (200)$$

где $\{\varphi(x, jh), \psi(x, jh)\}_j = h\sum \varphi(x, jh)\psi(x, jh)$; суммирование распространяется по точкам $G_h^0$, принадлежащим ряду $y = jh$; $d$ — диаметр области $G$. Неравенства (199), (200) следуют из самосопряженности оператора $R_{h0}$ *) в смысле скалярного умножения $\{\varphi, \psi\}_j$ (см. § 6, п. 3) и из оценки $\max \rho < -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2$ (пример 19) для собственных значений $\mu$ оператора $R_{h0}$. Умножая (199) и (200) на $h$ и суммируя каждое по $j$, получим соответственно (195) и (196).

Результаты этого пункта изменятся лишь несущественно, если число пространственных переменных больше двух.

---

*) Оператор $R_{h0}$ понимается в данном случае как оператор над функциями $\psi(x, jh)$ одного переменного $x$, определенными в точках $G_h$ ряда $y = jh$ и равными нулю в точках $\gamma_h$ этого ряда.

# ГЛАВА 5

# СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, УСТОЙЧИВЫЕ ПО НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

В этой главе мы будем исследовать методом разделения переменных устойчивость по начальным условиям систем разностных уравнений, аппроксимирующих системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)} \frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \qquad (201)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N_1),$$

где $\sum\limits_{(k_s)}$ означает суммирование по всем целым $k_s \geqslant 0$, сумма которых не превосходит некоторого числа $M$, причем $n_i > 0$, и система разрешена относительно старших производных по $t$, т. е. $k_0 < n_j$. Коэффициенты $A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}$ — некоторые постоянные. Мы укажем способы построения устойчивых по начальным условиям систем разностных уравнений, аппроксимирующих задачу Коши для гиперболических и параболических систем дифференциальных уравнений вида (201). Задача Коши для систем вида (201) и систем более общего вида подробно изучена И. Г. Петровским [31]. Методы и результаты указанной работы И. Г. Петровского широко используются в этой главе.

## § 16. Постановка задачи

Систему (201) заменим системой первого порядка по $t$, вводя для этого новые искомые функции $u_{N_1+1}, u_{N_1+2}, \ldots, u_N$ вместо производных $\frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^{n_i-1} u_i}{\partial t^{n_i-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, N_1)$.

Система (201) при этом примет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \tag{202}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Число $k_0$ равно нулю, и мы его не пишем. Задача Коши для системы (202) ставится условиями

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{203}$$

Здесь и в дальнейшем мы пишем $x$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для простоты во всей этой главе будем считать, что все функции $\varphi_i(x)$ равны нулю вне некоторого куба $|x_i| \leqslant M$ пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В полосе $0 \leqslant t \leqslant T$ рассмотрим систему разностных уравнений $R_h u_h = 0$, аппроксимирующую систему (202) и имеющую вид

$$\frac{1}{\tau} \bar{\Delta}_t u_{hi} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{1}{h^{k_1+k_2+\ldots+k_n}} \bar{\Delta}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}} u_{hj} \tag{204}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

где разности $\bar{\Delta}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}}$ и $\bar{\Delta}_t$ определены равенствами

$$\bar{\Delta}_{x_i} \psi(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} [\psi(t, x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - \\ - \psi(t, x_1, \ldots, x_i - h, \ldots, x_n)]$$

и

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}_{x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i} \ldots x_n^{k_n}} \psi &= \bar{\Delta}_{x_i} (\bar{\Delta}_{x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i - 1} \ldots x_n^{k_n}} \psi) \\ \bar{\Delta}_t \psi(t, x) &= \sum_{k=-m_0}^{q-m_0} c_k \psi(t + k\tau, x), \end{aligned} \right\} \tag{205}$$

причем $m_0 \geqslant 0$ и $q \geqslant m_0 + 1$ — некоторые целые числа и $c_k$ — численные коэффициенты, не зависящие от $h$, $c_{-m_0} \neq 0$, $c_{q-m_0} \neq 0$. Система разностных уравнений (204) имеет порядок $q$ по переменной $t$.

Если задать значения функций $u_{hi}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ на $q$ последовательных слоях $S_0, S_1, \ldots, S_{q-1}$ сетки, то в силу системы (204) можно единственным образом вычислить функции $u_{hi}$ последовательно на слоях $S_q$, $S_{q+1}$, ... Начальные условия для решения системы разностных уравнений (204) зададим в следующем виде:

$$u_{hk}(r\tau, x) = \varphi_{hkr}(x) \tag{206}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, N;\ r = 0, 1, \ldots, q-1),$$

где $\varphi_{hkr}(x)$ — некоторые функции, определенные во всех точках $x(x_1, \ldots, x_n)$ сетки, т. е. в точках, координаты которых имеют вид $x_i = l_i h$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $l_i$ — всевозможные целые числа). Запись начальных условий в форме (206) вполне аналогична записи начальных условий (133), которой мы пользовались в главе 4, поскольку в данном случае порядок $p$ системы дифференциальных уравнений (202) по $t$ равен 1 и $\overset{0}{\Delta}_t u = u$. При изучении устойчивости по начальным условиям не имеет значения, каким образом функции $\varphi_{hir}$ выражаются через функции $\varphi_i$, участвующие в равенствах (203). Мы будем предполагать только, что функции $\varphi_{hir}(x)$ обращаются в нуль вне куба $|x_j| < M + 1$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), несколько большего, чем тот, о котором говорилось в связи с условиями (203).

Введем обозначение $\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}}$ для разностей, определенных равенствами

$$\Delta_{x_i}\psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$$
$$= \psi(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n);$$
$$\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i} \ldots x_1^{k_n}} = \Delta_{x_i}\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i - 1} \ldots x_n^{k_n}}. \tag{207}$$

Положим

$$\max \left| \frac{\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}} \varphi_{hir}(x)}{h^{k_1 + \ldots + k_n}} \right| = M_{hL}. \tag{208}$$

Максимум берется по всем точкам, где определены $\varphi_{hir}(x)$, по $i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), по $r$ ($r = 0, 1, \ldots, q-1$) и по всевозможным $k_s$, сумма которых не превосходит $L$. Определим норму решения $u_h = (u_{h1}, u_{h2}, \ldots, u_{hN})$ задачи (204), (206) и норму начальных условий (206), положив

$$\|u_h\| = \max |u_{hi}(t, x)|; \quad \|u_h\|_{\text{нач}} = M_{hL}. \tag{209}$$

Максимум берется по всем точкам сетки, принадлежащим полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, и по $i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В соответствии с определением из гл. 2 и учитывая линейность рассматриваемой задачи (204), (206), будем называть систему разностных уравнений (204) устойчивой по начальным условиям, если существует натуральное число $L$, при котором можно указать такую постоянную $A$, не зависящую от $h$ и от функций $\varphi_{hir}(x)$, что выполнено неравенство

$$\|u_h\| \leqslant A \|u_h\|_{\text{нач}} \equiv A M_{hL}. \tag{210}$$

Таким образом, выбор норм (209) означает, что мы будем изучать устойчивость, измеряя отклонения максимума модуля решений, а не отклонения решений «в среднем», как мы это делали в гл. 4.

## § 17. Сведение исследования системы «в частных разностях» к изучению системы «обыкновенных» разностных уравнений

1. Вспомогательные предложения. Ниже нам потребуются два утверждения (леммы 1 и 2), первое из которых известно из теории интеграла Фурье [43, стр. 648], а второе следует из теоремы 1, доказанной в Приложении.

Лемма 1. *Пусть функция $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$ равна нулю вне некоторого куба $|x_i| \leqslant M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и имеет всевозможные производные до некоторого порядка $L$ включительно, ограниченные по абсолютной величине в совокупности некоторой постоянной $M_L$.*

*Тогда существует единственная непрерывная при всех вещественных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ функция $G_{\tilde{\psi}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, называемая преобразованием Фурье функции $\tilde{\psi}$, которая связана с функцией $\tilde{\psi}$ равенством*

$$\tilde{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{\psi}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) e^{i(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

*Эта функция $G_{\tilde{\psi}}$ удовлетворяет неравенству*

$$|G_{\tilde{\psi}}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)| \leqslant \frac{CM_L}{(1+\alpha)^L}, \tag{211}$$

*где* $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$ *и постоянная* $C$ *зависит только от числа* $L$ *и размеров куба, вне которого функция* $\tilde{\psi}$ *равна нулю, но не зависит от функции* $\tilde{\psi}$.

Лемма 2. *Пусть* $\psi_h(x_1, \ldots, x_n)$ — *функция, определенная в точках сетки и равная нулю вне некоторого куба* $|x_i| \leqslant M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Обозначим максимум модуля всевозможных разностных отношений*

$$\frac{1}{h^{k_1 + \ldots + k_n}} \Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}} \psi_h \qquad (k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant L)$$

*порядка не выше* $L$ *через* $M_{hL}$.

*Тогда существует функция* $\tilde{\psi}_h(x_1, \ldots, x_n)$, *которая определена для всех вещественных значений* $x$, *в точках сетки совпадает с* $\psi_h$, *имеет всевозможные производные до порядка* $L$ *включительно, причем выполнены неравенства*

$$\left| \frac{\partial^k \tilde{\psi}_h}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant C M_{hL} \qquad (k \leqslant L), \tag{212}$$

*где* $C$ — *постоянная, не зависящая от* $h$ *и от* $\psi_h$. *При достаточно малом* $h$ *функцию* $\tilde{\psi}_h$ *можно выбрать так, чтобы она была равна нулю вне куба*

$$|x_i| \leqslant M + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определение разностей $\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}}$ см. (207).

2. Достаточное условие устойчивости системы разностных уравнений по начальным условиям. Для того чтобы сформулировать признак устойчивости, проделаем предварительно следующее построение.

Используя метод разделения переменных, будем искать решения $u_h = (u_{h1}, u_{h2}, \ldots, u_{hN})$ системы разностных уравнений (204) в виде

$$u_{hj}(m\tau, x) = v_{hj}(m\tau)\, e^{i(\alpha, x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{213}$$

где $(\alpha, x) \equiv \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — вещественные параметры. Подставляя выражения (213) в систему (204), после сокращения на $e^{i(\alpha, x)}$ получим для функций $v_{hj}$

($j = 1, 2, \ldots, N$) следующую систему «обыкновенных» разностных уравнений, зависящую от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t v_{hr} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{(k_s)} A_{rj}^{(k_1, \ldots, k_n)} (i\tilde{\alpha}_1)^{k_1} \ldots (i\tilde{\alpha}_n)^{k_n} v_{hj} \qquad (214)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\tilde{\alpha}_k = \frac{\sin h\alpha_k}{h}$. Система (214), написанная для какой-нибудь точки $t = \bar{m}\tau$, связывает значения функций $v_{hr}$ в $q+1$ последовательных точках $t = (\bar{m} - m_0 + m)\tau$ ($m = 0, 1, \ldots, q$; $m_0$ то же, что и в (205)). Задавая значения функций $v_{hr}(t)$ ($r = 1, 2, \ldots, N$), составляющих решение системы (214), в $q$ точках $t = 0, \tau, \ldots, (q-1)\tau$, мы можем затем вычислить значения $v_{hr}(t)$ при $t = q\tau, (q+1)\tau, \ldots$ Система (214) имеет $Nq$ линейно независимых решений

$$v_h^{kr} = (v_{h1}^{kr}, v_{h2}^{kr}, \ldots, v_{hN}^{kr})$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N;\ r = 0, 1, \ldots, q-1),$$

удовлетворяющих при $m = 0, 1, \ldots, q-1$ начальным условиям

$$v_{hj}^{kr}(m\tau, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) = \begin{cases} 1, & (j-k)^2 + (r-m)^2 = 0, \\ 0, & (j-k)^2 + (r-m)^2 \neq 0. \end{cases} \qquad (215)$$

Сформулируем теперь достаточное условие устойчивости системы разностных уравнений (204) по начальным условиям.

