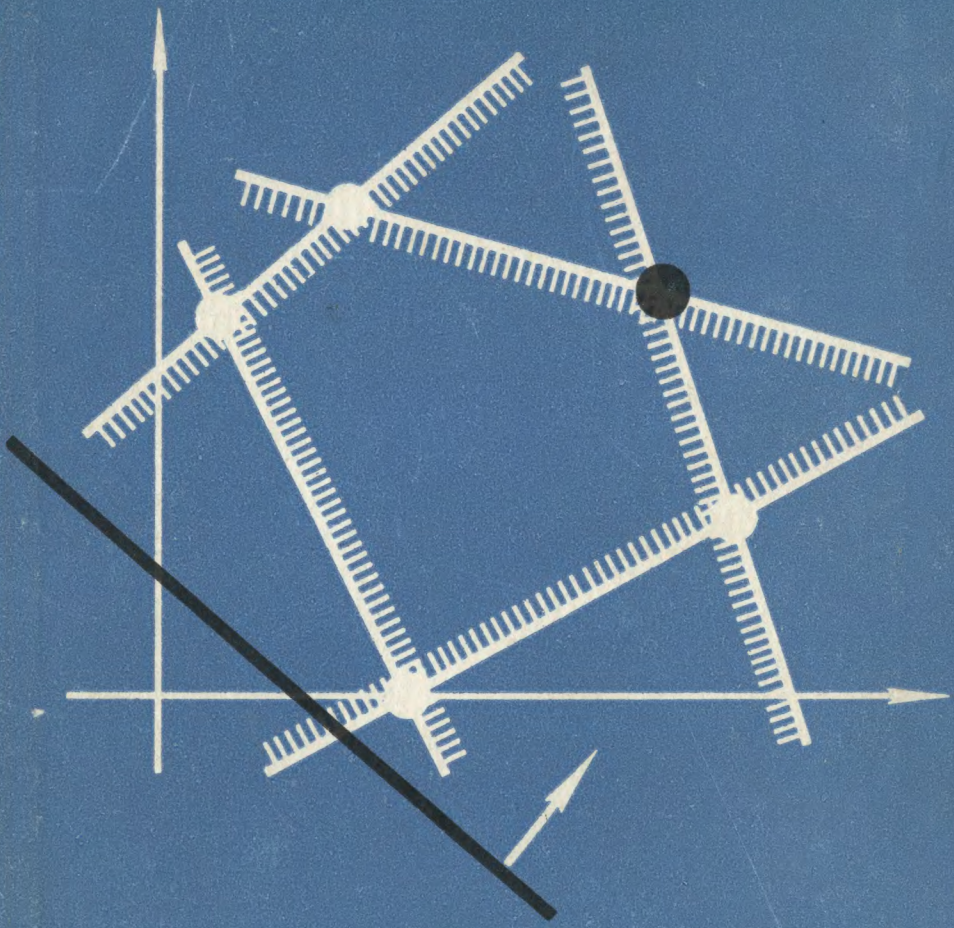

Ю. Л. ЗАСЛАВСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Ю. Л. ЗАСЛАВСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Под редакцией
Д. Б. ЮДИНА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов математических и экономических специальностей университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

518
З-36
УДК 519.95

Сборник задач по линейному программированию. Заславский Ю. Л.

Сборник содержит задачи и упражнения по курсу линейного программирования.

Большинству параграфов предшествуют теоретические вступления, в которых приводятся основные определения, формулировки теорем и разбираются типовые примеры. Многие задачи снабжены указаниями, некоторые — подробными решениями.

«Сборник» предназначается в качестве учебного пособия для студентов университетов, но может быть использован также в экономических и технических вузах.

Илл. 9, табл. 11.

Юрий Леонидович Заславский

Сборник задач
по линейному программированию

М., 1969 г., 256 стр. с илл.

Редактор *В. М. Гринберг*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 9/I 1969 г. Подписано к печати 22/V 1969 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 16. Условн. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 16,94. Тираж 48 000 экз. Т-06943. Цена книги 69 коп. Заказ № 305.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-2-3
181-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Линейное программирование прочно вошло в учебный курс механико-математических и экономических факультетов университетов и в программы ряда экономических и технических вузов. Линейное программирование — дисциплина, освоение которой не должно ограничиваться изучением основ теории условных экстремальных задач. Учет существенных факторов и отбор существенных ограничений требуют исследования многих моделей и численного решения (притом, как правило, вручную) многих задач. Качественный анализ моделей, их геометрическая интерпретация значительно сокращают количество вычислений.

Настоящий «Сборник» должен способствовать развитию у студентов навыков, необходимых для анализа и решения задач линейного программирования.

Ноябрь, 1968 г. *Д. Б. Юдин.*

ОТ АВТОРА

Предлагаемый «Сборник задач по линейному программированию» содержит задачи и упражнения, которые можно разбить на два типа:

1) задачи, предназначенные для уяснения основных моментов теории;

2) задачи на вычислительные методы.

В начале многих параграфов помещены введения. Они содержат сводку определений и теорем, используемых в данном параграфе, описание методов решения типовых задач. Часто подобный материал иллюстрируется числовыми примерами.

Многие из задач сопровождаются указаниями (номера таких задач отмечены одной звездочкой), некоторые — фрагментами решений или подробными решениями (их номера отмечены двумя звездочками).

При составлении «Сборника» автор использовал следующие источники:

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, Линейное программирование, Физматгиз, М., 1963.

2. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, Задачи и методы линейного программирования, «Сов. радио», М., 1964.

3. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», М., 1964.

4. Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, М., 1963.

5. Гасс, Линейное программирование (методы и приложения), Физматгиз, М., 1961.

6. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, М., 1962.

7. Г. Зойтендейк, Методы возможных направлений, ИЛ, М., 1963.

8. Дж. Данциг, Линейное программирование, его обобщения и применение, «Прогресс», М., 1966.

9. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева, Линейное и выпуклое программирование, «Наука», М., 1967.

10. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, Гостехиздат, М., 1957.

11. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, Гостехиздат, М., 1956.

12. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин, Новые направления в линейном программировании, «Сов. радио», М., 1966.

13. Матричные игры, сборник статей под редакцией Н. Н. Воробьева, Физматгиз, М., 1961.

Ноябрь, 1968 г. *Ю. Заславский*

ЗАДАЧИ

ГЛАВА 1

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. Определение выпуклого множества; крайние точки

Определение 1.1. *Множество $M \subset R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками A_1 и A_2 оно содержит точку*

$$A = \mu A_1 + (1-\mu) A_2, \qquad \text{где} \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Определение 1.2. *Точка A множества $N \subset R^n$ называется крайней, если не существует двух различных точек A_1 и A_2, принадлежащих N, таких, что*

$$A = \mu A_1 + (1-\mu) A_2, \qquad \text{где} \qquad 0 < \mu < 1.$$

В задачах **1.1 — 1.6** проверить, будут ли выпуклы данные множества.

1.1. Отрезок на прямой R^1.

1.2. Круг в пространстве R^3.

1.3. Шар без центра в R^3.

1.4. Отрезок и точка, лежащая вне его на плоскости R^2.

1.5. Два отрезка в R^2, имеющие одну общую точку.

1.6. Два треугольника в R^2, имеющие одну общую точку.

1.7. Сформулировать определение (позитивное) невыпуклого множества в R^n.

В задачах **1.8 — 1.17** множества $X \subset R^2$ состоят из точек $A = (x_1, x_2)$, координаты которых удовлетворяют заданным ограничениям. Выяснить, будут ли выпуклы эти множества.

1.8. $x_1 + 2x_2 \leqslant 1,$
$x_1 - 2x_2 \leqslant 0.$

1.9. $x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$x_1^2 \leqslant 1.$

1.10. $x_1 - x_2 = 2,$
$x_1^2 - x_2 \geqslant 0.$

1.11. $x_1^2 + x_2^2 = 1,$
$x_1^{10} + x_2^{10} \geqslant 4.$

1.12. $x_1 \geqslant 0,$
$x_2 \leqslant 1,$
$\sin x_1 \leqslant {}^1/_2.$

1.13. $x_1^2 + x_2^2 = 1,$
$x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1,$
$x_2 \geqslant 0.$

1.14. $x_1 + x_2 = 8,$
$2x_1 + 2x_2 = 15.$

1.15. $x_1^2 - x_2 = 0,$
$x_1^2 + x_2^3 = 0.$

1.16. $x_1 - x_2^2 \leqslant 0,$ $-x_1^2 + x_2 \leqslant 0.$

1.17. $x_1 + e^{x_2} \leqslant 0,$ $x_2 \leqslant 0.$

В задачах **1.18 — 1.21** определить значения параметра λ, при которых заданные в R^2 множества являются выпуклыми.

1.18. $\lambda(x_1 - x_2^2) = 0,$ $x_1 + x_2 = 1.$

1.19. $\lambda(x_1 - x_2^2) = 0,$ $x_1 + x_2 = \lambda.$

1.20. $x_1^2(\lambda^2 + 3\lambda + 2) - x_2 \geqslant 0.$

1.21. $e^{x_1}(\lambda^2 - 5\lambda + 6) - x_2(\lambda^2 + 2) \leqslant 0.$

1.22. Доказать, что определение 1.1 выпуклого множества эквивалентно следующему: множество $M \subset R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками A_1 и A_2 оно содержит точку

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

1.23. Доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств выпукло.

1.24. Будет ли выпуклой сумма конечного числа выпуклых множеств?

1.25. Может ли быть выпуклой сумма конечного числа выпуклых множеств?

1.26. Может ли быть выпуклым пересечение двух невыпуклых множеств?

1.27*. Известно, что сумма M двух выпуклых множеств M_1 и M_2 — выпуклое множество. Можно ли утверждать, что M_1 и M_2 имеют общую точку?

1.28. Доказать выпуклость непустого множества $M \subset R^n$, состоящего из точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$A_1X \leqslant B_1, \qquad A_2X = B_2,$$

A_1 — матрица размером $n \times m_1$; A_2 — матрица размером $n \times m_2$; $B_1 \in R^{m_1}$ — вектор; $B_2 \in R^{m_2}$ — вектор.

1.29*. Доказать, что на плоскости многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда каждый из его внутренних углов меньше π.

1.30*. Для выпуклости множества M необходимо и достаточно, чтобы для любых точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$, принадлежащих M, и чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ таких, что $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, точка $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$ также принадлежала M.

1.31. Доказать, что крайняя точка выпуклого множества является его граничной точкой. Верно ли обратное утверждение?

1.32. Описать все выпуклые множества, состоящие только из крайних точек.

1.33. Может ли у выпуклого множества быть изолированная граничная точка?

1.34.** Пусть A_0 — точка, принадлежащая выпуклому множеству $M \subset R^n$, наиболее удаленная от точки $A_1 \in R^n$ (A_1 может не принадлежать M). Доказать, что A_0 — крайняя точка множества M.

1.35*. Доказать (не пользуясь теоремой о представлении), что выпуклое замкнутое ограниченное множество имеет крайнюю точку.

1.36*. Доказать, что выпуклое замкнутое ограниченное множество, содержащее не менее двух точек, содержит по крайней мере две крайние точки.

1.37. Доказать, что утверждение предыдущей задачи не сохраняется, если заменить две точки тремя точками, т. е. существует выпуклое замкнутое ограниченное множество, состоящее не менее чем из трех точек, но число крайних точек которого не больше двух.

§ 2. Размерность выпуклого множества

Определение 1.3. *Выпуклое множество M имеет размерность ρ, если оно содержится в некотором ρ-мерном линейном многообразии и не может принадлежать линейному многообразию размерности, меньшей чем ρ.*

Два различных определения линейного многообразия порождают два эквивалентных определения размерности выпуклого множества.

Определение 1.3а. *Размерность выпуклого множества $M \subset R^n$ равна $\rho = n - r$, где r — максимальное число линейно независимых гиперплоскостей, общая часть которых содержит M.*

Определение 1.3б. *Размерность выпуклого множества M равна минимальному числу ρ линейно независимых векторов $X_1, X_2, \ldots, X_\rho$ таких, что M содержится в совокупности точек*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{\rho} a_i X_i,$$

где $X_0 \in M$, а $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ — произвольные числа.

В задачах **1.38** — **1.43** определить размерность выпуклых множеств, ограничения которых заданы условиями.

1.38. $x_1 + x_2 \leqslant 1.$

1.39. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 &= 0, \\ x_1 - x_2 &\leqslant -1. \end{aligned}$

1.40. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$

1.41. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1.$

1.42. $\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 &= 1. \end{aligned}$

1.43. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leqslant 2. \end{aligned}$

1.44. Определить значение λ, при котором следующие выпуклые множества в R^2 имеют размерность $\rho=1$:

а) $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$, $\lambda x_1+x_2=1$;

б) $-x_1^2+x_2\geqslant 0$, $x_1^2+(x_2-\lambda)^2\leqslant 1$, $x_1=\lambda$.

1.45. Определить функцию $\rho(\lambda)$ (размерность выпуклого множества при фиксированном значении λ) для множества

$$-x_1^2+x_2\geqslant\lambda,$$

$$\lambda x_1+x_2=0.$$

1.46. Описать все одномерные выпуклые замкнутые множества.

1.47. Пусть дано выпуклое множество $M\subset R^n$, состоящее из точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим множество $M^k\subset R^n$, состоящее из точек $X^k=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$.

Доказать следующее утверждение:

а) при любом $k(1\leqslant k\leqslant n)$ множество M^k выпукло;

б)* если M^{k_0} обладает внутренней точкой в R^{k_0}, то множество M^k обладает внутренней точкой в R^k при $k<k_0$.

1.48*. Для выпуклого множества $M\subset R^n$ образуем множество $M_{e_k}=M\cap R^1_{e_k}$, где $R^1_{e_k}$ — подпространство, натянутое на вектор e_k. Доказать, что если при любом k множество M_{e_k} непусто и обладает внутренней точкой, то M также обладает внутренней точкой.

1.49. Для выпуклого множества $M\subset R^n$ определим множества $\tilde{M}_{e_k}$ как совокупности точек вида $(0, 0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0)$, где $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in M$.

Доказать, что, вообще говоря, $\tilde{M}_{e_k}\neq M_{e_k}$ (см. предыдущую задачу) и что утверждения предыдущей задачи не выполняются, если в условии M_{e_k} заменить на $\tilde{M}_{e_k}$.

1.50. Множество $M\subset R^n$ содержит n линейно независимых точек. Можно ли утверждать, что размерность M равняется n?

1.51*. Пусть M — выпуклое множество в R^n, содержащее нулевую точку и n линейно независимых точек. Доказать, что M обладает внутренними точками.

1.52*. Доказать, что размерность выпуклого множества совпадает с размерностью пространства, в котором оно лежит, тогда и только тогда, когда оно обладает внутренней точкой.

1.53. Точка X_0 называется относительно внутренней точкой выпуклого множества $M\subset R^n$, если она является внутренней точкой $M\subset L^\rho$, где L^ρ — линейное многообразие минимальной размерности, содержащее M. Привести примеры выпуклых множеств, обладающих относительно внутренней точкой, но не имеющих внутренних точек.

1.54.** Даны два выпуклых замкнутых ограниченных множества M_1 и M_2 ($M_1\not\subset M_2$, $M_2\not\subset M_1$), причем множество $M=M_1+M_2$ тоже выпукло. Доказать, что размерность M_1 равняется размерности M_2.

1.55*. Сохранится ли утверждение предыдущей задачи, если отказаться от замкнутости хотя бы одного из множеств?

1.56*. Множество M_1 состоит из объединения всех отрезков с концами в точке $X_0 \in R^n$ и точки X, где $X \in M$ — выпуклому замкнутому ограниченному множеству, лежащему в R^n. Доказать, что $\rho_1 \leqslant \rho + 1$, где ρ, ρ_1 — размерности множеств M, M_1 соответственно.

1.57*. Назовем размерностью выпуклого множества $M \subset R^n$ в точке $X_0 \in M$ число $\rho_\varepsilon(X_0)$, равное размерности множества $M(X_0, \varepsilon) = M \cap U_\varepsilon(X_0)$, где $U_\varepsilon(X_0)$ — ε-окрестность точки X_0. Доказать, что $\rho_\varepsilon(X) = \text{const}$ для $X \in M$, $\varepsilon > 0$.

§ 3. Выпуклые оболочки множеств

Определение 1.4. *Выпуклой оболочкой множества $N \subset R^n$ называется множество $[N]$, которое состоит из точек вида $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i$, где $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\{A_i\}_{i=1}^{s}$ — произвольная конечная система точек из множества N.*

1.58.** Доказать, что определение выпуклой оболочки множеств N эквивалентно следующему: $[N]$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее N. (В дальнейшем будем называть это определение вторым, в отличие от первого, принятого во введении.)

1.59. Используя первое определение, доказать, что выпуклая оболочка выпуклого множества совпадает с самим множеством.

В задачах **1.60** — **1.71** найти выпуклые оболочки множеств, принадлежащих плоскости R^2.

1.60. $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1.$

1.61. $x_1^2 + x_2^2 = 1.$

1.62. $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,$ $-x_1^2 + x_2 = 0.$

1.63. $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1,$ $x_1 x_2 = 0.$

1.64. $x_1^2 + x_2^2 = 1,$ $x_1 - x_2 = 0.$

1.65. $x_1^2 + x_2^2 = 1,$ $|x_1| \leqslant 1,$ $|x_2| \leqslant 1.$

1.66. $x_1^2 + x_2^2 = 1,$ $x_1^2 - x_2 = 1.$

1.67. $-e^{x_1} + x_2 \geqslant 0,$ $-|x_1| + x_2 \geqslant 0.$

1.68. $-e^{x_1} + x_2 \geqslant 0,$ $-|x_1| + x_2 \leqslant 0.$

1.69. $-e^{x_1} + x_2 \leqslant 0,$ $-|x_1| + x_2 \geqslant 0.$

1.70. $-e^{x_1} + x_2 \leqslant 0,$ $-|x_1| + x_2 \leqslant 0.$

1.71. $-e^{x_1} + x_2 = 0,$ $-|x_1| + x_2 = 0.$

В задачах **1.72 — 1.77** найти выпуклые оболочки множеств, лежащих в R^n.

1.72. $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

1.73. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1$.

1.74. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$.

1.75. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant 1$.

1.76. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2>0$.

1.77. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 4$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant 2$.

1.78. Пусть дано множество N. Определим множество $\tilde{N}$ как совокупность точек вида

$$\tilde{A}=tA_1+(1-t)A_2, \quad \text{где} \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad A_1, A_2\in N$$

($\tilde{N}$ состоит из объединения всех отрезков, концы которых принадлежат N). Будет ли $\tilde{N}$ совпадать с выпуклой оболочкой множества N?

1.79*. Дано множество $N\subset R^2$, которое содержит по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой. Доказать, что выпуклую оболочку множества N можно получить, объединяя все треугольники $\{\Delta\}$ с вершинами в точках этого множества.

1.80. Известно, что функция $y=f(X)$, определенная на выпуклом подмножестве M пространства R^n, называется выпуклой, если неравенство

$$f[tX_1+(1-t)X_2]\leqslant tf(X_1)+(1-t)f(X_2)$$

выполняется для любых $X_1, X_2\in M$ и $0\leqslant t\leqslant 1$. Доказать выпуклость множества $M_1\subset R^{n+1}$:

$$M_1=\{(X, y), \text{ где } X\in M,\ y\geqslant f(X)\}.$$

1.81*. Известно, что для непрерывной выпуклой функции, заданной на множестве $M\subset R^n$, множество

$$M_2=\{(X, y), \text{ где } X\in M,\ y=f(X)\} \text{ выпукло.}$$

Определить вид функции f.

1.82. Может ли быть замкнутой выпуклая оболочка незамкнутого множества?

1.83. Может ли быть незамкнутой выпуклая оболочка замкнутого множества?

1.84. Доказать, что в случае, когда выпуклая оболочка замкнутого множества N не замкнута, N не ограничено.

1.85. Привести примеры, показывающие, что выпуклая оболочка незамкнутого множества может быть не замкнута.

1.86. Рассмотрим множество N и его выпуклую оболочку $[N]$. Из определения следует, что $N\subseteq[N]$. Образуем множество $N_1=[N]\setminus N$.

Построить множества N, для которых N_1 состоит:

а) из одной внутренней точки множества $[N]$;

б) из одной граничной точки множества $[N]$.

§ 4. Разделение выпуклых множеств в R^n; опорная гиперплоскость; теорема о представлении выпуклого замкнутого ограниченного множества

Определение 1.5. *Говорят, что множества N_1 и N_2 разделяются гиперплоскостью $(C,X)=d$, если выполняются неравенства*

$$(C, X) \leqslant d \text{ при } X \in N_1$$

и

$$(C, X) \geqslant d \text{ при } X \in N_2.$$

Если эти неравенства выполняются строго, говорят о строгом разделении.

Определение 1.6. *Гиперплоскость $(C, X)=d$ называется опорной к множеству N в точке A_0, если*

$$(C, A_0)=d;\ (C, X) \leqslant d \text{ при } X \in N \text{ или } (C, X) \geqslant d \text{ при } X \in N.$$

Теорема 1.1. *Пусть M_1 и M_2 — произвольные выпуклые замкнутые множества без общих точек, из которых хотя бы одно ограничено. Тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая множества M_1 и M_2.*

Теорема 1.2. *Если A_0 — граничная точка выпуклого замкнутого множества, то существует опорная гиперплоскость к этому множеству в точке A_0.*

Теорема 1.3. *Пусть M — выпуклое замкнутое ограниченное множество, M^* — совокупность крайних точек M. Тогда M является выпуклой оболочкой множества M^*, т. е.*

$$M=[M^*].$$

В задачах **1.87** — **1.92** написать уравнение гиперплоскости, разделяющей заданные в условиях множества M_1 и M_2. (Размерность пространства, в котором заданы множества, совпадает с наибольшим номером координаты.)

1.87. $x_1^2+x_2^2 \leqslant 1, \quad (M_1)$; $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases} \quad (M_2)$

1.88. $-x_1^2+x_2 \geqslant 10, \quad (M_1)$; $x_1^2+x_2^2 \leqslant 4. \quad (M_2)$

1.89. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant 1, \quad (M_1)$; $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases} \quad (M_2)$

1.90. $0 \leqslant x_i \leqslant 1 \ (i=1, 2, 3), \quad (M_1)$; $x_1+x_2+x_3=2. \quad (M_2)$

1.91. $x_1^2+x_2^2 \leqslant 1, \quad (M_1)$; $-x_1^2+x_2 \geqslant 0. \quad (M_2)$

1.92. $(x_1-10)^2+(x_2-10)^2 \leqslant 1, \quad (M_1)$; $\begin{cases} x_1^2+x_2^2 \leqslant 4, \\ x_1+x_2+x_3 = 1. \end{cases} \quad (M_2)$

1.93. Определить, при каком значении λ $(\lambda > 0)$ строго разделяются множества M_1 и M_2, заданные следующими ограничениями в R^2:

$$x_1^2+x_2^2 \leqslant \lambda, \quad (M_1)$$

$$-x_1^2+x_2 \geqslant \lambda. \quad (M_2)$$

1.94. Доказать, что не существует прямой на плоскости R^2, разделяющей множества N и M:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 \geqslant 4, \\ x_1 \geqslant -2, \\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \quad (N) \qquad \begin{cases} -x_1+x_2 \leqslant 1, \\ x_1+x_2 \leqslant 1, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \quad (M)$$

1.95. Написать уравнения пучка прямых на плоскости R^2, проходящих через точку (0, 0) и строго разделяющих множества M_1 и M_2:

$$(x_1+2)^2+x_2^2 \leqslant 1, \quad (M_1)$$
$$(x_1-2)^2+x_2^2 \leqslant 1. \quad (M_2)$$

1.96. Привести примеры, показывающие, что утверждение теоремы 1.1 о разделении может не выполняться, если отказаться от условий:

а) выпуклости одного из множеств;

б) ограниченности обоих множеств;

в) замкнутости одного из множеств.

1.97.** Пусть дано M — произвольное выпуклое множество пространства R^n и точка A_0, которая не является относительно внутренней точкой M (см. задачу 1.53). Показать, что существует гиперплоскость, проходящая через A_0 и содержащая M в одном из своих полупространств.

1.98.** Доказать следующую теорему, обобщающую теорему о разделении: если M_1 и M_2 — произвольные выпуклые множества, не имеющие общих точек, то существует гиперплоскость, разделяющая (вообще говоря, не строго) M_1 и M_2.

1.99. Привести примеры, показывающие, что выпуклые множества могут в некоторых своих граничных точках обладать единственной опорной гиперплоскостью, а в других — несколькими (даже бесконечным числом) опорными гиперплоскостями.

1.100. Доказать, что если в некоторой граничной точке A_0 выпуклого множества M существуют хотя бы две различные опорные гиперплоскости, то их существует бесконечно много.

1.101. Показать, что у невыпуклого множества может существовать опорная гиперплоскость в граничной точке.

1.102. Существует ли невыпуклое множество, в каждой граничной точке которого имеется гиперплоскость, опорная к этому множеству?

1.103*. Пусть дано, что для выпуклого множества $M \subset R^n$ $(M \neq R^n)$ дополнение $\overline{M}$ тоже выпукло. Доказать, что это может быть тогда и только тогда, когда M — полупространство.

1.104*. Доказать, что дополнение $\overline{M}$ выпуклого ограниченного множества M до R^n невыпукло.

1.105.** Доказать, что опорная гиперплоскость к выпуклому замкнутому ограниченному множеству содержит хотя бы одну крайнюю точку этого множества.

1.106*. Дано, что опорная гиперплоскость к выпуклому замкнутому ограниченному множеству M содержит только одну крайнюю точку этого множества A_0. Доказать, что в этом случае пересечение $\tilde{M}$ гиперплоскости с множеством M состоит только из точки A_0.

1.107*. Пусть M — выпуклое замкнутое ограниченное множество и точка $A_0 \notin M$. Доказать, что существует гиперплоскость, уравнение которой $(C, X) = \alpha$, такая, что:

а) $(C, X) \leqslant \alpha$ для $X \in M$;

б) $(C, X) = \alpha$ для некоторой точки $X = A_1 \in M$;

в) $(C, A_0) > \alpha$.

(Гиперплоскость $(C, X) = \alpha$ является опорной к множеству M в точке A_1 и отделяет A_0 от M.)

1.108.** Доказать, что произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество является пересечением некоторого (вообще говоря, бесконечного) числа полупространств.

1.109. В каждой граничной точке выпуклого замкнутого ограниченного множества M проведем одну опорную гиперплоскость и рассмотрим множество $\tilde{M}_1$, состоящее из пересечения полупространств, порожденных этими гиперплоскостями (из двух полупространств выбирается то, в котором лежит множество M). Всегда ли $\tilde{M}_1$ совпадает с M?

1.110*. Доказать, что выпуклое замкнутое ограниченное множество M является пересечением некоторого числа полупространств, граничные гиперплоскости которых проходят через крайние точки M.

1.111. Пусть дано выпуклое замкнутое множество M, имеющее конечное число крайних точек. Рассмотрим множество $M_1 = M \cap R_{\text{п}}$, где $R_{\text{п}}$ — полупространство с граничной гиперплоскостью $(C, X) = \alpha$. Можно ли утверждать, что M_1 имеет конечное число крайних точек (предполагается, что M_1 непусто)?

1.112*. Доказать, что пересечение конечного числа замкнутых полупространств имеет конечное число крайних точек (предполагается, что это пересечение непусто).

1.113. Привести примеры, показывающие, что утверждение теоремы о представлении выпуклого замкнутого ограниченного множества не сохраняется, если отказаться от условий:

а) выпуклости; б) замкнутости; в) ограниченности.

1.114*. Усилить утверждение теоремы 1.3 о представлении, доказав, что любая точка A выпуклого замкнутого ограниченного множества $M \subset R^n$ является выпуклой комбинацией не более чем $n+1$ крайних точек M.

1.115. Показать, что существует выпуклое ограниченное замкнутое множество, для которого число $n+1$ крайних точек, участвующих в теореме о представлении, может быть уменьшено (см. предыдущую задачу). Доказать, однако, минимальность этого числа в том

смысле, что существуют выпуклые ограниченные замкнутые множества $M \subset R^n$ и точки $A \in M$, которые нельзя представить в виде выпуклой комбинации меньше чем $n+1$ крайних точек M. Привести примеры $M \subset R^1$, $M \subset R^2$, $M \subset R^3$.

§ 5. Конусы; конические оболочки множеств

Определение 1.7. *Говорят, что множество $K_{A_0} \subset R^n$ является конусом с вершиной в точке A_0, если для произвольной точки $A \in K_{A_0}$ и $\mu \geqslant 0$ точка*

$$A_0 + \mu (A - A_0)$$

принадлежит K_{A_0}.

Определение 1.8. *Выпуклое замкнутое множество, обладающее свойствами конуса, называется выпуклым конусом.*

Определение 1.9. *Наименьший выпуклый конус с вершиной в точке A_0, содержащий данное множество $N \subset R^n$, называется конической оболочкой N с вершиной в A_0 и обозначается $K_{A_0}(N)$.*

Определение 1.10. *Пусть дан конус, с вершиной в начале координат, K_0. Назовем конусом, двойственным к K_0, множество K_0^+, состоящее из точек Y, для которых*

$$(Y, X) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad X \in K_0.$$

1.116. Показать, что множество $K \subset R^n$, состоящее из точек X, для которых $AX = B$, где A — матрица размером $n \times m$, а B — вектор, принадлежащий R^m, является выпуклым конусом.

1.117. Будет ли выпуклым конусом множество

$$N = \{X : AX \leqslant B;\ X \in R^n\}?$$

(Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.)

1.118. Доказать, что множество

$$K_0 = \{X : AX \leqslant 0;\ X \in R^n\}$$

(A — матрица размером $n \times m$, 0 — нулевой вектор m-мерного пространства) является выпуклым конусом в R^n с вершиной в точке 0.

1.119. Описать все выпуклые конусы на прямой R^1.

1.120. Может ли невыпуклое множество обладать свойствами конуса?

1.121. Доказать, что если множество $K \subset R^1$ обладает свойствами конуса, то оно является выпуклым конусом.

1.122. Доказать, что если вершина конуса $K \subset R^n$ является внутренней точкой, то $K = R^n$. (Заметим, что в этом случае K — выпуклый конус.)

1.123. Показать, что конус может содержать внутреннюю точку, но не являться выпуклым.

1.124. Доказать, что выпуклый конус с вершиной в точке A_0 можно определить как множество K_{A_0}, обладающее свойством: если $A_1, A_2 \in K_{A_0}$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то точка $A_0 + \alpha (A_1 - A_0) + \beta (A_2 - A_0) \in K_{A_0}$.

В задачах **1.125.** — **1.130** определить, обладают ли заданные множества свойствами выпуклого конуса.

1.125. $x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1-x_2\geqslant 1.$

1.126. $x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_2\leqslant 0.$

1.127. $x_1+2x_2-3x_3=0,$
$x_1-x_2+x_3\leqslant 0,$
$x_1=x_2=x_3.$

1.128. $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 1,$
$x_1=x_2=0,$
$x_3\geqslant 0.$

1.129. $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1,$
$x_1=x_2=0.$

1.130. $x_1^2+x_2^2\leqslant 1,$
$x_1^2+x_3^2\leqslant 1.$

1.131. Будет ли сумма двух конусов конусом?

1.132. Дано, что сумма двух выпуклых конусов $K=K_1+K_2$ — конус. Будет ли K выпуклым конусом?

1.133. Прямой суммой двух множеств N_1 и N_2 называется множество N (обозначается $N=N_1\oplus N_2$), состоящее из точек

$$X=X_1+X_2,\quad \text{где}\quad X_1\in N_1,\quad X_2\in N_2.$$

Доказать, что прямая сумма двух выпуклых конусов с вершиной в точке 0 является выпуклым конусом с вершиной в точке 0.

В задачах **1.134** — **1.139** найти прямую сумму выпуклых конусов K_1 и K_2, которые заданы следующими ограничениями.

1.134. $x_1+x_2=0,\quad (K_1\subset R^2)$
$\begin{cases}x_1\geqslant 0,\\ x_2\geqslant 0.\end{cases}\quad (K_2\subset R^2)$

1.135. $\begin{cases}x_1\geqslant c_1,\\ x_2=c_2,\end{cases}\quad (K_1\subset R^2)$
$\begin{cases}x_1=c_3,\\ x_2\geqslant c_4.\end{cases}\quad (K_2\subset R^2)$

1.136. $\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 1,\\ x_2\geqslant 0,\end{cases}\quad (K_1\subset R^2)$
$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\geqslant 1,\\ x_1\leqslant 0.\end{cases}\quad (K_2\subset R^2)$

1.137. $x_1+x_2=0,\quad (K_1\subset R^2)$
$x_1+x_2=0.\quad (K_2\subset R^3)$

1.138. $\begin{cases}x_1\leqslant 0,\\ x_2\geqslant 0,\end{cases}\quad (K_1\subset R^2)$
$x_2+x_3=0.\quad (K_2\subset R^3)$

1.139. $x_1=x_2=x_3=2,\quad (K_1\subset R^3)$
$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 1,\\ x_1=x_2=0,\\ x_3\geqslant 4.\end{cases}\quad (K_2\subset R^3)$

1.140. Доказать, что множество K_0^+ является выпуклым конусом.

1.141. Каков геометрический смысл двойственного конуса K_0^+ в трехмерном пространстве?

1.142. Определить множество K_0^+ в случае, когда K_0 — прямая на плоскости R^2, проходящая через начало координат.

1.143. K_0 состоит из точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $x_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$ (K_0 — неотрицательный ортант R^n). Найти K_0^+.

1.144. Пусть K_1 и K_2 — выпуклые конусы в R^n с вершинами в начале координат. Доказать, что если $K_1 \subset K_2$, то $K_2^+ \subset K_1^+$.

1.145. Доказать, что конус, двойственный к прямой сумме двух конусов $K_1 \oplus K_2$ с вершинами в начале координат, равен пересечению двойственных конусов K_1^+ и K_2^+, т. е. $(K_1 \oplus K_2)^+ = K_1^+ \cap K_2^+$.

1.146. Доказать, что выпуклый конус K с вершиной в начале координат лежит в конусе, двойственном к K^+, т. е. $K \subseteq K^{++}$, где K^{++} — конус, двойственный к K^+.

1.147*. Показать, что если конус K_0 обладает свойствами выпуклого множества, но не замкнут, то для него может быть $K_0 \neq K_0^{++}$.

1.148*. Доказать, что для любого конуса с вершиной в начале координат, обладающего свойством выпуклости (не обязательно замкнутого), выполняется соотношение $K_0^+ = K_0^{+++}$.

Найти коническую оболочку $K_A(N)$ с вершиной в точке A множеств N, заданных в задачах **1.149—1.151.**

1.149. N — сумма множеств N_1 и N_2, где

$$N_1 = \{X = (x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0;\ x_2 = 0\},$$

$$N_2 = \{X = (x_1, x_2) : x_1 = 0;\ x_2 \geqslant 0\},\ A = (0, 0).$$

1.150. $N = \{X = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;\ x_3 \geqslant 1\}$, $A = (0, 0, 0)$.

1.151. N — сумма множеств N_1 и N_2, где

$$N_1 = \{X = (x_1, x_2) : -e^{x_1} + x_2 = 0\},$$

$$N_2 = \{X = (x_1, x_2) : x_1 = 1;\ x_2 = 0\},\ A = (1, 0).$$

1.152. Доказать, что определение конической оболочки множества N с вершиной в точке A эквивалентно следующему: $K_A(N)$ является совокупностью точек A вида $A_0 + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i (A_i - A_0)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ — произвольная система точек множества N.

1.153. Доказать, что для любого множества N справедливо соотношение $K_A(N) \supseteq [N]$.

1.154. Привести примеры множеств N, для которых $K_A(N) = [N]$.

1.155. Доказать, что для любого множества N и произвольной точки A справедливо равенство $K_A(N) = K_A([N])$.

1.156*. Пусть дано выпуклое замкнутое ограниченное множество M и $A_0 \notin M$. Доказать, что $K_{A_0}(M)$ состоит из точек объединения всех лучей $\{l_{A_0}^A\}$, проведенных из точки A_0 через точки A, где $A \in M$.

1.157.** Доказать, что коническая оболочка с вершиной в точке A_0 выпуклого замкнутого ограниченного множества $M \subset R^n$ состоит из выпуклой оболочки объединения лучей, исходящих из A_0 и пересекающих крайние точки M, т. е. $K_{A_0}(M) = [l_{A_0}(M^*)]$, где $l_{A_0}(M^*)$ — объединение указанных в условии лучей.

1.158. Привести пример конуса, не имеющего крайней точки.

1.159*. Доказать, что если у выпуклого конуса K существует крайняя точка A_0, то она совпадает с его вершиной.

1.160. Доказать, что существуют выпуклые замкнутые множества, не имеющие крайних точек и не обладающие свойствами конуса.

1.161.** Доказать, что выпуклое замкнутое множество $K \subset R^n$, имеющее одну крайнюю точку A_0, является выпуклым конусом.

§ 6. Цилиндры; цилиндрические оболочки множеств

Определение 1.11. *Множество $C_{A_0} \subset R^n$ называется цилиндром с направлением $A_0 \neq 0$, если вместе с каждой точкой $A \in C_{A_0}$ оно содержит точку вида $tA_0 + A$, где $-\infty < t < \infty$.*

Определение 1.12. *Замкнутое выпуклое множество, обладающее свойствами цилиндра, называется выпуклым цилиндром.*

Определение 1.13. *Цилиндрической оболочкой множества N с направлением $A_0 \neq 0$ называется наименьший выпуклый цилиндр, содержащий N (обозначается через $C_{A_0}(N)$).*

1.162. Доказать, что у выпуклого цилиндра не может быть крайних точек.

1.163. Доказать, что определение цилиндрической оболочки с направлением $A_0 \neq 0$ множества N эквивалентно следующему: $C_{A_0}(N)$ есть совокупность точек A, которые можно представить в виде $tA_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$, где $-\infty < t < \infty$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ — произвольная система точек из N. (Сравнить с задачей 1.152.)

1.164. Показать, что для выпуклого замкнутого ограниченного множества M цилиндрическая оболочка $C_{A_0}(M)$ состоит из объединения всех прямых, параллельных A_0 и пересекающих M. (Сравнить с задачей 1.156.)

1.165. Доказать, что для выпуклого замкнутого ограниченного множества M цилиндрическая оболочка $C_{A_0}(M)$ состоит из выпуклой оболочки объединения всех прямых, параллельных A_0 и пересекающих M в крайних точках. (Сравнить с задачей 1.157.)

1.166. Будет ли прямая сумма двух цилиндров C_{A_1} и C''_{A_2} цилиндром?

1.167. Справедливо ли соотношение

$$C_{A_0}\{K_{A_1}(N)\} = K_{A_1}\{C_{A_0}(N)\}?$$

1.168.** Доказать, что утверждение задачи 1.162 можно обратить, т. е. выпуклое замкнутое множество C, не имеющее крайних точек, является выпуклым цилиндром.

ГЛАВА 2

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. Определение выпуклого многогранного множества; жесткие и нежесткие ограничения; размерность

Определение 2.1. *Множество M, состоящее из точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, для которых*

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s; \tag{2.1}$$

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = s+1, \ldots, s+t, \tag{2.2}$$

называется выпуклым многогранным множеством (в дальнейшем слово «выпуклое», где это не может привести к недоразумению, будем опускать).

В случае, когда M ограничено в R^n, говорят о выпуклом многограннике.

Определение 2.2. *Условие с номером i_0 системы* (2.1), (2.2) *называется жестким ограничением, если координаты любой точки $X \in M$ удовлетворяют ему как точному равенству.*

Определение 2.3. *Условие с номером i_0' системы* (2.1), (2.2) *называется нежестким ограничением, если существует точка $X_0 \in M$, координаты которой удовлетворяют этому условию как строгому неравенству.*

Очевидно, что любое из условий (2.2) — жесткое ограничение. Рассмотрим простой пример, показывающий, что условие, входящее в ограничение (2.1), также может быть жестким.

Пример 2.1. Ограничения, задающие многогранное множество M, имеют вид

$$x_1 + x_2 \leqslant 1,$$
$$-x_1 - x_2 \leqslant -1.$$

Совокупность этих двух неравенств эквивалентна одному равенству $x_1 + x_2 = 1$. Поэтому каждое из ограничений-неравенств, задающих M, является жестким.

Так как многогранное множество M выпукло, то для него сохраняется определение 1.3. Уточнение этого определения, учитывающее многогранность структуры M, приводит к теореме о размерности.

Теорема 2.1. *Размерность ρ многогранного множества M равна*

$$\rho = n - r,$$

где r — ранг системы жестких ограничений, задающих M.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенные определения и теорему.

Пример 2.2. Многогранное множество $M \subset R^3$ задается следующими ограничениями:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqslant 5, && (i=1)\\ -x_1 - x_2 &\leqslant -3, && (i=2)\\ -2x_2 - x_3 &\leqslant -2, && (i=3)\\ x_1 + x_2 - 10x_3 &\leqslant 20, && (i=4)\\ x_2 + x_3 &= 1. && (i=5) \end{aligned}$$

Определить, какие из ограничений ($i = 1, 2, \ldots, 5$) являются жесткими и какова размерность ρ множества M.

Очевидно, что ограничение $i=5$ жесткое. Складывая первое неравенство со вторым, получим, что координаты точек $X \in M$ удовлетворяют неравенству

$$2x_2 + x_3 \leqslant 2,$$

что вместе с условием (3) дает

$$2x_2 + x_3 = 2,$$

т. е. условие $i=3$ также жесткое. Системе

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 2,\\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

удовлетворяет точка (x_1, 1, 0), которая при подстановке в первое и во второе ограничения дает $x_1 \leqslant 2$; $-x_1 \leqslant -2$, что эквивалентно $x_1 = 2$. Полученная точка (2, 1, 0) обращает условие $i=4$ в строгое неравенство. Окончательно: жесткими являются условия $i = 1, 2, 3, 5$, а условие $i=4$ нежесткое.

Для определения размерности ρ достаточно заметить, что ранг системы условий $i = 1, 2, 3, 5$ равен 3, и воспользоваться теоремой 2.1:

$$\rho = 3 - 3 = 0.$$

Множество M состоит из одной точки $X = (2, 1, 0)$.

2.1. Доказать, что непустое пересечение конечного числа многогранных множеств M_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) является многогранным множеством.

2.2. Пусть $M = M_1 + M_2$, где M_1, M_2 — многогранные множества. Можно ли утверждать, что M является многогранным множеством, если известно, что M выпукло?

В задачах **2.3** — **2.10** определить, какие из ограничений (i) многогранных множеств, заданных в условиях, являются нежесткими, и найти точки X_i, которые обращают их в строгие неравенства.

2.3.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqslant 7,\\ -7x_1 + 4x_2 &\leqslant 1,\\ 8x_1 - 3x_2 &\leqslant 2,\\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

2.4.
$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 1,\\ x_2 &\leqslant 1,\\ x_1 - 3x_2 &\leqslant -2,\\ x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

2.5.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 4,\\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 3,\\ 10x_1 - 5x_2 &\leqslant 0,\\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

2.6.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant 1,\\ x_1 + x_2 &\leqslant 2,\\ 2x_1 - x_2 &\leqslant 5,\\ x_1 + x_2 &\leqslant -10. \end{aligned}$$

2.7.
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 &\leqslant 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5,\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\leqslant 2,\\ 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

2.8.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5,\\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 &\leqslant 1,\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\leqslant 2,\\ 2x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

2.9.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 4,\\ x_1 \qquad\qquad + 3x_4 &\leqslant 4,\\ x_2 \qquad - x_4 &\leqslant 0,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

2.10.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &\leqslant n,\\ x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + (-1)^{n+1} x_n &\leqslant 2,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2},\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}$$

2.11*. Доказать, что существует точка X_0, принадлежащая многогранному множеству M, координаты которой обращают все нежесткие ограничения M в строгие неравенства.

2.12*. Доказать, что если у многогранного множества M существует только одна точка X_0, которая обращает нежесткое ограничение в строгое неравенство, то M состоит из одной точки X_0.

В задачах **2.13 — 2.23** определить размерность ρ многогранных множеств M, заданных в условиях (размерность пространства R^n, в котором содержится M, равна наибольшему номеру координаты ограничений).

2.13. $x_1 + x_2 = 1.$

2.14. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1.$

2.15.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 1,\\ x_1 + 3x_2 &= 4,\\ x_1 \qquad &\leqslant 0. \end{aligned}$$

2.16.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 3,\\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 11,\\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

2.17.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 3,\\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 11. \end{aligned}$$

2.18.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 3,\\ x_1 + 10x_2 + x_3 &\leqslant 11. \end{aligned}$$

2.19.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 2,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

2.20.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqslant 0,\\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0,\\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

2.21*.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 &\leqslant 7,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5. \end{aligned}$$

2.22*.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\leqslant 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 0,\\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2.23*.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 &\leqslant 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2.24. Определить размерность $\rho(\lambda)$ многогранного множества M, заданного ограничениями:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda + 2}, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

2.25. Определить размерность $\rho(\lambda, \mu)$ многогранного множества M, заданного ограничениями:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &\leqslant 0, \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + \lambda\mu x_2 + x_3 &= \mu, \\ x_1 + \mu x_2 + \lambda x_3 &= 1. \end{aligned}$$

2.26. Доказать, что если ограничения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, задающие многогранное множество $M \subset R^n$, таковы, что $b_i \geqslant 0$ при всех i, и существует j_0 такое, что $a_{ij_0} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то размерность M равна n.