Теорема 15. *Для того чтобы система разностных уравнений* (204) *была устойчива по начальным условиям в полосе* $0 \leqslant t \leqslant T$, *достаточно, чтобы существовали такие два положительные целые числа $B$ и $D$, не зависящие от $h$, что при всех вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ каждая из функций $v_{hj}^{kr}$, определенных системой* (214) *и начальными условиями* (215), *при* $m\tau \leqslant T$ *удовлетворяла неравенству*

$$|v_{hj}^{kr}(m\tau, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n)| \leqslant B(1+\alpha)^D, \qquad (216)$$

где $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}$.

Доказательство. По функциям $\varphi_{hkr}(x)$, участвующим в равенствах (206), построим функции $\tilde{\varphi}_h(x)$, совпадающие с $\varphi_h$ в точках сетки, обращающиеся в нуль вне куба $|x_i| \leqslant M+1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, имеющие производные до порядка $L=D+n+1$ и удовлетворяющие неравенствам (212). Это можно сделать в силу леммы 2. Обозначим через $G_{hkr}$ преобразование Фурье функции $\tilde{\varphi}_{hkr}$. В силу леммы 1 оно существует и удовлетворяет неравенству вида

$$|G_{hkr}| \leqslant \frac{CM_{hL}}{(1+\alpha)^L}. \tag{211'}$$

Обозначим через $u_h^{kr}=\{u_{hj}^{kr}\}$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ решение системы разностных уравнений (204), удовлетворяющее начальным условиям (206), в которых сохранена функция $\varphi_{hkr}(x)$, а остальные $\varphi_{hij}$, $(i-k)^2+(j-r)^2 \neq 0$ заменены нулями. Очевидно, что функции $u_{hj}$, составляющие решение $u_h$ задачи (204), (206), имеют вид

$$u_{hj}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=0}^{q-1} u_{hj}^{kr} \qquad (j=1, 2, \ldots, N). \tag{217}$$

Покажем, что функции $\tilde{u}_{hj}^{kr}(m\tau, x)$, определенные равенствами

$$\tilde{u}_{hj}^{kr}(m\tau, x) \equiv$$
$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} G_{hkr}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, v_{hj}^{kr}(m\tau, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n)\, e^{i(\alpha, x)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{218}$$

в точках сетки совпадают с $u_{hj}^{kr}$. Подобные представления решений использовал Леви [19]. Функции $\tilde{u}_{hj}^{kr}$, или, что то же, интегралы в правых частях тождеств (218), существуют в силу следующих неравенств, которые получаются с учетом оценок (216), (211') и равенства $|e^{i(\sigma, x)}|=1$:

$$|\tilde{u}_{hj}^{kr}| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |G_{hkr} v_{hj}^{kr} e^{i(\alpha, x)}|\, d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n \leqslant$$
$$\leqslant BCM_{hL} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_n}{(1+\alpha)^{n+1}} = C_1 M_{hL}, \tag{219}$$

где $C_1$ — постоянная. Функции (218) получились в результате умножения всех функций $v_{hj}^{kr}e^{i(\alpha, x)}$ ($j = 1, 2, \ldots, N$), образующих решение вида (213) линейной системы (204), на одну и ту же функцию $G_{hkr}$, зависящую только от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, но не зависящую от $x$ и $j$, и интегрирования по этим параметрам. Поэтому ввиду линейности системы (204) они также образуют решение этой системы. Функции (218) удовлетворяют начальным условиям, поставленным для функций $u_{hj}^{kr}$. Это немедленно следует из равенства

$$\tilde{\varphi}_{hkr} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} G_{hkr}e^{i(\alpha, x)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

и равенств (215). Таким образом наше утверждение доказано: в точках сетки

$$\tilde{u}_{hj}^{kr} \equiv u_{hj}^{kr}.$$

Из (217) и (219) следует неравенство $|u_{hj}| \leqslant NqC_1M_{hL}$. Следовательно,

$$\|u_h\| \leqslant NqC_1\|u\|_{\text{нач}} \equiv NqC_1M_{hL},$$

где $C_1$ — некоторая постоянная, не зависящая от $h$, и $L = D + n + 1$. Устойчивость имеет место. Доказанная теорема аналогична теореме 10 из гл. 4.

Полученное условие устойчивости аналогично «условию A» И. Г. Петровского [31] корректности постановки задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

## § 18. Гиперболические системы

**1. Определение гиперболической системы.** В этом параграфе, основываясь на теореме 15 из § 17, мы укажем способ построения устойчивой по начальным условиям системы разностных уравнений вида (204), аппроксимирующей систему (202). При этом мы будем предполагать, что система (202) получилась из гиперболической системы дифференциальных уравнений вида (201) в результате введения новых искомых функций $u_{N_1+1}, u_{N_1+2}, \ldots, u_N$, как это описано в начале § 16. Следуя И. Г. Петровскому ([31], стр. 2), будем называть систему (201) гиперболической, если выполнены следующие условия:

1) $\sum_{s=0}^{n} k_s \leqslant n_j, \quad k_0 < n_j, \quad n_j > 0;$

2) матрица

$$\left\| \sum_{((k_s))} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)} \gamma^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right\| - \left\| \begin{matrix} \gamma^{n_1} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \gamma^{n_2} & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \gamma^{n_{N_1}} \end{matrix} \right\|, \tag{220}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные параметры и $\sum_{((k_s))}$ означает суммирование по всем $k_s$, у которых $\sum_{s=0}^{n} k_s = n_j$, имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r \end{matrix} \right\|,$$

где все элементы, не попавшие ни в один из квадратов $M_s$, тождественно равны нулю. При этом возможен, в частности, и такой случай, когда один из квадратов $M_s$ заполняет всю матрицу;

3) при всевозможных действительных $\alpha_l$, у которых $\sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 = 1$, определитель каждой из матриц $M_s$ имеет действительные и различные корни $\gamma$.

Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ есть частный случай гиперболической системы.

**2. Эффективное достаточное условие устойчивости и построение устойчивой системы разностных уравнений.** Подставим в систему (202) вместо $u_j$ функции вида $v_j(t) e^{i(\alpha, x)}$. После сокращения на $e^{i(\alpha, x)}$ получится следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящая от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)} (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} v_j \tag{221}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

В работе [31] (стр. 63—64) показано, что в случае, если система (202) получена из гиперболической системы (201), существует линейное преобразование

$$\alpha^{s_i} v_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) w_j \tag{222}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

(где $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}$ и $s_i$ — некоторые неотрицательные целые числа), обладающее следующими свойствами:

1) коэффициенты $C_{ij}$ непрерывны и ограничены,

2) определитель матрицы $\|C_{ij}\|$ при всех значениях $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ остается по абсолютной величине больше некоторой положительной постоянной, не зависящей от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

3) Преобразование (222) приводит систему (221) к виду

$$\frac{dw_l}{dt} = i\alpha\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) w_k + \sum_{j=1}^{N} b_{lj}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) w_j$$

$$(l = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

где $\gamma_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ — корни определителя матрицы (220), а $b_{lj}$ — ограниченные коэффициенты.

Правая часть системы «обыкновенных» разностных уравнений (214) отличается от правой части системы (221) только тем, что в системе (214) всюду вместо $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ стоят $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$. Поэтому преобразование

$$\tilde{\alpha}^{s_i} v_{hi} = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right) w_{hj} \tag{223}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

где $\tilde{\alpha}=\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2+\ldots+\tilde{\alpha}_n^2}$, приводит систему (214) к виду

$$\frac{1}{\tau}\tilde{\Delta}_t w_{hl}=$$
$$=i\tilde{\alpha}\gamma_l\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}},\ \ldots,\ \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right)w_{hl}+\sum_{j=1}^{N} b_{lj}(\tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n)\,w_{hj}. \quad (224)$$

Функции $v_{hj}^{kr}(m\tau,\ \tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n)$, удовлетворяющие начальным условиям (215), в результате преобразования (223) переходят в некоторые функции $w_{hj}^{kr}(m\tau,\ \tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n)$, которые при $m=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1$ с ростом $\tilde{\alpha}$ растут не быстрее некоторой степени $p_1=\max(s_1,\ \ldots,\ s_N)$ переменной $\tilde{\alpha}$. Покажем, что если функции $\tilde{w}_{hj}^{kr}$, составляющие решения $\tilde{w}_h^{kr}=(\tilde{w}_{h1}^{kr},\ \ldots,\ \tilde{w}_{hN}^{kr})$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ \ r=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1)$ системы (224) и удовлетворяющие начальным условиям

$$\tilde{w}_{hj}^{kr}(m\tau,\ \tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n)=\begin{cases}1 \text{ при } (j-k)^2+(r-m)^2=0,\\ 0 \text{ при } (j-k)^2+(r-m)^2\neq 0,\end{cases} \quad (225)$$

ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной $B$, не зависящей от $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ и $h$, то функции $w_{hj}^{kr}$, получившиеся из $v_{hj}^{kr}$ в результате преобразования (223), удовлетворяют неравенству

$$|w_{hj}^{kr}|\leqslant B_1(1+\tilde{\alpha})^{p_1}.$$

В самом деле, решение $w_h^{kr}=(w_{h1}^{kr},\ \ldots,\ w_{hN}^{kr})$ является линейной комбинацией решений $\tilde{w}_h^{k'r'}=(\tilde{w}_{h1}^{k'r'},\ \ldots,\ \tilde{w}_{hN}^{k'r'})$ с коэффициентами $b_{k'r'}$, которые определены равенствами

$$b_{k'r'}=w_{hk'}^{k'r'}(r'\tau,\ \tilde{\alpha},\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n)$$
$$(k'=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ r'=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1).$$

Следовательно, коэффициенты $b_{k'r'}$ растут не быстрее, чем $\tilde{\alpha}^{p_1}$, что и доказывает последнее утверждение. Из формул (223) и неравенств

$$|\tilde{\alpha}_i|\leqslant|\alpha_i| \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

в этом случае следует, что для $v_{hj}^{kr}$ при $\tilde{\alpha}>1$ выполняется неравенство (216). Если, кроме того, $v_{hj}^{kr}$ ограничены при

$\tilde{\alpha} \leqslant 1$ постоянной, не зависящей от $h$, то неравенство (216), быть может, с большей постоянной $B$, выполняется при всех вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и система (204) устойчива по начальным условиям. Приступим к выяснению условий, обеспечивающих устойчивость системы (204) по начальным условиям, а именно, условий, при которых:

1) функции $\tilde{w}_{hj}^{kr}$ $(j=1, \ldots, N)$, образующие решения задачи (224), (225), при всех $k$ и $r$ $(k=1, \ldots, N;\ r=0, 1, \ldots, q-1)$ ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной, не зависящей от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и от $h$;

2) функции $v_{hj}^{kr}$ $(j=1, \ldots, N)$, образующие решения задачи (214), (215) при $\tilde{\alpha} \leqslant 1$, ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной, не зависящей от $h$.

Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $w^{(s)}(m\tau)$, где $s$ — некоторое натуральное число, есть функция от $m$, удовлетворяющая при $m > s$ однородному разностному уравнению*

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w(m\tau) = aw(m\tau), \tag{226}$$

*причем*

$$w^{(s)}(m\tau) = \begin{cases} 0, \text{ если } m < s+q-m_0, \\ 1, \text{ если } m = s+q-m_0. \end{cases}$$

*Здесь $a$ постоянный коэффициент, $m_0$ и $q$ введены при определении* $\bar{\Delta}_t$ (см. (205)).

*Тогда решение $\tilde{w}(m\tau)$ неоднородного уравнения*

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w(m\tau) = aw(m\tau) + f(m\tau) \qquad (m \geqslant m_0), \tag{227}$$

*удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\tilde{w}(m\tau) = 0$, $(m = 0, 1, \ldots, q-1)$, можно записать в следующем виде:*

$$\tilde{w}(m\tau) = \frac{\tau}{c_{q-m_0}} \sum_{s=m_0}^{m} w^{(s)}(m\tau) f(s\tau); \tag{228}$$

$c_{q-m_0}$ введено при определении $\bar{\Delta}_t$ (см. (205)).

Доказательство. Обозначим через $\tilde{w}^{(s)}(m\tau)$ решение разностного уравнения

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t\tilde{w}^{(s)}(m\tau)=a\tilde{w}^{(s)}(m\tau)+\delta_{sm} \qquad (m \geqslant m_0), \tag{229}$$

где $\delta_{sm}$ равно нулю, если $m \neq s$, и равно 1, если $m=s$. Функция $\tilde{w}^{(s)}(m\tau)$ отличается от $w^{(s)}(m\tau)$ только множителем $\frac{\tau}{c_{q-m_0}}$. Действительно, вычисляя в силу уравнения (229) последовательно значения

$$\tilde{w}^{(s)}(q\tau),\ \tilde{w}^{(s)}[(q+1)],\ \ldots,\ \tilde{w}^{(s)}[(s+q-m_0)\tau],$$

найдем, что

$$\tilde{w}^{(s)}(m\tau)=\begin{cases} 0 & , \text{ если } m<s+q-m_0, \\ \dfrac{\tau}{c_{q-m_0}}, & \text{если } m=s+q-m_0. \end{cases} \tag{230}$$

Далее, при $m>s$ уравнение (229), которому удовлетворяет $\tilde{w}^{(s)}(m\tau)$, является однородным. Это и доказывает, что

$$\tilde{w}^{(s)}(m\tau)=\frac{\tau}{c_{q-m_0}}w^{(s)}(m\tau). \tag{231}$$

Умножим (229) на $f(s\tau)$ и просуммируем по $s$ ($s=m_0$, $m_0+1, \ldots$). Получим

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t\left[\sum_{s=m_0}^{\infty}\tilde{w}^{(s)}(m\tau)f(s\tau)\right]=a\left[\sum_{s=m_0}^{\infty}\tilde{w}^{(s)}(m\tau)f(s\tau)\right]+f(m\tau)$$
$$(m \geqslant m_0),$$

так что функция $\tilde{w}(m\tau)\equiv\sum\limits_{s=m_0}^{\infty}\tilde{w}^{(s)}(m\tau)f(s\tau)$ является решением уравнения (227), которое удовлетворяет нулевым начальным условиям. Учитывая, что $\tilde{w}^{(s)}(m\tau)=0$ при $s>m$, а также (230), (231), получаем отсюда формулу (228).

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t\tilde{w}_l=a_l\tilde{w}_l+\sum_{j=1}^{N}b_{l_j}\tilde{w}_j \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{232}$$

где $a_l$ и $b_{l_j}$ — постоянные коэффициенты. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть для всякого решения* $w = (w_1, \ldots, w_N)$ *системы*

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w_l = a_l w_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, N)$$

*в полосе* $0 \leqslant t \leqslant T$ *выполнено неравенство*

$$\max_{0 \leqslant m\tau \leqslant T} \max_{l=1, \ldots, N} |w_l(m\tau)| \leqslant M \max_{m=0, \ldots, q-1} \max_{l=1, 2, \ldots, N} |w_l(m\tau)|, \tag{233}$$

*где* $M$ — *некоторая постоянная.*

*Тогда для всякого решения* $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_N)$ *системы* (232) *выполнено неравенство*

$$\max_{0 \leqslant m\tau \leqslant T} \max_{l=1, \ldots, N} |\tilde{w}_l(m\tau)| \leqslant A \max_{m=0, \ldots, q-1} \max_{l=1, \ldots, N} |\tilde{w}_l(m\tau)|, \tag{234}$$

*где* $A$ *зависит только от* $M$ *и* $\max |b_{l_j}|$, *но не от* $\tau$ *и* $a_l$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно установить, что существует $\varepsilon > 0$, не зависящее от $\tau$ и $a_l$, такое, что неравенство (234) имеет место, если максимум в левой части брать по точкам $0 \leqslant m\tau \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а не по всем точкам $0 \leqslant m\tau \leqslant T$. Действительно, ввиду независимости коэффициентов системы (232) от $t$ существование такого $\varepsilon > 0$ означает, что величина $R = \max |\tilde{w}_l(m\tau)|$, где максимум берется по $l = 1, 2, \ldots, N$ и каким-нибудь $q$ последовательным значениям $m = m_1, m_1 + 1, \ldots, m_1 + q - 1$, на отрезке $m_1\tau \leqslant m\tau \leqslant m_1\tau + \varepsilon$ длины $\varepsilon$ не может возрасти более чем в $A$ раз. Отрезок $[0, T]$ оси $t$ покроем отрезками $\left[\frac{k}{2}\varepsilon, \frac{k+1}{2}\varepsilon\right]$ $\left(k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{2T}{\varepsilon}\right]\right)$ и будем считать $\tau$ столь малым, что на каждом из этих отрезков имеется не менее $q$ точек $t = m\tau$. Имеем $R_{\left[\frac{2T}{\varepsilon}\right]} \leqslant AR_{\left[\frac{2T}{\varepsilon}\right]-1} \leqslant \ldots \leqslant A^{\left[\frac{2T}{\varepsilon}\right]} R_0$, где $R_j$ есть $\max |\tilde{w}_l(m\tau)|$, взятый по $l = 1, 2, \ldots, N$, и каким-нибудь $q$ соседним точкам $t = m\tau$, принадлежащим отрезку $\left[\frac{j}{2}\varepsilon, \frac{j+1}{2}\varepsilon\right]$. Отсюда следует, что в качестве $A$ в неравенстве (234), можно взять постоянную $A^{\left[\frac{2T}{\varepsilon}\right]}$. Переходим к доказательству того, что существует $\varepsilon > 0$, о котором говорится выше. Обозначим через $w_l^{(s)}(m\tau)$ функции, построенные для уравнений $\frac{1}{\tau}\overline{\Delta}_t w_l = a_l w_l$ так, как в лемме 1 были построены функции $w^{(s)}$ для уравнения $\frac{1}{\tau}\overline{\Delta}_t w = aw$. Для $w_l^{(m_0-1)}$ (где $m_0$ — то же число, что и в лемме 1) в силу (233) выполнено неравенство $|w_l^{(m_0-1)}(m\tau)| \leqslant M$ $(0 \leqslant m\tau \leqslant T)$. Но

$$w_l^{(s)}(m\tau) = \begin{cases} 0, \text{ если } m < s+q-m_0, \\ w_l^{(m_0-1)}[(m-s+m_0-1)\tau, \text{ если } m \geqslant s+q-m_0. \end{cases}$$

Поэтому

$$|w_l^{(s)}(m\tau)| \leqslant M \qquad (0 \leqslant m\tau \leqslant T) \tag{235}$$

при всех $s$.

Функции $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_N$, составляющие решение $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_N)$ системы уравнений (232), запишем в виде

$$\tilde{w}_l \equiv w_l + \xi_l, \tag{236}$$

где $w_l$ $(l = 1, \ldots, N)$ — функции, составляющие решение системы $\frac{1}{\tau}\overline{\Delta}_t w_l = a_l w_l$ и удовлетворяющие тем же начальным условиям, что и $\tilde{w}_l$, т. е.

$$w_l(m\tau) = \tilde{w}_l(m\tau) \qquad (m = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Тогда $\xi_l$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ образуют решение системы

$$\frac{1}{\tau}\overline{\Delta}_t \xi_l = a_l \xi_l + \sum_{j=1}^{N} b_{lj}(w_j + \xi_j) \qquad (l = 1, \ldots, N), \tag{237}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Рассматривая суммы, стоящие в правых частях равенств (237), как свободные члены, и применяя формулу (238), получим

$$\xi_l(m\tau) = \frac{\tau}{c_{q-m_0}} \sum_{s=m_0}^{m} \left[ w_l^{(s)}(m\tau) \sum_{j=1}^{N} b_{lj}(w_j(s\tau) + \xi_j(s\tau)) \right]. \tag{238}$$

Обозначим $\max\limits_{0 \leqslant m\tau \leqslant \varepsilon} \max\limits_{l=1,\ldots,N} |\xi_l(m\tau)|$ через $M_\varepsilon$. Из (238), используя неравенства (233), (235) и полагая $M$ настолько большим, что $\frac{1}{c_{q-m_0}} \max\limits_{l=1,\ldots,N} \sum\limits_{j=1}^{N} |b_{l_j}| < M$, получим следующую оценку для $\xi_l(m\tau)$ $(0 \leqslant m\tau \leqslant \varepsilon)$:

$$|\xi_l(m\tau)| \leqslant \tau \sum_{s=m_0}^{m} M[M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |w_j(r\tau)| + M_\varepsilon] M =$$
$$= M^2 [M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)| + M_\varepsilon] \tau \sum_{s=m_0}^{m} 1 \leqslant$$
$$\leqslant M^2 [M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)| + M_\varepsilon] \varepsilon \quad (239)$$
$$(l = 1, \ldots, N).$$

Так как правая часть неравенства (239) не зависит от $l$ и $m$ $(0 \leqslant m\tau \leqslant \varepsilon)$, то из него следует

$$M_\varepsilon \leqslant M^2 [M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)| + M_\varepsilon] \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство относительно $M_\varepsilon$, получим

$$M_\varepsilon < \frac{\varepsilon M^3 \max\limits_{r=0,\ldots,q-1} \max\limits_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)|}{1 - M^2\varepsilon}. \quad (240)$$

Если $\varepsilon$ подобрать так, чтобы выполнялось неравенство $M^2\varepsilon < \frac{1}{2}$, то из (240) получим

$$M_\varepsilon \leqslant M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)|. \quad (241)$$

Из (236), (233) и (241) при $0 \leqslant m\tau \leqslant \varepsilon$ вытекает

$$|\tilde{w}_l(m\tau)| = |w_l(m\tau) + \xi_l| \leqslant |w_l(m\tau)| + |\xi_l(m\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant 2M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)| \quad (l = 1, \ldots, N),$$

что и требовалось.