2.27*. Как изменится размерность ρ многогранного множества $M \subset R^n$, если к ограничениям, задающим M, присоединить условие

$$(C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_0?$$

2.28*. Как изменится размерность ρ многогранного множества $M \subset R^n$, если к ограничениям, задающим M, присоединить условие

$$(C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant c_0?$$

2.29. Доказать, что размерность ρ многогранного множества $M = M_1 \cap M_2$ удовлетворяет неравенству $\rho \leqslant \max(\rho_1, \rho_2)$, где ρ_1, ρ_2 — размерности многогранных множеств M_1 и M_2 соответственно.

§ 2. Грани выпуклых многогранных множеств

Определение 2.4а. *Подмножество M_q выпуклого многогранного множества M называется q-мерной гранью M, если:*

1) *размерность M_q равна q;*

2) *из условий $X = \alpha X' + (1 - \alpha) X'' \in M_q$, $0 < \alpha < 1$ и X', $X'' \in M$, следует, что X' и X'' принадлежат M_q.*

Определение 2.4б. *Гранью размерности q выпуклого многогранного множества M называется произвольное q-мерное выпуклое многогранное множество M_q, система условий которого образована путем замены некоторых знаков неравенств в ограничениях M знаками равенств.*

Теорема 2.2. *Определения* 2.4а *и* 2.4б *эквивалентны.*

2.30*. Доказать, что если M_2 — грань множества M_1, которое является гранью многогранного множества M, то M_2 — грань множества M.

2.31. Доказать, что число граней размерности q многогранного множества M конечно.

2.32*. Для того чтобы многогранное множество M имело грань размерности q, необходимо, чтобы ранг системы ограничений M был не меньше $n-q$. Доказать.

2.33. Некоторые знаки неравенств в ограничениях многогранного множества M заменяются знаками равенств. Можно ли утверждать, что полученное множество M_1 будет гранью M?

В задачах **2.34** — **2.37** многогранные множества M заданы своими ограничениями. Выписать ограничения, задающие все грани M^i этих множеств.

2.34. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$

2.35. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$

2.36. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$

2.37. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 3, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$

2.38*. Доказать, что если точка X_0 принадлежит q-мерной грани M_q многогранного множества $M \subset R^n$ $(q \neq \rho(M))$, то X_0 — граничная точка M.

2.39*. Доказать, что если точка X_0 принадлежит q-мерной грани M_q многогранного множества $M \subset R^n$ $(q \neq \rho(M))$, то X_0 не является относительно внутренней точкой множества M (см. задачу 1.53).

2.40. Убедиться, что грань нулевой размерности многогранного множества M и крайняя точка M — понятия эквивалентные.

2.41.** Дан единичный куб пространства R^n, т. е. выпуклое многогранное множество M, ограничения которого имеют вид

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определить:

а) число k_0 вершин (граней нулевой размерности) M;

б) число k_1 ребер (граней единичной размерности) M;

в) число k_q граней размерности q, $2 < q < n$.

2.42*. Выпуклое многогранное множество $M \subset R^{n+1}$ называется n-мерным симплексом, если ограничения, задающие M, имеют вид

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1,$$
$$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Определить число k_q граней размерности q n-мерного симплекса M.

В задачах **2.43—2.52** найти вершины многогранных множеств M, ограничения которых приведены в условиях.

2.43. $x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$x_1 \geqslant 0,$
$x_2 \geqslant 0.$

2.44. $x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$x_1 - x_2 \leqslant 1.$

2.45. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3,$
$x_1 + x_2 \leqslant 2,$
$x_1 + x_3 \leqslant 2,$
$x_2 + x_3 \leqslant 2.$

2.46. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$
$-x_1 \leqslant 0,$
$-x_3 \leqslant 0.$

2.47. $-x_i \leqslant 0$
$x_i \leqslant 1,$
$i = 1, 2, \ldots, n.$

2.48. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n+1.$

2.49. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n+1.$

2.50. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leqslant 1,$
$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, n+1.$

2.51. $0 \leqslant x_i \leqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$
$x_n \geqslant 0.$

2.52. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, k \ (k < n+1).$

2.53.** Доказать, что через каждую вершину X_0 многогранного множества M можно провести опорную гиперплоскость Π_{X_0} к M так, чтобы пересечение $\Pi_{X_0} \cap M$ содержало только X_0.

2.54. Две вершины многогранного множества M соединим отрезком прямой. Можно ли утверждать, что этот отрезок принадлежит ребру (грани единичной размерности) множества M?

2.55. Привести примеры, показывающие, что грань единичной размерности многогранного множества M может быть:

а) отрезком;

б) лучом;

в) прямой.

2.56. Существует ли многогранное множество M, у которого имеется:

а) ребро-отрезок и ребро-луч;

б) ребро-отрезок и ребро-прямая;

в) ребро-луч и ребро-прямая.

2.57. Показать, что если у многогранного множества M есть грань единичной размерности — отрезок (луч), то концы этого отрезка (точка, из которой исходит луч) — вершины M.

В задачах **2.58** — **2.69** написать уравнения ребер Г (граней единичной размерности) многогранного множества M в виде $X = X_0 + te$, где X_0 принадлежит ребру, а e — направляющий вектор этого ребра, и указать пределы изменения t.

2.58. $x_1 + x_2 \leqslant 1,\quad x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0.$

2.59. $x_1 + x_2 \leqslant 1,\quad x_1 - x_2 \leqslant 1,\quad x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0.$

2.60. $x_1 + x_2 \leqslant 1,\quad x_1 - x_2 \leqslant 1,\quad x_2 \geqslant 0.$

2.61. $x_1 + x_2 \leqslant 1,\quad x_1 - x_2 \leqslant 1,\quad x_1 \geqslant 0.$

2.62. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

2.63. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\quad x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 0,\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

2.64. $x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

2.65. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1.$

2.66.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n &\leqslant 0, \\ x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n &\leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + x_n &\leqslant 0. \end{aligned}$$

2.67.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 0, \\ x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + x_n &= 0. \end{aligned}$$

2.68. $0 \leqslant x_i \leqslant 1,\quad i = 1, 2, \ldots, n.$

2.69. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1,\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n+1.$

2.70*. Доказать, что через точку X_0, принадлежащую ребру Г многогранного множества M, можно провести опорную к M гиперплоскость Π_{X_0} так, чтобы пересечение $M \cap \Pi_{X_0}$ содержало только точки ребра Г.

2.71*. Доказать, что утверждения задач 2.53 и 2.70 обобщаются следующим образом: если X_0 принадлежит q-мерной грани M_q многогранного множества M, то через X_0 можно провести опорную к M гиперплоскость Π_{X_0} так, чтобы пересечение $M \cap \Pi_{X_0}$ состояло только из точек грани M_q.

2.72.** Доказать, что грань минимальной размерности $\tilde{M}$ многогранного множества M есть линейное многообразие.

2.73.** Доказать, что минимальная размерность грани $\tilde{M}$ многогранного множества M равна $n - r_1$, где r_1 — ранг системы всех ограничений, задающих M. (Предполагается, что M непусто.)

2.74.** Доказать, что если у многогранного множества M имеются грань M_{q_1} размерности q_1 и грань M_{q_2} размерности q_2 $(q_2 - q_1 \geqslant 2)$, то у M есть грань M_q размерности q, где $q_1 < q < q_2$.

2.75*. Доказать, что многогранное множество M имеет грани размерности q: $n - r_1 \leqslant q \leqslant n - r$, где n — размерность пространства, в котором лежит M, r_1 — ранг системы всех ограничений, задающих M, r — ранг системы жестких ограничений, задающих M.

2.76*. Если у многогранного множества M имеются две различные грани размерности q, то у M есть хотя бы одна грань размерности $q+1$ (эта грань может совпадать с самим M). Доказать.

2.77. Является ли условие существования двух различных граней размерности q необходимым для того, чтобы у многогранного множества M была грань размерности $q+1$?

§ 3. Существенные и несущественные ограничения выпуклых многогранных множеств; вырожденность

Определение 2.5. *Нежесткое ограничение, входящее в систему условий, задающих выпуклое многогранное множество, называется существенным, если имеется хотя бы одна точка X_1, не принадлежащая M и удовлетворяющая всем остальным ограничениям.*

Определение 2.6. *Вершина X_0 выпуклого многогранного множества M называется вырожденной, если число условий системы ограничений, задающих M, которым она удовлетворяет как точным равенствам, больше n.*

Определение 2.7. *Выпуклое многогранное множество M называется вырожденным, если хотя бы одна его вершина вырождена.*

2.78. Сформулировать определение несущественного ограничения многогранного множества M.

2.79. Доказать, что из системы ограничений, задающей многогранное множество M, можно исключить несущественное ограничение, не изменив M.

2.80. Существует ли многогранное множество, каждое из нежестких ограничений которого существенное?

2.81. Существует ли многогранное множество, каждое из нежестких ограничений которого несущественное?

В задачах **2.82—2.87** определить, какие из нежестких условий, задающих многогранное множество M, являются существенными.

2.82. $x_1 + x_2 = 1,\quad x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0.$

2.83. $x_1 + x_2 \leqslant 1,\quad -x_1 \leqslant -3,\quad 2x_1 + x_2 = 4.$

2.84. $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0,\quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10,\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

2.85. $x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 0,\quad 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10,\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

2.86. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,\quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

2.87. $0 \leqslant x_i \leqslant 1,\quad i = 1, 2, \ldots, n.$

2.88. Доказать, что если к системе ограничений многогранного множества M добавить линейную комбинацию всех ограничений,

задающих M, с положительными коэффициентами, то полученное условие будет несущественным ограничением M. Под линейной комбинацией ограничений $(A_i, X) \leqq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, понимается ограничение

$$(\bar{A}, X) \leqslant \bar{b}, \text{ где } \bar{A} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i, \quad \bar{b} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i.$$

2.89. Можно ли утверждать, что любое несущественное ограничение многогранного множества M образовано способом, описанным в предыдущей задаче?

2.90. Доказать, что общая часть многогранного множества M и гиперплоскости, порождаемой его существенным ограничением, имеет размерность $\rho - 1$, где ρ — размерность M.

В задачах **2.91—2.97** определить, какие из заданных многогранных множеств M являются вырожденными, и найти их вырожденные вершины.

2.91. $x_1 + x_2 \leqslant 0$,
$x_1 - 2x_2 \leqslant 0$.

2.92. $x_1 + x_2 \leqslant 0$,
$x_1 - 2x_2 \leqslant 0$,
$x_1 \leqslant 0$.

2.93. $x_1 + x_2 \leqslant 1$,
$3x_1 + 5x_2 \leqslant 4$,
$x_1 + 3x_2 \leqslant 7$,
$x_1 - x_2 \leqslant 0$.

2.94. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3$,
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12$,
$0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3$.

2.95. $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.96. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

2.97. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

2.98. Существует ли многогранное множество M, все вершины которого вырождены?

2.99. Многогранное множество M обладает одной вершиной X_0. Может ли эта вершина быть вырожденной?

2.100*. Доказать, что если X_0 — вершина многогранного множества M, ограничения которого содержат t линейно независимых условий-равенств, то число ребер, входящих из X_0, равно $n - t$ ($M \subset R^n$).

2.101. Привести примеры, показывающие, что если X_0 — вырожденная вершина многогранного множества M, то число ребер, выходящих из X_0, может быть как меньше, так и больше, чем $n - t$ (n и t имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче).

2.102. Ребро (грань единичной размерности) Γ многогранного множества M называется вырожденным, если все точки Γ удовлетворяют большему, чем $n - 1$, числу условий, задающих M, как точным

равенствам. Привести примеры многогранных множеств M ($M \subset R^2$, $M \subset R^3$), которые обладают вырожденными ребрами.

2.103*. Множество M обладает вершиной и вырожденным ребром. Можно ли утверждать, что M вырожденно? (См. задачу 2.102.)

2.104. Грань M_q размерности q, принадлежащая многогранному множеству M, называется вырожденной, если все точки $X \in M_q$ обращают в точное равенство большее, чем $n-q$, число условий, задающих M. Доказать, что если у M есть вырожденная грань размерности q, то у него есть и вырожденная грань размерности q_1, где $n-r_1 \leqslant q_1 \leqslant q$ (r_1 — ранг системы ограничений, задающих M).

§ 4. Выпуклые многогранные конусы

Определение 2.8. *Выпуклое многогранное множество K, обладающее свойствами конуса, называется выпуклым многогранным конусом.*

2.105. Доказать, что выпуклое многогранное множество K является выпуклым многогранным конусом тогда и только тогда, когда его ограничения имеют вид

$$(A_i,X) \leqslant (A_i,X_0), \quad i=1,2,\ldots,s, \tag{α}$$

$$(A_i,X) = (A_i,X_0), \quad i=s+1,\ldots,s+t, \tag{β}$$

где $X_0 \in K$.

2.106. Доказать, что если ограничения, задающие выпуклый многогранный конус, имеют вид (α), (β) (см. предыдущую задачу), то X_0 — вершина K (необходимо отличать вершину K от крайней точки K).

2.107. Привести пример выпуклого многогранного конуса K, обладающего крайней точкой. Доказать, что в этом случае вершина K совпадает с его крайней точкой.

2.108. Привести примеры выпуклых многогранных конусов, не обладающих крайними точками.

2.109*. У выпуклого многогранного множества M нет крайних точек, но есть два ребра. Может ли M обладать свойствами конуса?

2.110*. Доказать, что выпуклый многогранный конус K обладает единственной гранью минимальной размерности.

В задачах **2.111—2.114** определить, какие из заданных в условиях выпуклых многогранных множеств обладают свойствами конуса.

2.111. $\begin{aligned} x_1+x_2 &\leqslant 0,\\ x_1 \qquad &\leqslant 0,\\ x_2 &\leqslant 0. \end{aligned}$

2.112. $\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\leqslant 4,\\ x_1 \qquad\quad +x_3 &= 2,\\ x_2 \qquad\quad &\geqslant 0,\\ x_3 &\leqslant 1. \end{aligned}$

2.113. $\begin{aligned} x_1+x_2 &\leqslant 1,\\ x_1-x_2 &\leqslant 2,\\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$

2.114. $\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n &\leqslant n,\\ x_1-x_2 \qquad\quad &\leqslant 0,\\ x_i &\geqslant 1, \quad i=1,2,\ldots,n. \end{aligned}$

ГЛАВА 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННЫХ МНОЖЕСТВ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Теорема о представлении выпуклого многогранного множества

Рассмотрим, как и в главе 2, выпуклое многогранное множество $M \subset R^n$, т. е. совокупность точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют системе ограничений

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = s+1, \ldots, s+t.$$

Если обозначить столбец j матрицы $\| a_{ij} \|_{s+t,\, n}$ через $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{s+t,\, j})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то систему (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j \leqq B, \tag{3.1}$$

где $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{s+t})$, а знак $\leqq$ означает, что первые s компонент векторного ограничения (3.1) — неравенства, а последние t — равенства.

Пусть ранг системы ограничений (3.1) равен r. Это значит, что среди A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ есть линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов $(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r})$, и для любого вектора A_{j_k} $(k \neq 1, 2, \ldots, r)$ справедливо равенство

$$A_{j_k} = \sum_{l=1}^{r} \alpha_{lk} A_{j_l}. \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), запишем ограничения, задающие M, в виде

$$\sum_{l=1}^{r} \left(x_{j_l} + \sum_{j \neq j_l} x_j \alpha_{lj} \right) A_{j_l} \leqq B.$$

Рассмотрим подпространство Π_{n-r}, порождаемое системой уравнений

$$x_{j_l} + \sum_{j \neq j_l} x_j \alpha_{lj} = 0, \text{ где } l = 1, 2, \ldots, r,$$

и выпуклое многогранное множество M_0, система ограничений которого получится, если к ограничениям (3.1) добавить систему

$$x_{j_l}=0, \qquad l=r+1,\ldots,n.$$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема о представлении множества M.

Теорема 3.1. *Выпуклое многогранное множество $M\subset R^n$ совпадает с совокупностью точек X вида*

$$X=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_iX_i+\sum_{i=1}^{N_2}\beta_iP_i+\sum_{i=1}^{n-r}\gamma_iP'_i, \tag{3.3}$$

где $\alpha_i\geqslant 0$; $\sum\limits_{i=1}^{N_1}\alpha_i=1$; $\beta_i\geqslant 0$; $-\infty<\gamma_i<\infty$; X_i — вершины M_0; P_i — направляющие векторы неограниченных ребер M_0; P'_i — любая полная система линейно независимых векторов подпространства Π_{n-r}.

В случае, когда ранг системы ограничений (3.1) равен n (важный случай в теории линейного программирования), теорема 3.1 допускает следующее уточнение.

Теорема 3.1а. *Пусть ранг совместной системы ограничений (3.1) равен n, тогда выпуклое многогранное множество $M\subset R^n$ совпадает с совокупностью точек X вида*

$$X=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_iX_i+\sum_{i=1}^{N_2}\beta_iP_i, \tag{3.4}$$

где $\alpha_i\geqslant 0$; $\sum\limits_{i=1}^{N_1}\alpha_i=1$; $\beta_i\geqslant 0$; X_i — вершины M; P_i — направляющие векторы неограниченных ребер M.

Эта теорема допускает следующее обращение.

Теорема 3.2. *Множество $T\subset R^n$, состоящее из точек X, представимых в виде*

$$X=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_iX_i+\sum_{i=1}^{N_2}\beta_iP_i$$

$\left(\alpha_i\geqslant 0;\ \sum\limits_{i=1}^{N_1}\alpha_i=1;\ \beta_i\geqslant 0;\ \{X_i\}_{i=1}^{N_1},\ \{P_i\}_{i=1}^{N_2}\right.$ — произвольная система точек, принадлежащих R^n), является выпуклым многогранным множеством.

3.1. Доказать, что выпуклый многогранник (выпуклое ограниченное замкнутое множество) можно определить как выпуклую оболочку конечного числа точек.

3.2. Рассмотрим выпуклую оболочку M конечного числа точек $X_i\in R^n$ $(i=1,2,\ldots,k)$. Из утверждения предыдущей задачи вытекает, что M — выпуклый многогранник. Можно ли утверждать, что X_i — вершины M?

3.3. Рассмотрим множество M, описанное в условии предыдущей задачи. Для того чтобы точка X_{i_0} была вершиной M, необходимо и достаточно, чтобы X_{i_0} не принадлежала выпуклой оболочке X_i $(i=1,2,\ldots,n;\ i\neq i_0)$. Доказать.

В задачах **3.4—3.11** найти вершины X множества M. Здесь M — выпуклая оболочка точек X_i, заданных в условиях.

3.4. $X_1=(0)$, $X_2=(1)$, $X_3=(-1)$, $X_4=(5)$.

3.5. $X_1=(0,0)$, $X_2=(1,0)$, $X_3=(-1,0)$, $X_4=(0,-1)$.

3.6. $X_1=(0,0)$, $X_2=(1,0)$, $X_3=(0,1)$, $X_4=(-1,0)$, $X_5=(0,-1)$, $X_6=(2,0)$, $X_7=(0,2)$.

3.7. $X_1=(0,0)$, $X_2=(1,0)$, $X_3=(0,1)$, $X_4=(-1,0)$, $X_5=(0,-1)$, $X_6=(1,1)$, $X_7=(-1,-1)$, $X_8=(1,-1)$, $X_9=(-1,1)$.

3.8. $X_1=(0,0,1)$, $X_2=(0,1,0)$, $X_3=(1,0,0)$, $X_4=(0,0,0)$.

3.9. $X_1=(0,0,0)$, $X_2=(0,0,1)$, $X_3=(0,1,1)$, $X_4=(1,1,1)$, $X_5=(2,2,2)$.

3.10. $X_i=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ $(i=1,2,\ldots,2^n)$, где α_k равно 0 или 1, $k=1,2,\ldots,n$.

3.11. $X_0=(0,0,\ldots,0)$, $X_i=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j-1},\frac{1}{j},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)$ $(i=1,2,\ldots,n2^{n-1})$, где α_k равно 0 или 1, $j=1,2,\ldots,n$.

В задачах **3.12—3.16** написать ограничения, задающие множество M. Здесь M — выпуклая оболочка точек X_i, заданных в условиях.

3.12. $X_i=(i)$, $i=1,2,\ldots,k$.

3.13. $X_1=(0,0)$, $X_2=(0,1)$, $X_3=(1,0)$.

3.14. $X_1=(0,0)$, $X_2=(1,0)$, $X_3=(0,1)$, $X_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $X_5=\left(\frac{1}{2},0\right)$, $X_6=\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

3.15. $X_1=(1,0,0)$, $X_2=(0,1,0)$, $X_3=(0,0,1)$, $X_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $X_5=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $X_6=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

3.16. $X_i=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ $(i=1,2,\ldots,2^n)$, где α_k равно 0 или 1.

3.17*. Доказать, что подпространство $\Pi_k\subset R^n$ можно представить в виде совокупности неотрицательных комбинаций конечного числа точек.

3.18*. Доказать, что минимальное число точек, обладающих тем свойством, что совокупность их неотрицательных линейных комбинаций совпадает с подпространством $\Pi_k\subset R^n$, равно $k+1$.

3.19. Доказать, что произвольное выпуклое многогранное множество M равно прямой сумме множества M_0 и подпространства Π_{n-r}, где M_0 и Π_{n-r} — множество и подпространство, определенные во введении.

3.20*. Грани $\Gamma\subset M$ и $\Gamma_0\subset M_0$ (см. введение) называются соответствующими, если ограничения Γ_0 отличаются от ограничений Γ дополнительными условиями

$$x_{j_i}=0,\ i=r+1,\ r+2,\ldots,\ n.$$

Доказать, что размерности Γ и Γ_0 связаны соотношением

$$\rho(\Gamma)=\rho(\Gamma_0)+n-r.$$

Отсюда, в частности, вытекает утверждение задачи 2.73 о том, что минимальная размерность грани выпуклого многогранного множества M равна $n-r_1$, где r_1 — ранг совместной системы ограничений, задающих M.

3.21*. Для того чтобы выпуклое многогранное множество обладало свойствами конуса, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

а) множество M обладает единственной вершиной;

б) множество M не обладает вершинами, а у множества M_0 (см. введение) есть одна вершина.

3.22*. Доказать, что выпуклый многогранный конус $K\subset R^n$ с вершиной в X_0 можно определить как совокупность точек $X\in R^n$, представимых в виде

$$X=X_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i P_i, \text{ где } \beta_i\geqslant 0;\ P_i\in R^n\ (i=1, 2,\ldots,k).$$

3.23. Доказать, что произвольное выпуклое многогранное множество M может быть представлено в виде прямой суммы некоторого выпуклого многогранника и некоторого выпуклого многогранного конуса с вершиной в начале координат.

3.24*. Доказать, что произвольное линейное преобразование $Y=TX$, где T — матрица размером $n_1\times n_2$, переводит любое выпуклое многогранное множество $M_{n_2}\subset R^{n_2}$ в выпуклое многогранное множество $M_{n_1}\subset R^{n_1}$.

3.25. Доказать, что M_{n_1} ограничено в R^{n_1}, если M_{n_2} ограничено в R^{n_2} (см. задачу 3.24).

3.26. Пусть M_{n_2} не ограничено в R^{n_2} (см. задачу 3.24). Можно ли утверждать, что M_{n_1} не ограничено в R^{n_1}?

3.27*. Пусть точка $X_0\in M$, где M — выпуклое многогранное множество, имеющее вершины. Доказать, что можно так выбрать $C\in R^n$, чтобы множество M_1, равное пересечению M с полупространством $(C, X)\leqslant(C, X_0)$, было ограничено в R^n.

3.28*. Пусть выпуклое многогранное множество M имеет вершины. Доказать, что представление (3.4) для точек $X\in M$ можно уточнить: если $\beta_j>0$, то и $\alpha_k>0$, где β_j — коэффициент при направляющем векторе неограниченного ребра P_j, а α_k — коэффициент при вершине X_k, из которой выходит ребро $\Gamma_j(P_j)$.

3.29*. Доказать, что выпуклое многогранное множество M, имеющее вершины, является выпуклой оболочкой своих вершин и неограниченных ребер.

3.30*. Доказать, что выпуклое многогранное множество M является выпуклой оболочкой своих граней размерности $n-r$ и $n-r+1$, где

n — размерность пространства, в котором лежит M, а r — ранг совместной системы ограничений, задающих M.

3.31*. Показать, что утверждение предыдущей задачи может быть усилено, а именно: в полученном представлении могут быть оставлены лишь те грани M размерности $n-r+1$, которые содержат по одной грани размерности $n-r$.

3.32*. Доказать, что выпуклый многогранный конус, не являющийся общей частью нескольких гиперплоскостей, совпадает с выпуклой оболочкой своих граней размерности $n-r+1$, где n и r определяются так же, как и в задаче 3.30.

§ 2. Геометрическая интерпретация систем равенств и неравенств ($n=1, 2, 3$)

Рассмотрим смешанную систему равенств и неравенств (2.1), (2.2). Будем различать две задачи, относящиеся к этой системе:

а) Нахождение частного решения системы: найти хотя бы один вектор $X \in R^n$, т. е. n чисел $x_1, x_2 \ldots, x_n$, которые при подстановке в уравнения и в неравенства (2.1), (2.2) обращают каждое из них в числовое тождество.

б) Нахождение общего решения системы: найти все $X \in R^n$, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют системе (2.1), (2.2).

В простейших случаях ($n=1, 2, 3$) геометрическая интерпретация системы равенств и неравенств позволяет находить ее решения. Пусть для определенности $n=3$. Система (2.1), (2.2) при этом имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \leqslant b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+a_{s3}x_3 \leqslant b_s, \\ a_{s+1,1}x_1+a_{s+1,2}x_2+a_{s+1,3}x_3=b_{s+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s+t,1}x_1+a_{s+t,2}x_2+a_{s+t,3}x_3=b_{s+t}. \end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

Каждое из t уравнений системы (3.5) определяет в пространстве R^3 плоскость, а каждое из s неравенств (3.5) — полупространство, принадлежащее R^3 и расположенное по ту сторону от плоскости $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$, что и конец вектора $(-a_{i1}, -a_{i2}, -a_{i3})$, начало которого совпадает с любой точкой этой плоскости.

Таким образом, решение системы (3.5) совпадает с множеством точек $X \in R^3$, представляющим собой общую часть полупространств $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \leqslant b_i$ ($i=1, 2, \ldots, s$) и плоскостей $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$ ($i=s+1, \ldots, s+t$).

Пример 3.1. Изобразить область в пространстве R^3, соответствующую решению системы

$$x_1+x_2+x_3=1,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, 3.$$

Из рис. 3.1 видно, что множество решений системы совпадает с множеством точек X, образованным пересечением плоскости $x_1+x_2+x_3=1$ с полупространствами $x_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$.

Приведенное геометрическое истолкование системы остается справедливым и для случая, когда система равенств и неравенств имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\ &x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$$n - m = k, \text{ где } k = 1, 2, 3.$$

Действительно, выражая все переменные через две ($k = 2$) или через три ($k = 3$), мы сведем задачу к уже рассмотренной.

Пример 3.2. Используя геометрическую интерпретацию, найти частное решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 7, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Выражая переменные x_2 и x_3 через x_1 и x_4, получим

$$\begin{aligned} x_2 &= 6 - x_1 - 2x_4, \\ x_3 &= -1 \quad + x_4, \\ x_i &\geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Условия $x_2 = x_3 = 0$ высекают на плоскости x_1Ox_4 прямые, соответствующие уравнениям $x_1 + 2x_4 = 6$ и $x_4 = 1$, а ограничения $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, показывают, какую из полуплоскостей нужно рассматривать (рис. 3.2). Если взять в заштрихованной области любую точку, например $x_1 = x_4 = 1$, получим частное решение исходной системы $X = (1, 3, 0, 1)$.

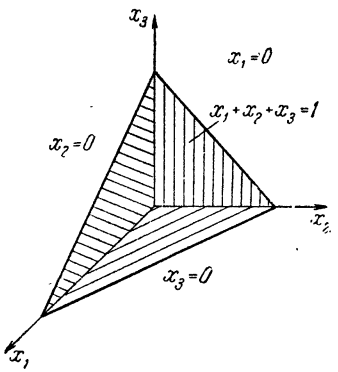

Рис. 3.1.

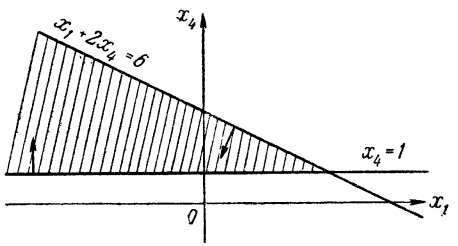

Рис. 3.2.

В задачах **3.33** — **3.83** изобразить области, соответствующие решениям систем равенств и неравенств, заданных в условиях (размерность пространства, в котором рассматривается система, совпадает с наибольшим номером координаты x_n).

3.33. $x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$x_2 \leqslant 1.$

3.34. $x_1 - x_2 \leqslant 2,$
$x_1 + 3x_2 = 4.$

3.35. $x_1 + 5x_2 \leqslant 10,$
$3x_1 + 2x_2 \leqslant 1,$
$x_1 - x_2 \leqslant 7,$
$7x_1 - 3x_2 \leqslant 1.$

3.36. $x_1 + x_2 \leqslant 2,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 3,$
$x_1 + 3x_2 \leqslant 4,$
$x_1 - x_2 = 0.$

3.37. $x_1+x_2+x_3\leqslant 1,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3.$

3.38. $0\leqslant x_i\leqslant 1,$
$i=1,2,3.$

3.39. $x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1+x_3\leqslant 1,$
$x_2+x_3\leqslant 1.$

3.40. $x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_1-x_3\leqslant 1,$
$x_2+x_3\leqslant 1.$

3.41. $x_1+x_2+x_3=1,$
$x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_3\geqslant 0.$

3.42. $x_1-x_2+x_3=1,$
$x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_3\geqslant 0.$

3.43. $x_1+2x_2+x_3=4,$
$x_1-x_3=2,$
$x_2-x_3=1,$
$x_2\geqslant 0.$

3.44. $x_1+x_2=2,$
$x_2+x_3=2,$
$x_1-x_3\leqslant 0,$
$x_2\geqslant 0.$

3.45. $x_1+2x_2+3x_3=6,$
$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,2,3.$

3.46. $x_1-2x_2+3x_3=6,$
$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,2,3.$

3.47. $x_1+x_2+x_3\leqslant 1,$
$2x_1+x_2+x_3\leqslant 1,$
$x_1+2x_2+x_3\leqslant 1,$
$x_1+x_2+2x_3\leqslant 1,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3.$

3.48. $x_1+2x_2\leqslant 1,$
$x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_1\geqslant 0,$
$x_2\geqslant 0,$
$x_1+x_2+x_3\leqslant 1.$

3.49. $x_1+x_2+x_3+x_4=4,$
$-x_1+x_2+x_3+x_4=3,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4.$

3.50. $x_1+x_2+x_3+x_4=4,$
$x_1-x_2+x_3-x_4=0,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4.$

3.51. $x_1+2x_2+2x_3+x_4=2,$
$2x_1+x_2+x_3+2x_4=6,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4.$

3.52. $x_1+x_4=2,$
$x_1+x_2+x_3=3,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4.$

3.53. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,$
$x_1+x_3+2x_5=4,$
$x_2+x_4=-2,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,5.$

3.54. $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=5,$
$x_1+x_3+2x_5=4,$
$x_2-x_4=0,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,5.$

3.55. $6x_1+3x_2+2x_3-3x_4+4x_5=5,$
$4x_1+2x_2+x_3-2x_4+3x_5=4,$
$4x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,5.$

3.56. $x_1-2x_2+3x_3+2x_4+x_5=4,$
$3x_1-6x_2+5x_3+4x_4+3x_5=5,$
$x_1-2x_2+7x_3+4x_4+x_5=11,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,5.$

3.57. $2x_1-x_2-x_3+2x_4+3x_5=2,$
$6x_1-3x_2-2x_3+4x_4+5x_5=3,$
$6x_1-3x_2-4x_3+8x_4+13x_5=9,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,5.$

3.58. $2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6,$
$3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5,$
$x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.59. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0,$
$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=-1,$
$x_3+x_4+x_5+x_6=0,$
$x_4+x_5+x_6=1,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 6.$

3.60. $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6=6,$
$x_2-x_3+x_4-x_5+x_6=5,$
$x_3-x_4+x_5-x_6=4,$
$x_4-x_5+x_6=3,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 6.$

3.61. $x_1+x_2+\ldots+x_n=n,$
$x_2+\ldots+x_n=n-1,$
. . . . . .
$x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=3,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n.$

3.62. $x_1+x_2+\ldots+x_n=1,$
$x_2+\ldots+x_n=1,$
. . . . . .
$x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=1,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n.$

3.63. $x_1-x_2+x_3-x_4=0,\quad x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3, 4.$

3.64. $2x_1-x_2+2x_3-x_4=2,\quad x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3, 4.$

3.65. $x_1+2x_2+2x_3+x_4=5,\quad x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3, 4.$

3.66. $-x_1+2x_2-2x_3+x_4=0,\quad x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3, 4.$

3.67. $x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0,$
$2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.68. $x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0,$
$x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.69. $2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1,$
$x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.70. $2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=1,$
$3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.71. $x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0,$
$4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.72. $2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1,$
$x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.73. $4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1,$
$2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

3.74. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2,\\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

3.75. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= 1,\\ x_1 \qquad\qquad - x_5 &= 2,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

3.76. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 5,\\ x_2 - x_3 - x_4 \qquad &= 4,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

3.77. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 &= 7,\\ x_2 \qquad\qquad + 3x_5 - x_6 &= 3,\\ 3x_1 \qquad + 2x_4 \qquad - 2x_6 &= 3,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

3.78. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 &= 2,\\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 2x_6 &= 0,\\ x_1 \qquad + x_4 \qquad - x_6 &= 1,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

3.79. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \qquad + x_5 + 2x_6 &= 4,\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \qquad &= 3,\\ -x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 0,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

3.80. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 &= 2,\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 &= 1,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

3.81. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n,\\ x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n - 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 4,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

3.82. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= 1,\\ x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 1,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

3.83. $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + x_{2n} &= 0,\\ x_2 - x_3 + \ldots + x_{2n} &= 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -x_{2n-3} + x_{2n-2} - x_{2n-1} + x_{2n} &= 0,\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 2n. \end{aligned}$$

§ 3. Решение систем неравенств методом исключения переменных (отыскание частного решения)

Опишем метод исключения переменных для решения систем неравенств (2.1). Рассмотрим сначала первую переменную x_1 и разобьем все неравенства, входящие в систему (2.1), на три класса:

а) первый класс содержит те неравенства системы, в которых переменная x_1 больше или равна значению линейной формы от остальных переменных, т. е. $x_1 \geqslant L_i^1(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_i^1$, где $i = 1, 2, \ldots, k_1$, $L_i^1(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}^1 x_j$,

б) второй класс содержит те неравенства системы, в которых переменная x_1 меньше или равна значению линейной формы от остальных переменных, т. е. $x_1 \leqslant L_i^2(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_i^2$, где $i = 1, 2, \ldots, k_2$, $L_i^2(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}^2 x_j$;

в) наконец, третий класс содержит неравенства системы, в которые x_1 не входит, т. е. $L_i^3(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_i^3 \leqslant 0$, где $i = 1, 2, \ldots, k_3$, $L_i^3(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}^3 x_j$.

Очевидно, $k_1 + k_2 + k_3 = s$ — числу неравенств системы.

Заменим систему (2.1) следующей системой, не содержащей x_1:

$$L_i^1(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_i^1 \leqslant L_j^2(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_j^2,$$

$$L_l^3(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_l^3 \leqslant 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, k_1, \quad j = 1, 2, \ldots, k_2, \quad l = 1, 2, \ldots, k_3.$$

Если для преобразованной системы найдено решение $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n)$, то точка $(\tilde{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где $\tilde{x}_1$ определяется из условий

$$L_i^1(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_i^1 \leqslant \tilde{x}_1 \leqslant L_j^2(x_2, \ldots, x_n) + \alpha_j^2,$$

$$i = 1, 2, \ldots, k_1, \quad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

как легко проверить, удовлетворяет исходной системе.

Отсюда — метод решения: исключаем последовательно все переменные, кроме последней, находим $(\bar{x}_n)$, затем находим $(\tilde{x}_{n-1}, \bar{x}_n)$ и так далее, пока не будет найдено решение исходной системы $X = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, \bar{x}_n)$. Проиллюстрируем изложенную схему на простом числовом примере.

Пример 3.3. Решить методом исключения переменных систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + x_3 \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 3, \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Решение. Начнем с исключения переменной x_1. Классы а), б) и в) состоят из неравенств:

а) $x_1 \geqslant 2 - x_2$, $x_1 \geqslant 2 - x_3$, $x_1 \geqslant 0$;

б) $x_1 \leqslant x_2$, $x_1 \leqslant 3 - x_2 + x_3$;

в) $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

Запишем преобразованную систему:

$$\left.\begin{array}{l} 2 - x_2 \leqslant x_2, \\ 2 - x_2 \leqslant 3 - x_2 + x_3, \\ 2 - x_3 \leqslant x_2, \\ 2 - x_3 \leqslant 3 - x_2 + x_3, \\ 0 \leqslant x_2, \\ 0 \leqslant 3 - x_2 + x_3, \\ 0 \leqslant x_3 \end{array}\right\} \qquad (1')$$

или, после упрощений,

$$\left.\begin{aligned} x_2 \qquad &\geqslant 1, \\ x_3 &\geqslant 0, \\ -x_2 + x_3 &\geqslant -3, \\ x_2 + x_3 &\geqslant 2, \\ -x_2 + 2x_3 &\geqslant -1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Исключим x_2 из системы (2). Для этого разобьем систему (2) на классы:

$$\text{а) } x_2 \geqslant 1, \qquad \text{б) } x_2 \leqslant x_3 + 3, \qquad \text{в) } x_3 \geqslant 0,$$

$$x_2 \geqslant 2 - x_3; \qquad x_2 \leqslant 2x_3 + 1;$$

и запишем преобразованную систему:

$$\left.\begin{aligned} 1 &\leqslant 2x_3 + 1, \\ 1 &\leqslant x_3 + 3, \\ 2 - x_3 &\leqslant 2x_3 + 1, \\ 2 - x_3 &\leqslant x_3 + 3, \\ 0 &\leqslant x_3 \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

или

$$x_3 \geqslant {}^1/_3. \tag{3}$$

Итак, решение системы (3) — любое число $\bar{x}_3 \geqslant {}^1/_3$. Для получения частного решения исходной системы положим $\bar{x}_3 = 2$. Для получения $\tilde{x}_2$ имеем из (2′) неравенство $1 \leqslant \tilde{x}_2 \leqslant 2$.

Положим $\tilde{x}_2 = 2$. Для нахождения $\tilde{x}_1$ используем систему (1′):

$$0 \leqslant \tilde{x}_1 \leqslant 2,$$
$$0 \leqslant \tilde{x}_1 \leqslant 3,$$

отсюда

$$0 \leqslant \tilde{x}_1 \leqslant 2.$$

Положив $\tilde{x}_1 = 1$, получим частное решение исходной системы $X = (1, 2, 2)$.

3.84. Проверить справедливость утверждения: точка $X = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, \bar{x}_n)$ является решением системы неравенств (2.1) (см. введение к этому параграфу).

3.85. Как изменится метод исключения переменных в случае, когда класс а) (или класс б)) пуст?

3.86. Изменить метод исключения переменных для случая, когда система смешанная, т. е. вместе с неравенствами (2.1) в систему входят и равенства (2.2).

3.87. Доказать, что если одна из преобразованных систем противоречива, то противоречива и исходная система (2.1).

В задачах **3.88 — 3.101** решить системы методом исключения переменных.

3.88. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 3, \\ 2x_1 - x_2 &\geqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

3.89. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 &\geqslant 1, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

3.90. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ x_1 - x_2 &\geqslant 3, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

3.91. $$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 &\geqslant 5, \\ 10x_1 + x_2 &\geqslant 7, \\ x_1 - x_2 &\geqslant 0, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

3.92. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 3, \\ -2x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 4. \end{aligned}$$

3.93. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 &\geqslant -2, \\ -x_1 - 3x_2 &\leqslant -5, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ -2x_1 + x_2 &\geqslant -2. \end{aligned}$$

3.94. $$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &\leqslant 0, \\ x_1 - x_2 \qquad &\leqslant 0, \\ x_2 - x_3 &\leqslant 0, \\ x_i &\geqslant 0;\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

3.95. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geqslant 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.96. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\leqslant 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leqslant 1, \\ 2x_1 \qquad - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

3.97. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad &\leqslant 3, \\ x_2 - x_3 &\leqslant 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

3.98. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &\leqslant 1, \\ x_2 + x_3 \qquad &\geqslant 1, \\ x_3 + x_4 &\leqslant 1, \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 &\geqslant 1, \\ x_2 \qquad + x_4 &\leqslant 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

3.99. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 \qquad\qquad &\geqslant -1, \\ x_1 \qquad - 2x_3 \qquad &\geqslant -1, \\ x_1 \qquad\qquad - 2x_4 &\geqslant -1. \end{aligned}$$

3.100. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &\leqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.101. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &\leqslant 1, \\ x_2 + x_3 \qquad &\leqslant 1, \\ x_3 + x_4 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

В задачах **3.102 — 3.119** системы неравенств с числом переменных, большим трех, привести методом исключения к системам с числом переменных не больше трех. Найти для приведенных систем частное решение, используя геометрическую интерпретацию § 2; затем получить частное решение исходной системы.

3.102.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &\leqslant 1,\\ x_1-x_2+x_3-x_4 &\leqslant 0,\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4 &\geqslant 3,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.103.
$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3+x_4 &\geqslant 1,\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4 &\geqslant 1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4 &\geqslant -1,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4 &\leqslant 5. \end{aligned}$$

3.104.
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-x_4 &\leqslant 2,\\ x_1-x_2-x_3+x_4 &\geqslant 0,\\ -x_1-x_2+2x_3-x_4 &\geqslant -3,\\ x_1 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

3.105.
$$\begin{aligned} 6x_1-2x_2-3x_3-x_4 &\leqslant 0,\\ x_1+3x_2-4x_3 &\geqslant 0,\\ x_1+x_2-3x_3-x_4 &= 2,\\ x_i \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.106.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+2x_3-x_4 &\leqslant 4,\\ x_1-2x_2+x_3-2x_4 &\geqslant 2,\\ x_1-x_4 &\geqslant 1,\\ x_2+x_3 &\leqslant 1,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.107.
$$\begin{aligned} 3x_1-x_2 &\leqslant 2,\\ x_2-2x_3 &\geqslant -1,\\ 4x_3-x_4 &\leqslant 3,\\ 5x_1+x_4 &\geqslant 6,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.108.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &\leqslant 2,\\ 2x_1-x_2+x_3-4x_4 &\leqslant 0,\\ 10x_1+9x_2-9x_3+10x_4 &= 8,\\ x_1+3x_2+3x_3+x_4 &\geqslant 8,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.109.
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &\geqslant -10,\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &\leqslant -4,\\ x_1-x_2+x_3-x_4 &\geqslant -6,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &\leqslant 10,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

3.110.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &\leqslant 7,\\ -x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqslant 1,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 5. \end{aligned}$$

3.111.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5 &\geqslant 10,\\ x_1-2x_2+2x_3-2x_4+x_5 &\leqslant 5,\\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 5. \end{aligned}$$

3.112.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqslant 5,\\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4 &\geqslant 2,\\ x_1-x_2 &\leqslant 3,\\ x_1+2x_2 &\geqslant 4,\\ x_2+x_3 &\leqslant 3. \end{aligned}$$

3.113.
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 &\geqslant 0,\\ x_2+x_3-x_4+2x_5 &\leqslant 3,\\ x_3+2x_4 &\geqslant 3,\\ x_3-x_4 &\leqslant 5,\\ -x_3+2x_4 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

3.114.
$$\begin{aligned} x_1-2x_2 &\geqslant -2,\\ -2x_1+x_2 &\leqslant 2,\\ 3x_1+2x_2 &\geqslant 0,\\ x_2-x_3 &\leqslant 0,\\ x_1+x_2+x_3 &\geqslant 2,\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4+x_5 &\geqslant 3. \end{aligned}$$

3.115.
$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 3,\\
2x_3 - x_4 &\geqslant 1,\\
x_1 + x_2 + x_4 &\geqslant 2,\\
-x_3 + 2x_4 &\leqslant 3,\\
x_1 + x_4 + x_5 &\geqslant 2,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

3.116.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_4 - x_5 &\geqslant 3,\\
-x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 4,\\
x_2 - x_4 &\geqslant 5,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leqslant 5,\\
2x_1 + 3x_3 &\geqslant 5,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

3.117.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5,\\
2x_2 - x_3 &\geqslant 1,\\
-x_2 + 3x_3 &\leqslant 2,\\
x_3 + x_4 &\geqslant 0,\\
x_2 - x_4 &\leqslant 0,\\
x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 &\geqslant 5.
\end{aligned}$$

3.118.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leqslant 1,\\
x_2 + x_3 &\leqslant 1,\\
x_1 + x_4 &\leqslant 2,\\
x_2 + x_4 &\leqslant 2,\\
x_1 + x_5 &\leqslant 2,\\
x_2 + 2x_5 &\geqslant 3,\\
x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &\geqslant 4,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

3.119.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 3,\\
x_2 - x_3 + x_4 &\geqslant 1,\\
2x_2 + x_3 - 2x_4 &\geqslant 1,\\
x_3 + x_4 &\leqslant 3,\\
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\geqslant 2,\\
x_2 + x_4 &\leqslant 5,\\
x_1 + x_5 &\geqslant 0,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

§ 4. Отыскание общего решения системы равенств и неравенств

Теорема 3.1 о представлении выпуклого многогранного множества M дает способ получения общего решения смешанной системы (2.1), (2.2) равенств и неравенств.