Лемма 3. *Пусть корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ уравнения*

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=-m_0}^{q-m_0} c_k \lambda^k = a, \quad (242)$$

($c_k$ см. (205)) *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_r| < C, \ |\lambda_i - \lambda_j| > \varepsilon \quad (r, \ i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ q; \ i = j), \tag{243}$$

*где* $C > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ — *некоторые постоянные.*

*Тогда любое решение уравнения*

$$\frac{1}{\tau} \bar{\Delta}_t w = a w \tag{244}$$

*удовлетворяет неравенству*

$$|w(m\tau)| < MC^m \max_{s=0, \ \ldots, \ q-1} |w(s\tau)| \qquad (0 \leqslant m\tau),$$

где $M$ — некоторая постоянная, зависящая только от $\varepsilon$.

Доказательство. Уравнение (244) имеет $q$ линейно-независимых решений $w_r(m\tau) = \lambda_r^m$ ($r = 1, \ 2, \ \ldots, \ q$), где $\lambda_r$ — корни уравнения (242). Любое решение этого уравнения имеет вид

$$w(m\tau) = \sum_{r=1}^{q} \delta_r \lambda_r^m, \tag{245}$$

где $\delta_r$ — некоторые постоянные, которые определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{r=1}^{q} \delta_r \lambda_r^m = w(m\tau) \qquad (m = 0, \ 1, \ \ldots, \ q-1).$$

Определитель этой системы есть определитель Вандермонда и по абсолютной величине превосходит $\varepsilon^{\frac{q(q-1)}{2}}$, где $\varepsilon > 0$ — число, введенное в условии леммы. Следовательно, и коэффициенты $\delta_r$ линейной комбинации (245) удовлетворяют неравенству

$$|\delta_r| < M_1 \max_{m=0, \ 1, \ \ldots, \ q-1} |w(m\tau)|, \tag{246}$$

где $M_1$ — некоторое число, зависящее только от $\varepsilon$, но не зависящее от $\tau$. Из (245), (243) и (246) следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 16. *Пусть корни* $\lambda_{l_1}, \ \lambda_{l_2}, \ \ldots, \ \lambda_{l_q}$ *уравнения*

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=-m_0}^{q-m_0} c_k \lambda^k = i\tilde{\alpha}\gamma_l \left( \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ \ldots, \ \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}} \right), \tag{247}$$

*(где* $\gamma_l (l = 1, 2, \ldots, N)$ — *корень определителя матрицы* (220) *и* $\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{\alpha}_1^2, \ldots, \tilde{\alpha}_n^2}$) *при всех* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *и всех* $l$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$|\lambda_{lr}| \leqslant 1 \text{ и } |\lambda_{lr_1} - \lambda_{lr_2}| > \varepsilon$$
$$(r_1, r_2 = 1, 2, \ldots, q; \; r_1 \neq r_2),$$

*где* $\varepsilon > 0$ *не зависит от* $\tau$.

*Тогда система разностных уравнений* (204), *аппроксимирующая систему* (202), *которая в свою очередь получилась из гиперболической системы* (201) *указанным в начале* § 16 *способом, устойчива по начальным условиям.*

Доказательство. Проверим выполнение двух условий устойчивости, изложенных перед леммой 1. Функции $w_{hj}^{kr}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, образующие решение системы уравнений $\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w_l = i\tilde{\alpha}\gamma_l \left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right) w_l$, $l = 1, \ldots, N$ и удовлетворяющие начальным условиям (225) в силу леммы 3, условия которой в предположениях теоремы выполнены, ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной, не зависящей от $\tau$ (напомним, что $\tau = \tau(h)$). Следовательно, в силу леммы 2 ограничены также функции $\tilde{w}_{hj}^{kr}$, которые образуют решение задачи (224), (225), и первое из упоминавшихся в начале доказательства теоремы условий устойчивости выполнено.

Функции $v_{hj}^{kr}$, образующие решение системы уравнений

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t v_{hj}^{kr} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

и удовлетворяющие условиям (215), ограничены в силу леммы 3, условия которой следуют из условий теоремы, если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Учитывая это, а также учитывая, что при $\tilde{\alpha} \leqslant 1$ коэффициенты системы (214) ограничены, можно на основании леммы 2 при $a_l = 0$ утверждать, что функции $v_{hj}^{kr}$, образующие решение задачи (214), (215) при $\tilde{\alpha} \leqslant 1$, ограничены постоянной, не зависящей от $h$, и второе из упоминавшихся в начале доказательства условий устойчивости выполнено. Теорема доказана.

Следствие. *Положим в системе разностных уравнений* (204)

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t u(t, x) = \frac{u(t+\tau, x) - u(t-\tau, x)}{2\tau}$$

*и подчиним шаги сетки* $\tau$ *и* $h$ *соотношению*

$$\frac{\tau}{h} < \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\max_{k=1,\ldots,N}\ \max_{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2=1} \gamma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right]^{-1} - \varepsilon, \tag{248}$$

*где* $\varepsilon > 0$ — *некоторая постоянная.*

*Тогда система* (204), *аппроксимирующая систему* (202), *которая в свою очередь получена из гиперболической системы* (201) *указанным в начале* § 16 *способом, будет устойчива по начальным условиям.*

Доказательство. Проверим, что неравенство (248) обеспечивает выполнение условий теоремы. Уравнение (247) в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{2\tau}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = i\tilde{\alpha}\gamma_l \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\tau\tilde{\alpha}\gamma_l i\lambda - 1 = 0. \tag{249}$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = \tau\tilde{\alpha}\gamma_l i \pm \sqrt{-(\tau\tilde{\alpha}\gamma_l)^2 + 1}. \tag{250}$$

Отметим, что

$$\tilde{\alpha}^2 = \tilde{\alpha}_1^2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n^2 = \frac{\sin^2\alpha_1 h}{h^2} + \ldots + \frac{\sin^2\alpha_n h}{h^2} \leqslant \frac{n}{h^2}.$$

Поэтому и в силу (248) для дискриминанта $-(\tau\tilde{\alpha}\gamma_l)^2 + 1$ квадратного уравнения (249) имеем

$$1 - (\tau\tilde{\alpha}\gamma_l)^2 \geqslant 1 - \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 n\gamma_l^2 \geqslant \varepsilon_1^2 > 0,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Следовательно, радикал, входящий в выражение (250), есть вещественное число, и поэтому имеем

$$|\lambda_{1,2}|^2 = (\tau\tilde{\alpha}\gamma_l)^2 + \left(\sqrt{-(\tau\tilde{\alpha}\gamma_l)^2 + 1}\right)^2 = 1$$

и

$$|\lambda_1 - \lambda_2| > 2\varepsilon_1 > 0,$$

что и требовалось.

**3.** Новое доказательство ограниченности области зависимости решения гиперболической системы от начальных условий. Подчиним отношение шагов сетки помимо неравенства (248) также неравенству $\frac{\tau}{h} > \varepsilon'$, где $\varepsilon' > 0$ — некоторая постоянная. Тогда, как легко видеть (ср. п. 1. Введения), для вычисления значений функций $u_{h1}(t, x), \ldots, u_{hN}(t, x)$, составляющих решение системы уравнений (204), в фиксированной точке сетки придется использовать значения функций $\varphi_{hkr}(x)$ из (206) лишь в некоторой ограниченной при всех $h$ области пространства $x$-ов, не зависящей от размеров куба, вне которого $\varphi_{hkr}(x)$ обращаются в нуль. Отсюда следует, что устойчивость не нарушилась бы, если бы мы сняли с функций $\varphi_{hkr}$ условие равенства нулю вне некоторого куба пространства $x =$ ов. При подходящем выборе нормы правой части $f(t, x) = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$ для системы уравнений (204) выполнены все условия теоремы 5 и наряду с устойчивостью по начальным условиям имеется устойчивость системы (204) по правым частям. Следовательно, решение задачи (204), (206) сходится к решению задачи (202), (203) при $h \to 0$, если только $\varphi_{hkr}(x)$ подобраны в должном соответствии с функциями $\varphi_k(x)$. Решение задачи (204), (206) в фиксированной точке $(t, x)$ зависит от значений функций $\varphi_{hkr}(x)$ в некоторой ограниченной части пространства $x =$ ов. Поэтому решение системы (202) зависит от значений функций $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, входящих в начальные условия (203), тоже лишь в ограниченной области. Иначе не могло бы быть сходимости решения системы разностных уравнений (204) к решению системы (202) при измельчении сетки, так как можно было бы почти дословно повторить рассуждения, проведенные в конце п. 1 Введения для доказательства отсутствия сходимости решения $u_h$ разностного уравнения (4) к решению $u$ дифференциального уравнения (2). Таким образом, мы получили новое доказательство того факта (см., например, [7], стр. 54), что решение $u(t, x) = [u_1(t, x), \ldots$ $\ldots, u_{N_1}(t, x)]$ гиперболической системы (201) в точке $(t, x)$ зависит от значений функций

$$u_i(0, x), \frac{\partial u_i(0, x)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{n_i-1} u_i(0, x)}{\partial t^{n_i-1}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N_1)$$

лишь в ограниченной части гиперплоскости $t = 0$,

**4.** Аппроксимация общих гиперболических систем. О. А. Ладыженская [17] в 1949 г. указала способ построения таких неявных систем разностных уравнений, аппроксимирующих общие линейные и квазилинейные гиперболические в смысле И. Г. Петровского [32] системы дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых при $h \to 0$ сходятся к решениям соответствующих систем дифференциальных уравнений при любом фиксированном соотношении шагов $\tau$ и $h$. При этом для замены производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ она использовала соответственно разностные отношения

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t u(t, x) = \frac{u(t+\tau, x) - u(t, x)}{\tau},$$

$$\frac{1}{h}\bar{\Delta}_x u(t, x) = \frac{1}{4h}[u(t+\tau, x+h) - u(t+\tau, x-h) + u(t, x+h) - u(t, x-h)].$$

Основное неравенство, доказанное в работе [17], означает устойчивость системы разностных уравнений в некоторой норме.

## § 19. Параболические системы

В этом параграфе, основываясь на теореме 15 из § 17, мы укажем способ построения устойчивой по начальным условиям системы разностных уравнений (204), аппроксимирующий систему дифференциальных уравнений вида (202). При этом мы будем предполагать, что система (202) получилась из параболической системы дифференциальных уравнений вида (201) в результате введения новых искомых функций $u_{N_1+1}, u_{N_1+2}, \ldots, u_N$, как это описано в начале § 16.

**1.** Определение параболической системы. Чтобы сформулировать определение параболической системы (201), выберем некоторое положительное число $p$, для которого всегда

$$k_0 p + \sum_{s=1}^{n} k_s \leqslant n_j p, \tag{251}$$

и составим матрицу

$$\left\| \sum_{(k_s)_p} A_{ij}^{(k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_n)} \gamma^{k_0} (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} \right\| - \\ - \left\| \begin{matrix} \gamma^{n_1} & & & \\ & \gamma^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma^{n_{N_1}} \end{matrix} \right\|, \tag{252}$$

где $\sum\limits_{(k_s)_p}$ означает суммирование по всем целым неотрицательным $k_s$, для которых $k_0 p + \sum\limits_{s=1}^{n} k_s$ достигает своего наибольшего значения $n_j p$. При составлении условий (251) принимаются во внимание только те комбинации чисел $k_s$, которым соответствуют неравные нулю коэффициенты $A_{ij}^{(k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_n)}$.

Система (201) называется *р-параболической* или просто *параболической*, если при всех действительных $\alpha_k$, у которых $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$, действительные части всех корней определителя матрицы (252) меньше некоторой отрицательной величины $\delta$. Например, уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ есть частный случай 2-параболической системы (201).

Приведенное выше определение параболичности принадлежит И. Г. Петровскому [31], стр. 3.

**2.** Эффективное достаточное условие устойчивости и построение устойчивой системы разностных уравнений. Из рассмотрений, проделанных в работе [31] (стр. 30—32), следует, что если система (202) получена из $p$-параболической системы (201), то существует линейное преобразование вида (222), обладающее следующими свойствами:

1) Преобразование (222) приводит систему (221) к виду

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} = \alpha^p \gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) w_l + \alpha^p \sum_{j=1}^{N} b_{l_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, w_j$$
$$(l = 1, \ldots, N), \tag{253}$$

где $\gamma_l (l = 1, \ldots, N)$ — корни определителя матрицы (252), а $|b_{l_j}|$ меньше любого наперед заданного положительного числа $\eta$, не зависящего от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

2) Коэффициенты $C_{ij}$ преобразования (222) ограничены постоянной, не зависящей от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

3) Абсолютная величина определителя матрицы $\|C_{ij}\|$ при всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ остается больше некоторой постоянной, зависящей только от $\eta$.

Очевидно, что преобразование (223) в таком случае приводит систему (214) к виду

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w_{hl} = \tilde{\alpha}^p \gamma_l\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right) w_{hl} + \\ + \tilde{\alpha}^p \sum_{j=1}^{N} b_{l_j}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n)\, w_{hj} \tag{254}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\gamma_l$ и $b_{l_j}$, $|b_{l_j}| < \eta$, те же, что в системе (253), и $\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{\alpha}_1^2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n}$.

Обозначим через $\tilde{w}_{hj}^{kr}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ решение системы (254), удовлетворяющее начальным условиям (225). Дословно повторяя рассуждения, проведенные в § 18 по поводу решений задачи (224), (225), мы получим, что устойчивость системы (204) по начальным условиям обеспечивается выполнением следующих требований:

1) функции $\tilde{w}_{hj}^{kr}$ $(j = 1, \ldots, N)$, образующие решение задачи (254), (225) при всех $k (k = 1, \ldots, N)$ и $r (r = 0, 1, \ldots, q-1)$, ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной, не зависящей от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и от $h$;

2) функции $v_{hj}^{kr}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, образующие решение задачи (214), (215) при $\tilde{\alpha} \leqslant 1$, ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной, не зависящей от $h$.

Переходим к выяснению признаков того, что эти два условия выполняются. Для этого докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть для всякого решения $w = (w_1, \ldots, w_N)$ системы разностных уравнений*

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w_l = \beta a_l w_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, N) \tag{255}$$

*выполнено неравенство*

$$\max_{l=1,\ldots,N}|w_l(m\tau)|\leqslant$$
$$\leqslant M|1-d\beta\tau|^m\max_{r=0,\ldots,q-1}\max_{j=1,\ldots,N}|w_j(r\tau)|,\qquad(256)$$

где $M$ и $d>0$ — *некоторые постоянные*, $a_l$ — *комплексные числа и* $\beta$ — *вещественный параметр, пределы изменения которого связаны с* $\tau$ *и* $d$ *таким образом, что выполнены неравенства*

$$-1+\varepsilon<1-d\beta\tau\leqslant 1,\qquad(257)$$

*где* $\varepsilon>0$ — *некоторая постоянная.*

*Тогда существует* $\eta>0$, *зависящее от* $M$ *и* $\varepsilon$, *но не зависящее от* $\beta$ *и* $\tau$ *и обладающее следующим свойством: любое решение*

$$\tilde{w}(m\tau)=[\tilde{w}_1(m\tau),\ldots,\tilde{w}_N(m\tau)]$$

*системы*

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t\tilde{w}_l=\beta a_l\tilde{w}_l+\beta\sum_{j=1}^{N}b_{l_j}\tilde{w}_j\qquad(l=1,\ldots,N)\qquad(258)$$

(*где* $b_{l_j}$ — *какие-нибудь постоянные*, $|b_{l_j}|<\eta$) *удовлетворяет неравенству*

$$\max_{l=1,2,\ldots,N}|\tilde{w}_l(m\tau)|\leqslant A\max_{r=0,\ldots,q-1}\max_{j=1,\ldots,N}|\tilde{w}_j(r\tau)|,\qquad(259)$$

*где постоянная* $A$ *зависит только от* $M$, *но не зависит от* $\tau$ *и* $\beta$.

Доказательство. Очевидно, что в силу (256) и (257) функции $w_l^{(s)}(m\tau)$, построенные для уравнений (255) так, как были построены функции $w^{(s)}(m\tau)$ для уравнения $\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w=aw$ в лемме 1 из § 18, удовлетворяют неравенству

$$|w_l^{(s)}(m\tau)|<M|1-d\beta\tau|^{m-s}.\qquad(260)$$

Положим

$$\tilde{w}_l(m\tau)=w_l(m\tau)+\xi_l(m\tau)\qquad(l=1,\ldots,N),\qquad(261)$$

где $\tilde{w}_l$ и $w_l$ введены в условии леммы. Тогда $\xi_l(m\tau)=0$ при $m=0, 1, \ldots, q-1$ и функции $\xi_l(m\tau)$ $(l=1, 2, \ldots, N)$ образуют решение системы

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t\xi_l=\beta a_l\xi_l+\beta\sum_{j=1}^{N}b_{l_j}(w_j+\xi_j). \tag{262}$$

Рассматривая суммы в правых частях (262) как свободные члены и воспользовавшись леммой 1 из § 18, можно написать

$$\xi_l(m\tau)=\frac{\tau}{c_{q-m_0}}\beta\sum_{s=m_0}^{m}w_l^{(s)}(m\tau)\sum_{j=1}^{N}b_{l_j}[w_j(s\tau)+{}_j(s\tau)]. \tag{263}$$

При $\beta=0$ получим, что $\xi_l(m\tau)\equiv 0$. Рассмотрим случай $\beta\neq 0$. Введем обозначения

$$M_T=\max_{j=1,\ldots,N}\max_{0\leqslant m\tau\leqslant T}|\xi_j(m\tau)| \quad \text{и} \quad \eta_1=\frac{N\eta}{c_{q-m_0}}.$$

Тогда из (263), (260) и (257) для $m\tau\leqslant T$ следует

$$|\xi_l(m\tau)|\leqslant\frac{\tau\beta}{c_{q-m_0}}\sum_{s=m_0}^{m}M|1-d\beta\tau|^{m-s}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{N}|b_{l_j}|(M\max_r\max_j|w_j(r\tau)|+M_T)\leqslant$$
$$\leqslant\tau\beta\eta_1 M(M\max_r\max_j|w_j(r\tau)|+M_T)\sum_{s=m_0}^{m}|1-d\beta\tau|^{m-s}\leqslant$$
$$\leqslant\tau\beta\eta_1 M(M\max_r\max_j|w_j(r\tau)|+M_T)\frac{1}{1-|1-d\beta\tau|}$$
$$(r=0, \ldots, q-1;\ l=1, \ldots, N;\ j=1, \ldots, N). \tag{264}$$

Правая часть неравенства (264) не зависит от $l$ и от $m$, $m\tau<T$. Поэтому в левой части (264) можно написать $M_T$ вместо $|\xi_l|$. Кроме того, в силу неравенств (257) можно написать:

$$|1-d\beta\tau|=1-d\beta_1\tau,$$

где $\beta_1 > 0$ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{\beta}{\beta_1} < \frac{2}{\varepsilon}$. Поэтому из (264) следует

$$M_T \leqslant \frac{2M\eta_1}{\varepsilon}\left(M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |w_j(r\tau)| + M_T\right).$$

Решая это неравенство относительно $M_T$, получим

$$M_T \leqslant \frac{2M^2\eta_1}{\varepsilon - 2M\eta_1} \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j-1,\ldots,N} |w_j(r\tau)|.$$

Выбирая $\eta$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $2M\eta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, можем написать

$$M_T \leqslant M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |w_j(r\tau)|. \tag{265}$$

Тогда из (261), (256) и (265) получим

$$|\tilde{w}_l(m\tau)| \leqslant |w_l(m\tau)| + |\xi_l(m\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant 2M \max_{r=0,\ldots,q-1} \max_{j=1,\ldots,N} |\tilde{w}_j(r\tau)|,$$

что и требовалось.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=-m_0}^{q-m_0} c_k\lambda^k = \tilde{\alpha}^p\gamma_l\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right), \tag{266}$$

где $\gamma_l$ — корень определителя матрицы (252). Обозначим через $\lambda_{l1}, \ldots, \lambda_{lq}$ корни уравнения (266) ($l = 1, 2, \ldots, N$).

Теорема 17. *Пусть можно подобрать такие числа $d > 0$ и $\varepsilon > 0$, что при всех вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и достаточно малых $\tau$ выполняются неравенства*

$$|\lambda_{lj}| < |1 - d\tilde{\alpha}^p\tau| \quad (l = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, q),$$
$$|\lambda_{li} - \lambda_{lj}| > \varepsilon \quad (l = 1, 2, \ldots, N;\ i, j = 1, 2, \ldots, q;\ i \neq j),$$
$$-1 + \varepsilon < 1 - d\tilde{\alpha}^p\tau.$$

*Тогда система разностных уравнений* (204), *аппроксимирующая систему* (202), *которая в свою очередь получилась из p-параболической системы* (201), *как это описано в начале* § 16, *устойчива по начальным условиям.*

Доказательство. Проверим выполнение двух условий устойчивости, изложенных перед леммой. Функции $w_{hj}^{kr}$, $(j=1, 2, \ldots, N)$, образующие решение системы уравнений $\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t w_j = \tilde{\alpha}^p \gamma_j\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right) w_j$ и удовлетворяющие начальным условиям (225), в силу леммы 3 из § 18 удовлетворяют неравенству

$$|w_{hj}^{kr}(m\tau)| < M\,|1 - d\tilde{\alpha}^p\tau|^m.$$

Поэтому в силу только что доказанной леммы можно подобрать столь малое $\eta > 0$, что функции $\tilde{w}_{hj}^{kr}$, образующие решение задачи (224), (225), остаются ограниченными по абсолютной величине некоторой постоянной $A$, не зависящей от $\tau$ и вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Таким образом, первое из двух условий устойчивости, упоминавшихся в начале доказательства теоремы, выполнено. Выполнение второго условия устойчивости проверяется точно так же, как это делалось при доказательстве теоремы 16.