Действительно, достаточно найти вершины X_i множества M_0, направляющие векторы неограниченных ребер этого множества P_i и базис P_i' в под-

пространстве Π_{n-r} (см. введение к § 1 этой главы), чтобы записать общее решение системы (2.1), (2.2) в виде

$$X=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_i X_i+\sum_{i=1}^{N_2}\beta_i P_i+\sum_{i=1}^{n-r}\gamma_i P'_i, \tag{3.3}$$

где $\alpha_i,\ \beta_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{N_1}\alpha_i=1,\ -\infty<\gamma<\infty$.

Приведем последовательность операций, необходимых для получения (3.3).

Случай 1. Ранг системы равен n.

В этом случае $M=M_0$, а подпространство Π_{n-r} состоит только из нуля. Для вычисления координат вершин X_i необходимо рассмотреть всевозможные системы из n линейно независимых уравнений, полученных из уравнений (2.2), дополненных неравенствами (2.1), в которых знак неравенства изменен на знак равенства. Точка X_0, являющаяся решением такой системы, будет вершиной M в случае, если ее координаты удовлетворяют оставшимся неравенствам (2.1).

Для определения направляющих векторов неограниченных ребер M воспользуемся утверждением следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Для того чтобы P был направляющим вектором неограниченного ребра выпуклого многогранного множества M, определяемого ограничениями* (2.1), (2.2), *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) *P удовлетворяет системе $n-1$ однородных уравнений (левые части которых линейно независимы), соответствующей ограничениям* (2.1), (2.2), $(A_i,\ P)=0,\ i=s+1,\ s+2,\ \ldots,\ s+t,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-t-s-1}$;

б) $(A_i,\ P)\leqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$

$(A_i,\ P)=0,\qquad i=s+1,\ \ldots,\ s+t.$

Случай 2. Ранг системы равен $r<n$.

Определяем последовательно M_0 и Π_{n-r} (последовательность операций, необходимых для этого, описана во введении к § 1 этой главы). Затем, так же как в случае 1, определяем вершины и направляющие векторы неограниченных ребер множества M_0. Проиллюстрируем изложенное на двух простых примерах.

Пример 3.4. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x_1+x_2&\geqslant 1,\\ -x_1+x_2&\geqslant -2,\\ x_1\qquad &\geqslant 0,\\ x_2&\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ранг системы равен 2. Поэтому начнем с определения вершин множества M, система ограничений которого совпадает с данной.

Рассмотрим последовательно системы:

1) $\begin{aligned} x_1+x_2&=1,\\ -x_1+x_2&=-2; \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} x_1+x_2&=1,\\ x_1\qquad &=0; \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} x_1+x_2&=1,\\ x_2&=0; \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} -x_1+x_2&=-2,\\ x_1\qquad &=0; \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} -x_1+x_2&=-2,\\ x_2&=0; \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} x_1\qquad &=0,\\ x_2&=0. \end{aligned}$

Точки $X_1=(0,\ 1)$, $X_2=(1,\ 0)$ и $X_3=(2,\ 0)$, найденные в результате решения этих систем, являются вершинами M, а $X_4=(0,\ -2)$, $X_5=(3/2,\ -1/2)$ и $X_6=(0,\ 0)$ не являются вершинами M, так как их координаты не удовлетворяют оставшимся ограничениям.

Для определения направляющих векторов неограниченных ребер M, как следует из утверждения теоремы 3.3, необходимо рассмотреть системы:

$$1)\quad \begin{aligned} x_1 \qquad &= 0, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0; \end{aligned} \qquad 2)\quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 \qquad &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0; \end{aligned}$$

$$3)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 \qquad &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0; \end{aligned} \qquad 4)\quad \begin{aligned} x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 \qquad &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Фундаментальными решениями первых уравнений систем 1) — 4) являются соответственно векторы $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (-1, 1)$ и $P_4 = (1, 0)$. Легко проверить, что P_1 и P_2 удовлетворяют условию б) теоремы 3.3, а P_3 и P_4 не удовлетворяют этому условию, т. е. не являются направляющими векторами неограниченных ребер M. Общее решение системы запишется в виде

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

или

$$X = (0, \alpha_1) + (\alpha_2, 0) + (2\alpha_3, 0) + (0, \beta_1) + (\beta_2, \beta_2) = (\alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta_2, \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2),$$

где

$$\alpha_i \geqslant 0, \ \beta_i \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1.$$

Пример 3.5. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - \ x_3 &\leqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leqslant 2, \\ x_2 + \ x_3 &\leqslant 4. \end{aligned}$$

В этой системе $n = 3$, а ранг $r = 2$. Введем обозначения $A_1 = (-1, 2, 0)$, $A_2 = (1, -1, 1)$, $A_3 = (-1, 3, 1)$, $B = (1, 2, 4)$. Очевидно, $A_3 = 2A_1 + A_2$. Поэтому исходную систему можно записать в виде

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + (2A_1 + A_2)\, x_3 \leqslant B$$

или

$$A_1 (x_1 + 2x_3) + A_2 (x_2 + x_3) \leqslant B.$$

Для задания множества M_0 присоединим к исходной системе ограничение $x_3 = 0$, а для определения подпространства Π_1 (Π_{3-2}) приравняем нулю коэффициенты при A_1 и A_2:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 &= 0, \\ x_2 + \ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что вершины M_0 совпадают с точкой $X_1 = (3, 4, 0)$, а направляющими векторами неограниченных ребер M_0 будут $P_1 = (-1, -1, 0)$ и $P_2 = (-1, -2, 0)$. Базис подпространства Π_1 состоит из единственного вектора $P' = (-2, -1, 1)$.

Используя теорему о представлении, запишем общее решение исходной системы в виде

$$X = X_1 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \gamma P'$$

или

$$X = (3 - \beta_1 - \beta_2 - 2\gamma, \ 4 - \beta_1 - 2\beta_2 - \gamma, \ \gamma),$$

где $\beta_i \geqslant 0$, $-\infty < \gamma < \infty$.

В задачах **3.120 — 3.207** найти общее решение смешанных систем равенств и неравенств.

3.120. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 \quad &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$

3.121. $\begin{aligned} -1 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ -1 \leqslant \quad x_1 + x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.122. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ 0 \leqslant x_1 \quad &\leqslant 1, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$

3.123. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.124. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ \frac{1}{2} \leqslant x_1 \quad &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.125. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ \frac{1}{2} \leqslant x_1 \quad &\leqslant 1, \\ 0 \leqslant \quad x_2 &\leqslant 2. \end{aligned}$

3.126. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ x_2 &\geqslant 1. \end{aligned}$

3.127. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ x_1 \quad &\leqslant 0. \end{aligned}$

3.128. $\begin{aligned} -4 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant -1, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant -2, \\ x_2 &\leqslant 0. \end{aligned}$

3.129. $\begin{aligned} -2 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -2 \leqslant \quad x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -1 \leqslant \quad x_1 \quad &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.130. $\begin{aligned} -100 \leqslant x_1 + 100x_2 &\leqslant 100, \\ -1 \leqslant \quad x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 \quad &\geqslant -10. \end{aligned}$

3.131. $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leqslant 5, \\ -x_1 + 3x_2 &\geqslant -4, \\ x_1 + 5x_2 &\leqslant 4, \\ -1 \leqslant x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.132. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 &\leqslant 8, \\ -2x_1 + 3x_2 &\geqslant -9, \\ 4x_1 + 3x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 \quad &\geqslant 0. \end{aligned}$

3.133. $\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &\leqslant 5, \\ x_1 + 14x_2 &\leqslant 30, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 5, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ -x_1 + 14x_2 &\leqslant 30, \\ -1 \leqslant x_1 \quad &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.134. $\begin{aligned} x_1 \quad &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$

3.135. $\begin{aligned} x_1 \quad &\geqslant 1, \\ x_2 &\geqslant 1. \end{aligned}$

3.136. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ x_1 \quad &\geqslant 1, \\ x_2 &\geqslant 1. \end{aligned}$

3.137. $\begin{aligned} -1 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 0, \\ x_1 \quad &\geqslant 1, \\ x_2 &\geqslant 1. \end{aligned}$

3.138. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ -1 \leqslant x_1 \quad &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.139. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 \quad &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.140. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$

3.141. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geqslant -2, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}$

3.142. $$\begin{aligned} -1 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 &\geqslant -1, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.143. $$\begin{aligned} -1 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 &\geqslant -1. \end{aligned}$$

3.144. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 &\geqslant -10, \\ -x_1 + 2x_2 &= 0, \\ x_2 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

3.145. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 - 3x_2 &\geqslant 1, \\ -x_1 + 3x_2 &\leqslant 7, \\ x_1 + 4x_2 &\geqslant 10. \end{aligned}$$

3.146. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

3.147. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

3.148. $0 \leqslant x_i \leqslant 1,$
$i = 1, 2, 3.$

3.149. $0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

3.150. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10,$
$x_i \geqslant 1,\ i = 1, 2, 3.$

3.151. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10, \\ x_1 &\geqslant 1, \\ x_2 &\geqslant 2, \\ x_3 &\geqslant 3. \end{aligned}$$

3.152. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.153. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.154. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.155. $$\begin{aligned} 10x_1 + x_3 &\leqslant 10, \\ 10x_2 + x_3 &\leqslant 10, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.156. $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqslant 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leqslant 2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.157. $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 22x_3 &\leqslant 22, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &\leqslant 6, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &\leqslant 2, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.158. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.159. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.160. $0 \leqslant x_1 \leqslant 1,$
$0 \leqslant x_2 \leqslant 1,$
$0 \leqslant x_3.$

3.161. $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

3.162. $x_1 - 3x_2 + x_3 = 5,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

3.163. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 - x_3 &= 2, \\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.164. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_1 + x_3 &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.165. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_3 &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.166. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ x_2 - 2x_3 &\leqslant 0, \\ x_3 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.167. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 3, \\ x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.168. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &\leqslant 2, \\ x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_1 \qquad + x_3 &\leqslant 2, \\ x_1 \qquad &\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.169. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &\leqslant 1, \\ x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 \qquad + x_3 &\leqslant 2, \\ x_2 \qquad &\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.170. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3.171. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3.172. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3.173. $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 16,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3.174. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 2, \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 2, \\ x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 \qquad + x_4 &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.175. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\leqslant 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leqslant 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.176. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3.177. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3.178. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 4, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 3, \\ x_4 + x_5 &= 2, \end{aligned}$$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

3.179. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

3.180. $x_i \geqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

3.181. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

3.182. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

3.183. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

3.184. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$
$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

3.185. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= n, \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= n - 1, \\ x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= n - 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + x_n &= 2, \end{aligned}$$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

3.186. $$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n&=n,\\ x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n&=n-1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-2}+x_{n-1}+x_n&=3,\\ x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,n.& \end{aligned}$$

3.187. $x_1+x_2\leqslant 1.$

3.188. $x_1-x_2\leqslant 1.$

3.189. $$\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3&\leqslant 1,\\ -x_1\qquad -2x_3&\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.190. $$\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3&\leqslant 1,\\ -x_1-x_2-7x_3&\leqslant 1,\\ x_1\qquad +3x_3&\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.191. $$\begin{aligned} -x_1+x_2-3x_3&\leqslant -1,\\ x_1-x_2+3x_3&\leqslant 4,\\ x_1+x_2+x_3&\leqslant 2,\\ -x_1-2x_2&\leqslant 2,\\ x_2-x_3&\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.192. $$\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3&\leqslant 5,\\ x_1-2x_2-3x_3&\leqslant 4,\\ x_1+6x_2+5x_3&\leqslant 4,\\ -1\leqslant x_2+x_3&\leqslant 1. \end{aligned}$$

3.193. $$\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3&\geqslant 0,\\ -x_1+x_2-x_3&\geqslant 0,\\ x_2+x_3&\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.194. $$\begin{aligned} x_1+x_2&\geqslant 0,\\ x_1\qquad +x_3&\geqslant -10,\\ x_2-x_3&\geqslant 1,\\ -x_1+2x_2-3x_3&=0. \end{aligned}$$

3.195. $$\begin{aligned} -1\leqslant -x_1+x_2&\leqslant 3,\\ x_1+x_2+2x_3&\geqslant 0,\\ x_1\qquad +x_3&\geqslant -1. \end{aligned}$$

3.196. $$\begin{aligned} -1\leqslant -x_1+x_2&\leqslant 0,\\ x_1\qquad +x_3&\geqslant 1,\\ x_2+x_3&\geqslant 1. \end{aligned}$$

3.197. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+3x_4&=1,\\ x_1\qquad\qquad +x_4&\geqslant 0,\\ x_2\qquad +x_4&\geqslant 0,\\ x_3+x_4&\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.198. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+6x_4&=4,\\ x_1-x_2+x_3+2x_4&\leqslant 2,\\ x_1\qquad\qquad +x_4&\geqslant 0,\\ x_2\qquad +2x_4&\geqslant 0,\\ x_3+3x_4&\geqslant 0. \end{aligned}$$

3.199. $$\begin{aligned} x_1+x_2\qquad +2x_4&\leqslant 2,\\ x_2+x_3\qquad &\leqslant 2,\\ x_1\qquad +x_3\qquad &\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.200. $$\begin{aligned} x_1-x_2\qquad +x_4&\leqslant 1,\\ x_2-x_3+x_4&\leqslant 1,\\ x_1\qquad +x_3+2x_4&\leqslant 2. \end{aligned}$$

3.201. $$\begin{aligned} x_1-x_2\qquad +x_4&\leqslant 1,\\ x_2-x_3+x_4&\leqslant 1,\\ x_1\qquad +x_3+2x_4&\leqslant 2,\\ x_2\qquad +x_4&\leqslant 0. \end{aligned}$$

3.202.
$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &\leqslant 1,\\
-x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 &\leqslant 2,\\
3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leqslant 8,\\
-2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &\geqslant -9,\\
4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 &\geqslant 0,\\
x_1 \qquad + x_3 + x_4 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

3.203.
$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 &\geqslant -1,\\
x_1 \qquad + x_3 + x_4 &\geqslant 1,\\
x_2 + x_3 - x_4 &\geqslant 1.
\end{aligned}$$

3.204.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &\leqslant 3,\\
x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &\leqslant 2,\\
x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 + x_5 &\leqslant 2.
\end{aligned}$$

3.205.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 &\geqslant 1,\\
x_1 \qquad + x_4 \qquad + x_6 &\geqslant 0,\\
x_2 \qquad + x_4 + x_5 + x_6 &\geqslant 0,\\
x_3 \qquad + x_5 + x_6 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

3.206.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \qquad &\leqslant 2,\\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \qquad &\leqslant 2,\\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad + 2x_6 &\leqslant 2,\\
-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad + 2x_6 &\leqslant 2.
\end{aligned}$$

3.207.
$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 - x_7 &= 5,\\
x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 2,\\
x_3 \qquad + x_6 + x_7 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

ГЛАВА 4

СВОЙСТВА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Определение задачи линейного программирования; общая, симметричная и каноническая формы записи задачи линейного программирования

Определение 4.1. *Задача, в которой требуется обратить в максимум (минимум) линейную форму*

$$L(X) = (C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

при условиях

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{4.2}$$

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = s+1, \ldots, s+t, \tag{4.3}$$

называется общей задачей линейного программирования, заданной в произвольной форме записи.

В матричном виде задача (4.1) — (4.3) записывается следующим образом:

$$(C, X) \to \max \ (\min), \tag{4.1a}$$

$$A X \lesseqqgtr B, \tag{4.2a}$$

где $A = \| a_{ij} \|$ — матрица размером $n \times (s+t)$,

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \qquad B = (b_1, b_2, \ldots, b_{s+t}),$$

знак $\lesseqqgtr$ означает, что первые s компонент векторного условия (4.2а) — неравенства, а последние t — равенства.

Определение 4.2. *Задача, в которой требуется найти максимум линейной формы* (4.1) *при условиях* (4.2) *и условиях*

$$x_j \geqslant 0, \qquad \text{где } j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.4}$$

называется задачей линейного программирования, заданной в симметричной форме записи.

В матричном виде задача в симметричной форме записи имеет вид

$$(C, X) \to \max, \tag{4.1'}$$

$$A X \leqslant B, \tag{4.2'}$$

$$X \geqslant 0. \tag{4.4'}$$

Определение 4.3. *Задача, в которой требуется найти максимум линейной формы* (4.1) *при условиях* (4.3) *и условиях* (4.4), *называется задачей линейного программирования в канонической форме записи.*

В матричном виде задача в канонической форме записи имеет вид

$$(C, X) \to \max, \tag{4.1'}$$
$$AX = B, \tag{4.3'}$$
$$X \geqslant 0. \tag{4.4'}$$

Определение 4.4. *Набор чисел* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования, называется ее планом.*

Определение 4.5. *План* $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, *обращающий в максимум (минимум) линейную форму* (4.1), *называется оптимальным планом или решением задачи линейного программирования.*

Определение 4.6. *Столбцы* A_j *матрицы* A *называются векторами условий, а* B — *вектором ограничений задачи линейного программирования.*

Определение 4.7. *Задача линейного программирования называется допустимой, если множество* M *планов задачи непусто, и разрешимой, если непусто множество* $\bar{M}$ *оптимальных планов этой задачи.*

Иногда возникает необходимость привести задачу линейного программирования, заданную в общей форме записи, к канонической форме. Рассмотрим на простых примерах несколько методов, позволяющих сделать такое преобразование.

Пример 4.1. Привести к канонической форме записи задачу

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 \quad &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Решение. Для того чтобы первое ограничение записать в форме равенства, введем неотрицательную переменную x_3 ($x_3 \geqslant 0$). Заменим переменную x_2, на значение которой не наложено требование неотрицательности, разностью двух неотрицательных переменных:

$$x_2 = x_2' - x_2'', \quad \text{где} \quad x_2', x_2'' \geqslant 0.$$

После этих преобразований исходная задача запишется в канонической форме:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' - x_2'' &\to \max, \\ x_1 - x_2' + x_2'' + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2' - x_2'' \quad &= 2, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0,\ x_2'' &\geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Пример 4.2. Привести задачу

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 2, \\ x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

к канонической форме.

Решение. Введем дополнительную неотрицательную переменную x_4 ($x_4 \geqslant 0$) и запишем первое ограничение задачи в виде равенства:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1.$$

Исключим из системы равенств переменные x_1 и x_2, не связанные условием неотрицательности. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 \qquad &= 2. \end{aligned}$$

Здесь возможны два случая.

Случай 1. $\alpha \neq 2$. Переменные x_1 и x_2 единственным образом выражаются через x_3 и x_4:

$$x_1 = \frac{1}{2-\alpha}\left[2 - \alpha - (\alpha+1)x_3 + \alpha x_4\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{2-\alpha}(3x_3 - 2x_4).$$

При подстановке этих значений в линейную форму задача примет вид

$$1 + \left(\frac{1+\alpha}{2-\alpha}\right)x_3 - \left(\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\right)x_4 \to \max,$$
$$x_3 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0.$$

Случай 2. $\alpha = 2$. В этом случае нельзя выразить x_1 и x_2 через x_3 и x_4, но можно исключить одну из этих переменных, например x_1:

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Если подставить найденное выражение для x_1 в линейную форму и оставшиеся ограничения, то задача примет вид

$$\begin{aligned} 1 + x_2 - x_3 - x_4 &\to \max, \\ 3x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_3 \geqslant 0, \ x_4 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Полученная задача в канонической форме неразрешима, так как x_2 входит в линейную форму с ненулевым коэффициентом, но не входит в ограничения. Значит, неразрешима и исходная задача.

4.1. Задача линейного программирования в симметричной форме записи

$$\left.\begin{aligned} (C, X) &\to \max, \\ AX &\leqslant B, \\ X &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

приводится к канонической форме путем добавления неотрицательных переменных $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ (m — число строк матрицы A). Получается задача

$$\left.\begin{aligned} (C, X) &\to \max, \\ AX + EY &= B, \\ X \geqslant 0, \ Y &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

(здесь E — единичная матрица размером $m \times m$).

Доказать, что если $(\bar{X}, \bar{Y})$ — решение задачи (β), то $\bar{X}$ — решение задачи (α).

4.2. Общая задача линейного программирования в произвольной форме записи

$$\left.\begin{aligned} L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, &\quad i=1,2,\ldots,s, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, &\quad i=s+1,\ldots,s+t, \\ x_j \geqslant 0, &\quad j=1,2,\ldots,p, p<n \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

приводится к канонической форме путем добавления неотрицательных переменных y_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ и замены переменных x_i $(i=p+1,\ldots,n)$ разностью двух неотрицательных переменных

$$x_i = x_i' - x_i''.$$

Полученная задача запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &L(X, Y, X', X'')=\sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} c_j(x_j'-x_j'') \to \max, \\ &\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x_j'-x_j'') + y_i = b_i, \ i=1, 2, \ldots, s, \\ &\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x_j'-x_j'') \qquad = b_i, \ i=s+1, \ldots, s+t, \\ &\qquad x_j \geqslant 0, \quad x_k' \geqslant 0, \quad x_k'' \geqslant 0, \quad y_i \geqslant 0, \\ &j=1, 2, \ldots, p, \quad k=p+1, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, s. \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Доказать, что если

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}', \ldots, \bar{x}_n', \bar{x}_{p+1}'', \ldots, \bar{x}_n'', \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s)$$

— решение задачи (β), то

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}' - \bar{x}_{p+1}'', \ldots, \bar{x}_n' - \bar{x}_n'')$$

— решение задачи (α).

4.3. Свести к симметричной форме задачу линейного программирования, заданную в канонической форме записи:

$$\begin{aligned} (C, X) &\to \max, \\ AX &= B, \\ X &\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.4. Свести задачу минимизации линейной формы (C, X) при условиях

$$AX = B,$$
$$X \geqslant 0$$

к эквивалентной задаче максимизации.

Привести задачи **4.5—4.14** к канонической форме добавлением неотрицательных переменных и заменой переменных, не связанных условием неотрицательности, разностью двух неотрицательных переменных.

4.5.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \to \max, \\ &2x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ &x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.6.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \to \max, \\ &x_1 \geqslant 1, \\ &x_2 \leqslant 1. \end{aligned}$$

4.7.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \\ &x_1 - x_3 \leqslant 1, \\ &x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.8.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 - x_2 = 0, \\ &x_2 \leqslant 1, \\ &x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.9.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ &2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ &x_2 + x_3 \geqslant 0, \\ &x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.10.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min, \\ &x_1 + x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ &-x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 1, \\ &x_2 + x_3 = 1, \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.11.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min, \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &-x_1 - x_4 \leqslant 5, \\ &x_2 + x_3 \geqslant 10, \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.12.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 \to \max, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &x_3 + x_4 = 1. \end{aligned}$$

4.13.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \to \max, \\ &x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ &x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1} + x_n \leqslant 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

4.14.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \to \min, \\ &x_1 + x_2 = 1, \\ &x_2 + x_3 = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1} + x_n = 1. \end{aligned}$$

Привести задачи **4.15—4.27** к каноническому виду методом исключения переменных. Проанализировать вопрос о разрешимости задач в тех случаях, когда невозможно исключить все переменные, не связанные условием неотрицательности.

4.15.
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_3 + x_4 \to \max,\\ &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ &x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0,\\ &x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.16.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \to \max,\\ &3x_1 + x_2 \leqslant 1,\\ &2x_1 - x_2 \leqslant 2. \end{aligned}$$

4.17.
$$\begin{aligned} &x_1 + \alpha x_2 + x_3 \to \min,\\ &x_1 - 3x_2 + x_3 = 1,\\ &2x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 2,\\ &x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.18.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 \to \max,\\ &x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,\\ &x_1 - 4x_2 + \alpha x_3 \leqslant 1,\\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.19.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_4 \to \max,\\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ &x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 4,\\ &-x_1 + x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 16,\\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.20.
$$\begin{aligned} &x_2 + x_4 \to \min,\\ &-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ &-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,\\ &3x_2 + 2x_4 = 3,\\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.21.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + \alpha x_3 + x_4 \to \max,\\ &x_1 + x_3 + x_4 = 1,\\ &\alpha x_2 + x_3 + x_4 = 2,\\ &x_3 - x_4 = 1,\\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.22.
$$\begin{aligned} &x_1 + \alpha x_2 \to \max,\\ &x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 1,\\ &-x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 2,\\ &x_1 - x_2 - 2x_3 \leqslant 3. \end{aligned}$$

4.23.
$$\begin{aligned} &x_1 + \alpha x_2 \to \max,\\ &\lambda x_1 + x_2 = 1,\\ &x_1 + \lambda x_2 \leqslant \lambda. \end{aligned}$$

4.24.
$$\begin{aligned} &\alpha x_1 + \beta x_2 \to \max,\\ &x_1 + \alpha x_2 \leqslant 1,\\ &\beta x_1 + x_2 \leqslant 1. \end{aligned}$$

4.25.
$$\begin{aligned} &x_3 - x_4 \to \max,\\ &ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ &ax_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ &ax_3 + x_4 \leqslant 1,\\ &x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.26. $(\alpha+1)x_1+(\alpha+2)x_2+(\alpha+3)x_3+x_4\to\max,$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=4,\\ 2x_1+3x_2+4x_3-x_4&=2,\\ 3x_1+3x_2+3x_3-x_4&\leqslant 3,\\ x_1+5x_2+\alpha x_3+\alpha x_4&\leqslant 6,\\ x_4&\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.27. $x_1+x_2+x_3-x_4-x_5+\mu x_6\to\min,$

$$\begin{aligned} \lambda x_1+x_2+x_3-\lambda x_4+\lambda x_5-\lambda x_6&=\lambda,\\ x_1+\lambda x_2+x_3+\lambda x_4+(2-\lambda)x_5+(\lambda-2)x_6&=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3+(2+\lambda)x_4+\lambda x_5-\lambda x_6&=\lambda,\\ x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0,\ x_6&\geqslant 0. \end{aligned}$$

§ 2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Приведем геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования для случая, когда число переменных равно двум. (Введение соответствующих элементов геометрии n-мерного евклидова пространства позволяет распространить приведенные результаты на случай любого числа переменных задачи.)

При $n=2$ линейная форма задачи имеет вид

$$c_1x_1+c_2x_2,$$

а множество планов совпадает с выпуклым многогранным множеством M ($M\subset R^2$) — пересечением прямых, порождаемых ограничениями-равенствами, и полуплоскостей, порождаемых ограничениями-неравенствами. Уравнение

$$c_1x_1+c_2x_2=c \qquad (\alpha)$$

определяет прямую на плоскости R^2, а вектор $C=(c_1, c_2)$ указывает направление, в котором нужно перемещать прямую (α) параллельно самой себе, чтобы значение c возрастало.

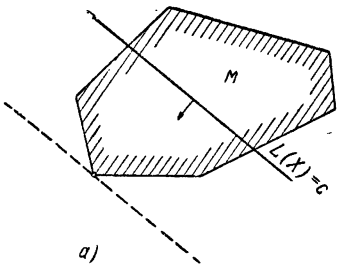

Рис. 4.1а.

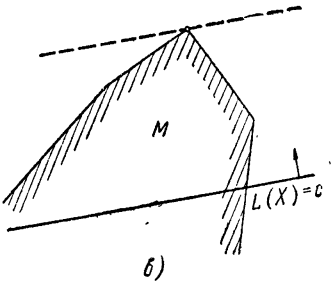

Рис. 4.1б.

Проведем через любую точку $X\in M$ прямую, параллельную (α), и будем перемещать ее в направлении возрастания c. При этом возможны два случая:

а) Существует положение прямой, параллельной (α), обладающее тем свойством, что при любом дальнейшем перемещении у множества M и у прямой не будет общих точек (рис. 4.1 а, б). В этом случае задача разрешима.

б) Сколько бы в направлении возрастания линейной формы c ни передвигать прямую (α), у множества M и у прямой будут оставаться общие точки (рис. 4.2). В этом случае линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи, т. е. задача неразрешима.

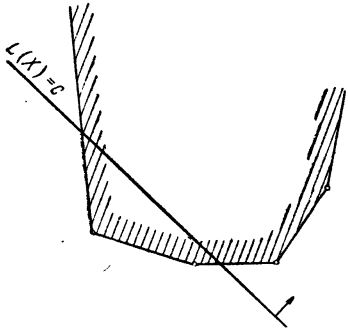

Рис. 4.2.

Использование геометрической интерпретации позволяет находить решение задачи линейного программирования в случае, когда $n=1, 2, 3$, а также в случае, когда n произвольно, а $n-m=1, 2, 3$ (см. § 2 гл. 3).

Решить[1]) задачи **4.28—4.62** или убедиться в их неразрешимости, исходя из геометрической интерпретации задачи линейного программирования.

4.28. $x_1+x_2\to\max,$
$x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.29. $x_1+2x_2\to\max,$
$x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.30. $x_1+2x_2\to\max,$
$x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_1-2x_2\leqslant 1,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.31. $x_1+x_2\to\max,$
$x_1+2x_2\leqslant 1,$
$2x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_1-2x_2\leqslant 1,$
$2x_1-x_2\leqslant 1,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.32. $x_1-x_2\to\min,$
$x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1-2x_2\leqslant 1,$
$2x_1+3x_2\leqslant 2,$
$3x_1+2x_2\leqslant 3,$
$x_1+x_2\geqslant 1/2,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.33. $x_1+x_2\to\min,$
$0\leqslant x_1\leqslant 1,$
$0\leqslant x_2\leqslant 2,$
$0\leqslant x_1+x_2\leqslant 3,$
$-1\leqslant x_1-x_2\leqslant 0.$

4.34. $x_1-x_2\to\max,$
$1\leqslant x_1+x_2\leqslant 2,$
$2\leqslant x_1-2x_2\leqslant 3,$
$1\leqslant 2x_1-x_2\leqslant 2,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.35. $3x_1+4x_2\to\max,$
$-1\leqslant -x_1+x_2\leqslant 1,$
$x_1+x_2\geqslant -1,$
$-x_1+2x_2\leqslant 2,$
$2x_1-x_2\leqslant 2,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

4.36. $2x_1+x_2\to\min,$
$x_1-2x_2\leqslant 1,$
$2x_1-x_2\leqslant 1,$
$-3x_1+x_2\leqslant 0,$
$2x_1-x_2\leqslant 0,$
$2x_1-3x_2\geqslant 3,$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$

---

[1]) В случае, когда решение задачи не единственно, найти хотя бы один оптимальный план $\bar{X}$ и $L(\bar{X})=(C, \bar{X})$.

4.37.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \max, \\ -2x_1 + 2x_2 &\leqslant 5, \\ x_1 + 14x_2 &\leqslant 30, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ -x_1 + 14x_2 &\leqslant 30, \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 5, \\ -x_1 + x_2 &\geqslant -1, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ -1 \leqslant x_1 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

4.38.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 10x_2 &\to \min, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ 3x_1 + x_3 &\leqslant 8, \\ -2x_1 + 3x_2 &\geqslant -9, \\ 4x_1 + 3x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.39.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.40.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.41.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.42.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.43.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.44.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.45.
$$\begin{aligned} x_1 - 10x_2 + 100x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leqslant 2, \\ -x_1 + 2x_3 &\leqslant 0, \\ x_1 + 2x_3 &\geqslant 5, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.46.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\to \max, \\ 2x_1 + 7x_2 + 22x_3 &\leqslant 22, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &\leqslant 6, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &\leqslant 2, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.47.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_3 &\leqslant 2, \end{aligned}$$

4.48.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 - x_3 &= 2, \\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.49.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \min, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

4.50.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 + x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

4.51.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\to \min, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -2, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

4.52.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &\to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5. \end{aligned}$$

4.53. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= n, \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 3, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

4.54. $x_1 - x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.55. $x_1 + 2x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_6 &= 1, \\ x_2 + x_5 + x_6 &= 1, \\ x_3 + x_4 + x_6 &= 1, \\ x_4 - x_5 - x_6 &= 2, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6.$

4.56. $2x_1 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.57. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \min,$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.58. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -1, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

4.59. $4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 &= 2, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

4.60. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 &= 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 &= 1, \\ x_2 - x_6 &= 2, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6.$

4.61. $x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 - x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 1/2, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

4.62. $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6 \to \min,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 &= 24, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 &= 2, \\ x_3 - x_6 &= 3, \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6.$

Используя геометрическую интерпретацию, определить в задачах **4.63—4.66** область изменения параметров, при которых:

1) условия задачи несовместны;

2) условия задачи совместны, но задача неразрешима из-за неограниченности сверху (для задачи минимизации снизу) линейной формы на множестве планов;

3) задача имеет единственное решение;

4) задача имеет бесконечное множество решений.

4.63.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \min, \\ x_1 + x_2 &\leqslant a, \\ 0 \leqslant x_1 \quad &\leqslant 1, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.64.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 + ax_2 &\leqslant 1, \\ ax_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

4.65.
$$\begin{aligned} d(x_1 + x_2) &\to \max, \\ -a \leqslant x_1 - x_2 &\leqslant a, \\ x_1 + bx_2 &\leqslant 1, \\ 0 \leqslant x_1 \quad &\leqslant c, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.66.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 + ax_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + bx_2 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 &\geqslant c, \\ x_1 &\geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

4.67. Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме записи для случая, когда число переменных n произвольно, а число ограничений $m = 2$:

$$\left.\begin{aligned} L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n &\to \max, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Построим в пространстве переменных U множество M_U, состоящее из точек $U = (u_1, u_2, u_3)$, координаты которых представимы в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ u_3 &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \end{aligned}$$

где

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Доказать, что:

а) M_U — выпуклый конус, принадлежащий пространству R^3;

б) если задача (α) недопустима, то M_U не имеет общих точек с прямой

$$l = (b_1,\ b_2,\ u_3), \qquad \text{где} \qquad -\infty < u_3 < \infty;$$

в) если задача (α) разрешима, то пересечение конуса M_U с прямой l есть отрезок вида $\bar{l} = (b_1,\ b_2,\ u_3)$, где $\underline{u}_3 \leqslant u_3 \leqslant \bar{u}_3$, или луч $l_0 = (b_1,\ b_2,\ u_3)$, где $-\infty < u_3 \leqslant \bar{u}_3$ (приведенная геометрическая интерпретация называется второй геометрической интерпретацией задачи линейного программирования).

4.68. Обобщить построения, описанные в предыдущей задаче, для случая, когда число ограничений m произвольно.

Решить задачи **4.69—4.81**, используя вторую геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (см. задачу **4.67**).

4.69. $x_1 + x_2 - x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.70. $x_1 - x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 - x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.71. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.72. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$-x_1 - x_2 + x_3 = 1,$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.73. $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.74. $x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.75. $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

4.76. $x_1 + x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 = 1,$
$x_2 - x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.77. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$x_3 + x_4 + x_5 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

4.78. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 = 1,$
$x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

4.79. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

4.80. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

4.81. $x_1 + x_n \to \max,$
$x_1 + x_2 = 1,$
$x_3 + x_4 + \ldots + x_n = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Исходя из второй геометрической интерпретации (см. задачу 4.67), определить, при каких значениях параметров задачи **4.82—4.88**

1) противоречивы;

2) неразрешимы из-за неограниченности сверху линейной формы на множестве планов;

3) имеют решение.

4.82. $x_1 + x_2 + ax_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + ax_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.83. $a(x_1 + x_2 + x_3) \to \max,$
$x_1 + x_2 + ax_3 = a,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.84. $x_1 + ax_2 + bx_3 \to \max,$
$a(x_1 + x_2 + x_3) = b,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.85. $x_1 - x_2 + ax_3 \to \max,$
$x_1 + ax_2 = 1,$
$x_2 + x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.86. $x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 4,$
$-x_2 + x_3 = b,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.87. $x_1 + x_2 + ax_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 = 1,$
$x_2 - x_3 = b,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.88. $-dx_1 + x_2 + x_3 + ax_4 + x_5 \to \max,$
$bx_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_2 + x_3 + x_5 = c;$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.$

§ 3. Свойства задач линейного программирования

Теорема 4.1. *Для того чтобы задача линейного программирования* (4.1)—(4.3) *была разрешимой, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) *множество планов задачи непусто;*

2) *линейная форма ограничена сверху на этом множестве.*

Определение 4.8. *План X задачи* (4.1)—(4.3) *называется опорным, если среди соотношений* (4.2), (4.3), *которым он удовлетворяет как точным равенствам, имеется n линейно независимых.*

Определение 4.9. *Решение X задачи* (4.1)—(4.3) *называется опорным, если оно является опорным планом данной задачи.*

Теорема 4.2. *Всякая разрешимая задача линейного программирования, система условий которой имеет ранг n, обладает хотя бы одним опорным решением.*

Теорема 4.2 может быть использована для решения задачи линейного программирования, число опорных планов которой относительно невелико.

Пример 4.3. Найти решение задачи

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Решение. Заметим, что данная задача разрешима (область определения линейной формы есть ограниченное множество) и ранг ее системы условий равен 3, т. е. размерности пространства переменных задачи. Все условия теоремы 4.2 выполняются.

Вычислим все опорные планы этой задачи. Легко проверить, что ими будут $X_1=(1, 0, 0)$ и $X_2=(0, 0, 1)$. Как следует из утверждения теоремы 4.2, среди X_1 и X_2 есть решение задачи. Остается сравнить значения линейной формы при X_1 и X_2: $L(X_1)=3$, $L(X_2)=1$. Значит, оптимальный план задачи $\bar{X}=(1, 0, 0)$, а $L(\bar{X})=3$.

4.89. Показать, что утверждение теоремы 4.1 справедливо лишь для задач линейного программирования. Точнее, привести примеры, показывающие, что:

а) существует линейная форма $L(X)$, заданная и ограниченная на выпуклом замкнутом множестве N и не достигающая своего максимума на N;

б) существует нелинейная функция $F(X)$, заданная и ограниченная на выпуклом многогранном множестве M, но не достигающая своего максимума на M.

4.90. Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned}(C, X)&\to\max,\\ AX&=B,\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

т. е. задачу линейного программирования без условий неравенств.

Всегда ли эта задача допустима?

4.91. Доказать, что допустимая задача типа (α) (см. предыдущую задачу) разрешима тогда и только тогда, когда вектор C является линейной комбинацией строк матрицы A, т. е. $C=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i A_i$, где m — число строк матрицы A. Чему равен максимум линейной формы в этом случае?

4.92*. Доказать, что задача линейного программирования в симметричной форме записи:

$$(C, X)\to\max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

разрешима, если $b_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ и существует номер i_0 такой, что $a_{i_0 j}>0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

4.93. Доказать, что задача

$$(C, X)\to\max,$$
$$X\in M,$$

где M — многогранник, разрешима при любом C.

4.94*. Доказать, что если задача

$$(C, X)\to\max,$$
$$X\in M,$$

где M — выпуклое многогранное множество, разрешима при любом C, то M — многогранник.

4.95. Доказать, что две задачи

$$\begin{aligned} (C,\ X) &\to \max, \\ AX &\leqslant B_1, \\ X &\geqslant 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (C,\ X) &\to \max, \\ AX &\leqslant B_2, \\ X &\geqslant 0, \end{aligned}$$

где $B_1 \geqslant 0$ и $B_2 \geqslant 0$, разрешимы или неразрешимы одновременно.

4.96*. Показать, что если $M \subset R^n$ является произвольным выпуклым многогранным множеством, отличным от R^n, то всегда можно найти $C \in R^n$, при котором разрешима задача

$$\begin{aligned} (C,\ X) &\to \max, \\ X &\in M. \end{aligned}$$

Решить задачи **4.97.—4.112**, используя теорему 4.2 о существовании опорного решения.

4.97.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\to \max, \\ -1 \leqslant\ \ x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ -1 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

4.98.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 &\to \max, \\ -2 \leqslant\ \ x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -2 \leqslant -x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -1 \leqslant\ \ x_1 \qquad &\leqslant 1. \end{aligned}$$

4.99.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\to \max, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_2 &\leqslant 1, \\ -1 \leqslant x_1 &\leqslant 10. \end{aligned}$$

4.100.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 5x_3 &\to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.101.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 5x_3 &\to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leqslant 2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.102.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 5x_3 &\to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leqslant 2, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.103.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 &\to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

4.104.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

4.105.
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

4.106.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\to \max, \\ 10x_1 \qquad + x_3 &\leqslant 10, \\ 10x_2 + x_3 &\leqslant 10, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.107.
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - 2x_3 &\to \max, \\ 10x_1 \qquad + x_3 &\leqslant 10, \\ 10x_2 + x_3 &\leqslant 10, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

4.108. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.109. $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$

4.110. $x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 12,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.111. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n \to \max,$
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

4.112. $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n \to \max,$
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant n,$
$x_2 + \ldots + x_n \leqslant n - 1,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_n \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

4.113*. Доказать, что множество $\bar{M}$ оптимальных планов $\bar{X}$ задачи линейного программирования (4.1)—(4.3) является выпуклым многогранным множеством.

4.114. Доказать, что если $\bar{X}$ — крайняя точка множества $\bar{M}$ ($\bar{M}$ — множество оптимальных планов задачи линейного программирования), то $\bar{X}$ — крайняя точка M (M — множество планов той же задачи).

4.115. Доказать, что размерность ρ_1 множества $\bar{M}$ не больше, чем размерность ρ множества M ($\bar{M}$ и M имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче).

4.116. Привести примеры задач линейного программирования, для которых:

а) $\rho = 2, \ \rho_1 = 0;$ б) $\rho = 2, \ \rho_1 = 1;$ в) $\rho = 2, \ \rho_1 = 2$

(ρ_1 и ρ имеют тот же смысл, что и в задаче 4.115).

4.117*. Доказать, что если $\rho_1 = \rho$ (см. задачу 4.115), то любой план задачи является ее оптимальным планом.

4.118. Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме записи:

$$(C, X) \to \max,$$
$$AX = B,$$
$$X \geqslant 0.$$

Доказать, что $\rho_1 = \rho$ (см. задачу 4.115) тогда, когда C есть линейная комбинация строк матрицы A.

Найти общий вид решения задач **4.119—4.128.**

4.119. $x_1 - 2x_2 \to \max,$
$x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$-x_2 \leqslant 3.$

4.120. $x_1 + 2x_2 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 1,$
$x_1 - x_2 \leqslant 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$

4.121. $x_1 - x_2 \to \max,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 1,$
$2x_1 - x_2 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$

4.122. $x_1 + x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 2,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$

4.123. $x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$
$x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.124. $x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$
$x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.125. $-x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$
$x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.126. $cx_2 + cx_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.127. $cx_1 + cx_2 + cx_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

4.128. $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-3} + c_1x_{n-2} + c_2x_{n-1} + c_3x_n \to \max,$
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n,$
$x_2 + \ldots + x_n = n - 1,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 3,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$
$c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3.$

4.129*. Пусть дана задача линейного программирования

$$(C, X) \to \max,$$
$$AX = B,$$
$$X \geqslant 0,$$

в которой матрица A и вектор B фиксированы. Всегда ли можно найти вектор C, при котором эта задача разрешима?

4.130. Пусть в предыдущей задаче фиксированы матрица A и вектор C. Всегда ли можно найти вектор B, при котором задача разрешима?

В **4.131—4.136** рассматривается задача линейного программирования в канонической форме записи

$$\left.\begin{aligned}(C,\ X)&\to\max,\\ AX&=B,\\ X&\geqslant 0,\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

где $X\in R^n$, C и B — векторы пространства R^n, A — матрица размером $m\times n$.

Через N_C обозначается множество, состоящее из точек $C\in R^n$, при которых задача (α) разрешима (при этом B и A фиксированы). Аналогично определяются множества

$$N_B\subset R^m \quad \text{и} \quad N_A\subset R^{n\times m}.$$

4.131. Доказать, что множество N_C выпукло.

4.132. Доказать, что множество N_C — выпуклый конус с вершиной в начале координат.

4.133*. Доказать, что множество N_B является выпуклым конусом с вершиной в начале координат (предполагается, что множество N_B непусто).

4.134*. Существует ли задача линейного программирования, для которой множество N_B состоит из двух точек B_1 и B_2 ($B_1\neq B_2$)?

4.135*. Может ли множество N_B состоять из одной точки B_0?

4.136. Будет ли множество $N_A\subset R^{n\times m}$ выпуклым?

В задачах **4.137—4.145** через V обозначается максимальное значение линейной формы задачи линейного программирования в канонической форме записи:

$$\begin{aligned}(C,\ X)&\to\max,\\ AX&=B,\\ X&\geqslant 0.\end{aligned}$$

Очевидно, что V является функцией параметров C, B, A (точнее, координат векторов B, C и элементов матрицы A). При этом V не определено, если условия задачи противоречивы; $V=\infty$, если линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи; $V=V_0<\infty$, если задача разрешима.

4.137. Доказать, что

$$V_0(C_1+C_2)\leqslant V_0(C_1)+V_0(C_2).$$

4.138. Привести пример задачи линейного программирования, для которой

$$V_0(C_1+C_2)<V_0(C_1)+V_0(C_2).$$

4.139. Доказать, что

$$V_0(B_1+B_2)\geqslant V_0(B_1)+V_0(B_2).$$

4.140. Привести пример задачи линейного программирования, для которой

$$V_0(B_1+B_2) > V_0(B_1)+V_0(B_2).$$

4.141. Доказать, что функция $V_0(C)$ является выпуклой функцией, определенной на множестве N_C.