Следствие. *Положим в системе разностных уравнений* (204)

$$\frac{1}{\tau}\bar{\Delta}_t u(t, x) = \frac{1}{\tau}[u(t+\tau, x) - u(t, x)]$$

*и подчиним шаги сетки $\tau$ и $h$ соотношению*

$$\frac{\tau}{h^p} < \frac{2\delta}{\sqrt{n^p}}\left[\max_{k=1,\ldots,N}\ \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_k\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|\right]^{-2} - \varepsilon, \quad (267)$$

*где $\delta > 0$ введено при определении параболичности, а $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная. Тогда система* (204), *аппроксимирующая систему* (202), *которая в свою очередь получена из $p$-параболической системы* (201) *указанным в начале* § 16 *способом, будет устойчива по начальным условиям.*

Доказательство. Убедимся в выполнении условий теоремы. Уравнение (266) примет вид

$$\frac{1}{\tau}(\lambda - 1) = \tilde{\alpha}^p\gamma_l\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha}\right). \quad (268)$$

В данном случае $q=1$, и уравнение (268) имеет при каждом $l\,(l=1, 2, \ldots, N)$ только один корень, который мы будем обозначать $\lambda_l$. Из (268) получим

$$\lambda_l = 1 + \tau\tilde{\alpha}^p \gamma_l\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha}\right). \tag{269}$$

Легко видеть, что в силу предположения параболичности системы (201) корень $\lambda_l$ лежит на комплексной плоскости $\lambda$ в области $K$, которая содержит начало координат и ограничена симметричными относительно вещественной оси лучами, проведенными из точки $\lambda = 1$ и составляющими с отрицательным направлением вещественной оси углы $\varphi$, косинус которых выражается равенством

$$\cos\varphi = \delta\left[\max_{l=1,\ldots,N}\ \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|\right]^{-1}. \tag{270}$$

Переходим к оценке $|\lambda_l|$. Проведем ее сначала для значений $\tau\tilde{\alpha}^p$, удовлетворяющих неравенству

$$\tau\tilde{\alpha}^p < \cos\varphi\left[\max_{l=1,\ldots,N}\ \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|\right]^{-1}. \tag{271}$$

Получим

$$\begin{aligned} |\lambda_l| &\leqslant \sqrt{1 + [\tau\tilde{\alpha}^p|\gamma_l|]^2 - 2\tau\tilde{\alpha}^p\cos\varphi\,|\gamma_l|} = \\ &= \sqrt{1 - \tau\tilde{\alpha}^p|\gamma_l|(2\cos\varphi - \tau\tilde{\alpha}^p|\gamma_l|)} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{1 - \tau\tilde{\alpha}^p\cos\varphi\,|\gamma_l|} \leqslant \\ &\leqslant 1 - \tau\tilde{\alpha}^p\frac{1}{2}\cos\varphi \min_{l=1,\ldots,N}\ \min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|. \end{aligned} \tag{272}$$

Пусть теперь произведение $\tau\tilde{\alpha}^p$ не удовлетворяет неравенству (271), и выполнено неравенство

$$\tau\tilde{\alpha}^p \geqslant \cos\varphi\left[\max_{l=1,\ldots,N}\ \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|\right]^{-1}. \tag{273}$$

В этом случае из (269) следует, что корень $\lambda_l$ $(l=1, \ldots, N)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |\lambda_l - 1| &= \left|\tau\tilde{\alpha}^p\gamma_l\left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}, \ldots, \frac{\tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}}\right)\right| \geqslant \\ &\geqslant \cos\varphi\left[\max_{l=1,\ldots,N}\ \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|\right]^{-1}\times \\ &\times \min_{l=1,\ldots,N}\ \min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right| = R_1. \end{aligned} \tag{247}$$

С другой стороны, учитывая, что

$$\tau\tilde{\alpha}^p = \tau\left[\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1 h}{h}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin\alpha_n h}{h}\right)^2}\,\right]^p \leqslant \frac{\tau\sqrt{n^p}}{h^p}$$

из (269), используя (267), получаем

$$|\lambda_l - 1| = |\tau\tilde{\alpha}^p\gamma_l| \leqslant 2\cos\varphi - \sqrt{n^p}\,\varepsilon = R_2. \qquad (275)$$

Обозначим через $G$ область, являющуюся пересечением областей $K$, $|\lambda - 1| > R_1$, $|\lambda - 1| < R_2$. Область $G$ лежит внутри единичного круга $|\lambda| < 1$ на положительном расстоянии от его границ и содержит в силу (274) и (275) корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, если выполнено неравенство (273).

Очевидно ввиду этого, что при условии (273) можно подобрать такую постоянную $d_1$, чтобы выполнялись неравенства

$$|\lambda| < |1 - d_1\tau\tilde{\alpha}^p|, \qquad -1 + \varepsilon < 1 - d_1\tau\alpha^p. \qquad (276)$$

Сопоставляя (276) и неравенство (272), которое справедливо при условии (271), убеждаемся, что условие теоремы выполняется, если в качестве $d$ взять число, определяемое равенством

$$d = \min\left(d_1, \frac{1}{2}\cos\varphi \min_{l=1,\ldots,N} \min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\gamma_l\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\right|\right).$$

Следствие доказано.

В работе [35] получены несколько более общие результаты, чем в этой главе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы докажем здесь две теоремы об экстраполяции и интерполяции функций, которые могут быть полезны, в частности, при исследовании свойств разностных уравнений. Из построений, которые мы проводим для доказательства теоремы об экстраполяции функций, заданных на сетке (теоремы 1), следует справедливость леммы 2 гл. 5, § 17.

Для того чтобы сформулировать теорему 1 об экстраполяции, рассмотрим какую-нибудь ограниченную функцию $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$, определенную в точках $(x_1, \ldots, x_n)$ сетки, координаты которых заданы равенствами $x_i = m_i h$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $m_i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Обозначим через $C_k(\tilde{\psi})$ числа, определенные равенствами

$$C_k(\tilde{\psi}) = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \left| \frac{1}{h^k} \Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}} \tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n) \right|, \qquad (1)$$

где разности $\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}}$ введены равенствами

$$\Delta_{x_i^0} f = f \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta_{x_i} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i} \ldots x_n^{k_n}} f = \Delta_{x_i} \Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i - 1} \ldots x_n^{k_n}} f \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема 1. *Для всякой ограниченной функции* $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$, *заданной на сетке, и любого натурального числа* $p$ *найдется функция* $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, *обладающая следующими тремя свойствами:*

1) *функция* $\psi$ *определена во всем пространстве* $x_1, \ldots, x_n$ *и совпадает с* $\tilde{\psi}$ *в точках сетки;*

2) *функция* $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет непрерывные производные до порядка* $p$ *включительно по всевозможным комбинациям* $x_1, \ldots, x_n$;

3) *справедливы неравенства*

$$\left| \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant C(p)\, C_k(\tilde{\psi}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p), \tag{2}$$

*где* $C(p)$ — *некоторое число, не зависящее от* $h$ и $\tilde{\psi}$.

Доказательство. Отметим, что постоянные $C_k(\tilde{\psi})$, определенные равенствами (1), существуют при всех целых неотрицательных $k$, причем

$$C_{k+r}(\tilde{\psi}) \leqslant \frac{2^r C_k(\tilde{\psi})}{h^r} \qquad (r = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Это непосредственно следует из существования $C_0(\tilde{\psi})$ (функция $\tilde{\psi}$ ограничена) и очевидного неравенства

$$\left| \frac{1}{h} \Delta_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n) \right| \leqslant \frac{2}{h} \sup |f(x_1, \ldots, x_n)|,$$

имеющего место для всякой функции $f$.

Переходим к построению функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Обозначим через $P_i(\tilde{\psi}, x)$ $(i = 0, 1)$ многочлен степени не выше $p$, который совпадает с функцией $\tilde{\psi}(x)$ в $p+1$ точках $x = ih, (i+1)h, \ldots, (i+p)h$; через $Q(\tilde{\psi}, x)$ — многочлен степени не выше $2p+1$, удовлетворяющий условиям

$$\frac{d^k Q(\tilde{\psi}, 0)}{dx^k} = \frac{d^k P_0(\tilde{\psi}, 0)}{dx^k} \quad \text{и} \quad \frac{d^k Q(\tilde{\psi}, h)}{dx^k} = \frac{d^k P_1(\tilde{\psi}, h)}{dx^k} \tag{4}$$

$$(k = 0, \ldots, p).$$

Известно из теории интерполяции ([53], стр. 57, 84, 85), что многочлены $P_i$ $(i = 0, 1)$ и $Q$ существуют и поставленными условиями определены однозначно.

Определим $\psi(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant h$ равенством $\psi(x) \equiv Q(\tilde{\psi}, x)$. На отрезках

$$mh \leqslant x \leqslant (m+1)h$$

($m$ — целое) функция $\psi(x)$ строится точно так же, если за начало отсчета на прямой принять точку $x=mh$.

Пусть L — оператор, который указанным образом переводит функцию $\tilde{f}(x)$ одного переменного, определенную в точках $x=mh$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) в функцию $f(x)$, определенную всюду:

$$\mathrm{L}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x). \tag{5}$$

Обозначим через $\mathrm{L}_i$ оператор L в том случае, когда он применяется к функции $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ одной переменной $x_i$, $x_i=mh$, остальные аргументы которой рассматриваются как параметры. Мы покажем, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, определенная равенством

$$\psi(x_1, \ldots, x_n)=\mathrm{L}_n\mathrm{L}_{n-1}\ldots\mathrm{L}_1\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n), \tag{6}$$

и есть та функция, существование которой утверждается в теореме. Выполнение первого требования, предъявляемого к функции $\psi$ в условии теоремы, следует из построения.

Переходим к проверке выполнения двух других требований, предъявляемых к $\psi$.

Введем функцию $R(\tilde{\psi}, x)$, положив

$$R(\tilde{\psi}, x)=Q(\tilde{\psi}, x)-P_0(\tilde{\psi}, x). \tag{7}$$

Отметим, что при всех $x$ выполнены равенства

$$R(\tilde{\psi}_1+\tilde{\psi}_2, x)=R(\tilde{\psi}_1, x)+R(\tilde{\psi}_2, x) \text{ и } R(\lambda\tilde{\psi}, x)=\lambda R(\tilde{\psi}, x), \tag{8}$$

где $\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$ — любые функции, определенные в точках $x=0, h, \ldots, (p+1)h$, а $\lambda$ — любое число. Равенства (8) следуют из аналогичных равенств для $P_0$ и $Q$, которые легко проверить, и тождества (7). Проверим, например, что

$$P_0(\tilde{\psi}_1+\tilde{\psi}_2, x)=P_0(\tilde{\psi}_1, x)+P_0(\tilde{\psi}_2, x). \tag{9}$$

В левой и правой частях последнего равенства стоят многочлены степени не выше $p+1$, совпадающие в $p+1$ точке $x=0, h, \ldots, ph$, где они принимают значения $\tilde{\psi}_1(x)+\tilde{\psi}_2(x)$. Ввиду единственности такого многочлена равенство (9) сохраняется при всех $x$.

Равенства (8) означают, что $R(\tilde{\psi}, x)$ при каждом фиксированном $x$ есть линейный функционал в $(p+2)$-мерном пространстве функций $\tilde{\psi}$, определенных в точках $x=0$, $h, \ldots, (p+1)h$. Поэтому $R(\tilde{\psi}, x)$ можно записать в следующем виде (см., например, [6], § 4):

$$R(\tilde{\psi}, x) = \sum_{m=0}^{p+1} f_m(x)\,\tilde{\psi}(mh), \tag{10}$$

где $f_m(x)$ $(m=0, 1, \ldots, p+1)$ — некоторые функции, которые зависят от $x$, $h$ и $p$, но не зависят от $\tilde{\psi}$.