4.142. Доказать, что функция $V_0(B)$ является вогнутой функцией (т. е. $-V_0(B)$ — выпуклая функция), определенной на множестве N_B.

4.143. Можно ли говорить о выпуклости функции $V_0(A)$ на множестве N_A?

4.144*. Рассмотрим последовательность задач линейного программирования в канонической форме записи

$$\left.\begin{aligned}(C_k,\ X)&\to\max,\\ AX&=B,\\ X&\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha_k)$$

Пусть C_k стремится к C, т. е. компоненты вектора C_k стремятся к соответствующим компонентам вектора C. Доказать, что из разрешимости каждой из задач (α_k) вытекает разрешимость задачи

$$\begin{aligned}(C,\ X)&\to\max,\\ AX&=B,\\ X&\geqslant 0\end{aligned}$$

и равенство $\lim\limits_{k\to\infty} V_0(C_k)=V_0(C)$.

4.145. Привести пример, показывающий, что V_0 не обязательно непрерывно зависит от элементов матрицы A.

ГЛАВА 5

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

§ 1. Опорный план задачи линейного программирования в канонической форме записи; базис опорного плана

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме записи

$$L(X) = (C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Предположим, что левые части уравнений (5.2) линейно независимы.

Определение 5.1. *План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (5.1)—(5.3) называется опорным, если векторы условий A_i матрицы $\| a_{ij} \|_{m, n}$, отвечающие его положительным составляющим, линейно независимы.*

Определение 5.2. *Система m линейно независимых векторов условий $\{A_{s_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, включающая все те A_{s_i}, для которых $x_{s_i} > 0$, называется базисом опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и обозначается через $Б_X$.*

Определение 5.3. *Опорный план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется невырожденным, если все его компоненты, отвечающие векторам базиса (базисные компоненты), положительны.*

Определение 5.4. *Задача (5.1)—(5.3) называется невырожденной, если все ее опорные планы не вырождены.*

5.1. Доказать, что определение 5.1 опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ согласуется с определением 4.8 опорного плана задачи линейного программирования.

5.2. Показать, что невырожденный опорный план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (5.1)—(5.3) и невырожденная вершина выпуклого многогранного множества M, ограничения которого имеют вид (5.1), (5.2), — эквивалентные понятия.

5.3. Доказать, что базис $Б_X = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ невырожденного опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется однозначно.

5.4. Верно ли, что базис $Б_X = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ вырожденного опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется неоднозначно (т. е. если X — вырожденный опорный план, то у него есть по крайней мере два базиса $Б'_X$ и $Б''_X$)?

5.5. Степенью вырожденности опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется число $\mu = m - \nu$, где ν — число базисных компонент X, отличных от нуля. Привести примеры задач, у которых существует опорный план X со степенью вырожденности:

$$\text{а) } \mu = 1; \quad \text{б) } \mu = 2; \quad \text{в) } \mu = N \quad (m \geqslant N).$$

5.6. Доказать, что опорный план X, степень вырожденности которого равна μ, обладает не более чем $C^{\mu}_{n-m+\mu}$ различными базисами.

5.7. Привести пример задачи линейного программирования, для которой достигается оценка задачи 5.6.

5.8. Любая ли система из m линейно независимых векторов условий $\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ является базисом некоторого опорного плана $\bar{X}$ задачи (5.1)—(5.3)?

В **5.9—5.18** найти базисы $Б_{\bar{X}}$ опорных планов $\bar{X}$, приведенных в условиях (в случае, когда $\bar{X}$ — вырожденный опорный план, найти все базисы $Б^l_{\bar{X}}$).

5.9. $x_1 - x_2 = 1,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$
$\bar{X} = (1,\ 0).$

5.10. $3x_1 + 2x_2 = 1,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$
$\bar{X} = \left(0,\ \frac{1}{2}\right).$

5.11. $x_1 - x_2 = 0,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$
$\bar{X} = (0,\ 0).$

5.12. $x_1 + x_2 = 2,$
$x_1 - x_2 = 0,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$
$\bar{X} = (1,\ 1).$

5.13. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 \qquad - x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\quad i = 1, 2, 3,$
$\bar{X} = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right).$

5.14. $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\quad i = 1,\ 2,\ 3,$
$\bar{X} = (0,\ 0,\ 0).$

5.15. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$
$\bar{X} = (1,\ 0,\ 0,\ 0).$

5.16. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$
$\bar{X} = (0,\ 0,\ 0,\ 0).$

5.17. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0,$
$x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_{n-1} + x_n = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$
$\bar{X} = (0, 0, \ldots, 0).$

5.18. $x_1 + x_2 + x_3 = a + b,$
$x_1 - 2x_2 = a - 2b,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$
$\bar{X} = (a, b, 0).$

В условиях задач **5.19—5.26** приведены системы линейно независимых векторов условий $\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$. Определить опорные планы, для которых каждая из этих систем является базисом.

5.19. $x_1 + x_2 = 1,$
$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0,$
$(A_1).$

5.20. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3,$
$(A_1, A_2).$

5.21. $x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$-x_1 - x_2 + x_3 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3,$
$(A_2, A_3).$

5.22. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3,$
$(A_1, A_3).$

5.23. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$
$(A_2, A_4).$

5.24. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2,$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$
$(A_2, A_3).$

5.25. $x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 1,$
$x_2 + x_3 + 7x_5 + 2x_6 = 1,$
$x_1 + x_3 - x_6 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 6,$
$(A_1, A_2, A_3).$

5.26. $x_1 + x_2 + cx_3 + x_4 = \alpha(c + 1) + \beta(c - 1),$
$x_1 + ax_2 + x_3 - x_4 = 2\alpha + \beta(a - 1),$
$bx_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = \alpha(b + 1),$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$a + b + c - abc \neq 2,$
$(A_1, A_2, A_3).$

§ 2. Исследование опорного плана на оптимальность

Пусть $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ — опорный план задачи (5.1) — (5.3) и $Б_{\bar{X}}=\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ — его базис. Рассмотрим произвольный вектор условий A_j и разложим его по базису $Б_{\bar{X}}$:

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} A_{s_i}x_{ij}, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично вектор ограничений B, который будем обозначать через A_0, представляется как линейная комбинация векторов базиса с коэффициентами x_{i0} $(i=1, 2, \ldots, m)$:

$$B=A_0=\sum_{i=1}^{m} A_{s_i}x_{i0}.$$

Образуем наборы параметров z_j и Δ_j (эти параметры однозначно определяются выбором базиса $Б_{\bar{X}}$ опорного плана $\bar{X}$):

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{5.4}$$

$$\Delta_j=z_j-c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Справедливы следующие утверждения относительно опорного плана $\bar{X}$.

Утверждение 5.1 (признак оптимальности опорного плана). *Опорный план $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ является решением задачи* (5.1) — (5.3), *если $\Delta_j \geqslant 0$ для $j=1, 2, \ldots, n$.*

Утверждение 5.2. *Если существует номер $j=k$, для которого $\Delta_k<0$, а $x_{ik}\leqslant 0$ при $i=1, 2, \ldots, m$, то линейная форма* (5.1) *не ограничена сверху на множестве планов* (5.2), (5.3).

Утверждение 5.3. *Пусть план $\bar{X}$ задачи* (5.1) — (5.3) *не вырожден и $\Delta_k<0$, но не все $x_{ik}\leqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$. Тогда существует опорный план $\bar{X}'=(\bar{x}_1', \bar{x}_2', \ldots, \bar{x}_n')$, для которого*

$$L(\bar{X}')>L(\bar{X}).$$

Для того чтобы получить базис опорного плана $\bar{X}'$, необходимо ввести в базис $Б_{\bar{X}}$ вектор A_k и вывести из базиса $Б_{\bar{X}}$ вектор A_{s_r}, где r определяется из условий

$$\theta_0=\frac{x_{r0}}{x_{rk}}=\min_{x_{ik}>0}\frac{x_{i0}}{x_{ik}}. \tag{5.5'}$$

При этом компоненты «лучшего» опорного плана $\bar{X}'$ определяются из условий

$$x_{i0}'=\begin{cases} x_{i0}-\theta_0 x_{ik} & \text{при } i\neq r, \\ \theta_0 & \text{при } i=r \end{cases} \tag{5.6}$$

(здесь i — номер позиции вектора A_{s_i} в базисе $Б_{\bar{X}}$).

Пример 5.1. Исследовать на оптимальность план $\bar{X}=(0, 0, 1, 1)$ задачи

$$\begin{aligned} -x_1-\ x_2+2x_3+3x_4 &\to \max, \\ 2x_1-\ x_2+\ x_3 \qquad &=1, \\ -x_1+2x_2 \qquad +\ x_4 &=1, \\ x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Здесь векторы условий A_j и вектор ограничений A_0 имеют вид

$$A_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix};\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\quad A_4=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\quad A_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Опорный план $\bar{X}=(0,0,1,1)$ не вырожден, и его базис определяется однозначно: $Б_{\bar{X}}=(A_3, A_4)$, поэтому $A_{s_1}=A_3$, $A_{s_2}=A_4$.

Для того чтобы исследовать $\bar{X}$ на оптимальность, необходимо составить параметры Δ_j $(j=1,2,3,4)$, а это требует вычисления величин x_{ij}. Эти величины можно найти, решая векторные системы

$$A_1=\sum_{i=1}^{2} x_{i1}A_{s_i},\quad A_2=\sum_{i=1}^{2} x_{i2}A_{s_i},\quad A_3=\sum_{i=1}^{2} x_{i3}A_{s_i},\quad A_4=\sum_{i=1}^{2} x_{i4}A_{s_i}.$$

Так как векторы A_{s_1} и A_{s_2} единичные, то матрица $\|x_{ij}\|_{2,4}$ совпадает с матрицей условий задачи $\|a_{ij}\|_{2,4}$:

$$\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Отсюда параметры z_j и Δ_j находятся по формулам (5.4), (5.5):

$$\begin{aligned}
z_1&=c_3x_{11}+c_4x_{21}=1, & \Delta_1&=z_1-c_1=2,\\
z_2&=c_3x_{21}+c_4x_{22}=4, & \Delta_2&=z_2-c_2=5,\\
z_3&=c_3x_{31}+c_4x_{23}=2, & \Delta_3&=z_3-c_3=0,\\
z_4&=c_3x_{41}+c_4x_{24}=3, & \Delta_4&=z_4-c_4=0.
\end{aligned}$$

Все $\Delta_j\geqslant 0$ $(j=1,2,3,4)$, поэтому план $\bar{X}=(0,0,1,1)$ есть решение задачи.

Пример 5.2. Исследовать на оптимальность план $\bar{X}=(0,1,0,2,1)$ задачи

$$\begin{aligned}
x_1+x_2&\to\max,\\
-x_1+x_2+x_3&=1,\\
x_1-2x_2+x_4&=0,\\
-x_1+2x_2+x_5&=3,\\
x_i\geqslant 0,\ i&=1,2,\ldots,5.
\end{aligned}$$

В этом примере базис опорного плана $\bar{X}$ состоит из векторов A_2, A_4, A_5.

Для того чтобы пользоваться формулами (5.4), (5.5), необходимо положить

$$A_{s_1}=A_2,\quad A_{s_2}=A_4,\quad A_{s_3}=A_5,$$

т. е.

$$s_1=2,\quad s_2=4,\quad s_3=5.$$

Параметры x_{ij} находим из векторных систем

$$A_1=\sum_{i=1}^{3} x_{i1}A_{s_i}\quad\text{и}\quad A_3=\sum_{i=1}^{3} x_{i3}A_{s_i}.$$

Очевидно, что $x_{i2}=(1,0,0)$, $x_{i4}=(0,1,0)$, $x_{i5}=(0,0,1)$. Легко проверить, что векторные системы имеют следующие решения:

$$x_{i1}=(-1,-1,1)\quad\text{и}\quad x_{i3}=(1,2,-2).$$

Поэтому матрица $\|x_{ij}\|$ имеет вид

$$\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

а параметры Δ_j таковы:

$$\Delta_1 = -2, \qquad \Delta_2 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0, \qquad \Delta_3 = 1.$$

Так как в первом столбце матрицы $\|x_{ij}\|$, соответствующем $\Delta_1 < 0$, имеется положительный член $x_{31} = 1$, то можно воспользоваться утверждением 5.3 и получить новый опорный план $\bar{X}'$, связанный с большим значением линейной формы задачи (план $\bar{X}$ не вырожден).

Базис $Б_{\bar{X}'}$ можно получить, если в базис $Б_{\bar{X}}$ ввести вектор A_1 и вывести вектор A_{s_r}, где r определяется из условий

$$\theta_0 = \frac{x_{r0}}{x_{r1}} = \min_{x_{i_1} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{i1}}.$$

В этом примере $r = 3$, $\theta_0 = 1$. Значит, базис нового опорного плана $Б_{\bar{X}'}$ состоит из векторов A_2, A_4, A_1. Согласно нашим обозначениям $A_2 = A_{s_1}$, $A_4 = A_{s_2}$, $A_1 = A_{s_3}$. Из формул (5.6) находим компоненты нового опорного плана x'_{i0}:

$$x'_{10} = x_{10} - \theta_0 x_{11} = 2,$$

$$x'_{20} = x_{20} - \theta_0 x_{21} = 3,$$

$$x'_{30} = \theta_0 = 1.$$

Значит, $\bar{X}' = (1, 2, 0, 3, 0)$.

Исследуя план $\bar{X}'$ по аналогичной схеме, получим матрицу $\|x'_{ij}\|$ и значения Δ'_j:

$$\|x'_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta'_1 = \Delta'_2 = \Delta'_4 = 0, \qquad \Delta'_3 = -3, \qquad \Delta'_5 = 2.$$

Так как $\Delta'_3 = -3 < 0$, а все $x_{i3} \leqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$, то из утверждения 5.2 следует неограниченность сверху линейной формы на множестве планов задачи.

5.27. Пусть $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ — невырожденный опорный план задачи (5.1) — (5.3). Доказать, что $\bar{X}$ — решение задачи тогда и только тогда, когда выполняется признак оптимальности (утверждение 5.1).

5.28. Привести примеры, показывающие, что признак оптимальности не является необходимым (т. е. существует задача вида (5.1) — (5.3), имеющая решение $\bar{X}$ с базисом $Б_{\bar{X}}$, в котором не все $\Delta_j \geqslant 0$).

5.29. Показать, что если $\bar{X}'$ — опорный план задачи (5.1) — (5.3), полученный улучшением опорного плана $\bar{X}$, то значения линейной формы $L(\bar{X}')$ и $L(\bar{X})$ связаны равенством

$$L(\bar{X}') = L(\bar{X}) - \Delta_k \theta_0$$

(здесь k — номер вектора A_k, введенного в базис опорного плана $Б_{\bar{X}}$; θ_0 определяется формулой (5.5′)).

5.30. Можно ли утверждать, что при переходе от опорного плана $\bar{X}$ к опорному плану $\bar{X}'$ линейная форма $L(X)$ получит наибольшее при-

ращение, если в базис $Б_{\bar{X}}$ ввести вектор A_k с наибольшей по модулю отрицательной оценкой Δ_k?

В **5.31—5.38** приведены условия задач линейного программирования, для которых $\bar{X}$ является опорным планом. Составить матрицу $\|x_{ij}\|$ коэффициентов разложения векторов условий задачи по векторам базиса $\bar{X}$. В случае, когда $\bar{X}$ обладает несколькими базисами $Б^l_{\bar{X}}$, составить все матрицы $\|x^l_{ij}\|$.

5.31.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, \\ \bar{X} &= (1, 2, 0). \end{aligned}$$

5.32.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 10x_1 + x_2 - 4x_3 &= -3, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, \\ \bar{X} &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

5.33.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, 4, \\ \bar{X} &= (1, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

5.34.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 &= 3, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_1 \qquad\qquad + 2x_4 &= 1, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, 4, \\ \bar{X} &= (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

5.35.
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 + 2x_6 &= 13, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 6x_5 - 6x_6 &= -6, \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad + 2x_5 - 2x_6 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 - x_6 &= 4, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, \ldots, 6, \\ \bar{X} &= (1, 2, 1, 2, 0, 0). \end{aligned}$$

5.36.
$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + bx_3 + (a + 2b - 1)\,x_4 &= a + b + 1, \\ bx_1 + x_2 + ax_3 + (b + 2a - 1)\,x_4 &= a + b + 1, \\ abx_2 \qquad\qquad - abx_4 &= ab, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, 4,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ |a| \neq |b|, \\ \bar{X} &= (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

5.37.
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + (b + c)\,x_4 + x_5 &= a + 2b + c, \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 + (a + c)\,x_4 + x_5 &= a + b + 2c, \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 + (a + b)\,x_4 + x_5 &= 2a + b + c, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, \ldots, 5, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + ac + bc, \\ a + b + c &\neq 0, \\ \bar{X} &= (1, 2, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

5.38.
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= a, \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 &= d, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, \\ ae &\neq bd, \\ \bar{X} &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

5.39. Доказать, что если базис опорного плана $\bar{X}$ состоит из векторов $Б_{\bar{X}}=\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$, то

$$\Delta_{s_i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

5.40. Существует ли задача линейного программирования вида (5.1)—(5.3), у которой для некоторого опорного плана $\bar{X}$ с базисом $Б_{\bar{X}}$ все $\Delta_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$?

В **5.41—5.58** исследовать невырожденный опорный план $\bar{X}$ задач линейного программирования, приведенных в условиях, на оптимальность. Точнее, определить, какой из трех случаев имеет место:

1) план $\bar{X}$ оптимален;
2) задача неразрешима;
3) имеется возможность улучшить план $\bar{X}$.

5.41. $-x_1+2x_2-x_3\to\max,$
$x_1-x_2+2x_3=0,$
$x_1+x_2+5x_3=2,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(1, 1, 0).$

5.42. $-x_1+2x_2+2x_3\to\max,$
$x_1-x_2+2x_3=0,$
$x_1+x_2+5x_3=2,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(1, 1, 0).$

5.43. $-x_1+2x_2+4x_3\to\max,$
$x_1-x_2-x_3=1,$
$x_1+x_2+x_3=3,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(2, 1, 0).$

5.44. $x_1+x_2+x_3\to\max,$
$-2x_1+x_2+x_3=4,$
$-x_1+2x_2-x_3=-1,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(0, 1, 3).$

5.45. $-4x_1+x_2+5x_3\to\max,$
$x_2+x_3=2,$
$3x_1+2x_2-x_3=1,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(0, 1, 1).$

5.46. $x_1+2x_2-5x_3\to\max,$
$x_1-3x_2+11x_3=-9,$
$3x_1-x_2+9x_3=5,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(3, 4, 0).$

5.47. $x_1+4x_2-7x_3\to\max,$
$2x_1-2x_2+14x_3=2,$
$x_1-2x_2+10x_3=0,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, 3,$
$\bar{X}=(2, 1, 0).$

5.48. $x_1+3x_2-x_3-x_4-x_5\to\max,$
$x_1-x_2+x_3+3x_4-3x_5=1,$
$x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=1,$
$x_1+x_2+x_3+5x_4-x_5=3,$
$x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, 5,$
$\bar{X}=(1, 1, 1, 0, 0).$

5.49. $x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + ax_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 10x_5 + 8x_6 &= 22, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 + 4x_6 &= 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 &= 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 4, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 1, 1, 1, 0, 0).$

5.50. $x_1 + ax_3 + x_4 + ax_5 + bx_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 &= 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 &= 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 &= 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 - 2x_6 &= 5, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 2, 2, 1, 0, 0).$

5.51. $x_1 + ax_2 + ax_3 + x_4 + ax_5 + ax_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 4x_6 &= 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 6x_6 &= 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 7x_6 &= 15, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 8x_6 &= 16, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 1, 1, 1, 0, 0).$

5.52. $-ax_1 + x_2 - ax_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} ax_1 - x_2 + (1 - a)x_3 &= a - 1, \\ x_1 - x_2 &= 0, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad a \neq 1, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 1, 0).$

5.53. $bx_1 + ax_2 + 2abcx_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (ac - bc)x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + (ac + bc)x_3 &= 3, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (2, 1, 0).$

5.54. $ax_1 + \frac{1}{a}x_2 + bx_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + (1 + a)x_3 + \left(a^2 + \frac{1}{a}\right)x_4 &= a + 1, \\ x_1 - \frac{1}{a}x_2 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)x_3 + \left(a - \frac{1}{a^2}\right)x_4 &= 1 - \frac{1}{a}, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad a \neq 0, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 1, 0, 0).$

5.55. $(a + b)x_1 + (a - b)x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} ax_1 + 2bx_2 + (a + b)x_3 - (a + b)x_4 &= a + 2b, \\ \frac{1}{b}x_1 + \frac{1}{a}x_2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x_3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x_4 &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 1, 0, 0).$

5.56.
$$\begin{aligned}
&2x_1+3x_2+4x_3+ && bx_4+ && ax_5\to\max,\\
&x_1+x_2+x_3+ && x_4+(2+b)x_5=3,\\
&x_1-x_2+x_3- && x_4+(2-b)x_5=1,\\
&x_1+x_2-x_3+(2a+1)x_4+ && bx_5=1,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,5,\\
&\overline{X}=(1,1,1,0,0).
\end{aligned}$$

5.57.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+(a-b)x_4+ && 2bx_5\to\max,\\
&x_1+2x_2+3x_3- && 5x_4+(a+2b)x_5=6,\\
&x_1+4x_2+9x_3- && 9x_4+(a+8b)x_5=14,\\
&x_1+8x_2+27x_3- && 17x_4+(a+16b)x_5=36,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,5,\\
&\overline{X}=(1,1,1,0,0).
\end{aligned}$$

5.58.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+(b+c)x_3+ && bx_4+ && ax_5+ && x_6\to\max,\\
&x_1-x_2+(a-1)x_3+(1-b)x_4+(c-1)x_5+(d+1)x_6=0,\\
&x_1+x_2+(a+1)x_3+(1+b)x_4+(1+c)x_5+(d-1)x_6=2,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6,\\
&\overline{X}=(1,1,0,0,0).
\end{aligned}$$

5.59*. Условия задачи линейного программирования
$$\begin{aligned}
&x_1-2x_2+ && \lambda_2x_3+ && \lambda_3x_4+\lambda_1x_5\to\max,\\
&x_1+2x_2+(1+2\lambda_1)x_3+(2+\lambda_2)x_4+3\lambda_3x_5=3,\\
&x_1-x_2+(1-\lambda_1)x_3+(\lambda_2-1)x_4 && =0,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,5
\end{aligned}$$
зависят от трех параметров: λ_1, λ_2, λ_3. Определить общий вид вектора $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, при котором невырожденный опорный план $\overline{X}=(1,1,0,0,0)$ является оптимальным.

5.60. Условия задачи линейного программирования
$$\begin{aligned}
&2x_1+x_2+ && 3\lambda_2x_3+(\lambda_1+2\lambda_2)x_4\to\max,\\
&x_1-x_2+(\lambda_1-\lambda_2)x_3 && =0,\\
&x_1+x_2+(\lambda_1+\lambda_2)x_3+ && 2x_4=2,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4,
\end{aligned}$$
обладающей планом $\overline{X}=(1,1,0,0)$, зависят от двух параметров: λ_1, λ_2. Указать диапазон изменения этих параметров, в котором:

1) план $\overline{X}$ оптимален;

2) задача неразрешима;

3) план $\overline{X}$ можно улучшить.

5.61. Пользуясь геометрической интерпретацией системы линейных неравенств с двумя переменными, определить наибольшее значение параметра λ_1, при котором опорный план $\overline{X}=(1,1,2,0,0)$ задачи линейного программирования
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+2x_3+ && 20x_4+(\lambda_1-2\lambda_2)x_5+4\lambda_1x_6\to\max,\\
&4x_1+x_2+x_3+(5\lambda_1+\lambda_2)x_4+ && 7x_5+4x_6=7,\\
&x_1+4x_2+x_3+(\lambda_1+5\lambda_2)x_4+ && 10x_5+x_6=7,\\
&x_1+x_2+4x_3+(2\lambda_1+2\lambda_2)x_4+ && 7x_5+x_6=10,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6,
\end{aligned}$$
является оптимальным.

5.62*. Используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования с тремя переменными, определить значение $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, при котором невырожденный опорный план $\overline{X} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ задачи

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 2x_3 - \lambda_2 x_4 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) x_5 - \lambda_3 x_6 \to \max,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) x_4 + 2x_5 + x_6 = 3,\\
&x_1 - x_2 + x_3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) x_4 + 2x_5 - x_6 = 1,\\
&x_2 - x_3 - (\lambda_2 + \lambda_3) x_4 - x_5 + x_6 = 0,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,
\end{aligned}$$

является оптимальным и доставляет линейной форме $L_1(\Lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ наибольшее значение.

5.63. Рассмотрим задачу линейного программирования вида (5.1)—(5.3), в которой матрица A и вектор B фиксированы, а линейная форма $L(X)$ зависит от n параметров $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Пусть $\overline{X}$ — невырожденный опорный план этой задачи. Всегда ли можно подобрать параметры c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, отвечающие случаям:

1) план $\overline{X}$ оптимален;

2) задача неразрешима;

3) план $\overline{X}$ можно улучшить?

5.64. Рассмотрим задачу линейного программирования вида (5.1)—(5.3), в которой фиксированы векторы C, B и векторы условий A_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, соответствующие базису невырожденного опорного плана $\overline{X}$. Показать, что всегда можно подобрать векторы условий A_j $(j = m + 1, m + 2, \ldots, n)$, отвечающие случаям:

1) план $\overline{X}$ оптимален;

2) план $\overline{X}$ можно улучшить;

3) существуют задачи, для которых при любом выборе векторов условий A_j $(j = m + 1, m + 2, \ldots, n)$ исследование опорного плана $\overline{X}$ не приведет к неразрешимости задачи.

В **5.65—5.90** даны опорные планы $\overline{X}$ задач линейного программирования. Убедиться, что $\overline{X}$ не обладает свойством оптимальности, и «улучшить» его, получив план $\overline{X}_1$ такой, что $L(\overline{X}_1) > L(\overline{X})$.

5.65.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \to \max,\\
&x_1 + 2x_2 = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2,\\
&\overline{X} = \left(0, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

5.66.
$$\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \to \max,\\
&x_1 + x_2 = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2,\\
&\overline{X} = (1, 0).
\end{aligned}$$

5.67.
$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max,\\
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3,\\
&2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,\\
&\overline{X} = (1, 1, 0).
\end{aligned}$$

5.68.
$$\begin{aligned}
&-x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max,\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,\\
&2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,\\
&\overline{X} = (1, 0, 2).
\end{aligned}$$

5.69. $8x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$
$3x_1 + x_2 - x_3 = -3,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$
$\bar{X} = (0, 1, 4).$

5.70. $3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \max,$
$x_1 + 10x_2 + 11x_3 = 31,$
$x_1 - x_2 = -2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$
$\bar{X} = (1, 3, 0).$

5.71. $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$\bar{X} = (0, 0, 2, 0).$

5.72. $x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$\bar{X} = (1, 1, 0, 0).$

5.73. $x_1 + x_2 + 2x_4 \to \max,$
$x_1 + x_3 + x_4 = 4,$
$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$\bar{X} = (2, 0, 0, 2).$

5.74. $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7,$
$x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
$x_3 - x_4 = 3,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$\bar{X} = (2, 2, 3, 0).$

5.75. $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 - x_4 = 3,$
$x_1 - x_2 + 3x_4 = -1,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$\bar{X} = (1, 2, 1, 0).$

5.76. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1,$
$-x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5,$
$\bar{X} = (1, 1, 0, 1, 0).$

5.77. $x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5,$
$x_1 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5,$
$\bar{X} = (1, 0, 1, 2, 0).$

5.78. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 8x_6 = 13,$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 - 9x_6 = 11,$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 - 3x_6 = 12,$
$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 7x_5 - x_6 = 13,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,$
$\bar{X} = (1, 1, 1, 2, 0, 0).$

5.79. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_7 + 3x_8 = 4,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_8 = 6,$
$x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_7 + 4x_8 = 6,$
$x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 + 3x_8 = 6,$
$x_4 + 2x_5 + x_6 + x_8 = 6,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 8,$
$\bar{X} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 0, 0).$

5.80. $x_1 + x_2 \to \max,$
$ax_1 + x_2 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2,$
$0 < a < 1,$
$\bar{X} = (0, 1).$

5.81. $x_1 + x_2 \to \max,$
$ax_1 + bx_2 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2,$
$0 < a < b,$
$\bar{X} = \left(0, \frac{1}{b}\right).$

5.82. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + (2a - 1)x_3 = 3,$
$x_1 + 2x_2 + (a - 2)x_3 = 3,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$
$0 < a < 2,$
$\bar{X} = (1, 1, 0).$

5.83. $x_1 + x_2 - x_3 \to \max,$
$x_1 + x_3 = 2,$
$x_1 + 2ax_2 - x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$
$0 < a < \frac{1}{2},$
$\bar{X} = (1, 0, 1).$

5.84. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ax_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + (2a + 1)x_5 = 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5, \quad a > 1,$
$\bar{X} = (2, 1, 2, 0, 0).$

5.85. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + (a + 1)x_3 + (b + 1)x_4 = 2,$
$x_1 - x_2 + (a - 1)x_3 + (b - 1)x_4 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad a \geqslant 0, \ b < 0,$
$\bar{X} = (1, 1, 0, 0).$

5.86. $x_1 - cx_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + (a + b)x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,$
$x_1 + (a - b)x_2 - x_3 - x_4 = -1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$a + b + c < 0, \quad a > 0, \quad b < 0,$
$\bar{X} = (1, 0, 0, 2).$

5.87. $cx_1 + x_2 + 2x_4 \to \max,$
$ax_1 + x_2 + (a^2+1)x_3 + (a+b)x_4 = a+1,$
$x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 + (1+ab)x_4 = a+1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$
$a^2 \neq 1, \quad 1+bc > 0, \quad b < -1,$
$\bar{X} = (1, 1, 0, 0).$

5.88. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 - x_3 + (a+1)x_4 + (1-b)x_5 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 + (a-1)x_4 + (b-1)x_5 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + (a+1)x_4 + (b+1)x_5 = 3,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5,$
$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad a < 0,$
$\bar{X} = (1, 1, 1, 0, 0).$

5.89. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \to \max,$
$ax_1 + x_2 + x_3 + (ab+1)x_4 + (1+b)x_5 = a+2,$
$x_1 + ax_2 + x_3 + (a+b)x_4 + (a+b)x_5 = a+2,$
$x_1 + x_2 + ax_3 + (b+1)x_4 + (ab+1)x_5 = a+2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5, \quad b < 0,$
$a \neq 1, \; a \neq -2, \; (c_1b_1 + c_2 - c_4)(c_2 + c_3b - c_5) < 0,$
$\bar{X} = (1, 1, 1, 0, 0).$

5.90. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max,$
$ax_1 + bx_2 + (af+bg)x_3 = a+b,$
$dx_1 + ex_2 + (df+ge)x_3 = d+e,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$
$ae \neq db, \quad c_1f + c_2g - c_3 < 0, \quad fg < 0,$
$\bar{X} = (1, 1, 0).$

§ 3. Первый алгоритм метода последовательного улучшения плана

Пусть X — некоторый опорный план задачи линейного программирования (5.1)—(5.3) с базисом $Б_X$. В результате исследования, основанного на утверждениях 5.1—5.3, выявляется:

1) либо оптимальность плана X;
2) либо неразрешимость задачи;
3) либо возможность перехода к новому плану X_1 (точнее, к новому базису $Б^1$), связанному с бо́льшим значением линейной формы $L(X)$.

Последовательное продвижение по базисам опорных планов задачи вплоть до получения оптимального базиса (базиса, соответствующего оптимальному плану задачи) составляет идею метода последовательного улучшения плана.

Для реализации этого метода необходимо знать следующие параметры:

1) базисные компоненты x_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ исследуемого опорного плана;
2) элементы матрицы $\| x_{ij} \|_{m,n}$;
3) оценки векторов условий Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, которые обозначаются через $x_{m+1,j}$;
4) значение линейной формы $L(X)$, соответствующее исследуемому опорному плану X. Величина $L(X)$ обозначается через $x_{m+1,0}$.

Рассмотрим базис $Б^1$, состоящий из векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_r}, \ldots, A_{s_m}$ и базис $Б^2 = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_k, \ldots, A_{s_m}\}$ (базис $Б^2$ отличается от базиса $Б^1$ тем, что вектор A_{s_r} заменен вектором A_k). Параметры $x_{ij}^{(1)}$ и $x_{ij}^{(2)}$, соответствующие этим базисам, связаны соотношениями

$$x_{ij}^{(2)} = \begin{cases} x_{ij}^{(1)} - \dfrac{x_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}} x_{ik}^{(1)} & \text{при } i \neq r, \\ \dfrac{x_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}} & \text{при } i = r, \end{cases} \tag{5.7}$$

$i = 1, 2, \ldots, m+1$; $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Описание алгоритма.

I. Нулевая итерация. Заполняется таблица с номером «0», соответствующая исходному опорному плану X_0 с базисом $Б_{X_0}$.

Таблица «0»

№	C_{X_0}	$Б_{X_0}$	A_0	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n	$\theta^{(0)}$
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$x_{10}^{(0)}$	$x_{11}^{(0)}$	$x_{12}^{(0)}$	...	$x_{1k}^{(0)}$	...	$x_{1n}^{(0)}$	
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$x_{20}^{(0)}$	$x_{21}^{(0)}$	$x_{22}^{(0)}$	...	$x_{2k}^{(0)}$	...	$x_{2n}^{(0)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$x_{r0}^{(0)}$	$x_{r1}^{(0)}$	$x_{r2}^{(0)}$	...	$x_{rk}^{(0)}$	...	$x_{rn}^{(0)}$	$\theta_{\min}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$x_{m0}^{(0)}$	$x_{m1}^{(0)}$	$x_{m2}^{(0)}$	...	$x_{mk}^{(0)}$	...	$x_{mn}^{(0)}$	
$m+1$	—	—	$L^{(0)}$	$\Delta_1^{(0)}$	$\Delta_2^{(0)}$	...	$\Delta_k^{(0)}$	...	$\Delta_n^{(0)}$	

Табл. 5.1.

В первый столбец «№» таблицы записываются номера строк таблицы: $1, 2, \ldots, m+1$.

В столбец «C_{X_0}» вносятся базисные компоненты c_{s_i} вектора C; $(m+1)$-я позиция этого столбца не заполняется. Столбец «$Б_X$» содержит векторы базиса A_{s_i}.

Столбцы «A_j» ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) заполняются параметрами $x_{ij}^{(0)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m+1$).

Столбец «$\theta^{(0)}$» в нулевой итерации не заполняется.

II. $(l+1)$-я итерация (переход от таблицы с номером «l» к таблице с номером «$l+1$»).

Пусть заполнена таблица с номером «l», за исключением столбца «$\theta^{(l)}$». Рассмотрим элементы $(m+1)$-й строки этой таблицы, соответствующие столбцам «A_j». Так как $x^{(l)}_{m+1,\,j}=\Delta^{(l)}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то здесь возможны три случая:

а) все $\Delta^{(l)}_j \geqslant 0$; тогда опорный план X_l, полученный после l-й итерации, — решение задачи;

б) $\Delta^{(l)}_k < 0$ и все элементы столбца «A_k» $x^{(l)}_{ik} \leqslant 0$; в этом случае задача неразрешима;

в) в каждом столбце «A_k», для которого $\Delta^{(l)}_k < 0$, имеется хотя бы один положительный элемент. В этом случае в базис вводится один из векторов A_k (для определенности будем считать, что вводится вектор A_k с наименьшей оценкой $\Delta^{(l)}_k$). Столбец «A_k» таблицы l называется направляющим. Для определения вектора A_{s_l}, который нужно вывести из базиса, заполняется столбец «$\theta^{(l)}$» l-й таблицы, точнее, те его позиции, которые соответствуют $x^{(l)}_{ik} > 0$: $\theta^{(l)}_i = \dfrac{x^{(l)}_{i0}}{x^{(l)}_{ik}}$.

Вектор A_{s_r}, на котором достигается $\min \theta^{(l)}$ [1]), выводится из базиса. Строка r таблицы называется направляющей. Элемент $x^{(l)}_{rk}$ называется направляющим.

После определения направляющего элемента заполняется таблица с номером «$l+1$».

Заполнение «$l+1$»-й таблицы:

1) Первые три столбца «$l+1$»-й таблицы отличаются от «l»-й таблицы строкой с номером r. Вместо элементов r, c_{s_r}, A_{s_r} заносятся элементы r, c_k, A_k.

2) Заполняется «основная» часть таблицы.

Чтобы получить r-ю строку «$l+1$»-й таблицы, нужно r-ю строку «l»-й таблицы разделить на $x^{(l)}_{rk}$. Для получения строки $i \neq r$ «$l+1$»-й таблицы нужно из i-й строки «l»-й таблицы вычесть r-ю строку «$l+1$»-й таблицы, умноженную на $x^{(l)}_{ik}$ [2]).

Этим завершается $(l+1)$-я итерация.

Замечание. Так как вычисление параметров $\Delta^{(0)}_j$ осуществляется не по рекуррентным формулам (5.7), а непосредственно, то для таблицы с номером «0» удобно ввести окаймляющую сверху строку «C», в которую заносятся коэффициенты линейной формы задачи. Тогда $(m+1)$-ю строку «нулевой» таблицы можно получить как разность произведения столбцов «A_j» на «C_X» и строки «C».

Рассмотрим вычислительный пример, иллюстрирующий порядок действий по описанному алгоритму.

---

[1]) В случае, когда задача вырождена, $\min \theta^{(l)}$ может соответствовать сразу нескольким векторам. При этом из базиса можно вывести любой из этих векторов. Правило, гарантирующее сходимость метода в этом случае, будет приведено в § 6.

[2]) Всюду действия со строками таблицы понимаются как действия с векторами, компоненты которых совпадают с элементами строк.

Пример 5.3. Решить задачу линейного программирования первым алгоритмом метода последовательного улучшения плана:

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Естественно в качестве исходного базиса рассмотреть базис $Б_X^{(0)} = (A_3, A_4)$, соответствующий опорному плану $X_0 = (0, 0, 1, 3)$. Таблица, соответствующая нулевой итерации, имеет вид:

Таблица «0»

				2	1	1	—1	
№	$C_Б$	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\theta^{(0)}$
1	1	A_3	1	1	—1	1	0	1
2	—1	A_4	3	2	1	0	1	$^3/_2$
3	—	—	—2	—3	—3	0	0	

Табл. 5.2.

Среди оценок Δ_j векторов условий имеются отрицательные: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, причем в разложении каждого из векторов с отрицательными оценками есть положительные составляющие: $x_{11} > 0$, $x_{22} > 0$. Поэтому можно воспользоваться рекомендациями, содержащимися в пункте в), и перейти к новому базису $Б_X^1$. Так как $\Delta_1 = \Delta_2 < 0$, то в базис вводится один из векторов A_1 или A_2, пусть это будет вектор A_1. Для определения вектора A_{s_i} $(i = 1, 2)$, который нужно вывести из базиса, заполним столбец «$\theta^{(0)}$». Здесь $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = (1, {}^3/_2)$, поэтому из базиса выводится вектор A_3. Теперь можно построить таблицу «1», соответствующую первой итерации.

Таблица «1»

№	$C_Б$	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\theta^{(1)}$
1	2	A_1	1	1	—1	1	0	—
2	—1	A_4	1	0	3	—2	1	$^1/_3$
3	—	—	1	0	—6	3	0	—

Табл. 5.3.

Из таблицы «1» видно, что улучшение плана можно продолжить, если перейти к базису $Б_X^2 = (A_1, A_2)$ (так как $\Delta_2^{(1)} < 0$ и $\theta_{\min}^{(1)} = \theta_2^{(1)}$). Таблица, соответствующая этому базису, имеет вид:

Таблица «2»

№	$C_Б$	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\theta^{(2)}$
1	2	A_1	$^4/_3$	1	0	$^1/_3$	$^1/_3$	4
2	1	A_2	$^1/_3$	0	1	$-^2/_3$	$^1/_3$	—
3	—	—	3	0	0	—1	2	—

Табл. 5.4.

Так как $\Delta_3^{(2)} = -1 < 0$, а $\theta_{\min}^{(2)} = \theta_1^{(2)}$, то переходим теперь к базису $Б_X^{(3)} = (A_3, A_2)$ и строим соответствующую ему таблицу.

Таблица «3»

№	$C_Б$	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1	A_3	4	3	0	1	1
2	1	A_2	3	2	1	0	1
3	—	—	7	3	0	0	3

Табл. 5.5.

Так как все $\Delta_j^{(3)} \geqslant 0$, то базис $Б_X^{(3)}$ является оптимальным. В соответствии с последней таблицей получаем

$$\overline{X} = (0, 3, 4, 0), \qquad L(\overline{X}) = 7.$$

5.91. Привести к каноническому виду задачу линейного программирования в симметричной форме записи

$$L(X) \to \max,$$
$$AX \leqslant B,$$
$$X \geqslant 0$$

и составить таблицу «0» для опорного плана

$$X_0 = (0, 0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m).$$

Решить задачи **5.92—5.121**, рассматривая в качестве исходного опорного плана план X_0, приведенный в условиях.

5.92. $x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,$
$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (1, 1, 0).$

5.93. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$3x_1 - x_2 + x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (0, 1, 1).$

5.94. $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4,$
$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 0, 1, 1).$

5.95. $6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max,$
$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$
$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (1, 0, 0, 1).$

5.96. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$
$x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 1, 1, 0).$

5.97. $x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max,$
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (1, 0, 1, 0).$

5.98. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5,$
$2x_1 - x_3 + x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 1, 0, 1).$

5.99. $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1,$
$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 0, 1, 1).$

5.100. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 19,$
$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 0, 1, 2, 0).$

5.101. $-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 \to \max,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 3x_6 = 15,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 5,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,$
$X_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 4).$

5.102. $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,$
$X_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 2).$

5.103. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 0, 0, 1).$

5.104. $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9,$
$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 0, 1, 2, 1).$

5.105. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3,$
$x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0,$
$x_1 + x_4 - x_5 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 2, 0, 1, 1).$

5.106. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \to \max,$
$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18,$
$x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13,$
$x_3 + x_5 = 3,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 1, 2, 0, 1).$

5.107. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,$
$-2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6,$
$x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 12,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (1, 1, 2, 0, 0).$

5.108. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7,$
$x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = -2,$
$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 5,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,$
$X_0 = (0, 0, 2, 0, 1, 1).$

5.109. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 2x_4 + 2x_6 = 5,$
$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 2,$
$x_1 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 3,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,$
$X_0 = (0, 1, 0, 0, 1, 2).$

5.110. $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 + x_7 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_6 + x_7 = 8,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_6 + 3x_7 = 15,$
$x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 + 3x_7 = 11,$
$x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 5,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7,$
$X_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 4).$

5.111. $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 6x_5 + 3x_6 + x_7 = 7,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 12,$
$x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 + 3x_7 = 8,$
$x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 4,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7,$
$X_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 3).$

5.112. $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_6 - x_7 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_5 + 3x_6 + x_7 = 9,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 18,$
$x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 + 3x_7 = 14,$
$x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 6,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7,$
$X_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 5).$

5.113. $x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 2x_6 - 2x_7 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 5x_5 + 3x_6 + x_7 = 10,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 21,$
$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 - 3x_6 + 3x_7 = 17,$
$x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 7,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7,$
$X_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 6).$

5.114. $x_1 + x_2 + ax_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + (2 + a)\, x_3 = 3 + a,$
$x_1 - x_2 + (a - 2)\, x_3 = a - 3,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\ a \neq 0,$
$X_0 = (0, 1, 1).$

5.115. $x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + (a + 1)\, x_3 = a + 2,$
$x_1 - x_2 + (a - 1)\, x_3 = a - 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\ a \neq 0,$
$X_0 = (0, 1, 1).$

5.116. $x_1 + cx_2 + cx_3 \to \max,$
$x_1 - (1+2a)x_2 + 2ax_3 = 1 - 2a,$
$2bx_1 - (1+2b)x_2 + x_3 = 2b - 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\quad 1 - 4ab \neq 0,$
$X_0 = (2, 1, 0).$

5.117. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (1, 1, 0, 0).$

5.118. $x_1 + cx_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 - x_4 = 1 + 2a,$
$x_1 + bx_2 + (b+1)x_3 - x_4 = 1 + 2b,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\quad a \neq b,$
$X_0 = (1, 2, 0, 0).$

5.119. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max,$
$ax_1 + bx_2 + (a+b)x_3 = 2a + b,$
$bx_1 + ax_2 + (a+b)x_3 = a + 2b,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\quad a^2 \neq b^2,$
$X_0 = (2, 1, 0).$

5.120. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + (a+b)x_3 = 2,$
$x_1 - x_2 + (a-b)x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (1, 1, 0).$

5.121. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + (a+2b)x_3 + (a-2b)x_4 = 3,$
$x_1 - 5x_2 + (a-5b)x_3 + (a+5b)x_4 = -4,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (1, 1, 0, 0).$

§ 4. Второй алгоритм метода последовательного улучшения плана

Если первый алгоритм метода последовательного улучшения плана основан на том, что величины Δ_j вычисляются по формулам

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j,$$

то основой второго алгоритма являются другие формулы для вычисления параметров Δ_j:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j, \tag{5.8}$$

где λ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j, \tag{5.9}$$

$j \in I_X$ — множеству базисных индексов опорного плана X.