Выразим значения $\tilde{\psi}(mx)$ $(m=0, 1, \ldots, p+1)$ в виде линейных комбинаций разностей $\Delta_x{}^r\tilde{\psi}(0)$ $(r=0, 1, \ldots, p+1)$. Тогда формула (10) примет вид

$$R(\tilde{\psi}, x) = \sum_{m=0}^{p+1} r_m(x)\,\Delta_x{}^m\tilde{\psi}(0), \tag{11}$$

где $r_m(x)$ — некоторые функции, зависящие только от $x$, $h$ и $p$, но не зависящие от $\tilde{\psi}$.

Покажем, что

$$r_m(x) \equiv 0 \qquad (m=0, 1, \ldots, p). \tag{12}$$

Действительно, выберем функцию $\tilde{\varphi}(x)$ таким образом, чтобы значение ее при $x=(p+1)h$ совпадало со значением многочлена $P_0(\tilde{\varphi}, x)$, построенного, как указано выше. В этом случае

$$P_0(\tilde{\varphi}, x) \equiv P_1(\tilde{\varphi}, x) \equiv Q(\tilde{\varphi}, x) \text{ и } \Delta_x{}^{p+1}\tilde{\varphi}(0) = 0. \tag{13}$$

В силу (7), (11) и тождеств (13) имеем

$$R(\tilde{\varphi}, x) \equiv \sum_{m=0}^{p} r_m(x)\,\Delta_x{}^m\tilde{\varphi}(0) \equiv 0. \tag{14}$$

Подбирая $\tilde{\varphi}(x)$, можно добиться, чтобы величины $\Delta_x{}^m\tilde{\varphi}(0)$ $(m=0, 1, \ldots, p)$ принимали любые наперед заданные значения. Поэтому из тождества (14) следует справедливость равенств (12).

Выясним вид функции $r_{p+1}(x)$. Положим для этого

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x=0,\ h,\ \ldots,\ ph,\\ 1 & \text{при} \quad x=(p+1)h.\end{cases}$$

Тогда $P_0(\tilde{\varphi},\ x)\equiv 0$, и из (7), (11), (12) и тождества (14) следует

$$r_{p+1}(x)\,\Delta_{x^{p+1}}\tilde{\varphi}(0)=Q(\tilde{\varphi},\ x),$$

причем $\Delta_{x^{p+1}}\tilde{\varphi}(0)=1$, так что

$$r_{p+1}(x)=Q(\tilde{\varphi},\ x). \tag{15}$$

Многочлен $P_1(\tilde{\varphi},\ x)$ в этом случае имеет вид

$$P_1(\tilde{\varphi},\ x)=\frac{1}{h^p p!}(x-h)(x-2h)\ldots(x-ph), \tag{16}$$

что проверяется непосредственно. Можно проверить непосредственно (см. также [9], стр. 84, 85), что многочлен $Q(\tilde{\varphi},\ x)$ в этом случае имеет вид

$$r_{p+1}(x)=Q(\tilde{\varphi},\ x)=\frac{A}{h^{(p+1)^2}}\times$$
$$\times\begin{vmatrix} 0 & x^{p+1} & x^{p+2} & \ldots & x^{2p+1}\\ P_1(\tilde{\varphi},\ h) & h^{p+1} & h^{p+2} & \ldots & h^{2p+1}\\ P_1'(\tilde{\varphi},\ h) & (p+1)h^p & (p+2)h^{p+1} & \ldots & (2p+1)h^{2p}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ P_1^{(p)}(\tilde{\varphi},\ h) & (p+1)!\,h & \dfrac{(p+2)!}{2!}h^2 & \ldots & \dfrac{(2p+1)!}{p!}h^{p+1}\end{vmatrix}, \tag{17}$$

где $A$ — некоторая постоянная, зависящая от $p$, но не зависящая от $h$ и $x$. Подставляя в определитель (17) значения

$$\left.\frac{d^kP_1(\tilde{\varphi},\ x)}{dx^k}\right|_{x=h} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ p),$$

найденные из (16), легко убедиться, что определитель представляет собою однородный многочлен степени $(p+1)^2$ относительно $x$ и $h$ и многочлен степени $2p+1$ относительно $x$.

Поэтому из (17) следует

$$r_{p+1}(x) = q_{p+1}(u), \tag{18}$$

где $q_{p+1}$ — некоторый многочлен от $u$ степени $2p+1$, а $u = \frac{x}{h}$. Таким образом, из (11), (12) и (18) получаем

$$R(\tilde{\psi},\ x) = q_{p+1}(u)\,\Delta_x{}^{p+1}\tilde{\psi}(0). \tag{19}$$

По интерполяционной формуле Ньютона ([9], стр. 57) имеем

$$P_0(\tilde{\psi},\ x) = \sum_{m=0}^{p} \frac{\Delta_x{}^m\tilde{\psi}(0)}{m!} u(u-1)\ldots[u-(m-1)] \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=0}^{p} q_m(u)\,\Delta_x{}^m\tilde{\psi}(0), \tag{20}$$

где $u = \frac{x}{h}$ и $q_m(u) = \frac{1}{m!}u(u-1)\ldots[u-(m-1)]$.

Из (7), (19) и (20) следует

$$Q(\tilde{\psi},\ x) = \sum_{m=0}^{p} q_m(u)\,\Delta_x{}^m\tilde{\psi}(0), \tag{21}$$

где $q_m(u)$ — многочлены, коэффициенты которых могут зависеть от $p$, но не зависят от $\tilde{\psi}$ и $h$.

Таким образом, в силу (5) для $0 \leqslant x_i \leqslant h$ справедливо символическое равенство

$$\mathrm{L}_i = \sum_{m=0}^{p+1} q_m(u_i)\,\Delta_{x_i}^m \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{22}$$

которое превращается в обычное равенство функций на отрезке $0 \leqslant x_i \leqslant h$ (остальные аргументы рассматриваем как параметры), если слева под знаком оператора $L_i$ написать $\tilde{\psi}(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$, а справа под знаками разностей написать $\tilde{\psi}(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ 0,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)$.

По построению оператора L функция $\mathrm{L}\tilde{\psi}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $p$ включительно при всех $x$. Действительно, внутри каждого отрезка $mh \leqslant x \leqslant (m+1)h$ эта функция есть многочлен, а в концах этих отрезков ее производные до порядка $p$ непрерывны в силу равенств (4), написанных для общего конца двух соседних отрезков. Поэтому функция $L_i\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные производные по $x_i$ до порядка $p$ включительно. Из (22) следует, что на отрезке $0 \leqslant x_i \leqslant h$ справедливы символические равенства

$$\frac{\partial^k}{x_i^k} L_i = \frac{1}{h^k} \sum_{m=0}^{p+1} q_m^{(k)}(u_i) \Delta_{x_i}^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (23)$$

Легко проверить, что для умножения (последовательного применения) двух операторов вида $q_m(u_i)\Delta_{x_i}^k$ с различными индексами $i$ имеют место обычные свойства умножения чисел: перестановочность, распределительность и ассоциативность. Поэтому операторы вида (23), соответствующие различным значениям $i$, перестановочны, причем при их перемножении (последовательном применении) символические многочлены, стоящие в правых частях (23), перемножаются по правилам умножения обычных многочленов. Перестановочность операторов $\frac{\partial^{k_i} L_i}{\partial x_i^{k_i}}$ и $\frac{\partial^{k_j} L_j}{\partial x_j^{k_j}}$, т. е. равенство

$$\frac{\partial^{k_i} L_i}{\partial x_i^{k_i}} \frac{\partial^{k_j} L_j}{\partial x_j^{k_j}} \tilde{\psi} = \frac{\partial^{k_j} L_j}{\partial x_j^{k_j}} \frac{\partial^{k_i} L_i}{\partial x_i^{k_i}} \tilde{\psi}$$

доказано нами для всех значений $x_i$ и $x_j$, а не только для $0 \leqslant x_i \leqslant h$, $0 \leqslant x_j \leqslant h$, так как в наших рассмотрениях отрезки $0 \leqslant x_i \leqslant h$, $0 \leqslant x_j \leqslant h$ можно заменить отрезками $m_i h \leqslant x_i \leqslant (m_i + 1) h$, $m_j h \leqslant x_j \leqslant (m_j + 1) h$, где $m_i$ и $m_j$ — любые целые числа.

Проверим теперь, что функция $\psi$, определенная равенством (6), удовлетворяет второму требованию, предъявляемому к $\psi$ в условии теоремы. При этом мы используем доказанную перестановочность операторов вида

$$\frac{\partial^{k_i} L_i}{\partial x_i^{k_i}}, \qquad \frac{\partial^{k_j} L_j}{\partial x_j^{k_j}} \qquad (i \neq j).$$

Имеем

$$\frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \equiv \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} L_n L_{n-1} \ldots L_1 \tilde{\psi} =$$

$$= \frac{\partial^{k-k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}} \cdot \left( \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}} L_n \right) L_{n-1} \ldots L_1 \tilde{\psi} =$$

$$= \frac{\partial^{k-k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}} L_{n-1} \ldots L_1 \left( \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}} L_n \right) \tilde{\psi} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\partial^{k_1} L_1}{\partial x_1^{k_1}} \cdot \frac{\partial^{k_2} L_2}{\partial x_2^{k_2}} \ldots \frac{\partial^{k_n} L_n}{\partial x_n^{k_n}} \tilde{\psi}. \qquad (24)$$

Из (24) и (23) следует, что функция $\frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ есть линейная комбинация выражений вида

$$\frac{1}{h^k} q_{m_1}^{(k_1)}(u_1) \ldots q_{m_n}^{(k_n)}(u_n) \Delta_{x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}} \tilde{\psi}(0, \ldots, 0). \qquad (25)$$

Число членов этой линейной комбинации и ее коэффициенты зависят только от $p$. Значения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ заключены между нулем и единицей. Поэтому выражения [25] по абсолютной величине не больше чем число

$$B \left| \frac{\Delta_{x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}} \tilde{\psi}(0, \ldots, 0)}{h^{m_1+\ldots+m_n}} \right| h^{m_1+\ldots+m_n-k}, \qquad (26)$$

где постоянная $B$ зависит только от $p$. Выражение (26) в силу (3) оценивается величиной

$$BC_{m_1+\ldots+m_n}(\tilde{\psi}) h^{m_1+\ldots+m_n-k} \leqslant$$

$$\leqslant B \frac{2^{m_1+\ldots+m_n-k} C_k(\tilde{\psi})}{h^{m_1+\ldots+m_n-k}} h^{m_1+\ldots+m_n-k} = B' C_k(\tilde{\psi}),$$

откуда и следует справедливость неравенства (2), поскольку все проведенные оценки, очевидно, справедливы не только в случае, если $x_1, \ldots, x_n$ меняются в кубике $0 \leqslant x_i \leqslant h$, но и в том случае, когда они меняются в любом другом кубике $m_i h \leqslant x_i \leqslant (m_i + 1) h$ ($m_i$ — целые числа). Теорема доказана.

Замечание. Легко проверить, используя формулу Тейлора, что если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, то справедливо неравенство

$$\sup_x \left| \frac{1}{h^k} \Delta_{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}} f(x_1, \ldots, x_n) \right| \leqslant \sup_x \left| \frac{\partial^k f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|.$$

Поэтому для функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, определенной равенством (6), имеем

$$C_k(\tilde{\psi}) \leqslant \sup_x \left| \frac{\partial^k \psi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|. \qquad (27)$$

Из (27) следует, что неравенство (2) нельзя существенно усилить, заменив в правой части этого неравенства $C_k$ на $o(C_k)$ при больших $C_k$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет всевозможные непрерывные производные до некоторого порядка $q$ включительно. Обозначим через $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ функцию, которая определена только в точках $(m_1h, \ldots, m_nh)$ сетки и совпадает в этих точках с функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$. Зададим натуральное $p$, $p \geqslant q$, и построим функцию*

$$f_{hp}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{L}_n \mathrm{L}_{n-1} \ldots \mathrm{L}_1 \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n),$$

*имеющую непрерывные производные до порядка $p$ включительно, воспользовавшись для этого формулой* (6) *из предыдущей теоремы.*

*Тогда справедливы неравенства*

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, \ldots, x_n) - \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} f_{hp}(x_1, \ldots, x_n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{q-k} C(p) \sup_{x_1, \ldots, x_n} \max_{q_1 + \ldots + q_n = q} \left| \frac{\partial^q f}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} \right| \quad (k < q), \quad (28)$$

*где $C(p)$ зависит только от $p$, но не зависит от $h$ и $f$.*

Доказательство. Для краткости записей доказательство проведем в предположении, что функция $f$ зависит только от одной переменной $x$ $(n = 1)$. В общем случае оно проводится аналогично. Операцию перехода от функции $f$

к функции $f_h$ обозначим через $[\quad]_h$. Легко видеть, что эта операция линейна и сохраняет многочлены, степень которых не превосходит $p$. Неравенства (28) достаточно доказать для отрезка $0 \leqslant x \leqslant h$, так как отрезки $mh \leqslant x \leqslant (m+1)h$ при всех целых $m$ равноправны.

По формуле Тейлора

$$f(x) = P(x) + R(x), \tag{29}$$

где

$$P(x) = \sum_{m=0}^{q-1} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m, \tag{30}$$

$$R(x) = \frac{f^{(q)}(\theta x)}{q!} x^q, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{31}$$

Далее,

$$[f]_h = [P(x)]_h + [R(x)]_h = P(x) + [R(x)]_h. \tag{32}$$

Разлагая $f^{(k)}(x)$ $(k < q)$ по формуле Тейлора, получим

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{q-k-1} \frac{f^{(k+m)}(0)}{m!} x^m + \frac{f^{(q)}(\theta_1 x)}{(q-k)!} x^{q-k} =$$

$$= \sum_{m=k}^{q-1} \frac{f^{(m)}(0)}{(m-k)!} x^{m-k} + \frac{f^{(q)}(\theta_1 x)}{(q-k)!} x^{q-k} =$$

$$= \frac{d^k}{dx^k} P(x) + \frac{f^{(q)}(\theta_1 x)}{(q-k)!} x^{q-k}, \qquad 0 < \theta_1 < 1. \tag{33}$$

Для $\frac{d^k}{dx^k}[f]_h$ из (32) имеем:

$$f_h^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}[f]_h = \frac{d^k}{dx^k} P(x) + \frac{d^k}{dx^k}[R]_h. \tag{34}$$

Вычтем из равенства (33) равенство (34) почленно. Получим

$$|f^{(k)}(x) - f_h^{(k)}(x)| = \left| \frac{f^{(q)}(\theta_1 x)}{(q-k)!} x^{q-k} - \frac{d^k}{dx^k}[R(x)]_h \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{f^{(q)}(\theta_1 x)}{(q-k)!} x^{q-k} \right| + \left| \frac{d^k}{dx^k}[R(x)]_h \right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{q-k} \sup_x |f^{(q)}(x)| + \left| \frac{d^k}{dx^k}[R(x)]_h \right|. \tag{35}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (35). Из (22) следует, что значения $[R(x)]_h$ на рассматриваемом отрезке $0 \leqslant x \leqslant h$ полностью определяются величинами $\Delta_{x^s} R(0)$ $(s = 0, 1, \ldots, p+1)$. Поэтому в качестве $C_k(R)$ в неравенстве (2), написанном для функции $R_h(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant h$, служит число $\left|\frac{1}{h^k} \Delta_x{}^k R(0)\right|$. Аналогично неравенству (3), используя (31), получим оценку

$$C_k(R) = \left|\frac{1}{h^k} \Delta_x{}^k R(0)\right| \leqslant 2^k \sup_x |f^{(q)}(x)|\, h^{q-k}. \tag{36}$$

Из (2) и (36) следует для $0 \leqslant x \leqslant h$

$$\left|\frac{d^k}{dx^k} [R(x)]_h\right| \leqslant h^{q-k} C(p) \sup_x |f^{(q)}(x)|. \tag{37}$$

Сопоставляя (35) и (37), получаем требуемое неравенство (28).

Доказанная теорема 2 означает, что построенный в теореме 1 способ экстраполяции функций, заданных на сетке, можно использовать так же, как сходящийся при $h \to 0$ процесс интерполяции функций по их значениям в точках сетки.

# ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


[1] Абрамов А. А., Об одном способе ускорения итерационных процессов, ДАН **74**, 6 (1950), 1051—1052.

[2] Берс Л. (Bers L.), On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type, Journ. Res. Nat. Bur. Standards **51**, 5 (1953), 229—236. РЖМат, 1954, 5578.

[3] Бирман М. Ш., Об одном варианте метода последовательных приближений, Вестник ЛГУ, 9 (1952), 69—76.

[4] О'Брайен Г. Г., Хайман М. А., Каплан С. (O'Brien G. G., Hyman M. A., Kaplan S.), A study of the numerical solution of partial differential equations, Journ. of Math. and Phys. **29**, 4 (1951), 223—251.

[5] Гальперн С. А., Задача Коши для уравнения типа С. Л. Соболева, УМН **8**, 5 (1953), 191—193.

[6] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1951.

[7] Гельфанд И. М., и Шилов Г. Е., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решений задачи Коши, УМН **8**, 6 (1953).

[8] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, 1952.

[9] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, издание второе, Гостехиздат, 1954.

[10] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН **3**, 6 (1948), 89—185.

[11] Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1950.

[12] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

[13] Крандалл С. Г. (Crandall S. H.), On a stability criterion for partial difference equations, Journ. Math. and Phys. **32**, 1 (1953), 80—81. РЖМат, 1954, 1812.

[14] Курант Р., Лакс П. (Courant R., Lax P.), On nonlinear partial differential equations with two independent variables, Communications on pure and appl. Mathem. 2 (1949), 255—273.

[15] Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., О разностных уравнениях математической физики, УМН, **8** (1940), 125—160.

[16] Ладыженская О. А., О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для гиперболических систем, ДАН **88**, 4 (1953), 607—610, РЖМат, 1954, 3831.

[17] Ладыженская О. А., Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей, Ученые записки ЛГУ, серия математических наук 23 (1952), № 144, стр. 192—246.
[18] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953, РЖМат, 3374 К.
[19] Леви Г. (Levy H.), On the convergence of solutions of difference equations, Studies and essays presented to R. Courant on his 60 th birthday, January 8, 1948. Interscience publischers, inc., New York.
[20] Люстерник Л. А., Замечания к численному решению краевых задач для уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 20 (1947), 49—64.
[21] Люстерник Л. А., О разностных аппроксимациях уравнения Лапласа, УМН 9, вып. 2 (1954), 191—194, РЖМат, 1955, 1473.
[22] Люстерник Л. А., Проблема Дирихле, УМН., вып. 8 (1940), 115—124.
[23] Мейман Н. Н., К теории уравнений в частных производных, ДАН 97, 4 (1954), 593—596. РЖМат, 1955, 3214.
[24] Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, Изд. иностр. литературы, 1955.
[25] Миньо Н. (Mignot N.), Sur les solutions numèriques du problème de la chaleur, C. R. Acad. Sci. 236, 18 (1953), 1735—1737. РЖМат, 1954, 2726.
[26] Миньо Н. (Mignot N.), Sur les solutions numériques du probléme de la chaleur, C. R. Acad. Sci. 236, 25 (1953), 2375—2377. РЖМат, 1954, 3458.
[27] Натансон И. П., К теории приближенного решения уравнений, Ученые записки Ленинград. гос. пед. ин-та 64 (1948), 3—8
[28] Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1950.
[29] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1953.
[30] Петровский И. Г., Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, УМН, вып. 8 (1940), 161—170.
[31] Петровский И. Г., О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюллетень МГУ, секция А, 1, вып. 7 (1938).
[32] Петровский И. Г., Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, Матем. сб, 2 (44), № 5 (1937), 815.
[33] Роте Э. (Rothe E.), Wärmeleitungsgleichung mit nichtconstanten Koeffizienten, Math. Ann. 104 (1931). 340—362.
[34] Рутисхаузер Г. (Rutishauser H.), Ueber die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, Zeits. angew. Math. und Phys. 3, 1 (1952), 65—74.
[35] Рябенький В. С., Об устойчивости конечноразностных схем и о применении метода конечных разностей к решению

задачи Коши для систем уравнений с частными производными, канд. дис., МГУ, 1952.

[36] Рябенький В. С., О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши, ДАН **86**, 6 (1952), 1071—1074.

[37] Саульев В. К., Доказательство сходимости собственных функций, получаемых методом сеток, УМН **9**, 4 (1954), 217—224.

[38] Соболев С. Л., Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений, УМН **9**, 3 (1954), 234—235.

[39] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики, Изв. АН СССР, сер. матем. **18**, 1 (1954), 3—50.

[40] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.

[41] Тихонов А. Н., Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных, Бюллетень МГУ, секция А, **1**, вып. 9 (1938).

[42] Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.

[43] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, **3**, 1948.

[44] Дю Фор Е. К., Франкел С. П., (Du Fort E. C., Frankel S. P.), Stability conditions in the numerical treatment of parabolic. differential equations. Math. Tables and other Aids Comput **7**, 43 (1953), 135—152. РЖМат, 1954, 4913.

[45] Франкел С. (Frankel S.), Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, Math. Tables and other Aaids Comput. **4** (1950), 3065—3075.

[46] Фридрихс К. и Леви Г. (Friedrichs K. und Levy H.), Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich der Lösung, Math. Ann. **99** (1928), 201—221.

[47] Шура-Бура М. Р., Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Прикл. мат. и мех. **16**, 5 (1952), 575—588.

[48] Эйдус Д. М., О решении краевых задач методом конечных разностей, ДАН **83**, 2 (1952), 191—194.

[49] Янг Д. (Young D.), Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 1 (1954), 92—111. РЖМат, 1955, 1953.

[50] Янг Д. (Young D.), On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices, Journ. Math. and Phys. **32**, 4 (1954), 243—255. РЖМат., 1954, 5782.

[51] Сборник: Simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues, U. S. departament of commerce nat. bür. of stand., applied math. series **29** (1953).

*Рябенький Виктор Соломонович*
и *Филиппов Алексей Федорович*

Об устойчивости разностных уравнений

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*
Корректор *И. С. Цветкова*

Сдано в набор 19/VII 1956 г. Подписано к печати 11/X 1956 г. Бумага $84\times108/_{32}$. Физ. печ. л. 5,38. Условн. печ. л. 8,81. Уч.-изд. л. 8,52. Тираж 6000 экз. Т-08768. Цена 4 р. 25 к. Заказ № 1336.

Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное
управление полиграфической промышленности
4-я тип. им. Евг. Соколовой
Ленинград, Измайловский пр., 29

Цена 4 р. 25 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956