Систему (5.9) можно записать в эквивалентной форме

$$\Lambda = A_X^{-1} C_X,$$

здесь A_X — матрица, составленная из векторов базиса опорного плана X;

$$C_X = (c_{s_1}, c_{s_2}, \ldots, c_{s_m}), \qquad \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

Для решения задачи при помощи второго алгоритма необходимо на каждом этапе знать следующие параметры:

1) базисные компоненты $x_{i0} = e_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ опорного плана X;
2) элементы e_{ij} $(i=1, 2, \ldots, m,\ j=1, 2, \ldots, m)$ матрицы, обратной к A_X;
3) компоненты $\lambda_i = e_{m+1,j}$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ вектора Λ;
4) значение линейной формы $L(X) = e_{m+1,0}$.

Вспомогательная таблица

№	B	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$m+1$	—	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
0	—	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n
1	—	Δ'_1	Δ'_2	...	Δ'_k	...	Δ'_n
2	—	Δ''_1	Δ''_2	...	Δ''_k	...	Δ''_n
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮

Табл. 5.6.

Параметры $e_{ij}^{(2)}$, соответствующие базису $Б_X^{(2)}=(A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_k, \ldots, A_{s_m})$, связаны с параметрами $e_{ij}^{(1)}$, соответствующими базису $Б_X^{(1)}$, рекуррентными формулами

$$e_{ij}^{(2)}=\begin{cases} e_{ij}^{(1)}-\dfrac{e_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}}x_{ik}^{(1)} & \text{при } i\neq r, \\ \dfrac{e_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}} & \text{при } i=r, \end{cases} \tag{5.10}$$

$i=1, 2, \ldots, m+1$, $j=0, 1, 2, \ldots, m$.

Описание алгоритма.

I. Нулевая итерация.

а) Составляется вспомогательная таблица 5.6, в которую вносятся параметры задач.

Дополнительная строка таблицы с номером «l» заполняется по мере выполнения l-й итерации.

Основная таблица

№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	. . .	e_m	A_k	$\theta^{(0)}$
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$e_{10}^{(0)}$	$e_{11}^{(0)}$	$e_{12}^{(0)}$	. . .	$e_{1m}^{(0)}$	$x_{1k}^{(0)}$	
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$e_{20}^{(0)}$	$e_{21}^{(0)}$	$e_{22}^{(0)}$	. . .	$e_{2m}^{(0)}$	$x_{2k}^{(0)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	. . .	⋮	⋮	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$e_{r0}^{(0)}$	$e_{r1}^{(0)}$	$e_{r2}^{(0)}$	. . .	$e_{rm}^{(0)}$	$x_{rk}^{(0)}$	$\theta_{\min}^{(0)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	. . .	⋮	⋮	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$e_{m0}^{(0)}$	$e_{m1}^{(0)}$	$e_{m2}^{(0)}$	. . .	$e_{mm}^{(0)}$	$x_{mk}^{(0)}$	
$m+1$	—	—	$L^{(0)}$	$\lambda_1^{(0)}$	$\lambda_2^{(0)}$	. . .	$\lambda_m^{(0)}$	$\Delta_k^{(0)}$	

Табл. 5.7.

б) Составляется основная таблица 5.7 с номером «0», в которой заполняются первые m строк, за исключением последних двух столбцов: «A_k», «$\theta^{(0)}$». Элемент $\lambda_i^{(0)}$ равен произведению столбца «C_X» на столбец «e_i». Нулевая итерация заканчивается заполнением нулевой дополнительной строки вспомогательной таблицы: $\Delta_j^{(0)}$ равно разности между произведением $(m+1)$-й строки основной таблицы на столбец «A_j» вспомогательной таблицы и $(m+1)$-м элементом столбца «A_j» вспомогательной таблицы.

II. $(l+1)$-я итерация.

Пусть уже совершено l итераций. В результате заполнена «l»-я основная таблица, за исключением последних двух столбцов, и l-я дополнительная строка вспомогательной таблицы. $(l+1)$-я итерация начинается с просмотра этой строки. Если все $\Delta_j^{(l)} \geqslant 0$, то план $X^{(l)}$, полученный на l-й итерации, — решение задачи. Если же среди $\Delta_j^{(l)}$ есть отрицательные, то в базис вводится вектор A_k $(\Delta_k = \min\limits_j \Delta_j)$. После этого заполняется столбец «$A_k^{(l)}$» основной таблицы. В позицию «$m+1$» этого столбца заносится оценка $\Delta_k^{(l)}$ вектора A_k. Заполнение этого столбца основано на формулах

$$x_{ik}^{(l)} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}^{(l)} a_{jk}$$

(элемент $x_{ik}^{(l)}$ равен произведению столбца «A_k» вспомогательной таблицы на i-ю строку «l»-й основной таблицы). Возможны два случая:

1) все $x_{ik} \leqslant 0$, тогда задача неразрешима из-за неограниченности линейной формы на множестве планов;

2) $x_{ik} > 0$ хотя бы для одного i. В этом случае, так же как в первом алгоритме, заполняется столбец «$\theta^{(l)}$» основной таблицы, определяется направляющий элемент $x_{rk} > 0$. Заполнение $(l+1)$-й таблицы совершается по тем же правилам, что и в первом алгоритме. $(l+1)$-я итерация заканчивается заполнением $(l+1)$-й дополнительной строки вспомогательной таблицы.

Пример 5.4. Решить задачу линейного программирования вторым алгоритмом метода улучшения плана:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &\to \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 1, \\ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 &= 1, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Ход решения задачи отражен в основных таблицах с номерами «0», «1» и во вспомогательной таблице.

Вспомогательная таблица

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1	3	1	1	0
2	1	1	—2	0	1
3	C	1	4	1	—1
4	$\Delta^{(0)}$	1	—1	0	0
5	$\Delta^{(1)}$	4	0	1	0

Табл. 5.8.

Основная таблица «0»

№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	A_2	$\theta^{(0)}$
1	1	A_3	1	1	0	1	1
2	—1	A_4	1	0	1	—2	
3	—	—	0	1	—1	—1	

Табл. 5.9.

Так как в строке «$\Delta^{(0)}$» вспомогательной таблицы есть отрицательный элемент $\Delta_2^{(0)} = -1 < 0$, то заполняем столбец «A_2» таблицы «0»; $x_{i2}^{(0)} = 1 > 0$, поэтому переходим к новому базису (A_2, A_4).

Таблица «1» имеет вид:

Основная таблица «1»

№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	A	$\theta^{(1)}$
1	4	A_2	1	1	0		
2	—1	A_4	3	2	1		
3	—	—	1	2	—1		

Табл. 5.10.

Теперь можно заполнить строку «$\Delta^{(1)}$» вспомогательной таблицы. Так как все $\Delta_j^{(1)} \geqslant 0$, то задача решена:

$$\overline{X} = (0,\ 1,\ 0,\ 3), \qquad L(\overline{X}) = 1.$$

5.122. Проверить справедливость формул (5.8).

Решить задачи **5.123—5.145** при помощи второго алгоритма метода последовательного улучшения плана, приняв в качестве исходного опорного плана $X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5.123. $x_1 + 7x_2 - x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 = -1,$
$x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 14,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (1, 0, 1).$

5.124. $x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (0, 0, 3).$

5.125. $x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (0, 2, 1).$

5.126. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$3x_1 + x_2 - x_3 = 5,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$
$X_0 = (1, 2, 0).$

5.127. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6,$
$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 0, 1, 1).$

5.128. $x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \to \max,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 1, 0, 1).$

5.129. $x_1 - 8x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 1, 0, 1).$

5.130. $3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \to \max,$
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7,$
$x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$
$X_0 = (0, 1, 2, 0).$

5.131. $x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 - 3x_5 \to \max,$
$x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 = -1,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 0, 1, 1, 0).$

5.132. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2,$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 1, 0, 0, 0).$

5.133. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 2x_4 = 3,$
$-x_2 + x_3 + 2x_5 = 1,$
$x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 5,$
$X_0 = (0, 1, 0, 1, 1).$

5.134. $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 0,$
$x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 - 2x_6 = 2,$
$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 - 10x_5 - 5x_6 = 4,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 6,$
$X_0 = (0, 0, 0, 1, 1, 1).$

5.135.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_3 + x_6 \to \max,\\
&x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 15,\\
&x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 5,\\
&2x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,\\
&X_0 = (0, 2, 0, 3, 1, 0).
\end{aligned}$$

5.136.
$$\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 + x_5 + x_6 \to \max,\\
&x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 15,\\
&x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 5,\\
&2x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,\\
&X_0 = (0, 2, 0, 3, 1, 0).
\end{aligned}$$

5.137.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max,\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_6 = 9,\\
&x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3,\\
&x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 1,\\
&x_4 + x_6 = 1,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,\\
&X_0 = (1, 2, 0, 0, 1, 1).
\end{aligned}$$

5.138.
$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 - 3x_7 + x_8 \to \max,\\
&2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_8 = 4,\\
&x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 - x_8 = -7,\\
&x_1 - x_3 + 2x_5 + x_6 - x_7 + x_8 = 0,\\
&x_2 + x_4 + 2x_5 + x_7 - 2x_8 = 5,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 8,\\
&X_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 5, 1).
\end{aligned}$$

5.139.
$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 - 2x_8 \to \max,\\
&3x_2 + x_3 + x_5 + 3x_6 + x_7 + 5x_8 = 17,\\
&x_1 + 6x_2 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 5x_8 = 23,\\
&x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 5x_6 + 2x_7 + 11x_8 = 27,\\
&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 7x_6 + 7x_8 = 27,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 8,\\
&X_0 = (0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1).
\end{aligned}$$

5.140.
$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - 2x_8 \to \max,\\
&x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 - 3x_8 = 16,\\
&x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 - 3x_8 = 12,\\
&x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 2x_8 = 15,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 - x_8 = 20,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 8,\\
&X_0 = (0, 0, 0, 0, 5, 4, 3, 1).
\end{aligned}$$

5.141. $5x_1 - 8x_2 + 10x_3 - x_4 + x_5 - 7x_6 + x_7 + 10x_8 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 - 3x_8 &= 16,\\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 &= 12,\\
x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 2x_8 &= 15,\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 - x_8 &= 20,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 8,&\\
X_0 = (0, 0, 0, 0, 5, 4, 3, 1).&
\end{aligned}$$

5.142. $ax_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2,\\
x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a + 2,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\quad a \neq 0,&\\
X_0 = (0, 1, 1,).&
\end{aligned}$$

5.143. $x_1 - x_2 + ax_3 \to \max,$

$$\begin{aligned}
ax_1 + x_2 + (a-1)x_3 &= 2 + a,\\
x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 &= 2a + 1,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\quad a \neq \pm 1,&\\
X_0 = (1, 2, 0).&
\end{aligned}$$

5.144. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 &= 2,\\
x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,&\\
X_0 = (1, 1, 0, 0).&
\end{aligned}$$

5.145. $c_1x_1 + c_2x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= a - b,\\
2x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 7x_4 &= 2a + 3b,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\quad a > 0,\ b > 0,&\\
X_0 = (a, b, 0, 0).&
\end{aligned}$$

5.146. Пусть решение задачи при помощи второго алгоритма метода последовательного улучшения плана начинается с исследования опорного плана X_0, базис которого состоит из единичных векторов. Тогда параметры нулевой итерации определяются из соотношений

$$A_{X_0}^{-1} = E, \qquad \Lambda^{(0)} = C_{X_0}E, \qquad \Delta^{(0)} = \Lambda^{(0)}A_{X_0} - C.$$

Доказать, что если на первой итерации в базис вводится вектор $A_k^{(0)}$ и выводится A_{s_r}, то параметры этой итерации определяются по формулам

$$A_{X_1}^{-1} = E^{r_1}E, \qquad \Lambda^{(1)} = C_{X_1}E^{r_1}E, \qquad \Delta^{(1)} = \Lambda^{(1)}A_{X_1} - C,$$

где

$$E^{r_1}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_{mk} & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

$$y_{ik}=\begin{cases} -\dfrac{x_{ik}}{x_{rk}} & \text{при } i\neq k, \\ \dfrac{1}{x_{rk}} & \text{при } i=k. \end{cases}$$

5.147. Используя утверждение предыдущей задачи, получить связь между параметрами $(l+1)$-й и нулевой итераций:

$$\left.\begin{aligned} A^{-1}_{X_{l+1}} &= E^{r_{l+1}}E^{r_l}\dots E^{r_1}E, \\ \Lambda^{(l+1)} &= C_{X_{l+1}}E^{r_{l+1}}E^{r_l}\dots E^{r_1}E, \\ A_k^{(l+1)} &= E^{r_l}E^{r_{l-1}}\dots E^{r_1}A_k^{(0)}, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

где $A_k^{(l+1)}=(x_{1k}^{(l+1)}, x_{2k}^{(l+1)}, \dots, x_{nk}^{(l+1)})$, а $A_k^{(0)}=(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$.

5.148. Составить схему решения задачи (5.1)—(5.3), основанную на формулах (α) задачи 5.147. (Полученный метод называется мультипликативной формой второго алгоритма метода последовательного улучшения плана и широко применяется для решения задач большой размерности на ЭВМ. Это связано с тем, что число параметров, которые необходимо «запомнить» машине при переходе от одной итерации к другой, меньше в мультипликативной форме, чем в обычной.)

Воспользоваться мультипликативной формой второго алгоритма метода последовательного улучшения плана для решения задач **5.149**—**5.155** (см. задачи 5.146—5.148).

5.149.
$$\begin{aligned} &x_1-2x_2-4x_3\to\max, \\ &2x_1+x_2-x_3=1, \\ &5x_1+6x_2+x_3=20, \\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3, \\ &X_0=(0,3,2). \end{aligned}$$

5.150.
$$\begin{aligned} &2x_1+8x_2+2x_3\to\max, \\ &4x_1-x_2+3x_3=7, \\ &7x_1+5x_2+12x_3=19, \\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3, \\ &X_0=(1,0,1). \end{aligned}$$

5.151.
$$\begin{aligned} &4x_1+3x_2+5x_3-20x_4\to\max, \\ &x_1+8x_2+7x_3-15x_4=17, \\ &x_1-5x_2-6x_3+11x_4=-9, \\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4, \\ &X_0=(0,4,0,1). \end{aligned}$$

5.152.
$$\begin{aligned} &2x_1+3x_2+2x_3+2x_4\to\max, \\ &5x_1+24x_2-7x_3-x_4=41, \\ &-x_1-2x_2+7x_3+3x_4=3, \\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4, \\ &X_0=(0,2,1,0). \end{aligned}$$

5.153.
$$\begin{aligned}
&x_1+2x_2+x_3+3x_4-2x_5\to\max,\\
&x_1+7x_2-x_3+7x_4-8x_5=9,\\
&x_2+8x_3+9x_4+7x_5=25,\\
&x_3+x_4+x_5=3,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,5,\\
&X_0=(3,0,0,2,1).
\end{aligned}$$

5.154.
$$\begin{aligned}
&x_1-2x_2+x_3-2x_4+x_5-2x_6\to\max,\\
&x_1+x_2-2x_3+x_5+6x_6=9,\\
&3x_1+3x_2-x_3+5x_4+x_5+11x_6=30,\\
&2x_1+2x_2+x_3+5x_4+x_5+6x_6=22,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,6,\\
&X_0=(0,3,0,2,0,1).
\end{aligned}$$

5.155.
$$\begin{aligned}
&x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5+x_6-9x_7-8x_8\to\max,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5+3x_6-5x_7+3x_8=15,\\
&x_1-x_2+x_3+x_4+x_6-5x_7+3x_8=9,\\
&x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5+3x_6+3x_7-x_8=7,\\
&x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5+3x_6-3x_7+x_8=9,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,8,\\
&X_0=(0,0,0,0,1,2,1,4).
\end{aligned}$$

§ 5. Методы решения задач линейного программирования, исходный опорный план которых неизвестен

5.156*. Рассмотрим вместе с основной задачей

$$\left.\begin{aligned}
&L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,\\
&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\ldots,m,\\
&x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n,\\
&b_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,m,
\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

вспомогательную задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{L}(\tilde{X})=-\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}\to\max,\\
&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\ i=1,2,\ldots,m,\\
&x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n+m.
\end{aligned}\right\}\qquad(\beta)$$

Очевидно, что $\tilde{X}_0=(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)$ является опорным планом задачи (β). Поэтому, если его взять в качестве начального

опорного плана и применить метод последовательного улучшения плана, то можно решить задачу (β). Доказать, что:

1) задача (β) всегда разрешима; при этом

$$\max \tilde{L}(\tilde{X}) \leqslant 0;$$

2) если $\max \tilde{L}(\tilde{X}) = 0$ и достигается на векторе $\tilde{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, то вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является опорным планом задачи (α);

3) если $\max \tilde{L}(\tilde{X}) < 0$, то система условий задачи (α) противоречива.

Метод определения исходного опорного плана задачи (α), основанный на решении вспомогательной задачи (β), называется методом искусственного базиса. (Исходный базис задачи (β) $Б_{\tilde{X}_0} = \{A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}\}$ состоит из искусственных векторов.)

5.157. Пусть имеет место случай 2) задачи 5.156, тогда, как следует из утверждения задачи, план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является опорным для задачи (α). Показать, что базис $Б_X = \{A_{s_i}\}_{i=1}^{m}$ может содержать искусственные векторы A_{n+i}.

5.158. Доказать, что для невырожденной задачи (α) базис исходного опорного плана, полученный методом задачи 5.156, содержит лишь векторы условий задачи (α).

5.159*. Пусть имеет место случай 2) задачи 5.156. Рассмотрим таблицу последней итерации метода последовательного улучшения плана, с помощью которого решалась задача (β). Здесь возможны два случая (предполагается, что оптимальный базис содержит некоторые искусственные векторы A_{n+i}):

a) все элементы строк таблицы x_{ij}, $j \leqslant n$, соответствующие дополнительным векторам, равны нулю;

b) хотя бы для одного дополнительного вектора, занимающего l-ю позицию в оптимальном базисе задачи (β), $x_{lj} \neq 0$ при некотором j; здесь $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказать, что в случае a) векторы условий задачи (α), вошедшие в оптимальный базис задачи (β), образуют базис опорного плана X задачи (α), а в случае b) базис исходного опорного плана можно получить, если дополнительные векторы A_{s_i}, для которых $x_{lj} \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, заменить векторами A_j.

5.160. Показать, что если следовать рекомендациям пункта b) предыдущей задачи, то в некоторых случаях можно получить базис исходного опорного плана задачи (α) — $Б_X = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_r}\}$, где $r < m$. (Очевидно, это соответствует случаю, когда часть условий задачи (α) линейно зависит от других. После определения базиса можно перейти к задаче $n \times r$, таким образом, этот метод позволяет выявить и отбросить линейно зависимые условия.)

5.161. Рассмотрим задачу линейного программирования в симметричной форме записи

$$L(X) \to \max,$$
$$AX \leqslant B, \quad B \geqslant 0,$$
$$X \geqslant 0.$$

Показать, что после введения дополнительных неотрицательных переменных x_{n+i} $(i=1, 2, \ldots, m)$ в качестве исходного опорного плана задачи можно взять план $X=(0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

5.162*. Показать, что для получения исходного опорного плана задачи

$$L(X) \to \max,$$
$$AX \geqslant B, \quad B \geqslant 0,$$
$$X \geqslant 0$$

можно составить вспомогательную задачу с одним искусственным вектором.

5.163*. Показать, что если из векторов условий задачи (5.1) — (5.3) удается выделить m линейно независимых, то определение исходного опорного плана можно свести к задаче с не более чем одним искусственным вектором.

Решить задачи **5.164-5.180**, определяя исходный опорный план методом искусственного базиса.

5.164. $x_1+4x_2+x_3 \to \max,$
$x_1-x_2+x_3=3,$
$2x_1-5x_2-x_3=0,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3.$

5.165. $x_1-10x_2+x_3 \to \max,$
$x_1-5{,}5x_2-7x_3=-13,$
$x_1+14{,}5x_2+7x_3=15,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3.$

5.166. $x_1+2x_2+3x_3-4x_4 \to \max,$
$x_1+x_2-x_3+x_4=2,$
$x_1+14x_2+10x_3-10x_4=24,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3, 4.$

5.167. $x_1-4x_2+3x_3+10x_4 \to \max,$
$x_1+x_2-x_3+x_4=0,$
$x_1+14x_2+10x_3-10x_4=11,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3, 4.$

5.168. $x_1-5x_2-x_3+x_4 \to \max,$
$x_1+3x_2+3x_3+x_4=3,$
$2x_1+3x_3-x_4=4,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3, 4.$

5.169. $x_1+10x_2-x_3+5x_4 \to \max,$
$x_1+2x_2-x_3-x_4=1,$
$-x_1+2x_2+3x_3+x_4=2,$
$x_1+5x_2+x_3-x_4=5,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3, 4.$

5.170. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5,$
$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

5.171. $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max,$
$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10,$
$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20,$
$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 5.$

5.172. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to \max,$
$x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2,$
$x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2,$
$x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$

5.173. $x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max,$
$14x_1 - 14x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 3x_6 = 8,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0,$
$16x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 12,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$

5.174. $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 7,$
$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 10,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$

5.175. $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - 2x_7 = 0,$
$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = -1{,}5,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 3x_7 = 4{,}5,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 = -0{,}5,$
$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, 7.$

5.176. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \to \max,$
$6x_1 - 13x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 + 11x_6 + 4x_7 + 2x_8 = 13,$
$9x_1 - 23x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 5x_5 - x_6 + 2x_7 - x_8 = 23,$
$7x_1 - 22x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 7x_7 + x_8 = 22,$
$-4x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 8x_5 + 3x_6 - 3x_7 + 2x_8 = -7,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 8.$

5.177. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 + 2x_7 - 6x_8 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + 2x_7 - 2x_8 = 3,$
$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = -1,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 5x_7 - 5x_8 = 12,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - x_6 - x_7 + x_8 = -4,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 8.$

5.178. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\to\max,$
$$\begin{aligned}
&x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8=1,\\
&2x_1+x_2+2x_3+x_4+2x_5+x_6+2x_7+x_8=2,\\
&x_1-2x_2+x_3-2x_4+x_5-2x_6+x_7-2x_8=0,\\
&4x_1-2x_2+4x_3-2x_4+4x_5-2x_6+4x_7+2x_8=1,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.
\end{aligned}$$

5.179. $c_1x_1+c_2x_2+\quad c_3x_3+\quad c_4x_4\to\max,$
$$\begin{aligned}
&x_1+ax_2+(a-b^2)x_3-(1+2a)x_4=a+2,\\
&ax_1-x_2-(ab^2+1)x_3+(2-a)x_4=2a-1,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

5.180. $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4\to\max,$
$$\begin{aligned}
&x_1-x_2+x_3-x_4=a+b,\\
&2x_1+x_2-x_3+2x_4=a-b,\\
&-5x_1-7x_2+7x_3-11x_4=8b-2a,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

В номерах **5.181 — 5.185** наряду с основной задачей

$$\left.\begin{aligned}
&L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,\\
&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,2,\ldots,m,\\
&x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\ldots,n,\\
&b_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,m,
\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

рассматривается вспомогательная задача (M-задача)

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{L}_M(\tilde{X})=L(X)-M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}\to\max,\\
&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\ i=1,2,\ldots,m,\\
&x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n+m,
\end{aligned}\right\}\qquad(\beta_M)$$

где M — достаточно большое положительное число.

5.181. Пусть задача (β_M) разрешима и в ее оптимальном плане $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_{n+m})$ последние m компонент равны нулю: $\tilde{x}_{n+i}=0$, $i=1,2,\ldots,m$. Доказать, что план $X=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)$ есть решение задачи (α).

5.182*. Доказать, что если задача (β_M) разрешима при $M=M_0$, то она разрешима и при $M>M_0$.

5.183*. Пусть задача (α) непротиворечива, а задача (β_M) разрешима при $M=M_0$. Доказать, что существует такое M_1, что $\tilde{x}_{n+i}=0$ ($i=1,2,\ldots,m$) в любом оптимальном плане задачи (β_M) при $M>M_1$.

5.184.** Пусть задача (α) разрешима. Доказать, что существует такое число M_2, что при $M > M_2$ задача (β_M) разрешима.

5.185. Исходя из утверждений задач 5.181 — 5.184, обосновать метод решения задачи линейного программирования, для реализации которого не нужно вначале определять исходный опорный план (M-метод).

Описание метода.

Решается задача (β_M) (при $M > \max(M_0, M_1, M_2)$), исходный опорный план которой очевиден. В ходе решения возможны три случая:

а) задача (β_M) неразрешима, отсюда вытекает неразрешимость исходной задачи из-за неограниченности линейной формы $L(X)$ на множестве планов;

б) задача (β_M) разрешима, но в оптимальном плане $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots, \tilde{x}_{n+m})$ хотя бы одна из компонент $\tilde{x}_{n+i} > 0$; в этом случае исходная задача неразрешима из-за несовместности условий;

в) задача (β_M) разрешима и в оптимальном плане $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots, \tilde{x}_{n+m})$ все компоненты $\tilde{x}_{n+i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; в этом случае план $X = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ — решение исходной задачи.

Замечание 1. Вычислять параметры M_0, M_1 и M_2 нет необходимости. Практически достаточно считать M больше любого сравниваемого с ним числа.

Замечание 2. Так как коэффициенты c_j задачи (β_M) являются линейными функциями параметра M:

$$c_j = M c'_j + c''_j,$$

то $\Delta j = M\Delta'_j + \Delta''_j$; поэтому в таблице помещаются две строки оценок Δ. Сравнение оценок осуществляется по формулам

$$\Delta_j > 0, \quad \text{если} \begin{cases} \Delta'_j > 0, \\ \Delta'_j = 0, \text{ но } \Delta''_j > 0. \end{cases}$$

Решить задачи **5.186 — 5.199,** используя M-метод последовательного улучшения плана.

5.186.
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max, \\ &x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ &x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -6, \\ &x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_4 - x_5 = 2, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

5.187.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 3, \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 5x_6 = 6, \\ &x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 14x_5 + 9x_6 = 14, \\ &x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 + 36x_5 + 17x_6 = 36, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

5.188. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\to\max,$
$x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5-4x_6+3x_7=4,$
$x_1-x_2+x_3-x_4+8x_5-8x_7=0,$
$x_1+x_2-4x_5-2x_6+5x_7=2,$
$x_1-x_2+x_5-10x_7=0,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,7.$

5.189. $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7\to\max,$
$2x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5-x_6+x_7=0,$
$2x_2-x_3+2x_4-3x_5+x_6-x_7=0,$
$-x_3+2x_5+4x_7=2,$
$2x_1+x_2-x_4+4x_7=4,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,7.$

5.190. $x_1+x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7\to\max,$
$3x_1+4x_2+x_3+2x_4+x_5+2x_6+x_7=7,$
$x_1+3x_3+2x_4+x_5+2x_6+x_7=9,$
$x_1+4x_2+x_3-2x_4+3x_5+4x_6+x_7=7,$
$x_1+4x_2+x_3-2x_4+x_5+4x_6+3x_7=7,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,7.$

5.191. $2x_1-2x_2-2x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\to\max,$
$3x_1-7x_2+6x_3+4x_4+x_5+2x_6+3x_7+4x_8=10,$
$5x_1-5x_2+8x_3+x_4+2x_5+3x_6+4x_7+x_8=10,$
$7x_1-3x_2+2x_3+2x_4+3x_5+4x_6+x_7+2x_8=10,$
$5x_1-5x_2+6x_3+3x_4+4x_5+x_6+2x_7+3x_8=10,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.$

5.192. $x_1+10x_2-x_3+10x_4-5x_5+5x_6-x_7+x_8\to\max,$
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5+2x_6-2x_7-x_8=1,$
$x_1-2x_3+2x_5+10x_6-2x_7+x_8=2,$
$2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+12x_6+4x_7+2x_8=2,$
$4x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5-x_6+11x_7-x_8=3,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.$

5.193. $2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5-3x_6+x_7-x_8\to\max,$
$x_1+x_2+x_3+x_4+4x_5-4x_6+2x_7+2x_8=4,$
$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+10x_5-10x_6+7x_7+3x_8=9,$
$x_1+3x_2+6x_3+10x_4+20x_5-20x_6+16x_7+4x_8=16,$
$x_1+4x_2+10x_3+20x_4+35x_5-35x_6+30x_7+5x_8=25,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.$

5.194. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\to\max,$
$-3x_1+x_2+2x_3+x_6+2x_7-3x_8=3,$
$-2x_1+3x_2-x_3+2x_6+3x_7-4x_8=2,$
$2x_1-2x_4-x_5+3x_6+4x_7-x_8=-3,$
$4x_1-4x_4+x_5+4x_6+x_7-2x_8=-3,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.$

5.195.
$$\begin{aligned}
&5x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6-x_7-5x_8\to\max,\\
&2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-2x_6+2x_8=6,\\
&x_1+3x_2+x_3+x_4+x_5-5x_6+x_7+3x_8=7,\\
&x_1+x_2+4x_3+x_4+x_5-6x_6+4x_7+4x_8=8,\\
&x_1+x_2+x_3+5x_4+x_5-7x_6+5x_7-3x_8=9,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+6x_5-8x_6+6x_7-4x_8=10,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.
\end{aligned}$$

5.196.
$$\begin{aligned}
&x_1-3x_2-x_3-x_4-x_5-x_6+x_7+x_8\to\max,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=1,\\
&x_1-x_2+x_3-x_4+11x_5+7x_6-8x_7-x_8=2,\\
&x_1-2x_2-3x_3-x_4-x_5-x_6-x_7-5x_8=3,\\
&3x_1-2x_2-x_3-x_4+11x_5+7x_6-8x_7-5x_8=4,\\
&x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-7x_6+8x_7-x_8=0,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.
\end{aligned}$$

5.197.
$$\begin{aligned}
&2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+2x_8\to\max,\\
&5x_1+6x_2+11x_7+6x_8=26,\\
&x_1+5x_2+6x_3+6x_7+11x_8=33,\\
&x_2+5x_3+6x_4+6x_6-5x_7+6x_8=27,\\
&x_3+5x_4+6x_5+11x_6-11x_7+x_8=15,\\
&x_4+5x_5+6x_6-6x_7=6,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.
\end{aligned}$$

5.198.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\to\max,\\
&x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5-3x_6+7x_7+x_8=13,\\
&2x_1+3x_2+7x_3+10x_4+13x_5-5x_6-x_7+x_8=31,\\
&3x_1+5x_2+11x_3+16x_4+21x_5-8x_6+3x_7-x_8=50,\\
&2x_1-7x_2+7x_3+7x_4+2x_5+5x_6-2x_7-x_8=-1,\\
&x_1+4x_2+5x_3+3x_4+10x_5-5x_6+11x_7+x_8=25,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.
\end{aligned}$$

5.199.
$$\begin{aligned}
&cx_1+x_2+x_3+x_4\to\max,\\
&x_1+ax_2+x_4=a,\\
&ax_1+bx_3-x_4=b,\\
&(1+a)x_1+ax_2+bx_3=b+c,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

§ 6. Вырожденность и зацикливание

В случае, когда задача линейного программирования не удовлетворяет требованию невырожденности, вектор условий A_{s_r}, который нужно вывести из базиса опорного плана, может определяться неоднозначно. Действительно,

$$\theta_{\min}=\min_{x_{ik}>0}\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$$

может достигаться сразу на нескольких индексах $r_1, r_2, \ldots, r_l$.

Существуют задачи линейного программирования, обладающие тем свойством, что в результате применения к ним метода последовательного улуч-

шения плана при «плохом» выборе вектора, выводимого из базиса, возникает бесконечное движение по базисам одного и того же опорного плана (так называемое зацикливание).

Рассмотрим вместе с основной задачей (5.1) — (5.3) так называемую ε-задачу (точнее, семейство задач линейного программирования, зависящее от малого параметра $\varepsilon > 0$):

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b_i(\varepsilon) = b_i + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \alpha_{ij}$, здесь $\|\alpha_{ij}\|_{m \times m}$ — матрица с определителем, отличным от нуля.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.1. *Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ε-задача является невырожденной.*

Теорема 5.2. *Существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ всякому опорному плану ε-задачи соответствует опорный план исходной задачи; при этом решению ε-задачи соответствует решение исходной задачи.* (Планы задач называются соответствующими, если их базисы совпадают.)

Приведем правило преодоления зацикливания в первом алгоритме метода последовательного улучшения плана, основанное на утверждениях теорем 5.1, 5.2.

Правило преодоления зацикливания.

Пусть в базис вводится вектор A_k $(\Delta_k < 0)$.

Рассмотрим множество индексов E_0, состоящее из тех i, на которых достигается

$$\theta_0 = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}.$$

Если E_0 состоит из одного элемента r, то из базиса исключается вектор A_{s_r}.

Если E_0 состоит более чем из одного элемента, то составляется множество E_1, которое состоит из $i \in E_0$, на которых достигается $\theta_1 = \min_{i \in E_0} \frac{x_{i1}}{x_{ik}}$. Если E_1 состоит из одного индекса r_1, то из базиса выводится вектор, занимающий позицию r_1, в противном случае составляется множество E_2, состоящее из $i \in E_1$, на которых достигается $\theta_2 = \min_{i \in E_1} \frac{x_{i2}}{x_{ik}}$, и т. д., пока не будет получено множество E_t, состоящее из одного элемента r_t. После этого из базиса выводится вектор, номер позиции которого r_t.

Замечание 1. Алгоритм метода последовательного улучшения плана изменяется следующим образом: таблицы окаймляются справа столбцами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t$, которые последовательно заполняются исходя из описанного правила.

Замечание 2. Практически зацикливание в методе последовательного улучшения плана — явление чрезвычайно редкое, поэтому рекомендуется при решении задач пользоваться более простым правилом: если $\theta_{\min}$ достигается на нескольких индексах, то из базиса выводится вектор с наименьшим

номером (см. введение к § 3 настоящей главы). Если же цикл уже обнаружен, то необходимо воспользоваться правилом для преодоления зацикливания.

5.200. Пусть $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вырожденный опорный план задачи (5.1)—(5.3). Всегда ли $\theta_{\min}=\min\limits_{x_{ik}>0}\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ $(\Delta_k<0)$ достигается на нескольких индексах?

5.201*. Доказать, что если $\theta_{\min}$ достигается более чем на одном индексе, то план X_1, полученный в результате «улучшения» первоначального плана, вырожден.

5.202. Показать, что если X_0 — вырожденный опорный план, то в результате «улучшения» X_0 новый план X_1 может оказаться равным X_0.

5.203. Доказать, что если в результате «улучшения» плана X_0 со значением линейной формы $L(X_0)$ получается план X_1, для которого $L(X_1)=L(X_0)$, то задача вырождена.

5.204*. Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{lrl}
L(X)= & x_3-x_4+x_5+x_6 & \to\max,\\
x_1 & +x_3-2x_4-3x_5+4x_6 & =0,\\
x_2 & +4x_3-3x_4-2x_5+x_6 & =0,\\
 & x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 & =1,\\
 & x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, 7. &
\end{array}$$

Показать, что решение этой задачи методом последовательного улучшения плана без учета правила, гарантирующего от зацикливания, может привести к циклу.

5.205. Решить предыдущую задачу, используя правило, гарантирующее от зацикливания.

5.206*. Доказать, что если задача линейного программирования разрешима, то существует оптимальный базис $Б_X$, в котором выполняется признак оптимальности $(\Delta_j\geqslant 0,\ j=1, 2, \ldots, n)$.

5.207*. Доказать, что если X_0 — оптимальный опорный план задачи линейного программирования, то существует базис $Б_{X_0}$, в котором $\Delta_j\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

5.208*. Доказать, что ε-задача является допустимой, если в качестве матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ взять матрицу, составленную из векторов базиса опорного плана исходной задачи:

$$\|\alpha_{ij}\|=\|A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\|.$$

5.209. Сохранится ли утверждение предыдущей задачи, если в качестве матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ рассмотреть произвольную невырожденную матрицу?

5.210*. Доказать, что если ε-задача неразрешима при $\|\alpha_{ij}\|=\|A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\|$ (см. задачу 5.208), то неразрешима и исходная задача.

Решить вырожденные задачи **5.211** — **5.214** первым алгоритмом метода последовательного улучшения плана с использованием правила, гарантирующего от зацикливания. В качестве исходного базиса принять базис $Б_X = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$, приведенный в условиях.

5.211.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max,\\
&x_1 - x_2 \qquad\qquad - 2x_5 = 0,\\
&\qquad x_2 \qquad + x_4 + 4x_5 = 0,\\
&\qquad x_2 + x_3 \qquad\quad + x_5 = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5,\\
&Б_X = (A_1, A_2, A_3).
\end{aligned}$$

5.212.
$$\begin{aligned}
&4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 \to \max,\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1,\\
&2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 + x_5 \qquad\quad = 0,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\quad = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,\\
&Б_X = (A_4, A_5, A_6).
\end{aligned}$$

5.213.
$$\begin{aligned}
&x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 \to \max,\\
&x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad = 0,\\
&x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad = 1,\\
&\qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,\\
&Б_X = (A_4, A_5, A_6).
\end{aligned}$$

5.214.
$$\begin{aligned}
&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 \to \max,\\
&x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad\qquad = 0,\\
&x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad = 0,\\
&x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 \qquad = 0,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad + x_8 = 1,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 8,\\
&Б_X = (A_5, A_6, A_7, A_8).
\end{aligned}$$

§ 7. Геометрическая интерпретация метода последовательного улучшения плана. Разные задачи

5.215. Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — опорный план задачи линейного программирования (5.1) — (5.3). Рассмотрим лучи l_{A_j}, определяемые тем, что для одной из внебазисных компонент x_j условие $x_j = 0$ заменено условием $x_j \geqslant 0$. Доказать, что если план X не вырожден, то пересечение луча l_{A_j} с выпуклым многогранным множеством M, порождаемым ограничениями (5.2), (5.3), содержит некоторый отрезок.

5.216. Доказать, что если совершенно элементарное преобразование с параметром $\theta < \theta_{\min} = \min\limits_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ $(\Delta_k < 0)$, то точка $X(\theta)$ является

относительно внутренней точкой ребра, исходящего из вершины X (предполагается, что X — невырожденная вершина выпуклого многогранного множества M, порождаемого ограничениями (5.2), (5.3)).

5.217. Показать, что исследование опорного плана $\overline{X}$ геометрически эквивалентно следующему:

а) если выполняется признак оптимальности ($\Delta_j \geqslant 0$), то над гиперплоскостью $L(X)=L(\overline{X})$ нет точек, принадлежащих ребрам выпуклого многогранного множества M, определяемого ограничениями задачи;

б) если $\Delta_k < 0$ и $x_{ik} \leqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, m$, то над гиперплоскостью $L(X)=L(\overline{X})$ расположено неограниченное ребро множества M;

в) если $\Delta_k < 0$ и $x_{ik} > 0$ для некоторого i, то над гиперплоскостью $L(X)=L(\overline{X})$ расположено ограниченное ребро, а значит, и вершина $\overline{X}_1$, отличная от $\overline{X}$.

(Исследуемая задача предполагается невырожденной.)

Решить задачи **5.218** — **5.221** методом последовательного улучшения плана, приведя предварительно систему условий к каноническому виду. Интерпретировать геометрически каждый шаг метода в пространстве переменных.

5.218. $x_1 + x_2 \to \max,$
$x_1 - x_2 \leqslant 1,$
$5x_1 + x_2 \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i=1, 2.$

5.219. $x_1 - 2x_2 \to \max,$
$x_1 + x_2 \leqslant 12,$
$x_1 - x_2 \leqslant 8,$
$x_i \geqslant 0, \quad i=1, 2.$

5.220. $x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 2,$
$x_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, 3.$

5.221. $x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min,$
$x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4,$
$x_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, 3.$

5.222. Исходя из геометрической интерпретации метода последовательного улучшения плана (см. задачу 5.217), привести пример задачи, для которой реализация этого метода приводит к последовательному перебору всех вершин множества M (здесь M — выпуклое многогранное множество, порождаемое условием задачи).

5.223. Показать, что в вырожденном случае пересечение луча l_{A_j} с множеством M (см. задачу 5.215) может состоять только из одной точки X.

5.224. Показать, что с помощью метода последовательного улучшения плана можно находить частное решение системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \tag{α}$$

5.225. Используя метод последовательного улучшения плана, показать, что если существует неотрицательное решение системы уравнений (α) (см. задачу 5.224), то существует и может быть найдено решение $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которого не более чем m компонент x_{s_i} ($i=1, 2, \ldots, m$) отличны от нуля.

5.226*. Пусть в результате применения метода последовательного улучшения плана к задаче нахождения частного решения системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{α}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{β}$$

была выявлена несовместность условий (α), (β). Как отличать случай противоречивости уравнений (α) от случая, когда система (α) не имеет неотрицательных решений?

5.227.** Рассмотрим задачу линейного программирования (5.1)—(5.3). Пусть выбраны m линейно независимых векторов условий $\{A_{s_i}\}$, $i=1, 2, \ldots, m$, и решена система $\tilde{A}X=B$, где $\tilde{A}$ — матрица, полученная вычеркиванием столбцов A_j ($j \neq s_i$) из матрицы A. Вектор $\overline{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, полученный в результате решения этой системы, вообще говоря, не является планом задачи, так как не все компоненты $\bar{x}_j$ могут оказаться неотрицательными. Доказать, что если система $\{A_{s_i}\}$ обладает тем свойством, что все оценки Δ_j векторов условий задачи неотрицательны, а задача допустима, то для любого плана X справедливо неравенство $L(X) \leqslant L(\overline{X})$.

5.228*. Доказать, что если выполняются условия предыдущей задачи, то задача (5.1)—(5.3) разрешима.

5.229. Пусть $\overline{X}$ — оптимальный план задачи (5.1)—(5.3) с базисом $Б_{\overline{X}}$. Доказать, что если $\Delta_k > 0$ для $k \notin I_{Б_X}$ (здесь $I_{Б_X}$ — совокупность базисных индексов плана $\overline{X}$), то решение $\overline{X}$ единственно.

5.230. Показать, что условие, сформулированное в предыдущей задаче, не является необходимым для того, чтобы задача (5.1)—(5.3) обладала единственным решением $\overline{X}$.

5.231. Пусть решение $\overline{X}$ задачи (5.1)—(5.3) не единственно. Как следует из утверждения задачи 5.229, в последней таблице метода последовательного улучшения плана хотя бы для одного $k \notin I_{Б_{\overline{X}}}$ $\Delta_k=0$. Доказать, что если в базис ввести вектор A_k и вывести A_{s_r}, где r определяется по общим правилам, то получится новый оптимальный базис $Б^1$.

5.232. Можно ли утверждать, что получится новое решение $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$, если совершить преобразование, описанное в задаче 5.231?

5.233*. Доказать, что если для оптимального плана $\overline{X}$ оценки $\Delta_k = 0$ для $k \notin I_{Б_X}$ и $x_{ik} \leqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то задача имеет решение $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$ (даже если опорный план $\overline{X}$ вырожден!).

5.234*. Доказать, что условия, сформулированные в задаче 5.233, являются достаточными для того, чтобы множество оптимальных планов $\overline{M}$ задачи (5.1)—(5.3) было неограниченным.

Используя утверждения задач 5.229 и 5.231, определить, какие из задач, приведенных в номерах **5.235** — **5.238**, обладают единственным решением $\overline{X}$. Для случая, когда решение не единственно, найти $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$.

5.235.
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max, \\ &x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 25, \\ &x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

5.236.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 \to \max, \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ &x_1 + 15x_2 + x_3 = 2, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

5.237.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max, \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 4, \\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 12x_5 = 12, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

5.238.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max, \\ &x_1 + x_2 + 2x_5 + 2x_6 = 2, \\ &x_1 - x_2 - 2x_6 = 0, \\ &x_3 - x_4 + 2x_6 = 0, \\ &x_3 + x_4 + 2x_6 + 6x_7 = 2, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 7. \end{aligned}$$

5.239. Пусть M — выпуклое многогранное множество, система ограничений которого имеет вид

$$AX = B,$$
$$X \geqslant 0.$$

Показать, что если условие

$$\max_{X \in M} L(X) = \min_{X \in M} L(X)$$

выполняется для любого линейного функционала, то M состоит из одной точки.

5.240. Рассмотрим задачу линейного программирования (5.1)—(5.3). Обосновать метод, с помощью которого выясняется, обладает ли данная задача единственным решением:

1) методом последовательного улучшения плана находится решение $\overline{X}$;

2) к ограничениям (5.2), (5.3) присоединяется ограничение $L(X) = L(\overline{X})$, и решаются задачи

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{L}_i(X) \to \max \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &AX = B, \\ &X \geqslant 0, \\ &L(X) = L(\overline{X}), \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_i)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\tilde{L}_i(X) \to \max \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &AX = B, \\ &X \geqslant 0, \\ &L(X) = L(\overline{X}), \end{aligned}\right\} \qquad (\beta_i)$$

где $\tilde{L}_i(X) = x_i$.

Исходная задача имеет единственное решение, если оптимальные значения задач (α_i) и (β_i) совпадают, и по крайней мере два решения в противном случае.

5.241. Решить задачу 5.235, используя правило, описанное в предыдущей задаче.

5.242. Пусть известно, что некоторая переменная x_{s_l}, вошедшая в число базисных на l-й итерации метода последовательного улучшения плана, остается базисной и в оптимальном плане задачи. Изменить алгоритм метода для этого случая.

5.243. Доказать, используя метод последовательного улучшения плана, теорему 4.1 о разрешимости задач линейного программирования.

5.244. Доказать, используя метод последовательного улучшения плана, теорему 4.2 о существовании опорного решения.

ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

§ 1. Определение двойственной задачи

Рассмотрим общую задачу линейного программирования, заданную в произвольной форме записи

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=m_1+1, \quad m_1+2, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n. \tag{6.3}$$

Определение 6.1. *Задача линейного программирования*

$$\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n, \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \quad j=n_1+1, \quad n_1+2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m, \tag{6.6}$$

называется двойственной по отношению к задаче (6.1) — (6.3).

В матричной форме исходная и двойственная задачи записываются следующим образом:

$$L(X)=(C, X) \to \max, \tag{6.1'} \qquad \tilde{L}(Y)=(B, Y) \to \min, \tag{6.4'}$$

$$AX \leqq B, \tag{6.2'} \qquad YA \geqq C, \tag{6.5'}$$

$$\tilde{X} \geqslant 0; \tag{6.3'} \qquad \tilde{Y} \geqslant 0. \tag{6.6'}$$

Здесь знак $\leqq$ в соотношении (6.2′) (знак $\geqq$ в соотношении (6.5′)) означает, что первые m_1 компонент (n_1 компонент) векторного условия суть

неравенства, а остальные $m-m_1$ компонент ($n-n_1$ компонент) — равенства; $\tilde{X}=(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$; $\tilde{Y}=(y_1, y_2, \ldots, y_{m_1})$.

Определение 6.1 показывает, что задача (6.4)—(6.6), двойственная к задаче (6.1)—(6.3), образуется по следующему правилу:

1) задача (6.4)—(6.6) является задачей минимизации, в которой вектор линейной формы $\tilde{L}(Y)$ совпадает с вектором ограничений исходной задачи. Аналогично связаны между собой векторы линейной формы исходной задачи и ограничений двойственной задачи;

2) матрица условий двойственной задачи $\tilde{A}$ образуется транспонированием матрицы условий A исходной задачи;

3) установленное взаимно однозначное соответствие между переменными исходной задачи и условиями двойственной удовлетворяет следующему требованию: j-е условие двойственной задачи будет неравенством, если на j-ю переменную исходной задачи наложено требование неотрицательности, в противоположном случае j-е условие будет равенством; аналогично связаны между собой условия исходной задачи и переменные двойственной.

Пример 6.1.

$$\begin{aligned}
L(X) = {} & x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \to \max, \\
& 2x_1 - x_2 \leqslant 1, \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geqslant 4, \\
& x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\
& x_1 - x_3 + 2x_5 \geqslant 3, \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Чтобы записать задачу, двойственную к данной, приведем систему ограничений к виду (6.2), (6.3):

$$\begin{aligned}
& 2x_1 - x_2 \leqslant 1, \\
& -x_1 + x_3 - 2x_5 \leqslant -3, \\
& -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \leqslant -4, \\
& x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся определением 6.1 и запишем задачу, двойственную к данной:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(Y) = {} & y_1 - 3y_2 - 4y_3 \to \min, \\
& 2y_1 - y_2 - y_3 \geqslant 1, \\
& -y_1 + y_3 + y_4 = -10, \\
& y_2 - 2y_3 + y_4 \geqslant 2, \\
& y_3 - y_4 = -1, \\
& -2y_2 - y_3 = 7, \\
& y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \quad y_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Исходя из определения 6.1, определить задачи, двойственные к задачам **6.1**—**6.9**.

6.1. $x_1 + x_2 \to \max,$
$x_1 - x_2 \leqslant 1,$
$x_1 \geqslant 0.$

6.2. $x_1 - x_2 \to \min,$
$x_1 = 1,$
$x_2 \leqslant 0.$

6.3. $x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1,$
$x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 2,$
$x_2 \leqslant 0.$

6.4. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant 1,$
$x_1 - x_2 = 2,$
$x_1 \geqslant 0.$

6.5. $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geqslant 2,$
$x_1 - x_3 \leqslant 3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \leqslant 0.$

6.6. $x_1 + 4x_4 \to \max,$
$x_2 + x_3 \leqslant 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 3,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 5,$
$x_1 \leqslant 0, \quad x_2 \leqslant 0.$

6.7. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leqslant 2,$
$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geqslant 0,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \leqslant 0, \quad x_4 \leqslant 0.$

6.8. $\sum_{i=1}^{5} ix_i \to \min,$
$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 0,$
$x_1 + x_4 + x_5 \leqslant 0,$
$x_1 - x_5 = 1,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_5 \leqslant 0.$

6.9. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 + 6x_6 \to \min,$
$2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 2,$
$x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 3,$
$x_3 + x_4 - x_5 \geqslant 4,$
$x_5 + x_6 = 7,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_4 \leqslant 0, \quad x_5 \leqslant 0.$

6.10. Определить задачу, двойственную по отношению к общей задаче линейного программирования, заданной в канонической форме записи

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

6.11. Определить задачу, двойственную по отношению к общей задаче линейного программирования, заданной в симметричной форме записи

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Определить задачи, двойственные к задачам **6.12—6.19.**

6.12. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.13. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.14. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m_1, \ m_1 \leqslant m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=m_1+1, m_1+2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n.$$

6.15. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \leqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.16. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \leqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.17. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \leqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.18. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \qquad i=m_1+1, m_1+2, \ldots, m_2, \quad m_2 \leqslant m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=m_2+1, m_2+2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n_2,$$
$$x_j \leqslant 0, \qquad j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n_2, \quad n_2 \leqslant n.$$

6.19. $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \qquad i=m_1+1, m_1+2, \ldots, m_2, \quad m_2 \leqslant m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=m_2+1, m_2+2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n_2,$$
$$x_j \leqslant 0, \qquad j=n_1+1, \quad n_1+2, \ldots, n_2, \quad n_2 \leqslant n.$$

6.20. Сформулировать задачу, двойственную по отношению к M-задаче (см. стр. 104)

$$L(\tilde{X}, M)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n+m.$$

6.21. Записать задачу, двойственную по отношению к задаче

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$
$$|\alpha_j|, \quad |\beta_j| < \infty.$$

6.22. Пусть в предыдущей задаче некоторые из чисел $\beta_j=\infty$ ($\alpha_j=-\infty$). Показать, что двойственную к ней можно получить, если положить $z'_j=0$ ($z''_j=0$), где z'_j (z''_j) — двойственные переменные, соответствующие условиям $x_j \leqslant \beta_j$ ($x_j \geqslant \alpha_j$).

6.23. Проверить, что определение задачи, двойственной к симметричной

$$L(X)=(C,\ X)\to\max,$$
$$AX\leqslant B,$$
$$X\geqslant 0,$$

можно сформулировать следующим образом: матрица A заменяется на $-A'$, векторы B и C умножаются на (-1) и меняются ролями; все остальное остается без изменения.

6.24. Пусть задача линейного программирования, заданная в симметричной форме записи

$$\left.\begin{aligned} &L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\to\max,\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\\ &x_j\geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

приводится к каноническому виду путем добавления неотрицательных переменных x_{n+i}, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$:

$$\left.\begin{aligned} &L(\tilde{X})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\to\max,\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\\ &x_j\geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Показать, что задача, двойственная к (α), совпадает с точностью до обозначения переменных с задачей, двойственной к (β).

6.25. Обобщить утверждение предыдущей задачи, показав, что задача, двойственная к (6.1)—(6.3), совпадает с задачей, двойственной к [(6.1)—(6.3)]'. Здесь через [(6.1)—(6.3)]' обозначена задача, полученная приведением (6.1)—(6.3) к каноническому виду путем добавления неотрицательных переменных x_{n+i} $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_1,\ m_1\leqslant m)$ и заменой переменных x_j $(j=n_1+1,\ n_1+2,\ \ldots,\ n)$ разностью неотрицательных переменных x'_j, x''_j.

Записать задачи, двойственные к многоиндексным задачам **6.26**—**6.30**.

6.26. $L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to\min,$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

6.27. $L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to\min,$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\alpha_{ij}\leqslant a_i,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\beta_{ij}\leqslant b_j,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

6.28*. $L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} c_{ijk}x_{ijk}\to\min,$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk}=b_{jk},\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,\qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ r,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk}\leqslant a_{ik},\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ r,$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}\leqslant d_{ij},\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

$$x_{ijk}\geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$
$$k=1,\ 2,\ \dots,\ r.$$

6.29*. $L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} c_{ijk}x_{ijk}\to\max,$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ijk}x_{ijk}=a_k,\qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ r,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \beta_{ijk}x_{ijk}=b_j,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \gamma_{ijk}x_{ijk}=d_i,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,$$

$$x_{ijk}\geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$
$$k=1,\ 2,\ \dots,\ r.$$

6.30*. $L(X)=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\dots\sum_{i_k=1}^{n_k} c_{i_1i_2\dots i_k}x_{i_1i_2\dots i_k}\to\max,$

$$\sum_{i_l=1}^{n_l} x_{i_1i_2\dots i_k}=a_{i_1i_2\dots i_{l-1}i_{l+1}\dots i_k},\quad l=1,2,\dots,k,$$

$$x_{i_1i_2\dots i_k}\geqslant 0,\quad i_l=1,2,\dots,n_j,\quad l=1,2,\dots,k.$$

6.31. Доказать, что задача, двойственная к задаче (6.4)—(6.6), совпадает с точностью до обозначения переменных с задачей (6.1)—(6.3). (Это утверждение называется соотношением двойственности.)

6.32. Убедиться, что соотношение двойственности (см. задачу 6.31) выполняется для общей задачи линейного программирования, заданной:

а) в симметричной форме записи;

б) в канонической форме записи.

6.33. Проверить, что соотношение двойственности (см. задачу 6.31) выполняется для задач 6.19, 6.20.

§ 2. Принцип двойственности (первая теорема двойственности)

Рассмотрим пару задач линейного программирования (6.1)—(6.3) и (6.4)—(6.6). Назовем ее двойственной парой.

Теорема 6.1 (первая теорема двойственности). *Если одна из задач двойственной пары имеет решение, то другая задача также разрешима. При этом для любых оптимальных планов* $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ *и* $\bar{Y}=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\dots,\bar{y}_m)$ *имеет место равенство*

$$L(\bar{X})=\tilde{L}(\bar{Y}),\quad \text{т. е.}\quad \sum_{j=1}^{n}c_j\bar{x}_j=\sum_{i=1}^{m}b_i\bar{y}_i.$$

Следствие 6.1. *Для разрешимости одной из задач двойственной пары необходимо и достаточно, чтобы каждая из задач имела хотя бы один план.*

Следствие 6.2. *Для того чтобы одна из задач двойственной пары имела планы, а множество планов другой задачи было пусто, необходима и достаточна неограниченность линейной формы первой задачи на множестве ее планов.*

Следствие 6.3. *Для оптимальности планов* $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ *и* $\bar{Y}=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\dots,\bar{y}_m)$ *задач двойственной пары необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$L(\bar{X})=\tilde{L}(\bar{Y}),\quad \text{т. е.}\quad \sum_{j=1}^{n}c_j\bar{x}_j=\sum_{i=1}^{m}b_i\bar{y}_i.$$

В **6.34.—6.39** приведены задачи линейного программирования, размерность которых $n\times m$, где $m\leqslant 3$. Найти оптимальные значения линейных форм этих задач, исходя из геометрической интерпретации задач, двойственных к ним.

6.34. $x_1+2x_2+3x_3+4x_4\to\min,$

$$x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 1,$$

$$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4.$$

6.35. $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

6.36. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min,$
$x_1 - x_2 \geqslant 0,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \geqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$

6.37. $x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min,$
$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 1,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 \geqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$

6.38. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 \to \min,$
$x_1 + x_2 - 2x_5 \geqslant 1,$
$x_1 + x_3 \geqslant 1,$
$x_1 + x_4 \geqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$

6.39. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 10x_6 + 15x_7 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 - x_6 + x_7 \geqslant 0,$
$x_1 + x_2 + x_4 - x_5 - 3x_6 + 2x_7 \geqslant 0,$
$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 4x_7 \geqslant 1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 7.$

Найти минимальные значения линейных форм задач **6.40—6.43**, решая двойственные к ним задачи методом последовательного улучшения плана.

6.40. $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 1,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 1,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 1,$
$6x_1 + 6x_2 + 6x_3 \geqslant 1,$
$2x_1 + 4x_3 \geqslant 1.$

6.41. $x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 0,$
$x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 0,$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 1,$
$x_1 + x_3 \geqslant 2,$
$-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geqslant 3.$

6.42. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min,$
$x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \geqslant 0,$
$x_1 + 3x_3 + 2x_4 \geqslant -1,$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geqslant -2,$
$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \geqslant 0,$
$x_1 + x_3 \geqslant -1,$
$x_2 - x_4 \geqslant 0.$

6.43. $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min,$
$x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 2,$
$x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 1,$
$x_1 + x_2 + x_4 \geqslant -1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2,$
$-x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geqslant 2,$
$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 1,$
$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geqslant -1,$
$2x_3 + x_4 \leqslant 6.$

6.44*. Найти минимальное значение линейной формы

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i \geqslant i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

6.45*. Найти минимальное значение линейной формы

$$L(X) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

при ограничениях

$$x_i + x_{i+1} \geqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$x_1 + x_n \geqslant \alpha_n.$$

6.46*. Найти минимальное значение линейной формы

$$L(X) = x_1 + x_2 + x_3$$

при ограничениях

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \mu_1,$$
$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 \geqslant \mu_2,$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 \geqslant \mu_3.$$

6.47*. Найти минимальное значение линейной формы

$$L(X) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3$$

при ограничениях

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \mu_1,$$
$$x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \geqslant \mu_2,$$
$$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \geqslant \mu_3.$$

6.48*. Найти минимальное значение линейной формы

$$L(X) = (\lambda^2 + 3\lambda)x_1 + (\lambda^3 + 3\lambda^2)x_2 + (\lambda^4 + 3\lambda^3)x_3$$

при ограничениях

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \mu_1,$$
$$x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \geqslant \mu_2,$$
$$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \geqslant \mu_3.$$

6.49. Привести пример, показывающий, что обе задачи двойственной пары могут обладать планами.

6.50. Привести пример, показывающий, что одна из задач двойственной пары может обладать планами, а другая — быть противоречивой, т. е. не обладать планами.

6.51. Привести пример, показывающий, что обе задачи двойственной пары могут не обладать планами.

6.52. Доказать, что не существует пары двойственных задач, линейные формы которых не ограничены на множестве соответствующих планов.

6.53*. Доказать, что если задача линейного программирования разрешима, то изменение вектора ограничений B не может привести к неограниченности линейной формы $L(X)$ на множестве планов.

6.54. Доказать, что задача линейного программирования

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

разрешима, если все $b_i \geqslant 0$ и система условий двойственной к ней задачи непротиворечива.

6.55. Используя первую теорему двойственности, доказать, что задача линейного программирования

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

разрешима, если $b_i \geqslant 0$, $a_{ij} > 0$ ($i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$).

6.56*. Доказать, что задача линейного программирования

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

разрешима, если все $b_i \geqslant 0$ и при некотором i имеет место $a_{ij} > 0$ для всех $j=1, 2, \ldots, n$.

6.57. Сохранится ли утверждение предыдущей задачи, если условие $a_{ij} > 0$ заменить более слабым: $a_{ij} \geqslant 0$ при некотором i и всех $j=1, 2, \ldots, n$?

6.58. Используя первую теорему двойственности, доказать, что задача линейного программирования

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

неразрешима, если все $b_i < 0$ и существует такое i, что $a_{ij} > 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n$.

6.59*. Доказать, что задача линейного программирования

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

разрешима, если $b_i \geqslant 0$, $a_{ij} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$) и для любого j имеется хотя бы одно положительное значение a_{ij}.

6.60. Существует ли пара двойственных задач, для которых множества M и $\tilde{M}$ не ограничены? (Здесь через M и $\tilde{M}$ обозначены выпуклые многогранные множества, порожденные ограничениями исходной и двойственной задач соответственно.)

6.61. Существует ли пара двойственных задач, для которых множество M ограничено, а множество $\tilde{M}$ не ограничено? (M и $\tilde{M}$ определяются так же, как в задаче 6.60.)

6.62. Привести пример пары двойственных задач, множества планов которых M и $\tilde{M}$ ограничены (см. задачу 6.60).

6.63.** Доказать, что не существует пары двойственных задач с ограниченными множествами M и $\tilde{M}$ (см. задачу 6.60), если в условиях, определяющих одно из множеств M и $\tilde{M}$, имеется хотя бы одно нежесткое ограничение.

6.64. Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$\left.\begin{aligned} &L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \\ &x_j \geqslant 0, \\ &i = 1, 2, \ldots, m, \\ &j = 1, 2, \ldots, n; \end{aligned}\right\} (\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} &L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \\ &i = 1, 2, \ldots, m, \\ &x_j \geqslant 0. \end{aligned}\right\} (\beta)$$

Доказать, что если задача (α) неразрешима, а задача (β) разрешима, то система

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

разрешима, но не имеет неотрицательных решений.

6.65. Доказать утверждение задачи 5.184, используя первую теорему двойственности.

6.66.** Доказать, что система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{α}$$

не имеет неотрицательных решений тогда и только тогда, когда совместна система

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \\ &\sum_{i=1}^{m} b_i y_i > 0. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

6.67.** Доказать, что система линейных неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{α}$$

совместна тогда и только тогда, когда для любого неотрицательного решения системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{β}$$

выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant 0.$$

6.68*. Рассмотрим совместную систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{α}$$

Доказать, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b$$

является следствием системы (α) тогда и только тогда, когда совместна система

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \\ &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = b. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

6.69*. Рассмотрим совместную систему неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{α}$$

Доказать, что неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \leqslant b$$

является следствием системы (α) тогда и только тогда, когда совместна система

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \\ &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant b. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

6.70*. Доказать, что для задачи линейного программирования

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

функция V_0 (см. задачу 4.136) непрерывно зависит от B.

6.71*. Доказать, что решение задачи линейного программирования, заданной в произвольной форме записи (6.1) — (6.3), можно свести к нахождению частного решения некоторой системы уравнений и неравенств.

§ 3. Вторая теорема двойственности. Критерий оптимальности

Рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования (6.1) — (6.3) и (6.4) — (6.6). Следующие определения относятся только к ограничениям-неравенствам, входящим в условия этих задач.

Определение 6.2. *Условие с номером j системы* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j$ ($j=1, 2, \ldots, n_1$) *называется двойственным по отношению к условию* $x_j \geqslant 0$ (*условия этой двойственной пары называются столбцовыми*).

Определение 6.3. *Условие с номером i системы* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ ($i=1, 2, \ldots, m_1$) *называется двойственным по отношению к условию* $y_i \geqslant 0$ (*условия этой двойственной пары называются строчными*).

Определение 6.4. *Условие с номером $j=1, 2, \ldots, n_1$ системы* (6.3) (*системы* (6.5)) *называется закрепленным, если для любого оптимального*

плана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ $(\bar{Y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m))$ *задачи* (6.1)—(6.3) (*задачи* (6.4) — (6.6)) *выполняется равенство*

$$\bar{x}_j=0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i=c_j\right).$$

Определение 6.5. *Условие с номером* $j=1, 2, \ldots, n_1$ *системы* (6.3) (*системы* (6.5)) *называется свободным, если хотя бы для одного оптимального плана* $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ $(\bar{Y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m))$ *задачи* (6.1) — (6.3) (*задачи* (6.4) — (6.6)) *справедливо строгое неравенство*

$$\bar{x}_j>0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i>c_j\right).$$

Теорема 6.2. (вторая теорема двойственности). *Если разрешимы двойственные задачи* (6.1) — (6.3) *и* (6.4) — (6.6), *то в каждой паре их двойственных условий* (*столбцовых или строчных*) *одно условие свободное, а другое закрепленное.*

Определение 6.6. *Величины* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *называются разрешающими множителями задачи* (6.1) — (6.3), *а вектор* $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — *разрешающим вектором, если:*

1) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n;$

2) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j, \quad j=n_1+1, n_2+2, \ldots, n;$

3) $\lambda_i \geqslant 0, \ i=1, 2, \ldots, m_1, \ m_1 \leqslant m;$

4) *для некоторого плана* $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ *задачи* (6.1) — (6.3) *справедливы соотношения:*

а) $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i=c_j \text{ при } \bar{x}_j>0; \tag{6.7}$$

б) $$\lambda_i=0 \text{ при } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j<b_i. \tag{6.8}$$

Теорема 6.3. *Совокупность разрешающих векторов* $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *задачи* (6.1)— (6.3) *совпадает с множеством оптимальных планов задачи* (6.4) — (6.6).

Теорема 6.4 (критерий оптимальности). *Для оптимальности плана* $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ *задачи* (6.1) — (6.3) *необходимо и достаточно существование разрешающего вектора* $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, *связанного с этим планом условиями* (6.7)—(6.8).

6.72. Сформулировать определение свободного (закрепленного) ограничения для строчных условий двойственной пары.

6.73. Обосновать следующее правило для определения того, является ли условие $x_j \geqslant 0$ разрешимой задачи (6.1) — (6.3) закрепленным:

1) Решается задача (6.1) — (6.3), в результате чего определяется некоторый оптимальный план $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Если $\bar{x}_j>0$, то условие $x_j \geqslant 0$ свободное.

2) Если $\bar{x}_j = 0$, то решается задача

$$x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j.$$

Если $\max x_j > 0$, то условие $x_j \geqslant 0$ свободное. В противном случае это условие закрепленное.

Используя метод, описанный в задаче 6.73, определить, будет ли в задачах **6.74—6.79** условие $x_1 \geqslant 0$ свободным или закрепленным.

6.74. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 6,$
$x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 14,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$

6.75. $x_1 - x_2 - x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 + 4x_3 = -1,$
$x_1 + 5x_2 - 14x_3 = 5,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$

6.76. $x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 10x_4 \to \max,$
$7x_1 + 26x_2 - x_3 + 17x_4 = 5,$
$x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 12,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

6.77. $x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,$
$x_1 - x_2 + 2x_4 = -1,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

6.78. $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3a,$
$3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 = 2a,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

6.79. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + (a + b)\, x_3 = 2,$
$x_1 - x_2 + (a - b)\, x_3 = 0,$
$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$

6.80. Рассмотрим двойственную пару условий (столбцовых) задач (6.1)—(6.3) и (6.4)—(6.6):

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j.$$

Можно ли утверждать, что для любых оптимальных планов $\bar{X}$, $\bar{Y}$ эти условия не выполняются как равенства одновременно?

6.81.** Доказать, что однородная система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{α}$$

имеет положительное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, в том и только в том случае, если не имеет решения система неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \gneqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{β}$$

$(Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \gneqq 0$, если: а) $Z \geqslant 0$; б) $Z \neq 0$.)

6.82*. Доказать, что однородная система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{α}$$

имеет решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \gneqq 0$ тогда и только тогда, когда не имеет решений система

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{β}$$

6.83*. Доказать, что система линейных однородных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{α}$$

имеет решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \gneqq 0$ в том и только том случае, если не имеет решений система

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > 0, \quad & j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i \geqslant 0, \quad & i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

6.84 *. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Обозначим через $\bar{M}$ совокупность оптимальных планов этой задачи (задача (α) предполагается разрешимой). Рассмотрим также задачу ($\tilde{\alpha}$),

двойственную по отношению к (α):

$$\left.\begin{aligned} L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

Назовем вектор $A_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ свободным, если j-е условие системы $x_j \geqslant 0$ свободно.

Доказать, что размерность ρ множества M определяется формулой $\rho=m-r$, где r — ранг системы свободных векторов условий (предполагается, что ранг матрицы $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ равен m).

6.85 *. Доказать, что множество решений $\overline{M}$ разрешимой задачи

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant c_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

состоит из одной точки (т. е. задача имеет единственный оптимальный план) тогда и только тогда, когда среди свободных векторов (см. предыдущую задачу) имеется m линейно независимых.

6.86. Обобщить утверждение задачи 6.84, сформулировав его для задачи линейного программирования в произвольной форме записи (6.1) — (6.3).

6.87. Показать, что если хотя бы один оптимальный опорный план задачи ($\tilde{\alpha}$) (см. задачу 6.84) обладает свойством невырожденности, то задача (α) имеет единственное решение.

6.88. Показать, что условие, сформулированное в предыдущей задаче, не является необходимым.

6.89. Доказать необходимость условия, сформулированного в задаче 6.87, в случае, когда ($\tilde{\alpha}$) обладает единственным решением.

6.90. Сформулировать определение разрешающего вектора $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ для задачи линейного программирования, заданной в симметричной форме записи

$$\left.\begin{aligned} L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \\ x_j \geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

6.91. Сформулировать определение разрешающего вектора $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ для задачи линейного программирования, заданной в канонической форме записи

$$\left.\begin{aligned} L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

6.92. Сформулировать критерий оптимальности для задач линейного программирования, заданных в симметричной форме записи (см. задачу 6.90).

6.93. Сформулировать критерий оптимальности для задач линейного программирования, заданных в канонической форме записи (см. задачу 6.91).

6.94. Доказать, что если вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ является разрешающим для некоторого оптимального плана $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ задачи (6.1)—(6.3), то он является разрешающим и для любого другого оптимального плана этой задачи.

6.95 *. Доказать, что если в задаче линейного программирования (6.1)—(6.3) два вектора условий равны: $A_j = A_k$ $(1 \leqslant j, k \leqslant n_1, j \neq k)$ — и $c_j < c_k$, то для оптимальности плана $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ необходимо, чтобы $\bar{x}_j = 0$.

6.96 *. Пусть в задаче линейного программирования (6.1)—(6.3) вектор условий A_k $(k \leqslant n_1)$ является линейной комбинацией векторов условий $A_j (1 \leqslant j \leqslant n_1)$: $A_k = \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n_1} \alpha_s A_s$ — и при этом $c_k > \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n_1} \alpha_s c_s$.

Доказать, что для оптимальности плана $\overline{X}$ необходимо условие $\bar{x}_s \operatorname{sgn} \alpha_s = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n_1$, $s \neq k$.

6.97. Пусть исследуется на оптимальность опорный план $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ задачи линейного программирования, заданной в канонической форме записи

$$\begin{aligned} L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

Доказать: 1) если план $\overline{X}$ не вырожден, то исследование сводится к нахождению решения одной системы m линейных уравнений с n неизвестными и проверке, удовлетворяет ли это решение системе $n-m$ неравенств; 2) если план $\overline{X}$ вырожден, то нужно решить C_{n-m+t}^{t} (t — степень вырожденности плана $\overline{X}$) систем t линейных уравнений с t переменными и проверить, удовлетворяет ли хотя бы одно полученное решение системе $n-m$ неравенств.

В задачах **6.98 — 6.107** исследовать на оптимальность план $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, приведенный в условиях.

6.98. $x_1+8x_2+10x_3\to\max,$
$x_1+x_2+4x_3=2,$
$x_1-x_2+2x_3=0,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3,$
$\overline{X}=(1, 1, 0).$

6.99. $x_1+4x_2+x_3\to\max,$
$4x_1+11x_2+3x_3=7,$
$x_1+x_2-x_3=0,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3,$
$\overline{X}=(1, 0, 1).$

6.100. $x_1+2x_2+x_3+5x_4+7x_5-x_6-2x_7+x_8\to\max,$
$x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5-x_6+x_7+7x_8=3,$
$x_1-x_2-x_3+2x_5+x_6-x_7+x_8=1,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, 8,$
$\overline{X}=(2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$

6.101. $x_1+4x_2+3x_3+x_4+9x_5\to\max,$
$8x_1+7x_2+6x_3+28x_4+13x_5=28,$
$4x_2+3x_3+11x_4+10x_5=11,$
$3x_2-x_3+5x_4+27x_5=5,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, 5,$
$\overline{X}=(1, 2, 1, 0, 0).$

6.102. $2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5-x_6-2x_7-3x_8\to\max,$
$2x_1+x_2+x_3+3x_4+2x_5+3x_6+4x_7+2x_8=15,$
$x_1-2x_2+x_3+2x_4-x_5-x_6+x_8=0,$
$x_1+x_2+3x_3+4x_4+4x_5+2x_6+5x_7+x_8=22,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, 8,$
$\overline{X}=(3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, 0).$

6.103. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9\to\max,$
$2x_1+x_2+3x_3-x_4+3x_5+4x_6+2x_7+x_8=5,$
$7x_1-8x_2+x_3-x_4-x_5-7x_6+6x_8-9x_9=-1,$
$7x_3+x_4+7x_6+8x_7+x_8+x_9=8,$
$x_3-10x_4+x_6-9x_7-10x_8-10x_9=-9,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, 9,$
$\overline{X}=(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$

6.104. $x_1+x_2+x_3\to\max,$
$x_1+17x_2-12x_3=1,$
$x_1-x_2+6x_3=1,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3,$
$\overline{X}=(1, 0, 0).$

6.105. $x_1-x_2+x_3+2x_4\to\max,$
$x_1+x_2+x_3+x_4=1,$
$x_1+2x_2-x_3+x_4=1,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3, 4,$
$\overline{X}=(1, 0, 0, 0).$

6.106. $x_1+x_2+2x_3+3x_4-x_5+x_6+x_7+7x_8\to\max,$
$x_1+x_2-x_3+8x_4+10x_5-x_6-x_7-x_8=0,$
$x_1-x_2+x_3-7x_4+11x_5+2x_6-x_7+x_8=0,$
$x_1+x_2+x_3-15x_4+12x_5-x_6-x_7+3x_8=2,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8,$
$\bar{X}=(0,1,1,0,0,0,0,0).$

6.107. $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4\to\max,$
$x_1+x_2+(a+b)x_3+(a-b)x_4+(a+b)x_5+(a-b)x_6=2,$
$x_1+2x_2+(a+2b)x_3+(a-2b)x_4+(2a+b)x_5+(2a-b)x_6=3,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6,$
$\bar{X}=(1,1,0,0,0,0).$

В номерах **6.108—6.111** исследовать на оптимальность план $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ задач линейного программирования в симметричной форме записи.

6.108. $x_1+2x_2+3x_3\to\max,$
$x_1-x_2-x_3\leqslant 1,$
$x_1+x_2-x_3\leqslant 1,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,$
$\bar{X}=(1,1,1).$

6.109. $2x_1+3x_2-7x_3+14x_4\to\max,$
$x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 2,$
$x_1+2x_2-4x_3+7x_4\leqslant -2,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4,$
$\bar{X}=(0,1,1,0).$

6.110. $2x_1-8x_2+2x_4+15x_5-10x_6\to\max,$
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3x_6\leqslant 4,$
$x_1-4x_2+x_4+10x_5-x_6\leqslant 5,$
$x_1+3x_2+7x_3-x_4+15x_5-7x_6\leqslant 2,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6,$
$\bar{X}=(1,1,0,2,0,0).$

6.111. $5x_1+4x_2+3x_3+11x_4+10x_5-2x_6-3x_7-6x_8\to\max,$
$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5-x_6+x_7-x_8\leqslant 14,$
$2x_1+3x_2+x_3+5x_4+6x_5-x_6-x_7-2x_8\leqslant 13,$
$3x_1+x_2+2x_3+6x_4+4x_5-x_6-2x_7-4x_8\leqslant 9,$
$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,8,$
$\bar{X}=(1,1,1,1,1,1,1,1).$

6.112. Исследовать на оптимальность план $\bar{X}=(1,1,1,0,0,0)$ задачи

$$(a+b+1)x_1+(a+b+1)x_2+(a+b+1)x_3+4x_4+x_5+cx_6\to\max,$$
$$x_1+ax_2+bx_3+2x_4+x_5+(a+b)x_6\leqslant a+b+1,$$
$$ax_1+bx_2+x_3+x_4-x_5+x_6\leqslant a+b+1,$$
$$bx_1+x_2+ax_3+x_4+x_5-x_6\leqslant a+b+1.$$

6.113. Исследовать на оптимальность план $\overline{X}=(1, 0, 1, -1)$ задачи

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4\to\max,\\
&x_1+x_2-x_3-x_4=1,\\
&x_1+2x_2-x_3+2x_4\leqslant 5,\\
&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

6.114. Исследовать на оптимальность план $\overline{X}=(0, 0, 1, 0, 1, -1)$ задачи

$$\begin{aligned}
&x_1-8x_2+x_3-x_4+x_5+x_6\to\max,\\
&x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6\leqslant 3,\\
&x_1+2x_2-3x_3+4x_4-5x_5+6x_6\leqslant 0,\\
&x_1+4x_2+x_3-x_4-x_5-x_6=1,\\
&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0.
\end{aligned}$$

6.115. При каких значениях параметров a, b и c план $\overline{X}=(0, 0, 1, -1, -1)$ задачи

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)x_1+ax_2+x_3+x_4+(a+b)x_5\to\max,\\
&x_1+bx_2+x_3+x_4+(a+b)x_5\leqslant -a-b,\\
&x_1+x_2-ax_3+x_4+(a-b)x_5\leqslant b-2a,\\
&ax_1-x_2-bx_3+x_4+x_5=-2-b,\\
&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

оптимален?

§ 4. Функция Лагранжа задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, заданную в симметричной форме записи

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max, \tag{6.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{6.10}$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{6.11}$$

Определение 6.7. *Функция*

$$F(X, Y)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}b_iy_i-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_jy_j, \tag{6.12}$$

определенная в области $X\geqslant 0$, $Y\geqslant 0$, *называется функцией Лагранжа задачи* (6.9)—(6.11). *В векторной записи функция Лагранжа имеет вид*

$$F(X, Y)=(C, X)+(Y, B-AX). \tag{6.12'}$$

Определение 6.8. *Пара векторов* $\{\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n), \overline{Y}=(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m)\}$ *называется седловой точкой функции* $F(X, Y)$, *если*:

1) $\overline{X}\geqslant 0$, $\overline{Y}\geqslant 0$;

2) $F(X, \overline{Y})\leqslant F(\overline{X}, \overline{Y})\leqslant F(\overline{X}, Y)$ *при всех* $X\geqslant 0$, $Y\geqslant 0$.

Теорема 6.5 (теорема Куна—Таккера для задачи линейного программирования). *Для того чтобы вектор $\overline{X}$ был решением задачи* (6.9)—(6.11), *необходимо и достаточно существование такого вектора $\overline{Y}$, при котором точка $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ является седловой точкой функции Лагранжа этой задачи.*

6.116. Доказать, что если $F(X, Y)$ — функция Лагранжа задачи (6.9)—(6.11), а $\Phi(Y, X)$ — функция Лагранжа задачи, двойственной к (6.9)—(6.11), то при всех $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$F(X, Y) + \Phi(Y, X) = 0.$$

6.117 *. Доказать, что если $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ — седловая точка функции $F(X, Y)$ задачи (6.9)—(6.11), то точка $\{\overline{Y}, \overline{X}\}$ — седловая точка функции $\Phi(Y, X)$ (см. задачу 6.116).

6.118. Доказать, что седловую точку $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ функции Лагранжа задачи (6.9)—(6.11) можно определить следующим образом:

$$F(\overline{X}, \overline{Y}) = \min_{Y \geqslant 0} \max_{X \geqslant 0} F(X, Y)$$

или

$$F(\overline{X}, \overline{Y}) = \max_{X \geqslant 0} \min_{Y \geqslant 0} F(X, Y).$$

6.119*. Пусть $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ — седловая точка функции Лагранжа задачи (6.9)—(6.11). Как следует из утверждения теоремы 6.5, точка $\overline{X}$ — решение этой задачи. Показать, что точка $\overline{Y}$ — решение задачи, двойственной к (6.9)—(6.11).

6.120. Доказать, что если $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ — седловая точка функции Лагранжа задачи (6.9)—(6.11), то справедливо соотношение

$$(\overline{X}, \overline{Y}A - C) = (\overline{Y}, B - A\overline{X}) = 0.$$

6.121*. Доказать первую теорему двойственности 6.1, используя теорему 6.5.

6.122.** Пусть $\overline{X}$ — решение задачи (6.9)—(6.11), а $\overline{Y}$ — решение задачи, двойственной к ней. Доказать, что точка $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ — седловая точка функции Лагранжа задачи (6.9)—(6.11).

6.123*. Обобщить утверждение задачи 6.120, доказав, что если $\overline{X}$ — любое решение задачи (6.9)—(6.11), а $\overline{Y}$ — любое решение двойственной к ней задачи, то справедливо соотношение

$$(\overline{X}, \overline{Y}A - C) = (\overline{Y}, B - A\overline{X}) = 0.$$

6.124. Используя утверждение задачи 6.123, доказать, что если $\overline{X}$ — любое решение задачи (6.9)—(6.11), а $\overline{Y}$ — любое решение двой-

ственной к ней задачи, то из соотношения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j < b_i$ вытекает $\bar{y}_i = 0$, а из соотношения $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i > c_j$ вытекает $\bar{x}_j = 0$.

6.125*. Рассмотрим две двойственные пары задач линейного программирования:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X) = (C,\ X) &\to \max, \\ AX &\leqslant B, \\ X &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} L(X) = (C + \Delta C,\ X) &\to \max, \\ (A + \Delta A)X &\leqslant B + \Delta B, \\ X &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y) = (B,\ Y) &\to \min, \\ YA &\geqslant C, \\ Y &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \quad (\tilde{\alpha})$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y) = (B + \Delta B,\ Y) &\to \min, \\ Y(A + \Delta A) &\geqslant C + \Delta C, \\ Y &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (\tilde{\beta})$$

Пусть $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — решения задач (α) и ($\tilde{\alpha}$), а $\overline{\overline{X}}$, $\overline{\overline{Y}}$ — решения задач (β) и ($\tilde{\beta}$). Доказать справедливость соотношений:

1) $-(\Delta C,\ \Delta\overline{X}) + (\overline{\overline{Y}},\ \Delta A\,\Delta\overline{X}) + (\Delta\overline{Y},\ A\,\Delta\overline{X}) \leqslant 0$;

2) $-(\Delta B,\ \Delta\overline{Y}) + (\Delta\overline{Y},\ \Delta A\,\overline{\overline{X}}) + (\Delta\overline{Y},\ A\,\Delta\overline{X}) \geqslant 0$,

где $\Delta\overline{X} = \overline{\overline{X}} - \overline{X}$, а $\Delta\overline{Y} = \overline{\overline{Y}} - \overline{Y}$.

6.126*. Доказать, что если $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — два решения задачи (α) (см. задачу 6.125), а $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_2$ — два решения задачи ($\tilde{\alpha}$), то справедливо соотношение

$$(\Delta\overline{Y},\ A\,\Delta\overline{X}) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta\overline{X} = \overline{X}_2 - \overline{X}_1, \quad \text{а} \quad \Delta\overline{Y} = \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1.$$

6.127*. Пусть в задаче (α) (см. задачу 6.125) вектор C заменен на $C + \Delta C$, а ограничения остались прежними. Обозначим через $\overline{X} + \Delta\overline{X}$ оптимальный план полученной задачи ($\overline{X}$ — решение задачи (α)). Доказать справедливость соотношения $(\Delta C,\ \Delta\overline{X}) \geqslant 0$.

6.128*. Пусть в задаче (α) (см. задачу 6.125) вектор C заменен на вектор $C + \Delta C$, а вектор B — на $B + \Delta B$. Обозначим через $\overline{X} + \Delta\overline{X}$ оптимальный план полученной задачи ($\overline{X}$ — решение задачи (α)), а через $\overline{Y} + \Delta\overline{Y}$ — оптимальный план двойственной к ней задачи ($\overline{Y}$ — решение задачи ($\tilde{\alpha}$)). Доказать справедливость соотношения

$$(\Delta\overline{Y},\ \Delta B) \leqslant (\Delta\overline{X},\ \Delta C).$$

6.129*. Пусть в задаче (α) (см. задачу 6.125) матрица A заменена на $A + \Delta A$. Обозначим через $\overline{X} + \Delta\overline{X}$ решение полученной задачи,

а через $\bar{Y}+\Delta\bar{Y}$ — решение двойственной к ней задачи ($\bar{X}$, $\bar{Y}$ — решения задач (α) и ($\tilde{\alpha}$) соответственно). Доказать справедливость соотношения $(\bar{Y}, \Delta A\Delta\bar{X}) \leqslant (\bar{X}, \Delta\bar{Y}\Delta A)$.

6.130*. Рассмотрим две разрешимые задачи линейного программирования, которые отличаются лишь векторами ограничений:

$$\left.\begin{aligned} L(X)=(C, X)\to\max,\\ AX\leqslant B,\\ X\geqslant 0;\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)\qquad \left.\begin{aligned} L(X)=(C, X)\to\max,\\ AX\leqslant B+\Delta B,\\ X\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\quad(\beta)$$

Обозначим через V_0 и $V_0+\Delta V_0$ максимальные значения линейных форм задач (α) и (β) соответственно. Доказать, что $\Delta V_0 \leqslant (\bar{Y}, \Delta B)$, где $\bar{Y}$ — решение задачи, двойственной к (α).

6.131. Доказать, что $\Delta V_0 \geqslant (\tilde{Y}, \Delta B)$, где $\tilde{Y}$ — решение задачи, двойственной к (β) (здесь все обозначения имеют тот же смысл, что и в задаче 6.130).

6.132. Используя утверждения задач 6.130 и 6.131, доказать непрерывность функции $V_0 = V_0(B)$.

6.133*. Доказать, что функция $V_0 = V_0(B)$ (см. задачу 6.130) обладает левыми и правыми частными производными по b_i ($i=1, 2, \ldots, m$), для которых выполняются соотношения

$$\frac{\partial V_0^+}{\partial b_i} \leqslant \bar{y}_i \leqslant \frac{\partial V_0^-}{\partial b_i}.$$

Здесь через $\frac{\partial V_0^+}{\partial b_i}$ и $\frac{\partial V_0^-}{\partial b_i}$ обозначены правая и левая частные производные V_0 по b_i, а через $\bar{y}_i$ — k-я компонента любого оптимального плана задачи, двойственной к (α).

§ 5. Геометрическая интерпретация двойственности

6.134. Используя вторую геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования в канонической форме записи

$$\left.\begin{aligned} L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1, 2, \ldots, m,\\ x_j \geqslant 0,\ j=1, 2, \ldots, n\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

(см. задачи 4.67, 4.68), показать, что гиперплоскость $\Pi_Y \subset R^{m+1}$, определяемая уравнением

$$\sum_{i=1}^{m} y_i u_i - u_{m+1} = 0, \qquad (\beta)$$

где $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — план задачи, двойственной к (α), содержит конус M_U в одном из своих полупространств.

6.135. Рассмотрим произвольную гиперплоскость в пространстве R^{m+1} (не содержащую оси Ou_{m+1}), уравнение которой (β) (см. задачу 6.134). Доказать, что если конус M_U лежит в том же полупространстве, порождаемом этой гиперплоскостью, что и точка $A=(0, 0, 0, \ldots, 0, -1)$, то вектор $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — план задачи, двойственной к (α).

6.136. Рассмотрим прямую Q, уравнение которой

$$U=\tilde{B}+\lambda e_{m+1}, \qquad -\infty<\lambda<\infty,$$
$$\left(\tilde{B}=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0), \quad \text{а} \quad e_{m+1}=(0, 0, \ldots, 0, 1)\right),$$

и гиперплоскость Π_Y, порождаемую планом Y задачи, двойственной к (α) (см. задачу 6.134). Доказать, что значение $(m+1)$-й координаты точки пересечения прямой Q с гиперплоскостью Π_Y равно $\tilde{L}(\overline{Y})$, где $\overline{Y}$ — оптимальный план задачи, двойственной к (α) (задача (α) предполагается разрешимой).

6.137. Используя утверждения задач 6.134—6.136, показать, что геометрически задача, двойственная к (α), состоит в нахождении такой гиперплоскости, проходящей через начало координат и расположенной над конусом M_U, которая пересекает прямую Q в самой низкой точке в смысле оси Ou_{m+1}.

Используя геометрическую интерпретацию, решить задачи, двойственные к **6.138—6.146.**

6.138. $x_1+x_2+x_3-x_4-x_5 \to \max,$
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,$
$x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

6.139. $x_1-2x_2+x_3-2x_4+x_5 \to \max,$
$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=2,$
$x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

6.140. $x_1+3x_2-x_3+4x_4-5x_5+6x_6-x_7-x_8 \to \max,$
$x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6-x_7-x_8=1,$
$x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 8.$

6.141. $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6 \to \max,$
$x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5+7x_6=-1,$
$x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 6.$

6.142. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \to \max,$
$x_1+x_2+4x_3+4x_4+3x_5=3,$
$x_1-x_2-2x_3+2x_4+5x_5=1,$
$x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 5.$

6.143. $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - x_7 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = -1,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_7 = 20,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7.$

6.144. $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 + 6x_6 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2,$
$-x_2 - x_3 - 5x_5 - 4x_6 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6.$

6.145. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \to \max,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1,$
$x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 + x_7 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7.$

6.146. $x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 4x_5 - 5x_6 + 5x_7 = -1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7.$

ГЛАВА 7

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

§ 1. Теоретические основы метода последовательного уточнения оценок

Рассмотрим задачу линейного программирования, заданную в канонической форме записи

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{7.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.3}$$

и задачу, двойственную к ней:

$$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \tag{7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Пусть $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — опорный план задачи (7.4), (7.5).

Определение 7.1. *Базисом опорного плана задачи* (7.4), (7.5) *называется произвольная система m линейно независимых векторов условий $\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ задачи* (7.1)—(7.3), *для которых*

$$(Y, A_{s_i}) = c_{s_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Сокращенно базис опорного плана Y называют двойственным (сопряженным) базисом.

Свяжем с каждым сопряженным базисом $Б_Y = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которого удовлетворяют условиям (7.2) задачи (7.1)—(7.3). Для этого достаточно разложить вектор B по системе $Б_Y$.

Определение 7.2. *Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты x_{s_i} которого равны x_{i0} (здесь x_{i0} — коэффициенты разложения вектора B по системе $Б_Y = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$), а остальные компоненты равны нулю, называется псевдопланом задачи* (7.1)—(7.3).

Утверждение 7.1 (признак оптимальности псевдоплана). *Если среди базисных компонент псевдоплана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ нет отрицательных, т. е. $\bar{x}_{i0}\geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, то псевдоплан $\bar{X}$ — решение задачи* (7.1)—(7.3). *При этом план $\bar{Y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$, определяющий псевдоплан $\bar{X}$, является решением задачи* (7.4), (7.5).

Свяжем с каждым двойственным базисом $Б_{\bar{Y}}=\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ матрицу $\|x_{ij}\|_{m,n}$, элементы которой совпадают с коэффициентами разложения векторов условий A_j задачи по системе $Б_{\bar{Y}}$.

Утверждение 7.2 (достаточные условия несовместности системы ограничений задачи (7.1)—(7.3)). *Пусть среди базисных компонент псевдоплана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ имеются отрицательные. Если среди них найдется хотя бы одна отрицательная компонента $\bar{x}_{r0}<0$, для которой $x_{rj}\geqslant 0$, то линейная форма задачи* (7.4), (7.5) *не ограничена снизу на множестве ее планов, а значит, условия* (7.2), (7.3) *задачи* (7.1)—(7.3) *противоречивы.*

Предположим теперь, что план $\bar{Y}$ задачи (7.4), (7.5), определяющий псевдоплан $\bar{X}$, не вырожден.

Утверждение 7.3. *Если среди базисных компонент псевдоплана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ имеются отрицательные и для каждой компоненты $x_{i0}<0$ существует j, при котором $x_{ij}<0$, то можно перейти к новому плану $\bar{Y}_1$ задачи* (7.4), (7.5), *связанному с меньшим значением линейной формы* (7.4). *Для того чтобы получить новый двойственный базис $Б_{\bar{Y}_1}$, нужно исключить из базиса $Б_{\bar{Y}}$ вектор $A_{s_r}(x_{r_0}<0)$ и ввести вектор A_k, где k определяется из условия*

$$\theta_{\min}=\min_{x_{rj}}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}}\right)=-\frac{\Delta_k}{x_{rk}} \tag{7.6}$$

(Δ_j, $j=1, 2, \ldots, n$, определяются так же, как и в методе последовательного улучшения плана).

Пример 7.1. Определить и исследовать псевдоплан $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_6)$ задачи

$$\left.\begin{aligned}
L(X)=x_1+x_2+x_3+(a+1)x_4+ax_5+(a-1)x_6&\to\max,\\
x_1+2x_2-x_3+(a+1)x_4+2ax_5+(3-a)x_6&=b+1,\\
x_1-x_2+2x_3+(a+1)x_4+(3-a)x_5+2ax_6&=b+1,\\
x_1-x_2-2x_3+(a-3)x_4-(a+1)x_5-2ax_6&=b-3,\\
x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, 6,&
\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

порожденный опорным планом $\bar{Y}=(2/3,\ 7/12,\ -1/4)$ задачи, двойственной к (α).

Для того чтобы найти $\bar{X}$, запишем задачу $(\tilde{\alpha})$, двойственную к (α), и определим сопряженный базис $Б_{\bar{Y}}$. Задача $(\tilde{\alpha})$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{L}(Y)=(b+1)y_1+(b+1)y_2+(b-3)y_3&\to\min,\\
y_1+y_2+y_3&\geqslant 1,\\
2y_1-y_2-y_3&\geqslant 1,\\
-y_1+2y_2-2y_3&\geqslant 1,\\
(a+1)y_1+(a+1)y_2+(a-3)y_3&\geqslant a+1,\\
2ay_1+(3-a)y_2-(a+1)y_3&\geqslant a,\\
(3-a)y_1+2ay_2-2ay_3&\geqslant a-1.
\end{aligned}\right\}\quad(\tilde{\alpha})$$

Легко убедиться (проверить!), что план $\bar{Y}$ обращает в равенства первые три ограничения задачи ($\tilde{\alpha}$); остальные же ограничения этой задачи при подстановке в них составляющих плана $\bar{Y}$ обращаются в строгие неравенства. Следовательно, сопряженный базис $Б_{\bar{Y}}$ состоит из линейно независимых векторов A_1, A_2, A_3.

Базисные составляющие x_{10}, x_{20}, x_{30} псевдоплана $\bar{X}$ можно найти теперь из системы уравнений

$$\begin{aligned} x_{10}+2x_{20}-\ x_{30}&=b+1,\\ x_{10}-\ x_{20}+2x_{30}&=b+1,\\ x_{10}-\ x_{20}-2x_{30}&=b-3. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим $\bar{X}=(b, 1, 1, 0, 0, 0)$. Исследуем полученный псевдоплан $\bar{X}$:

1) если $b\geqslant 0$, то, как следует из утверждения 7.1, псевдоплан $\bar{X}$ — решение задачи (α);

2) если $b<0$, то результат исследования $\bar{X}$ зависит от значений параметров x_{ij}. Матрица $\|x_{ij}\|$ имеет вид

$$\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & a \end{Vmatrix}.$$

Возможны два случая:

а) если $a\geqslant 0$, то условия задачи (α) противоречивы;

б) если $a<0$, то можно перейти к новому опорному плану $\bar{Y}_1$ с базисом $Б_{\bar{Y}_1}$, связанным с меньшим значением линейной формы задачи ($\tilde{\alpha}$). Для того чтобы получить базис $Б_{\bar{Y}_1}$, нужно (как следует из утверждения 7.3) из $Б_{\bar{Y}}$ вывести вектор A_1 ($x_{10}<0$) и ввести вектор A_4 (в нашем случае отношение θ определено лишь на одном индексе $j=4$).

7.1. Пусть среди векторов условий A_j ($j=1, 2, \ldots, n$) задачи (7.1)—(7.3) выбрано m линейно независимых A_{s_1}, A_{s_2}, $\ldots$, A_{s_m} и вектор $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ разложен по системе $\{A_{s_i}\}_{i=1}^{m}$. Обозначим коэффициенты разложения через x_{i0} и рассмотрим вектор $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где

$$\bar{x}_j=\begin{cases} x_{i0} & \text{при } j=s_i,\ i=1, 2, \ldots, m,\\ 0 & \text{при } j\neq s_i. \end{cases}$$

Можно ли утверждать, что $\bar{X}$ — псевдоплан задачи (7.1)—(7.3)?

7.2*. Доказать, что вектор $\bar{X}$, удовлетворяющий условиям предыдущей задачи, является псевдопланом задачи (7.1)—(7.3) тогда и только тогда, когда $\Delta_j\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$. (Здесь $\Delta_j=\sum\limits_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}-c_j$, а x_{ij} определяется из системы уравнений

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} A_{s_i}x_{ij}, \qquad j=1, 2, \ldots, n.)$$

7.3*. Доказать, что вектор $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ $A\bar{X}=B$ является псевдопланом задачи (7.1)—(7.3) тогда и только тогда, когда выполняются условия:

а) ненулевым составляющим x_{s_i} $(i=1, 2, \ldots, k,\ k\leqslant m)$ соответствуют линейно независимые векторы $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_k}$ условий задачи;

б) существует система векторов $\{A_{s_i}\}_{i=1}^{m}$, содержащая систему $\{A_{s_i}\}_{i=1}^{k}$, для которой параметры $\Delta_j\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

7.4. Рассмотрим вектор $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, определенный в задаче 7.1. Показать, что можно так выбрать коэффициенты c_j линейной формы, что $\bar{X}$ будет псевдопланом задачи (7.1)—(7.3).

В **7.5—7.10** определить, является ли вектор $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ псевдопланом задач, приведенных в условиях.

7.5.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3\to\max,\\
&x_1-7x_2+6x_3=8,\\
&8x_1+x_2-7x_3=7,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,\\
&\bar{X}=(1, -1, 0).
\end{aligned}$$

7.6.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2-x_3\to\max,\\
&7x_1+8x_2+15x_3=1,\\
&x_1-x_2=-2,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,\\
&\bar{X}=(-1, 1, 0).
\end{aligned}$$

7.7.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3-x_4-5x_5-9x_6\to\max,\\
&7x_1+29x_2+11x_3+3x_4-40x_5+33x_6=-11,\\
&x_1-3x_2-2x_3+4x_4+5x_5-6x_6=2,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 6,\\
&\bar{X}=(0, 0, -1, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

7.8.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+ax_7\to\max,\\
&x_2+x_5+x_6-x_7=-1,\\
&x_1+2x_4+x_6=-1,\\
&x_3+x_4+x_5+x_6=1,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 7,\\
&\bar{X}=(-1, -1, 1, 0, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

7.9.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+fx_3+gx_4\to\max,\\
&ax_1+bx_2+(a+b)x_3+(2a-b)x_4=(l-1)(a+b),\\
&cx_1+dx_2+(c+d)x_3+(2c-d)x_4=(l-1)(c+d),\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3, 4,\\
&\bar{X}=(-1, -1, l, 0).
\end{aligned}$$

7.10.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+bx_4+(2+a)x_5+cx_6+cx_7\to\max,\\
&x_1+x_2+2x_4+x_5+x_6-2x_7=3a+1,\\
&x_2+x_3+x_4-x_5-2x_7=a,\\
&x_1+x_3-x_6-2x_7=a-1,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 7,\\
&\bar{X}=(a, 1, -1, a, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

7.11. Определить максимальное значение $a+b+c+d$, при котором вектор $\overline{X}=(-1,\ -1,\ 1,\ 0,\ d,\ 0)$ является псевдопланом задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3-cx_4+(a+2b+c)\,x_5+ax_6\to\max,\\
&x_1+ax_4+x_5+x_6=d-1,\\
&x_1+x_2+(a+b)\,x_4+2x_5+(1-c)\,x_6=2d-2,\\
&x_1+x_2+x_3+(a+b+c)\,x_4+3x_5-cx_6=3d-1,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6.
\end{aligned}$$

7.12. Определить минимальное значение $a-b$, при котором вектор $\overline{X}=(-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ является псевдопланом задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&x_1-x_2+x_3-x_4+2bx_5+2ax_6-(a-b)\,x_7\to\max,\\
&x_1+x_2+2x_3+3x_4+(2a+1)\,x_5+(b+1)\,x_6+4x_7=5,\\
&2x_1-x_2+3x_3-x_4+(3a+2)\,x_5+(2b-1)\,x_6+x_7=-1,\\
&7x_3+x_4+7ax_5+7x_7=8,\\
&x_3-x_4+x_5+x_7=0,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 7.
\end{aligned}$$

7.13. Существуют ли задачи линейного программирования вида (7.1)—(7.3), для которых:

а) множество планов M и множество псевдопланов $\tilde{M}$ непусты?

б) множество M пусто, а $\tilde{M}$ непусто?

в) множество M непусто, а $\tilde{M}$ пусто?

г) оба множества M и $\tilde{M}$ пусты?

7.14. Доказать, что задача (7.4), (7.5), двойственная по отношению к задаче (7.1)—(7.3), не вырождена тогда и только тогда, когда $\Delta_j>0$ ($j\neq s_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) для любого псевдоплана $\overline{X}$ исходной задачи.

7.15. Доказать, что значение линейной формы $L(X)$ на псевдоплане $\overline{X}$ совпадает со значением линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на плане $\overline{Y}$, порождающем этот псевдоплан.

7.16. Доказать, что при всех X, удовлетворяющих условиям (7.2), (7.3) задачи (7.1)—(7.3), справедливо соотношение $L(X)\leqslant L(\overline{X})$, где $\overline{X}$ — произвольный псевдоплан этой задачи.

7.17*. Доказать, что задача (7.1)—(7.3) разрешима тогда и только тогда, когда множество планов этой задачи M и множество псевдопланов $\tilde{M}$ непусты.

7.18. Из определения 7.2 псевдоплана $\overline{X}=(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_n)$ следует, что число его компонент, отличных от нуля, не больше m. Привести примеры задач вида (7.1)—(7.3), для которых это число

а) равно m, б) меньше m.

7.19. Показать, что количество отличных от нуля базисных компонент псевдоплана $\bar{X}$ не связано с вырожденностью задачи, точнее: а) невырожденная задача может обладать псевдопланом $\bar{X}$ с числом базисных компонент, отличных от нуля, меньшим m; б) для вырожденной задачи тоже возможен такой случай; в) невырожденная задача может обладать псевдопланом $\bar{X}$ с числом базисных компонент, отличных от нуля, равным m.

7.20. Доказать, что число псевдопланов задачи вида (7.1)—(7.3) можно оценить величиной C_n^m.

7.21. Привести пример задачи, для которой достигается оценка, приведенная в задаче 7.20.

7.22. Пусть при исследовании псевдоплана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ оказалось, что для всех $x_{i0}<0$ существуют j, для которых $x_{ij}<0$. Предположим, что план $\bar{Y}$, определяющий псевдоплан $\bar{X}$, не вырожден. Определить, чему равно значение линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на плане $Y(\theta)$, где θ — параметр элементарного преобразования плана $\bar{Y}$, удовлетворяющий условию $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{\min}$.

В задачах **7.23—7.33** исследовать псевдоплан $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, точнее, определить, какой из случаев имеет место:

1) псевдоплан $\bar{X}$ — решение задачи;

2) система условий задачи противоречива;

3) псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить, т. е. преобразовать опорный план $\bar{Y}$, порождающий $\bar{X}$, в опорный план $\bar{\bar{Y}}$, связанный с меньшим значением линейной формы $\tilde{L}(Y)$ двойственной задачи.

7.23.
$$\begin{aligned} &x_1+8x_2+x_3 \to \max,\\ &x_1-x_2-x_3=2,\\ &x_1+4x_2+9x_3=-3,\\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,2,3,\\ &\bar{X}=(1,-1,0). \end{aligned}$$

7.24.
$$\begin{aligned} &x_1-3x_2+x_3 \to \max,\\ &x_1+4x_2-5x_3=2,\\ &x_1+5x_2-6x_3=3,\\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,2,3,\\ &\bar{X}=(-2,1,0). \end{aligned}$$

7.25.
$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3-x_4-2x_5-3x_6 \to \max,\\ &x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6=-3,\\ &x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5-3x_6=1,\\ &-x_1-x_2-x_3-4x_4+x_5+x_6=1,\\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,6,\\ &\bar{X}=(-1,1,-1,0,0,0). \end{aligned}$$

7.26.
$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+4x_4-6x_5+2x_6-3x_7-x_8 \to \max,\\ &x_1+x_2+3x_3+12x_4-12x_5+5x_6-3x_7+x_8=-5,\\ &x_2-3x_3+7x_4-7x_5-2x_6+2x_7=2,\\ &x_3+3x_4-3x_5+x_6-x_7=-1,\\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,8,\\ &\bar{X}=(-1,-1,-1,0,0,0,0,0). \end{aligned}$$

7.27. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 + x_7 &= 0,\\
x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 - x_6 - x_7 &= -2,\\
x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 &= 8,\\
-x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 &= -5,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7,&\\
\overline{X} = (-1, 1, 2, 3, 0, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.28. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - 10x_8 \to \max,$

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 6x_6 + 3x_7 \qquad &= 2,\\
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 7x_6 + 2x_7 - x_8 &= 3,\\
x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 + 2x_7 - x_8 &= 4,\\
x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 + 9x_6 + 2x_7 - 5x_8 &= -3,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 + 10x_6 + 7x_7 - 6x_8 &= -4,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 8,&\\
\overline{X} = (1, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.29. $x_1 + 2x_2 + (a + 2b - 1)x_3 + (2d - c - 1)x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 + 11x_2 + (a - 11b)x_3 + (c - 11d)x_4 &= 10,\\
8x_1 - x_2 + (8a - b)x_3 - (8c + d)x_4 &= -7,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,&\\
\overline{X} = (-1, -1, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.30. $2x_1 + x_2 + (a + 1)x_3 + bx_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + (a - b)x_3 + (1 - 3b)x_4 - 2x_5 &= c - 3,\\
x_1 + x_2 + (a + 2)x_3 + (1 + b)x_4 + 2x_5 &= c + 1,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,&\\
\overline{X} = (c, 1, 0, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.31. $x_1 + x_2 + ax_4 + (b - 1)x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + (a + 1)x_4 + bx_5 &= a + b,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + (2a + 1)x_4 + bx_5 &= 2a + b,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5,&\\
\overline{X} = (a, b, 0, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.32. $x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 + (4b - 3)x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 + (2 + a)x_5 + abx_6 &= ac,\\
x_1 + x_2 + ax_3 + (2 - a)x_4 + (2 + a)x_5 + (a + b - 1)x_6 &= c,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + bx_6 &= c,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6,\ a \neq 1,&\\
\overline{X} = (0, c, 0, 0, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.33. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + (a + 1)x_5 + bx_6 + (c - 5)x_7 \to \max,$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + (a + 2)x_5 + (b + 2)x_6 - x_7 &= -3,\\
x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + (b + 3)x_6 + (c - 1)x_7 &= -c - 2,\\
x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + (c - 1)x_7 &= -c - 1,\\
x_4 + x_6 + cx_7 &= -c,\\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7,&\\
\overline{X} = (-1, -1, -1, -c, 0, 0, 0).&
\end{aligned}$$

7.34. Доказать, что для того, чтобы псевдоплан $\bar{X}=(-1, -1, -1, 0, 0, 0)$ задачи

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+(2a+2c)x_5+(b+c)x_6\to\max,\\
&x_1+x_2-x_3+2x_4+(2a-2c-1)x_5+(2-b-c)x_6=-1,\\
&x_1-x_2+2cx_5=0,\\
&x_2+x_3+x_4+(a-2c+1)x_5+(b+c+1)x_6=-2,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 6,
\end{aligned}$$

можно было улучшить, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$2a+b-c<0.$$

7.35. Рассмотрим псевдоплан $\bar{X}=(1, 1, a, b, 0, 0)$ задачи

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+(4a-1)x_5+(2b-1)x_6\to\max,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+4ax_5+2bx_6=2+a+b,\\
&x_1-x_2-x_3+x_4-2bx_5+2ax_6=b-a,\\
&x_3+x_4+2ax_5+(b-a)x_6=a+b,\\
&x_3-x_4+4bx_5-(a+b)x_6=a-b,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, 6.
\end{aligned}$$

Используя геометрическую интерпретацию систем уравнений и неравенств, изобразить на плоскости aOb области изменения параметров a и b, соответствующие случаям:

1) псевдоплан $\bar{X}$ — решение задачи;

2) система условий задачи противоречива;

3) псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить.

7.36. Пусть $\bar{Y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ — оптимальный план задачи (7.4), (7.5), а $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ — соответствующий ему псевдоплан задачи (7.1) — (7.3). Можно ли утверждать, что $\bar{X}$ — решение этой задачи?

7.37. Доказать, что $\bar{X}$ — решение задачи (7.1) — (7.3) в случае, когда оптимальный план $\bar{Y}$ не вырожден (см. задачу 7.36).

§ 2. Алгоритм метода последовательного уточнения оценок

Для решения задачи линейного программирования методом последовательного уточнения оценок на каждой итерации необходимо знать следующие параметры:

1) базисные компоненты $\overset{0}{x}_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ псевдоплана $\bar{X}^0$;

2) компоненты $\overset{0}{x}_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m,\ \ j=1, 2, \ldots, n)$ разложения векторов условий A_j по векторам базиса $\{A_{s_i}\}_{i=1}^{m}$ псевдоплана $\bar{X}$;

3) значения оценок $\Delta_j=\overset{0}{x}_{m+1,j}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$;

4) значение линейной формы $L(\bar{X}^0)=\overset{0}{x}_{m+1,0}$.

Если в очередной итерации, параметры которой $\overset{0}{x}_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m+1,\ j=0, 1, 2, \ldots, n)$, из базиса выводится вектор A_{s_r} и вводится вектор A_k,

то параметры x_{ij}^1, соответствующие новому базису, вычисляются по формулам

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^0 - \dfrac{x_{rj}^0}{x_{rk}} x_{ik} & \text{при} \quad i \neq r, \\ \dfrac{x_{rj}^0}{x_{rk}} & \text{при} \quad i = r. \end{cases} \tag{7.7}$$

Опишем порядок действий при решении задачи методом последовательного уточнения оценок.

I. Решение задачи начинается с исследования псевдоплана $\bar{X}^0$ на оптимальность (предполагается известным исходный сопряженный базис или, что то же самое, исходный псевдоплан $\bar{X}^0$).

1. Если все базисные компоненты $x_{i0}^0 \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то $\bar{X}^0$ — оптимальный план задачи. Решение в этом случае заканчивается.

2. Если среди базисных компонент есть хотя бы одна отрицательная, $x_{i0}^0 < 0$, и при всех j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ $x_{i_0}^0 \geqslant 0$, то система условий задачи противоречива. Решение в этом случае также заканчивается.

II. Пусть каждой базисной компоненте $x_{ij}^0 < 0$ соответствует хотя бы одно отрицательное значение $x_{rj}^0 < 0$. В этом случае псевдоплан $\bar{X}^0$ можно улучшить. Для того чтобы получить базис нового псевдоплана $\bar{X}^1$, нужно вывести из базиса псевдоплана $\bar{X}^0$ вектор A_{s_r}. (В случае, если $x_{rj}^0 < 0$ при нескольких значениях r, то из базиса можно вывести любой из векторов условий A_{s_r}, например с $\min x_{rj}^0$.) Для определения вектора, который нужно ввести в базис, необходимо найти номер k, на котором достигается минимум отношения

$$\theta_{\min} = \min_{x_{rj}^0 < 0} \left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}^0} \right) = -\frac{\Delta_k}{x_{rk}^0}.$$

В базис вводится вектор A_k. После этого по формулам (7.7) определяются параметры следующей итерации и исследуется на оптимальность полученный псевдоплан $\bar{X}^1$.

В случае, если исходная задача не вырождена, за конечное число шагов определяется псевдоплан $\bar{X}$, являющийся ее решением.

Пример 7.2. Решить методом последовательного уточнения оценок задачу

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \max, \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ &x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 6x_4 = 9, \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

приняв в качестве начального псевдоплана вектор $\bar{X}^0 = (-1, -2, 0, 0)$ с базисом $Б = (A_1, A_2)$.

Параметры начальной итерации имеют вид

$$x_{10}^0 = -1, \quad x_{20}^0 = -2, \quad x_{30}^0 = L(\bar{X}^0) = -3;$$

$$\|x_{ij}^0\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \Delta_1^0 = \Delta_2^0 = 0, \quad \Delta_3^0 = 1, \quad \Delta_4^0 = 3.$$

Исследование псевдоплана $\bar{X}^0$ на оптимальность показывает, что $\bar{X}^0$ можно улучшить. Действительно,

$$\begin{aligned} &x_{10}^0 < 0 \quad \text{и} \quad x_{14}^0 < 0; \\ &x_{20}^0 < 0 \quad \text{и} \quad x_{23}^0 < 0. \end{aligned}$$

Из базиса $Б_{\bar{X}^0}$ нужно вывести вектор A_2 (так как $x^0_{20} < x^0_{10} < 0$). Для определения вектора, который должен заменить A_2 в очередном базисе, вычислим минимум отношения

$$\theta^{(0)}_{\min} = \min_{x^0_{2j} < 0} \left(-\frac{\Delta^0_j}{x^0_{2j}} \right).$$

Этот минимум достигается при $j = 3$. В очередной базис вводится вектор A_3 ($Б_{\bar{X}^1} = (A_1, A_3)$). Параметры следующей итерации определяются по рекуррентным формулам (7.7):

$$x^1_{10} = -2, \quad x^1_{20} = 1, \quad x^1_{30} = L(\bar{X}^1) = -4;$$

$$\|x^1_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{Vmatrix}, \quad \Delta^1_1 = \Delta^1_3 = 0, \quad \Delta^1_2 = \frac{1}{2}, \quad \Delta^1_4 = \frac{7}{2}.$$

Псевдоплан $\bar{X}^1 = (-2, 0, 1, 0)$ можно улучшить, если вывести из его базиса вектор A_1 ($x^1_{10} < 0$) и ввести в очередной базис вектор A_4:

$$\theta^{(1)}_{\min} = \min_{x^1_{1j} < 0} \left(-\frac{\Delta^1_j}{x^1_{1j}} \right) = -\frac{\Delta^1_4}{x^0_{14}}.$$

В базисе $Б_{\bar{X}^2} = (A_4, A_3)$ базисные компоненты псевдоплана $\bar{X}^2 = (0, 0, 3, 4)$ неотрицательны. Следовательно, $\bar{X}^2$ — решение задачи; при этом $L(\bar{X}^2) = -18$.

Правило выбора вектора, вводимого в очередной базис, гарантирующее от зацикливания.

В случае, когда задача (7.4), (7.5) вырождена, может возникнуть неоднозначность в выборе вектора A_k, который нужно ввести в базис очередного псевдоплана.

Действительно, минимум отношения

$$\theta^{(0)}_{\min} = \min_{x^0_{2j} < 0} \left(-\frac{\Delta^0_j}{x^0_{2j}} \right)$$

может достигаться сразу на нескольких индексах $k^0_1 < k^0_2 < \ldots < k^0_l$. Один из векторов $A_{k^0_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, l$) должен быть введен в очередной базис псевдоплана.

Будем называть в дальнейшем векторы условий $A_{k^0_i}$ подозрительными.

При использовании правила необходимо перенумеровать векторы условий задачи так, чтобы исходный базис $Б_{\bar{X}^0}$ состоял из векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Пусть к моменту, когда выявляется неоднозначность, базис состоит из векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Если номера всех подозрительных векторов $k^0_i > s_{p_1}$, где $s_{p_1} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} s_i$, то в очередной базис вводится вектор $A_{k^0_1}$. Если это условие не выполняется, то совокупность подозрительных векторов сужается: из нее исключаются те векторы, номера которых больше s_{p_1}. Для оставшихся векторов определяется минимум отношения

$$\theta^{(1)}_{\min} = \min \frac{x_{p_1 j}}{x_{rj}}.$$

Если этот минимум достигается на единственном индексе $j = k^1$, то вектор A_{k^1} вводится в очередной базис, в противном случае образуется новое множество подозрительных векторов, соответствующих тем номерам j, на которых достигается $\theta^1_{\min}$.

Если все номера подозрительных векторов больше p_2 ($p_2 = \min\limits_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ i \neq p_1}} s_i$), то в базис вводится подозрительный вектор с наименьшим номером. В противном случае образуется новое множество подозрительных векторов, образованное из тех A_j, для которых

$$\theta^{(2)}_{\min} = \min \frac{x_{p_2 j}}{x_{rj}}.$$

(Здесь минимум определяется для тех j, которые меньше p_2 и входят во второе подозрительное множество.)

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет обнаружен единственный вектор A_k, который нужно ввести в очередной базис псевдоплана.

Замечание 7.1. Практически зацикливание в методе последовательного уточнения оценок (так же, как и в методе последовательного улучшения плана) — явление чрезвычайно редкое; поэтому к сложному правилу, описанному выше, следует прибегать лишь после того, как цикл уже обнаружен, т. е. после возвращения к уже пройденному базису. При решении задач можно рекомендовать вводить в базис (в случае неоднозначности), например, подозрительный вектор A_j, имеющий наименьший номер.

Пример 7.3. Пусть векторы условий задачи были пронумерованы так, что базис исходного псевдоплана состоял из векторов A_1, A_2, A_3, A_4 и на одной из итераций параметры x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, 5$), соответствующие базису $Б_{\overline{X}} = (A_4, A_2, A_7, A_6)$, имели вид

$$x_{i0} = (-1, -2, 1, 1, 0),$$

$$\|x_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 5 & 7 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_j = (1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 3, 4, 3).$$

Из базиса должен быть выведен вектор A_2, так как $x_{i2} < x_{i1} < 0$. Чтобы определить вектор, который должен заменить A_2 в очередном базисе, найдем минимум отношения

$$\theta^{(0)}_{\min} = \min_{x_{2j} < 0} \left(-\frac{\Delta_j}{x_{2j}}\right).$$

Легко видеть, что этот минимум достигается сразу на шести индексах $j = 1, 3, 5, 8, 9, 10$. Таким образом, первое множество подозрительных векторов состоит здесь из векторов A_1, A_3, A_5, A_8, A_9, A_{10}. Так как наибольший номер вектора текущего базиса равен 7, то векторы A_8, A_9, A_{10} сразу же исключаются из числа подозрительных. Определим теперь, на каких индексах j достигается минимум отношения

$$\theta^{(1)}_{\min} = \min_{j=1,3,5} \frac{x_{3j}}{x_{2j}}.$$

Этот минимум достигается при $j=1$ и $j=5$. Так как следующий по величине номер текущего базиса равен 6, а $1<6$ и $3<6$, то оба вектора A_1 и A_5 остаются в числе подозрительных. Поэтому определим, на каких индексах j ($j=1, 5$) достигается минимум отношения

$$\theta^{(2)}_{\min}=\min_{j=1,\,5}\frac{x_{4j}}{x_{2j}}.$$

Очевидно, что $\theta^{(2)}_{\min}$ достигается на одном индексе $j=1$, а поэтому вектор A_1 должен заменить A_2 в очередном базисе.

7.38. Показать, что метод последовательного уточнения оценок является применением метода последовательного улучшения плана к решению двойственной задачи.

7.39*. Показать, что при решении задачи методом последовательного уточнения оценок возможно возвращение к уже пройденному базису (цикл), если не использовать правило, гарантирующее от зацикливания.

Решить задачи **7.40—7.46** методом последовательного уточнения оценок, приняв в качестве исходного сопряженного базиса систему векторов $Б^0=\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$, приведенную в условиях.

7.40.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2-4x_3\to\max,\\
&x_1+x_2-3x_3=0,\\
&x_1-2x_2+x_3=3,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\\
&Б^0=(A_1,\ A_2).
\end{aligned}$$

7.41.
$$\begin{aligned}
&x_1-7x_2-5x_3-35x_4\to\max,\\
&2x_1+6x_2-8x_3-30x_4=6,\\
&x_1-x_2+x_3+x_4=-5,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\\
&Б^0=(A_1,\ A_2).
\end{aligned}$$

7.42.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3-x_5\to\max,\\
&x_1+x_2-4x_4+2x_5=-2,\\
&x_2+x_3+x_4-2x_5=-2,\\
&x_1+x_3+3x_4-2x_5=-2,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 5,\\
&Б^0=(A_1,\ A_2,\ A_3).
\end{aligned}$$

7.43.
$$\begin{aligned}
&3x_1+2x_2+x_3+x_4-5x_5-10x_6\to\max,\\
&x_1+8x_2-x_3+10x_4+14x_5+24x_6=4,\\
&x_2-7x_3+8x_4-5x_5+3x_6=28,\\
&x_3-x_4+x_5=-4,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6,\\
&Б^0=(A_1,\ A_2,\ A_3).
\end{aligned}$$

7.44. $4x_1+3x_2+2x_3+x_4+2x_5+3x_6+4x_7\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1 &&&&&&+2x_5+3x_6-x_7=5,\\
&x_1+x_2 &&&&&&+3x_5+4x_6-x_7=7,\\
&x_1+x_2+x_3 &&&&&&+5x_5-x_6+2x_7=9,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4 &&&&&&-x_5+2x_6+4x_7=9,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,7,\\
&Б^0=(A_1,A_2,A_3,A_4,).
\end{aligned}$$

7.45. $x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1 &&&&-x_5 &&&&=-1,\\
&x_2 &&&&&-x_6 &&&=-1,\\
&x_3 &&&&&&-x_7 &&=-1,\\
&x_4 &&&&&&&-x_8=-1,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,8,\\
&Б^0=(A_1,A_2,A_3,A_4).
\end{aligned}$$

7.46. $2x_1+3x_2+4x_3+5x_4-5x_5-6x_6-7x_7-8x_8\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1 &&&&-x_5 &&&&=-1,\\
&x_1+x_2 &&&&-x_5-x_6 &&&=-2,\\
&x_1+x_2+x_3 &&&&-x_5-x_6-x_7 &&&=-3,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4 &&&&-x_5-x_6-x_7-x_8&&&=-4,\\
&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,8,\\
&Б^0=(A_1,A_2,A_3,A_4).
\end{aligned}$$

7.47*. Решить методом последовательного уточнения оценок задачу

$$L(X)=\sum_{k=1}^{m}c_kx_k-\sum_{k=1}^{m}c_{m+k}x_{m+k}\to\max,$$

$$\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_k-\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_{m+k}=b_i,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\ldots,2m,$$

где $\|a_{ik}\|_{m,m}$ — матрица, обладающая свойствами:

1) определитель $\|a_{ik}\|$ не равен нулю;

2) система уравнений $\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}x_k=b_i$, $i=1,2,\ldots,m$, имеет неположительное решение $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_m)$, а $(c_{m+1},c_{m+2},\ldots,c_{2m})=C_2\geqslant C_1=(c_1,c_2,\ldots,c_m)$.

7.48*. Пусть известно, что система векторов, состоящая из столбцов матрицы $\|a_{ik}\|_{m,m}$, является сопряженным базисом задачи

$$L(X)=\sum_{k=1}^{m}c_kx_k-\sum_{k=1}^{m}c_{m+k}x_{m+k}\to\max,$$

$$\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_k-\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ik}x_{m+k}=b_i,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

причем, базисные компоненты псевдоплана $\bar{X}$, соответствующего этому базису, неположительны.

Доказать, что максимальное значение линейной формы задачи равно $(C_2, d^{-1}\bar{X})$, если

$$\|\tilde{a}_{ik}\| = \|a_{ik}\| \cdot \|d_{ik}\|,$$

где матрица $\|d_{ik}\|$ обладает свойствами:

1) определитель $\|d_{ik}\|$ не равен нулю;

2) все элементы обратной матрицы положительны.

7.49. Пусть задача

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (c_j \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

решается методом последовательного уточнения оценок.

Доказать, что в качестве исходного псевдоплана можно взять вектор $\bar{X} = (0, 0, \ldots, 0, -b_1, -b_2, \ldots, -b_m)$, $(m+i)$-е координаты которого соответствуют искусственным векторам $\{A_{n+i}\}_{i=1}^{m}$, с помощью которых система условий задачи приводится к канонической форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

7.50. Пусть в задаче (7.1)—(7.3) $a_{\alpha j} \geqslant 0$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что вектор $\bar{Y} = (0, 0, \ldots, 0, \bar{y}_\alpha, 0, \ldots, 0)$ при достаточно большом $\bar{y}_\alpha$ является планом задачи, двойственной к исходной.

7.51. Пусть известен некоторый план $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ (не опорный) задачи (7.4), (7.5), двойственной к (7.1)—(7.3). Предположим, что при подстановке координат плана Y в условия (7.5) первые n_1 условий обращаются в строгие неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 < n, \qquad (\alpha)$$

а оставшиеся $n - n_1$ условий — в равенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \qquad j = n_1 + 1, \quad n_1 + 2, \ldots, n. \qquad (\beta)$$

Предположим, что ранг системы условий (β) равен $r < m$. Выразим из системы (β) первые r переменных y_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ через переменные y_i $(i = r+1, r+2, \ldots, m)$:

$$y_i = \sum_{k=r+1}^{m} d_{ki} y_k + d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

и подставим их значения в (α) и в линейную форму $\tilde{L}(Y)$. Получим

$$\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij} y_i > c'_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1, \; n_1 < n,$$

$$\tilde{L}'(Y) = \sum_{i=r+1}^{m} b'_i y_i + b_0.$$

Предположим, что $b'_i \neq 0$ при некотором i. Сделаем элементарное преобразование плана Y в $Y(\theta)$:

$$y_i(\theta) = y_i - \theta b'_i, \quad i = r+1, \ldots, m,$$

где $\theta > 0$. Введем обозначения $\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij} b'_i = \mu_j$ и $\Delta_j = \sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij} y_i - c_j$.

Доказать, что если $\mu_j \leqslant 0$ при всех j, то линейная форма $\tilde{L}(Y)$ не ограничена снизу на множестве планов задачи.

7.52. Предположим, что среди μ_j (см. задачу 7.51) есть положительные. Доказать, что при $\theta = \theta^{(1)}_{\min}$, где $\theta^{(1)}_{\min}$ определяется из условия $\theta^{(1)}_{\min} = \min\limits_{\mu_j > 0} \frac{\Delta_j}{\mu_j}$, элементарное преобразование плана Y определяет план $Y^1 = (y^1_1, y^1_2, \ldots, y^1_m)$, компоненты которого обращают не меньше чем $r+1$ линейно независимое ограничение задачи (7.4), (7.5) в равенства.

7.53. Показать, что план Y^1 (см. задачу 7.52) связан с планом Y соотношением $\tilde{L}(Y^1) < \tilde{L}(Y)$.

7.54. Пусть все b'_i (см. задачу 7.51) равны нулю $(i = r+1, r+2, \ldots, m)$. Доказать, что если совершить элементарное преобразование с параметром $\theta = \theta^{(2)}_{\min}$, где $\theta^{(2)}_{\min}$ определяется из условия

$$\theta^{(2)}_{\min} = \begin{cases} \min\limits_{a'_{r+1,j} > 0} \dfrac{\Delta_j}{a'_{r+1,j}}, & \text{если среди } a'_{r+1,j} \text{ имеются положительные величины,} \\ -\min\limits_{a'_{r+1,j} < 0} \left(-\dfrac{\Delta_j}{a'_{r+1,j}}\right), & \text{если все } a'_{r+1,j} \text{ неположительны,} \\ j = 1, 2, \ldots, n_1, \end{cases}$$

то получится план $Y^2 = (y^2_1, y^2_2, \ldots, y^2_m)$, компоненты которого удовлетворяют условию: при подстановке их в систему ограничений

задачи (7.4), (7.5) получается не меньше чем $r+1$ линейно независимое равенство.

7.55. Показать, что план Y^2 (см. задачу 7.54) связан с планом Y соотношением $\tilde{L}(Y^2)=\tilde{L}(Y)$.

7.56. Используя утверждения задач 7.52—7.55, обосновать метод получения опорного плана $\overline{Y}$ задачи (7.4), (7.5), а значит и псевдоплана $\overline{X}$ задачи (7.1)—(7.3), путем «улучшения» неопорного плана Y. (Этот метод называется градиентным методом определения исходного опорного плана.)

7.57. Описать порядок действий в градиентном методе определения исходного опорного плана (см. задачу 7.56).

7.58. Рассмотрим задачу (7.1)—(7.3), система ограничений которой содержит еще одно дополнительное условие:

$$x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n=M \qquad (\alpha)$$

(здесь M достаточно велико).

Очевидно, что задача, двойственная к полученной, имеет план (вообще говоря, не опорный) $Y=(y_0, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m+1})$, где y_0 достаточно велико. Применяя градиентный метод (см. задачу 7.56), можно из плана Y получить опорный план $\overline{Y}$ и решить затем задачу (7.1)—(7.3), (α) методом последовательного уточнения оценок. Доказать, что если решение задачи выявило несовместность ее условий, то система условий задачи (7.1)—(7.3) также противоречива.

7.59. Пусть $\overline{X}_\alpha=(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — оптимальный план задачи (7.1)—(7.3), (α), а $\overline{Y}_\alpha=(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ (см. задачу 7.58) — решение двойственной к ней задачи. Доказать, что:

1) если $\bar{y}_0=0$, то $\overline{X}=(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — решение задачи (7.1)—(7.3);

2) если $\bar{y}_0>0$, то система условий задачи (7.1)—(7.3) противоречива.

7.60. Пусть задача (7.1)—(7.3) имеет решение $\overline{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, полученное методом последовательного уточнения оценок. Присоединим к ограничениям (7.2), (7.3) условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j}x_j+x_{m+1}=b_{m+1},$$

$$x_{m+1}\geqslant 0.$$

Показать, что полученную задачу можно решить методом последовательного уточнения оценок, приняв в качестве начального сопряженного базиса систему $Б'=\{(A_{s_i})_{i=1}^m, A_{n+1}\}$, где $(A_{s_i})_{i=1}^m$ — базис оптимального псевдоплана $\overline{X}$.

7.61. Доказать, что параметры x'_{ij} ($i=1, 2, \ldots, m+2$, $j=0, 1, 2, \ldots, n+1$), соответствующие базису $Б'$ (см. задачу 7.60), связаны

с параметрами x_{ij} ($i=1, 2, \ldots, m+1$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$) формулами

$$x'_{i0}=x_{i0}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad x_{m+1,0}=-\sum_{i=1}^{m} a_{s_i}x_{i0}+b_{m+1},$$

$$\|x'_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & x_{ij} & & \vdots \\ & & & 0 \\ -a_{m+1,1} & -a_{m+1,2} & \ldots & -a_{m+1,n} \quad 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$j=1, 2, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x'_{m+2,j}=x_{m+1,j}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad x'_{m+2,n+1}=0,$$

$$x'_{m+2,0}=x_{m+1,0}.$$

Решить задачи **7.62—7.66** методом последовательного уточнения оценок. Для определения исходного псевдоплана $\overline{X}^0$ воспользоваться методами задач 7.56 или 7.58, 7.59.

7.62.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\to\max,\\
&x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+11x_6+10x_7+7x_8=2,\\
&x_1+x_2+2x_3+3x_4+3x_5+8x_6+7x_7+5x_8=1,\\
&x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5+5x_6+3x_7+3x_8=-1,\\
&x_1-x_2-x_3+x_4-x_5+x_6=-1,\\
&x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, 8.
\end{aligned}$$

7.63.
$$\begin{aligned}
&-7x_1-6x_2-5x_3-4x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\to\max,\\
&3x_1+4x_2+4x_3+7x_4+x_5+2x_6+2x_7+2x_8=6,\\
&4x_1+4x_2+4x_3+8x_4+2x_5+2x_6+2x_7+2x_8=6,\\
&4x_1+5x_2+5x_3+9x_4+2x_5+2x_6+3x_7+2x_8=8,\\
&4x_1+4x_2+6x_3+10x_4+2x_5+2x_6+2x_7+4x_8=6,\\
&x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, 8.
\end{aligned}$$

7.64.
$$\begin{aligned}
&x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+10x_{10}\to\max,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=4,\\
&x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8+x_9-x_{10}=0,\\
&2x_1+7x_2-8x_3-x_4+2x_5-x_6+x_7-x_8-4x_9-x_{10}=0,\\
&x_1-6x_2+7x_3-2x_4-2x_5+2x_6-2x_7+x_8-2x_9+x_{10}=1,\\
&4x_1-5x_2+6x_3-5x_4-2x_5+3x_6-3x_7+x_8-6x_9+x_{10}=3,\\
&x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, 10.
\end{aligned}$$

7.65.
$$\begin{aligned}
&x_1-2x_2+x_3-3x_4+x_5-5x_6+x_7-7x_8+x_9-9x_{10}\to\max,\\
&4x_1+4x_2-2x_4-x_5+5x_6+x_7+4x_8-x_{10}=16,\\
&x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5+6x_6+x_7+x_8+3x_{10}=4,\\
&x_1+x_2-x_4-x_5+2x_6+x_8+x_9-x_{10}=4,\\
&-x_2+x_3-5x_4-x_5+2x_6+4x_7+x_9=0,\\
&-x_2+x_3-x_4-x_5+2x_6+4x_9=0,\\
&x_i\geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, 10.
\end{aligned}$$

7.66.

$$
\begin{array}{l}
x_1+2x_2-x_3-10x_4-20x_5-7x_6-10x_8-9x_9-10x_{10}\to\max,\\
x_1+x_2+7x_6-8x_7-9x_8+10x_9-x_{10}=1,\\
x_2+x_3+6x_6-7x_7-8x_8+9x_9=2,\\
x_3+x_4-13x_6-15x_7+17x_8-19x_9-2x_{10}=6,\\
x_4+x_5+3x_6+x_7-x_8-x_9+2x_{10}=4,\\
x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5+3x_6+x_7-x_8-x_9+3x_{10}=12,\\
x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,10.
\end{array}
$$

§ 3. Теоретические основы и алгоритм метода последовательного сокращения невязок

Рассмотрим задачу линейного программирования (7.1)—(7.3). Предположим, что все b_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ неотрицательны.

Определение 7.3. *Задача линейного программирования, состоящая в минимизации линейной формы*

$$L'(X, \mathrm{E})=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\varepsilon_i=b_i,\qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$\varepsilon_i\geqslant 0,\qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

называется расширенной по отношению к (7.1)—(7.3).

Пусть $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — некоторый план (не обязательно опорный) задачи (7.4), (7.5), двойственной к (7.1)—(7.3). Обозначим множество индексов j, для которых

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j,$$

через E_Y.

Определение 7.4. *Задача линейного программирования, состоящая в минимизации линейной формы*

$$L'(X, \mathrm{E})=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i \tag{7.8}$$

при ограничениях

$$\sum_{j\in E_Y}a_{ij}x_j+\varepsilon_i=b_i,\qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{7.9}$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{7.10}$$

$$\varepsilon_i\geqslant 0,\qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{7.11}$$

называется вспомогательной по отношению к (7.1)—(7.3).

Таким образом, вспомогательная задача определяется некоторым планом двойственной задачи.

Задача, двойственная к вспомогательной, имеет вид

$$\tilde{L}'(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i \to \max, \tag{7.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu_i \leqslant 0, \qquad j \in E_Y, \tag{7.13}$$

$$\mu_i \leqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.14}$$

Поставим в соответствие каждому плану $(\tilde{X}, \tilde{\mathrm{E}}) = \{(\tilde{x}_j)_{j \in E_Y}, (\tilde{\varepsilon}_i)_{i=1}^{m}\}$ вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$x_j = \tilde{x}_j \quad \text{при} \quad j \in E_Y,$$
$$x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \notin E_Y.$$

Определение 7.5. *Вектор $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, соответствующий оптимальному опорному плану некоторой вспомогательной задачи, называется квазипланом задачи* (7.1)—(7.3). *При этом вектор $\bar{\mathrm{E}} = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_m)$ называется вектором невязок квазиплана $\bar{X}$, а $\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{m} \bar{\varepsilon}_i$ — невязкой этого квазиплана.*

Определение 7.6. *Базисом квазиплана $\bar{X}$ называется базис оптимального плана вспомогательной задачи, определяющей этот квазиплан.*

Пример 7.4. Построить квазиплан $\bar{X}$ задачи

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 \qquad &= 1, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

связанный с планом $\bar{Y} = (1, 0)$ двойственной к ней задачи. Задача, двойственная к (α), имеет вид

$$\begin{aligned} 4y_1 + y_2 &\to \min, \\ y_1 + y_2 &\geqslant 1, \\ 3y_1 - y_2 &\geqslant 1, \\ 4y_1 \qquad &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Так как план Y обращает в равенство лишь первое ограничение задачи, то множество E_Y содержит единственный индекс $j = 1$. Порожденная планом Y задача имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &\to \min, \\ x_1 + \varepsilon_1 \qquad &= 4, \\ x_1 \qquad + \varepsilon_2 &= 1, \\ x_1 \geqslant 0,\ \varepsilon_1 \geqslant 0,\ \varepsilon_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что вектор $(X, \mathrm{E}) = (1, 3, 0)$ является оптимальным планом этой задачи. Отсюда квазиплан задачи $\bar{X} = (1, 0, 0)$; его вектор невязок $\mathrm{E} = (3, 0)$, а невязка $\varepsilon_0 = 3$.

Для исследования квазиплана $\bar{X}$, порожденного планом $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ двойственной задачи, введем следующие параметры:

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i-c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

где μ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — компоненты оптимального плана М задачи (7.12)—(7.14), двойственной к вспомогательной.

Утверждение 7.4 (признак оптимальности квазиплана). *Если все компоненты вектора невязок* Е *квазиплана* $\bar{X}$ *равны нулю или, что то же самое, если невязка* $\varepsilon_0=0$, *то квазиплан* $\bar{X}$ — *решение задачи* (7.1)—(7.3).

Утверждение 7.5 (достаточное условие противоречивости системы условий задачи). *Если невязка* ε_0 *квазиплана* $\bar{X}$ *больше нуля* $(\varepsilon_0>0)$ *и все* $\delta_j\leqslant 0$, *то система условий задачи* (7.1)—(7.3) *противоречива.*

Предположим, что расширенная задача, соответствующая задаче (7.1)—(7.3), не вырождена.

Утверждение 7.6. *Если невязка* ε_0 *квазиплана* $\bar{X}$ *больше нуля* $(\varepsilon_0>0)$ *и среди* δ_j *есть положительные величины, то можно перейти к плану* $Y^1=(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_m^1)$ *двойственной задачи, которому соответствует квазиплан* $\bar{X}^1$ *исходной задачи с меньшей невязкой* ε_0^1 $(\varepsilon_0^1<\varepsilon_0)$.

Для этого нужно совершить элементарное преобразование плана Y:

$$Y^1=Y-\theta_{\min}\tilde{L}'(\mathrm{M}), \tag{7.15}$$

где $\mathrm{M}=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, а $\theta_{\min}=\min\limits_{\delta_j>0}\dfrac{\Delta_j}{\delta_j}$.

Пример 7.5. Исследовать квазиплан $\bar{X}=(1, 0, 0)$ задачи

$$\left.\begin{aligned} &x_1+x_2+cx_3\to\max,\\ &x_1+2x_2+4x_3=10,\\ &x_1-x_2+x_3=1,\\ &x_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, 3,\quad c<4,\end{aligned}\right\} \tag{α}$$

порожденный планом $Y=(1, 0)$ двойственной к ней задачи.

В нашем примере задача, двойственная к (α), имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &10y_1+y_2\to\min,\\ &y_1+y_2\geqslant 1,\\ &2y_1-y_2\geqslant 1,\\ &4y_1+y_2\geqslant c,\end{aligned}\right\} \tag{$\tilde{\alpha}$}$$

а вспомогательная задача, порожденная планом Y, —

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1+\varepsilon_2\to\min,\\ &x_1+\varepsilon_1=10,\\ &x_1+\varepsilon_2=1,\\ &x_1\geqslant 0,\ \varepsilon_1\geqslant 0,\ \varepsilon_2\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Так как невязка ε_0 квазиплана $\bar{X}$ равна $9>0$, то для исследования $\bar{X}$ необходимо вычислить параметры Δ_j и δ_j. Запишем задачу, двойственную к вспомогательной:

$$\left.\begin{aligned} 10\mu_1+\mu_2 &\to \max, \\ \mu_1+\mu_2 &\leqslant 0, \\ \mu_1\leqslant 1,\ \ \mu_2 &\leqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\beta})$$

Очевидно, вектор $M=(1, -1)$ является оптимальным планом задачи $(\tilde{\beta})$. Отсюда

$$\Delta_1=0,\quad \Delta_2=1,\quad \Delta_3=-c+4,$$
$$\delta_1=0,\quad \delta_2=3,\quad \delta_3=3.$$

Так как среди параметров δ_j $(j=1, 2, 3)$ имеются положительные, то можно воспользоваться утверждением 7.6 и перейти к квазиплану $\bar{X}^1$ с меньшей невязкой.

Чтобы определить параметр $\theta_{\min}$ элементарного преобразования плана Y, найдем минимум отношения

$$\theta_{\min}=\min_{\delta_2,\,\delta_3}\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2},\ \frac{\Delta_3}{\delta_3}\right).$$

Имеем, $\theta_{\min}=\frac{1}{3}$ при $c<3$, $\theta_{\min}=\frac{4-c}{3}$ при $3\leqslant c<4$. Рассмотрим первый случай (второй исследуется так же). По формуле (7.15) определим Y^1:

$$Y^1=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

Для определения квазиплана $\bar{X}^1$ составим вспомогательную задачу, порожденную планом Y^1:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1+\varepsilon_2 &\to \min, \\ x_1+2x_2+\varepsilon_1 \qquad &= 10, \\ x_1-\ \ x_2 \qquad +\varepsilon_2 &= 1, \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \varepsilon_1\geqslant 0,\ \varepsilon_2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\beta^1)$$

Задачу (β^1) можно решить методом последовательного улучшения плана, приняв вектор $(\bar{X}, E)=(1, 0, 9, 0)$ в качестве начального опорного плана. Легко проверить, что решением ее будет вектор $(\tilde{X}, \tilde{E})=(4, 3, 0, 0)$, значит, новый «улучшенный» квазиплан $\bar{X}^1$ задачи (α) имеет вид $\bar{X}^1=(4, 3, 0)$. Его невязка $\varepsilon_0^1=0$. В соответствии с признаком оптимальности 7.4 квазиплан $\bar{X}^1$ задачи (α) является ее решением.

7.67. Доказать, что вспомогательная задача (7.8)—(7.11), соответствующая задаче (7.1)—(7.3), всегда разрешима.

7.68*. Доказать, что значение линейной формы $L(X)$ на квазиплане $\bar{X}$ связано со значением линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на плане Y, определяющем этот квазиплан, соотношением

$$L(\bar{X})=\tilde{L}(Y)-\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i y_i,$$

где $E=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ — вектор невязок квазиплана $\bar{X}$.

7.69. Доказать, что значение линейной формы $L(X)$ на квазиплане $\overline{X}$ совпадает со значением линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на плане Y, определяющем этот квазиплан, если невязка ε_0 квазиплана $\overline{X}$ равна нулю. Справедливо ли обратное утверждение?

7.70*. Доказать, что значение линейной формы $L(X)$ на квазиплане $\overline{X}$ и значение линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на плане $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)\geqslant 0$ $(Y\leqslant 0)$, определяющем этот квазиплан, связаны соотношением

$$L(\overline{X})\leqslant \tilde{L}(Y) \qquad (L(\overline{X})\geqslant \tilde{L}(Y)).$$

7.71. Из определения 7.6 базиса квазиплана $\overline{X}$ следует, что базис есть система векторов, состоящая из некоторых векторов условий задачи и некоторых вспомогательных единичных векторов. Доказать, что если в базис квазиплана $\overline{X}$ не входят единичные векторы, то $\overline{X}$ — решение задачи.

7.72. Доказать, что квазиплан $\overline{X}$ задачи (7.1)—(7.3), имеющий m положительных компонент, есть решение этой задачи.

7.73. Существуют ли задачи вида (7.1)—(7.3), обладающие тем свойством, что расширенная задача совпадает с вспомогательной, порожденной некоторым планом Y (здесь Y — план задачи, двойственной к исходной)?

7.74*. Пусть в задаче (7.1)—(7.3) матрица $\| a_{ij} \|_{m,n}$ удовлетворяет условию: $a_{i_0 j}>0$ при некотором i_0 и при всех j.

Доказать, что вектор $\overline{X}=(0, 0, \ldots, 0)$ является квазипланом этой задачи с вектором невязок $\mathrm{E}=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и с невязкой $\varepsilon_0=\sum_{i=1}^{m} b_i$.

7.75. Доказать, что если все условия, входящие в ограничения задачи (7.4), (7.5), двойственной к (7.1)—(7.3), нежесткие, то вектор $\overline{X}=(0, 0, \ldots, 0)$ является квазипланом исходной задачи.

7.76. Показать, что условие, сформулированное в предыдущей задаче, не является необходимым для того, чтобы вектор $\overline{X}=(0, 0, \ldots, 0)$ был квазипланом задачи (7.1)—(7.3).

7.77*. Доказать, что для задачи (7.1)—(7.3) параметры $\delta_j\leqslant 0$ при $j\in E_Y$. Это значит, что $\theta_{\min}$ достигается на индексе $j\notin E_Y$, т. е. в базис нового квазиплана $\overline{X}^1$ вводится вектор условий A_j, где $j\notin E_Y$.

7.78. Доказать, что значения линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на планах Y и $Y(\theta_{\min})$ связаны соотношением

$$\tilde{L}(Y(\theta_{\min}))=\tilde{L}(Y)-\theta_{\min}\,\varepsilon_0,$$

где ε_0 — невязка квазиплана $\overline{X}$, порожденного планом Y.

7.79. Показать, что при решении вспомогательной задачи, связанной с улучшением квазиплана $\overline{X}$, можно взять в качестве исходного опорного плана оптимальный план предыдущей вспомогательной задачи.

7.80. Доказать, что вектор $X=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ является квазипланом задачи (7.1)—(7.3) тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\bar{x}_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n;$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j \leqslant b_i, \; i=1, 2, \ldots, m;$

3) векторы $(A_{s_i})_{i=1}^{l}$, соответствующие положительным составляющим $x_{s_i} > 0$, линейно независимы;

4) существует система $\{A_{s_i}\}_{i=1}^{m}$, содержащая систему $(A_{s_i})_{i=1}^{l}$, для которой параметры $\Delta_j \geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$;

5) существует система $(E_{s_i})_{i=m-l}^{m}$, состоящая из $m-l$ единичных векторов и обладающая тем свойством, что параметры $z_k \geqslant -1$, где $z_k = -\sum_{i=m-l}^{m} \tilde{x}_{ik}$. Здесь $\|\tilde{x}_{ik}\|_{m,\, l+m}$ — матрица коэффициентов разложения векторов $A_{s_i}(i=1, 2, \ldots, l)$ и E_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ по системе $\{(A_{s_i})_{i=1}^{l}, (E_{s_i})_{i=m-l}^{m}\}$.

Расширенная задача предполагается невырожденной.

7.81. Рассмотрим некоторый план Y задачи (7.4), (7.5), двойственной к (7.1)—(7.3); образуем вспомогательную задачу, соответствующую Y, и обозначим через $(\tilde{X}, \tilde{E}) = \{(\tilde{x}_j)_{j \in E_Y}, (\tilde{\varepsilon}_i)_{i=1}^{m}\}$ ее решение (не обязательно опорное). По этому решению образуем вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$x_j = \tilde{x}_j \quad \text{при} \quad j \in E_Y,$$
$$x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \notin E_Y.$$

Вектор X естественно назвать неопорным квазипланом (в отличие от обычного квазиплана) исходной задачи.

Доказать, что значение $L(X)$ на неопорном квазиплане X связано со значением $\tilde{L}(Y)$ на плане Y, породившем X, соотношением

$$L(X) = \tilde{L}(Y) - \sum_{i=1}^{m} \tilde{\varepsilon}_i y_i,$$

где $\tilde{\varepsilon}_i$ — составляющие вектора $\tilde{E} = (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_m)$.

7.82*. Доказать, что значение линейной формы $L(X)$ на неопорном квазиплане X (см. задачу 7.81) связано со значением $L(X)$ на квазиплане $\bar{X}$ (X и $\bar{X}$ порождены одним и тем же планом Y двойственной задачи) соотношением

$$L(X) = L(\bar{X}) + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\varepsilon}_i - \varepsilon_i) y_i,$$

где $\tilde{\varepsilon}_i$ и ε_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — компоненты вектора невязок квазипланов X и $\bar{X}$ соответственно.

В задачах **7.83 — 7.88** определить квазиплан $\bar{X}$, порожденный приведенным в условиях планом Y двойственной задачи; определить вектор невязок E квазиплана $\bar{X}$ и невязку ε_0 (в случае, когда $\bar{X}$ определен неоднозначно, найти один из них).

7.83.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 + x_2 = 0, \\ &-x_2 + x_3 = 4, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ &Y = (1, 1). \end{aligned}$$

7.84.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ &2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ &Y = (10, 0). \end{aligned}$$

7.85.
$$\begin{aligned} &-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \max, \\ &x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ &Y = (0, 0). \end{aligned}$$

7.86.
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max, \\ &x_1 + 7x_4 + x_5 + x_6 = 10, \\ &x_2 + 8x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 14, \\ &x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 9, \\ &x_4 + 4x_5 + 8x_6 = 11, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \\ &Y = (1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

7.87.
$$\begin{aligned} &-x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 - x_6 \to \max, \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1, \\ &2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_6 = 2, \\ &3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \\ &Y = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

7.88.
$$\begin{aligned} &cx_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1, \\ &x_1 + bx_2 = 2, \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, \ ac \geqslant 1, \ 2c \geqslant 1, \\ &Y = (c, 0). \end{aligned}$$

Исследовать квазиплан $\bar{X}$ задач **7.89 — 7.97**, порожденный планом $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ задач, двойственных к ним. Точнее, определить, какой из случаев имеет место:

1) квазиплан $\bar{X}$ — решение задачи;

2) система условий задачи противоречива;

3) можно перейти к квазиплану $\bar{X}^1$ с меньшей невязкой, т. е. улучшить $\bar{X}$.

7.89. $-4x_1-3x_2-2x_3-5x_4\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4=4,\\
&x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4,\\
&Y=(0,0).
\end{aligned}$$

7.90. $2x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5-x_6\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=1,\\
&x_1+3x_2-x_3-x_4+x_6=1,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6,\\
&Y=(1,1).
\end{aligned}$$

7.91. $-x_1-3x_2-x_3-x_4-x_5-x_6\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1+x_4+x_5+x_6=4,\\
&x_2+2x_4+3x_5+x_6=5,\\
&x_3+x_4+10x_5+11x_6=7,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6,\\
&Y=(0,0,0).
\end{aligned}$$

7.92. $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=10,\\
&x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6+6x_7=1,\\
&x_3+2x_4+3x_5+4x_6+5x_7=0,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,7,\\
&Y=(2,3,4).
\end{aligned}$$

7.93. $-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\to\max,$

$$\begin{aligned}
&-x_1-x_2-x_3+x_4-x_5-2x_6-x_7-x_8=1,\\
&-2x_1-x_2-3x_3-x_4+x_5-x_6-x_7-2x_8=1,\\
&-x_1+x_2+x_3-x_4-2x_5-3x_6-x_7-3x_8=1,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8,\\
&Y=(0,0,0).
\end{aligned}$$

7.94. $10x_1-x_2-5x_3-2x_4+x_5+3x_6+4x_7-10x_8\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2-x_3+x_4+11x_5+x_6+x_7+x_8=1,\\
&2x_1+x_2+2x_3-x_4-10x_5-x_6+3x_7-x_8=2,\\
&3x_1+2x_2+x_3+2x_4+9x_5+2x_6-x_7+2x_8=3,\\
&4x_1-3x_2-4x_3-3x_4-8x_5+3x_6+5x_7-4x_8=5,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8,\\
&Y=(1,1,1,1).
\end{aligned}$$

7.95. $x_1+2x_2-x_3-x_4-x_5-3x_6-3x_7-2x_8-2x_9-2x_{10}\to\max,$

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6=0,\\
&x_2+x_3+x_4+x_5-x_6-x_7=0,\\
&x_3+x_4+x_5-x_6-x_7-x_8=0,\\
&x_4+x_5-x_6-x_7-x_8-x_9=0,\\
&x_5-x_6-x_7-x_8-x_9-x_{10}=0,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,10,\\
&Y=(1,1,0,0,0).
\end{aligned}$$

7.96.

$$
\begin{aligned}
&57x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} \to \max,\\
&3x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 9x_8 + 8x_9 + 7x_{10} = 6,\\
&7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 2,\\
&9x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 17x_5 - x_6 - 13x_7 - 18x_8 + x_9 + x_{10} = 1,\\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 10x_8 + x_9 + x_{10} = 3,\\
&-20x_1 - 25x_2 - 15x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 - x_9 + x_{10} = 4,\\
&x_2 + x_3 - 40x_4 - 15x_5 - 20x_6 - 5x_7 - 5x_8 - 40x_9 - 20x_{10} = 10,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 10,\\
&Y = (20, 1, 1, 1, 1, 1).
\end{aligned}
$$

7.97.

$$
\begin{aligned}
&cx_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \max,\\
&x_1 + cx_3 + x_4 = 2,\\
&ax_1 + bx_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad c \geqslant -1,\\
&Y = (c, 0).
\end{aligned}
$$

7.98. Исходя из утверждений 7.4 — 7.6, обосновать метод решения задач линейного программирования, основанный на последовательном движении по квазипланам задачи, невязки которых монотонно стремятся к нулю. Этот метод называется методом последовательного сокращения невязок.

7.99. Дополним условия задачи (7.1) — (7.3) ограничением

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M \qquad (\alpha)$$

(здесь M — достаточно большое число).

Пусть задача (7.1) — (7.3), (α) решена методом последовательного сокращения невязок (очевидно, что в качестве исходного квазиплана может быть рассмотрен квазиплан $\tilde{X}^0$, порожденный планом $Y = (y_0, 0, 0, \ldots, 0)$ задачи, двойственной к (7.1) — (7.3), (α)).

Обозначим полученный оптимальный план этой задачи через $\tilde{X} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$, а через $\tilde{Y} = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$ — порождающий его план задачи, двойственной к (7.1) — (7.3), (α).

Доказать, что:

1) если $j = 0 \in E_Y$, то план $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ — решение задачи (7.1) — (7.3);

2) если $j = 0 \notin E_Y$, то задача (7.1) — (7.3) неразрешима.

7.100. Доказать, что если в процессе решения задачи (7.1) — (7.3), (α) (см. задачу 7.99) была выявлена несовместность ее условий, то система условий задачи (7.1) — (7.3) также противоречива.

Решить задачи **7.101.** — **7.106** методом последовательного сокращения невязок. В случае, когда исходный план двойственной задачи не очевиден, использовать метод, описанный в задаче 7.99.

7.101.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \to \max,\\
&x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6,\\
&x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 9,\\
&x_3 + x_4 + x_5 = 5,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

7.102.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3-x_4-x_5-x_6\to\max,\\
&x_1-x_2+2x_3+2x_4+x_5+2x_6=2,\\
&x_1-2x_2+3x_3+2x_4+x_5+3x_6=2,\\
&x_1-x_2-x_3-x_4-2x_5-x_6=-1,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,6.
\end{aligned}$$

7.103.
$$\begin{aligned}
&x_1-x_2-x_3+x_4-5x_5-6x_6-7x_7-8x_8\to\max,\\
&x_1+x_5+x_6+x_7+x_8=2,\\
&x_1+x_2+2x_5+2x_6+2x_7+x_8=3,\\
&x_1+x_2+x_3+3x_5+3x_6+2x_7+x_8=5,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+4x_5+3x_6+2x_7+x_8=6,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,8.
\end{aligned}$$

7.104.
$$\begin{aligned}
&x_1+3x_2+11x_3-x_4+7x_5+8x_6-x_7-x_8-x_9\to\max,\\
&x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5-x_6-x_7-x_8-x_9=1,\\
&x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=2,\\
&-2x_1+3x_2-5x_3+x_4-x_5+3x_6-7x_7+4x_8-x_9=3,\\
&3x_1-4x_2+x_3+x_4+4x_5+x_6+x_7+x_8+2x_9=4,\\
&3x_1-x_2-4x_3+2x_4+3x_5+4x_6-6x_7+5x_8+x_9=5,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,9.
\end{aligned}$$

7.105.
$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}-x_{11}\to\max,\\
&x_1+x_2+x_3+2x_7+x_8+3x_{10}+x_{11}=1,\\
&x_2+x_3+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}=1,\\
&x_3+x_8=1,\\
&-x_1-2x_2+x_3+x_4-3x_7+x_8-4x_{10}-x_{11}=1,\\
&x_1-x_2+x_3+x_4+x_8+x_9+x_{10}-2x_{11}=1,\\
&-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_8+x_9-x_{10}+2x_{11}=1,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,11.
\end{aligned}$$

7.106.
$$\begin{aligned}
&x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8+x_9-x_{10}\to\max,\\
&x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=1,\\
&x_1+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=2,\\
&x_1+x_2+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=3,\\
&x_1+x_2+x_3+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=4,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=5,\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=6,\\
&4x_1+x_2+6x_3-x_4+8x_5-3x_6+3x_7+3x_8+3x_9+3x_{10}+3x_{11}=22,\\
&x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,11.
\end{aligned}$$

§ 4. Геометрическая интерпретация методов последовательного уточнения оценок и последовательного сокращения невязок

7.107. Пусть $Y=(y_1, y_2,\ldots, y_m)$ — исходный опорный план задачи (7.4) — (7.5), двойственной к (7.1) — (7.3), и $I_Y=(s_1, s_2,\ldots, s_m)$ — совокупность его базисных индексов. Рассмотрим множество K_X,

состоящее из точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \notin I_Y.$$

Доказать, что:

а) K_X — выпуклый многогранный конус с вершиной в точке $\overline{X}$ (здесь $\overline{X}$ — псевдоплан, порожденный планом Y);

б) конус K_X и вектор $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ разделяются (вообще говоря, не строго) гиперплоскостью $L(X)=L(\overline{X})$.

7.108. Рассмотрим псевдоплан $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, базисная компонента которого $x_{s_i}<0$, и гиперплоскость $x_{s_i}=0$. Доказать, что для совместности системы условий задачи (7.1) — (7.3) необходимо, чтобы конус K_X (см. предыдущую задачу) имел непустое пересечение с этой гиперплоскостью.

7.109. Пусть гиперплоскость $x_{s_i}=0$ (см. предыдущую задачу) имеет непустое пересечение с конусом K_X. Рассмотрим множество M_X, состоящее из пересечения K_X и полупространства $x_{s_i} \leqslant 0$. Доказать, что:

1) псевдоплан $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ — вершина множества M_X;

2) элементарному преобразованию псевдоплана $\overline{X}$ геометрически соответствует перемещение гиперплоскости линейной формы $L(X)$ из $\overline{X}$ вдоль ребра множества M_X в направлении убывания;

3) «улучшенному» псевдоплану $\overline{X}^1$ соответствует вершина множества M_X, соседняя с $\overline{X}$.

7.110. Исходя из утверждений задач 7.107—7.109, обосновать следующую геометрическую интерпретацию исследования псевдоплана $\overline{X}$:

1) если все базисные компоненты $x_{s_i} \geqslant 0$, то псевдоплану $\overline{X}$ соответствует вершина множества M (здесь M — множество планов задачи (7.1) — (7.3)), а значит, $\overline{X}$ — решение задачи;

2) если $x_{s_i}<0$ и все $x_{ij} \geqslant 0$, то гиперплоскость $x_{s_i}=0$ и конус K_X не пересекаются, а значит, условия задачи противоречивы;

3) если $x_{s_i}<0$, но среди x_{ij} есть отрицательные, то можно перейти к лучшему псевдоплану, если перемещать гиперплоскость линейной формы из вершины $\overline{X}$ в сторону убывания вдоль ребра множества M_X до тех пор, пока не будет достигнута соседняя вершина $\overline{X}^1$.

Решить задачи **7.111—7.116** методом последовательного уточнения оценок; проиллюстрировать каждый шаг решения, исходя из геометрической интерпретации метода (см. задачу 7.110).

7.111. $x_1+x_2 \to \max,$
$x_1+2x_2=1,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2.$

7.112. $x_1+x_2+x_3 \to \max,$
$x_1+2x_2+3x_3=1,$
$x_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3.$

7.113. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 = 4,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3.$

7.114. $x_1 - x_2 - x_3 \to \max,$
$2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 4,$
$x_1 - 3_2x - 2x_3 = 2,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3.$

7.115. $x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

7.116. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \to \max,$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 = 3,$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 2x_6 + 2x_7 = 1,$
$x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7.$

7.117. Рассмотрим план $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ задачи (7.4), (7.5), двойственной к (7.1)—(7.3). Исходя из геометрической интерпретации задачи линейного программирования в канонической форме записи (см. задачи 4.67, 4.68), показать, что квазиплан $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, порожденный планом Y, можно определить как верхнюю (в смысле оси Ou_{m+1}) точку пересечения прямой P и конуса M_U, где прямая P удовлетворяет следующим условиям:

1) проходит через точку $P_Y = \sum\limits_{j \in E_Y} \bar{x}_j A_j$, принадлежащую гиперплоскости $u_{m+1} = 0$;

2) параллельна оси Ou_{m+1}.

7.118. Определим в $(m+1)$-мерном пространстве расстояние ρ между двумя точками $U^1 = (u_1^1, u_2^1, \ldots, u_{m+1}^1)$ и $U^2 = (u_1^2, u_2^2, \ldots, u_{m+1}^2)$ по формуле $\rho(U^1, U^2) = \sum\limits_{i=1}^{m+1} |u_i^1 - u_i^2|$ (можно показать, что функция ρ обладает всеми свойствами, характеризующими расстояние между точками).

Доказать, что $\min\limits_{U \in N} \rho(U, Q_M) = \rho(\overline{X}, Q_M)$, где Q_M — точка пересечения конуса M_U с прямой Q (см. задачи 4.67 и 4.68), а множество N состоит из точек U, удовлетворяющих условиям:

1) $U \in M_U$;

2) $U \in \Pi_Y$ (см. задачу 6.134);

3) $U \leqslant B$ (здесь B — вектор ограничений задачи).

7.119. Исходя из геометрической интерпретации двойственной задачи (см. задачу 6.134), показать, что вспомогательная задача (7.8)—(7.11) всегда разрешима. Точку, соответствующую ее решению, обозначим через Q_Y.

7.120. Доказать, что $\rho(Q_Y, B) = \varepsilon_0$. Здесь ε_0 — невязка квазиплана $\overline{X}$, а ρ и Q_Y имеют тот же смысл, что и в задачах 7.118, 7.119.

7.121. Показать, что геометрически элементарное преобразование плана $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, связанное с уменьшением невязки квазиплана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ (здесь $\bar{X}$ — квазиплан, порожденный Y), означает перемещение гиперплоскости Π_Y (см. задачу 6.134) в пространстве точек $U=(u_1, u_2, \ldots, u_{m+1})$ до тех пор, пока в эту гиперплоскость не попадет новый вектор условий A_j $(j \notin E_Y)$.

7.122. Обозначим через $\bar{\pi}_Y$ гиперплоскость, параллельную оси Ou_{m+1} и содержащую пересечение гиперплоскостей π_Y и $u_{m+1}=0$, где π_Y — гиперплоскость, соответствующая решению задачи, двойственной к вспомогательной (7.12)—(7.14).

Исходя из утверждений задач 7.117—7.121, обосновать следующую геометрическую интерпретацию исследования квазиплана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ на оптимальность:

1) если точка Q_Y принадлежит гиперплоскости $u_{m+1}=0$, то $\bar{X}$ — решение задачи;

2) если точка Q_Y не принадлежит гиперплоскости $u_{m+1}=0$ и расширенные векторы условий $\bar{A}_j$ $(j \notin E_Y)$ лежат по ту же сторону от гиперплоскости $\bar{\pi}_Y$, что и векторы $\bar{A}_j$ $(j \in E_Y)$, то условия задачи противоречивы;

3) если точка Q_Y не принадлежит гиперплоскости $u_{m+1}=0$, но хотя бы один из расширенных векторов $\bar{A}_j$ $(j \notin E_Y)$ отделяется гиперплоскостью $\bar{\pi}_Y$ от векторов $\bar{A}_j$ $(j \in E_Y)$, то можно перейти к квазиплану $\bar{X}^1$ с меньшей невязкой.

Решить задачи **7.123—7.127** методом последовательного сокращения невязок; проиллюстрировать каждый шаг решения, исходя из геометрической интерпретации метода.

7.123.
$$\begin{aligned} &x_1 - 5x_2 \to \max, \\ &2x_1 + x_2 = 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2. \end{aligned}$$

7.124.
$$\begin{aligned} &-x_1 - x_2 \to \max, \\ &-x_1 - x_2 = 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2. \end{aligned}$$

7.125.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

7.126.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \to \max, \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 5. \end{aligned}$$

7.127.
$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 7x_6 \to \max, \\ &x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ &-2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6. \end{aligned}$$

ГЛАВА 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

§ 1. Матричные игры и задачи линейного программирования

Рассмотрим ситуацию, в которой сталкиваются противоположные интересы двух участников (партнеров).

Количественную характеристику интересов первого и второго партнеров будем обозначать v_1 и v_2 соответственно (v_1 — выигрыш первого партнера, v_2 — выигрыш второго).

Определение 8.1. *Совокупность правил, в результате выполнения которых сумма выигрышей v_1 и v_2 партнеров равна нулю:*

$$v_1 + v_2 = 0,$$

называется матричной игрой с нулевой суммой и обозначается буквой $\mathcal{A}$.

Определение 8.2. *Чистыми стратегиями e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ (e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$) называется совокупность возможных ходов первого (второго) игрока.*

Представим чистую стратегию e_i 1-го игрока (чистую стратегию e_j 2-го игрока) в виде m-мерного единичного вектора $e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ (в виде n-мерного единичного вектора $e_j = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0\ 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$.

Определение 8.3. *Матрица $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$, элемент a_{ij} которой равен величине выигрыша первого игрока (а значит — величине проигрыша второго) при условии, что он выбрал чистую стратегию с номером i, а его противник — чистую стратегию с номером j, называется матрицей выигрышей игры $\mathcal{A}$ или платежной матрицей.*

Определение 8.4. *Вектор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ($W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$), компонента u_i (компонента w_j) которого означает вероятность выбора первым игроком чистой стратегии e_i (вероятность выбора вторым игроком чистой стратегии e_j), называется смешанной стратегией первого (второго) игрока.*

Очевидно, что

$$u_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = 1;$$

$$w_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

Определение 8.5. *Функция*

$$M(U, W) = UAW = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i w_j, \tag{8.1}$$

значение которой равно математическому ожиданию выигрыша первого игрока при выборе партнерами смешанных стратегий $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ *и* $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, *называется платежной функцией игры* $\mathscr{A}$.

Определение 8.6. *Стратегии*

$$\bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m) \text{ и } \bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$$

называются оптимальными, если для произвольных стратегий $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ *и* $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *выполняются соотношения*

$$M(U, \bar{W}) \leqslant M(\bar{U}, \bar{W}) \leqslant M(\bar{U}, W). \tag{8.2}$$

Значение функции $M(\bar{U}, \bar{W}) = \bar{v}$ называется ценой игры $\mathscr{A}$.

Теорема 8.1. *Каждая матричная игра* $\mathscr{A}$ *с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, т. е. существуют оптимальные стратегии* $\bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ *и* $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$, *удовлетворяющие соотношениям* (8.2).

Рассмотрим игру $\mathscr{A}$ с матрицей выигрышей $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$, где $a_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и двойственную пару задач линейного программирования:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j &\geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y) &= \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i &\geqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i &\geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Теорема 8.2. *Оптимальные стратегии* $\bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ *и* $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ *связаны с оптимальными планами* $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ *и* $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ *задач* (8.3) *и* (8.4) *формулами*

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8.5}$$

$$\bar{w}_j = \frac{\bar{x}_j}{\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.6}$$

При этом цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ равна

$$\bar{v}=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{x}_j}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{y}_i}. \tag{8.7}$$

Рассмотрим теперь произвольную двойственную пару задач линейного программирования:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X)=(C, X)\to\max,\\ AX\leqslant B,\\ X\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y)=(B, Y)\to\min,\\ YA\geqslant C,\\ Y\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

и образуем матрицу

$$\Pi=\begin{Vmatrix} 0 & A & -B\\ -A' & 0 & C'\\ B' & -C & 0\end{Vmatrix} \tag{8.10}$$

(здесь A' — матрица, транспонированная к A, B и C' — векторы-столбцы, а B' и C — векторы-строки).

Определение 8.7. *Игра $\mathscr{S}$ называется симметричной, если ее матрица выигрышей $S=\|a_{ij}\|_{n,n}$ кососимметричная, т. е.*

$$a_{ij}=-a_{ji},\qquad i, j=1, 2, \dots, n.$$

Теорема 8.3. *Двойственная пара задач линейного программирования* (8.8), (8.9) *имеет решения $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ и $\bar{Y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)$ тогда и только тогда, когда симметричная матричная игра $\mathscr{S}$ с матрицей выигрышей* (8.10) *обладает оптимальной стратегией*

$$\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m, \dots, \bar{u}_{m+n}, \bar{u}_{m+n+1})$$

такой, что $\bar{u}_{m+n+1}>0$. При этом

$$\bar{y}_i=\frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_{m+n+1}},\qquad i=1, 2, \dots, m, \tag{8.11}$$

$$\bar{x}_j=\frac{\bar{u}_{m+j}}{\bar{u}_{m+n+1}},\qquad j=1, 2, \dots, n. \tag{8.12}$$

Пример 8.1. Каждый из двух игроков должен выбрать одно из чисел 1, 2, 3, 4. Если число, выбранное одним из партнеров, на единицу больше числа, выбранного другим, то первый партнер платит второму три единицы выигрыша. Если же игрок выбрал число, большее по крайней мере на две единицы, чем число, выбранное противником, то он платит партнеру четыре единицы выигрыша. В случае равного выбора игра заканчивается вничью. Определить платежную матрицу этой игры.

В нашем примере каждый игрок располагает четырьмя чистыми стратегиями: e_i ($i=1, 2, 3, 4$) — выбор игроком числа i. Матрица игры $A=\|a_{ij}\|_{4,4}$

определяется формулами

$$a_{ij}=\begin{cases} 3, & \text{если } i=j-1,\\ 4, & \text{если } i\leqslant j-2,\\ -3, & \text{если } i=j+1,\\ -4, & \text{если } i\geqslant j+2,\\ 0, & \text{если } i=j.\end{cases}$$

Отсюда

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 4 & 4\\ -3 & 0 & 3 & 4\\ -4 & -3 & 0 & 3\\ -4 & -4 & -3 & 0\end{Vmatrix}.$$

Заметим, что описанная игра симметрична.

Пример 8.2. Записать платежную функцию, найти оптимальные стратегии игроков и цену игры $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой имеет вид

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{Vmatrix}.$$

Здесь $M(U, W)=u_1w_1+2u_1w_2+3u_1w_3+2u_2w_1+3u_2w_2+4u_2w_3$.

Для определения оптимальных стратегий игроков рассмотрим двойственную пару задач линейного программирования вида (8.3), (8.4):

исходная задача

$$\begin{gathered} L(X)=x_1+x_2+x_3\to\max,\\ x_1+2x_2+3x_3\leqslant 1,\\ 2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 1,\\ x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,\end{gathered}$$

двойственная задача

$$\begin{gathered} \tilde{L}(Y)=y_1+y_2\to\min,\\ y_1+2y_2\geqslant 1,\\ 2y_1+3y_2\geqslant 1,\\ 3y_1+4y_2\geqslant 1,\\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2.\end{gathered}$$

Легко проверить, что решением этих задач являются векторы

$$\overline{X}=(1/2,0,0)\quad\text{и}\quad\overline{Y}=(0,1/2).$$

Используя утверждение теоремы 8.2, находим

$$\overline{U}=(0,1),\qquad\overline{W}=(1,0,0),\qquad\overline{v}=2,$$

т. е. данная игра оказалась разрешимой в чистых стратегиях.

Пример 8.3. Построить игру $\mathscr{S}$, эквивалентную двойственной паре задач линейного программирования:

исходная задача

$$\begin{gathered} L(X)=x_1+2x_2-x_3\to\max,\\ x_1+x_2-x_3\leqslant 1,\\ 2x_1-3x_2+x_3\leqslant 2,\\ x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,\end{gathered}$$

двойственная задача

$$\begin{gathered} \tilde{L}(Y)=y_1+2y_2\to\min,\\ y_1+2y_2\geqslant 1,\\ y_1-3y_2\geqslant 2,\\ -y_1+y_2\geqslant -1,\\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\end{gathered}$$

По формуле (8.10) определим матрицу П игры $\mathcal{S}$:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Написать матрицы выигрышей $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$ игр $\mathcal{A}$, описанных в условиях задач **8.1—8.5.**

8.1. Каждый из двух партнеров, не зная хода другого, называет цифру 1 или 2, причем при совпадении названных цифр второй платит первому одну единицу выигрыша, а в противном случае второй получает от своего противника столько же.

8.2. Игроки выбирают целые числа от 1 до k. Если первый выбрал x, а второй — y, то первый получает $x - y$ единиц выигрыша, если $x \geqslant y$, и платит $x + y$ единиц выигрыша, если $x < y$. Рассмотреть случай, когда $k = 5$.

8.3. Игроки называют один из четырех предметов: (α), (β), (γ), (δ), причем (α) побеждает (β), (γ) и (δ); (β) побеждает (γ) и (δ), а (γ) побеждает (δ). Игрок, назвавший выигрышный (по сравнению с противником) предмет, выигрывает k единиц выигрыша. Если оба партнера называют одинаковый предмет, то игра заканчивается вничью.

8.4*. У полководца, обороняющего город, имеется m дивизий, а у его противника — n ($m = 3$, $n = 2$). Известно, что город будет сдан только в том случае, если на одной из двух застав наступающие дивизии окажутся в численном превосходстве.

8.5*. Первый игрок называет одно из чисел 1 или 2, а второй — одно из чисел 1, 2, 3. При этом каждый из партнеров пытается угадать, какое из чисел назовет противник. Если оба партнера угадали или ошиблись одновременно, то игра заканчивается вничью. Если же угадал один из них, то он получает выигрыш, равный числу, названному противником.

8.6. Рассмотрим матричную игру $\mathcal{A}$, матрица выигрышей которой

$$A = \| a_{ij} \|_{m,n}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij}; \qquad \bar{a} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Доказать, что $\underline{a} \leqslant \bar{a}$.

8.7. Привести примеры, показывающие, что возможен каждый из двух случаев (см. предыдущую задачу):

1) $\underline{a} = \bar{a}$;
2) $\underline{a} < \bar{a}$.

8.8. Говорят, что матрица

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$$

обладает седловой точкой $a_{i_0 j_0}$, если при всех i ($i = 1, 2, \ldots, m$) и всех j ($j = 1, 2, \ldots, n$) выполняются неравенства

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0 j_0} \leqslant a_{i_0 j}.$$

Объяснить игровой смысл седловой точки матрицы A, которая рассматривается как матрица выигрышей некоторой игры $\mathscr{A}$.

8.9.** Доказать, что

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \bar{a}$$

тогда и только тогда, когда матрица

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$$

обладает седловой точкой $a_{i_0 j_0}$ (см. задачу 8.8), при этом $\underline{a} = \bar{a} = a_{i_0 j_0}$.

8.10. Может ли матрица

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$$

обладать несколькими седловыми точками (см. задачу 8.8)?

8.11*. Доказать, что матрица

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 \ldots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

имеет седловую точку (см. задачу 8.8).

8.12*. Доказать, что матрица

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = i - j, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет седловую точку (см. задачу 8.8).

8.13*. Доказать, что матрица

$$A = \| a_{ij} \|_{n,\,n},$$

где $a_{ij} \leqslant a_{i,\,j+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, имеет седловую точку (см. задачу 8.8).

8.14. Доказать, что матрицы

$$B = \| b_{ij} \|_{m,\,n} \quad \text{и} \quad A = \| a_{ij} \|_{m,\,n},$$

где $b_{ij} = a_{ij} + a$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), обладают или не обладают седловыми точками одновременно (см. задачу 8.8).

8.15. Показать, что матричная игра $\mathscr{A}$ имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда ее матрица выигрышей

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\, n}$$

обладает седловой точкой $a_{i_0 j_0}$ (см. задачу 8.8), при этом цена $\bar{v}$ игры равна $a_{i_0 j_0}$.

8.16. Известно, что матрицы

$$A^k = \| a_{ij}^k \|_{m,\, n}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l,$$

обладают седловыми точками $a_{i_0 j_0}^k$ (см. задачу 8.8). Можно ли утверждать, что матрица

$$A = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k A^k$$

также имеет седловую точку?

В **8.17—8.24** приведены платежные матрицы игр. Решить эти игры (найти цену $\bar{v}$ игр) в чистых стратегиях, используя утверждение задачи 8.15.

8.17. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

8.18. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{Vmatrix}$.

8.19. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.20. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$.

8.21.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & \ldots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \ldots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{Vmatrix}.$$

8.22.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{Vmatrix}_{n,\, n}.$$

8.23. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{Vmatrix}$.

8.24. $A = \begin{Vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{Vmatrix}$.

8.25. Доказать, что стратегии $\bar{U}$, $\bar{W}$ являются оптимальными тогда и только тогда, когда соотношение

$$M(U,\ \bar{W}) \leqslant M(\bar{U},\ \bar{W}) \leqslant M(\bar{U},\ W)$$

выполняется для всех чистых стратегий $U = e_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ $W = e_j$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

8.26. Доказать, что для оптимальных стратегий $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, $\bar{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ справедливо соотношение

$$M(\bar{U}, \bar{W})=\min_W \max_U M(U, W)=\max_U \min_W M(U, W),$$

где min берется по всем $W=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ $\left(w_j \geqslant 0,\ j=1, 2, \ldots, n, \sum_{j=1}^{n} w_j=1\right)$, а max берется по всем $U=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ $\left(u_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} u_i=1\right)$.

8.27. Показать, что условие, сформулированное в предыдущей задаче, не является достаточным для оптимальных стратегий, т. е. могут существовать неоптимальные стратегии $\tilde{U}$, $\tilde{W}$, для которых

$$M(\tilde{U}, \tilde{W})=\min_W \max_U M(U, W)=\max_U \min_W M(U, W).$$

8.28. Показать, что если $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, $\bar{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ оптимальные стратегии игры $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n},$$

то они являются оптимальными и для игры $\mathscr{B}$, матрица выигрышей которой

$$B=\|b_{ij}\|_{m,n},$$

где $b_{ij}=a_{ij}+a$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$. (Игры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ называются стратегическими эквивалентами.)

8.29. Показать, что

$$\bar{v}_{\mathscr{B}}=\bar{v}_{\mathscr{A}}+a,$$

где $\bar{v}_{\mathscr{A}}$, $\bar{v}_{\mathscr{B}}$ — цены игр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответственно (см. предыдущую задачу).

8.30.** Рассмотрим игру $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n}.$$

Доказать, что нахождение оптимальных стратегий $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ и $\bar{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ эквивалентно решению двойственной пары задач линейного программирования:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} & v \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leqslant v, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \\ & w_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} & v \to \max, \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant v, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ & \sum_{i=1}^{m} u_i \quad = 1, \\ & u_i \geqslant 0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

8.31. Из утверждений теоремы 8.1 и задачи 8.30 следует, что при любых a_{ij}, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$, задачи (α) и ($\tilde{\alpha}$) разрешимы. Доказать их разрешимость, используя следствие 6.1 из первой теоремы двойственности.

В задачах **8.32—8.37** рассматриваются игры, платежные матрицы которых

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$$

приведены в условиях. Построить эквивалентные этим играм пары двойственных задач линейного программирования.

8.32. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$. **8.33.** $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

8.34. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **8.35.** $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

8.36. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **8.37.** $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.38*. Доказать, что цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ (матрица выигрышей которой $A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$, где $a_{ij} \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$) больше нуля тогда и только тогда, когда при любом j найдется номер i, при котором $a_{ij} > 0$ (т. е. каждый столбец матрицы A содержит положительный элемент).

8.39. Доказать, что для цены $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ (матрица выигрышей которой $A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$) справедлива оценка

$$\sum\nolimits^{\ominus} a_{ij} \leqslant \bar{v} \leqslant \sum\nolimits^{\oplus} a_{ij},$$

где знаки $\ominus$, $\oplus$ означают, что суммирование проводится по неположительным и по неотрицательным элементам a_{ij} соответственно.

8.40. Доказать, что для любых стратегий $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ игры $\mathscr{A}$ (матрица выигрышей которой $A = \| a_{ij} \|_{m,\,n}$) справедливо соотношение

$$\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j.$$

8.41. Доказать, что если для некоторых стратегий

$$\overline{U}=(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_m),\quad \overline{W}=(\overline{w}_1,\ \overline{w}_2,\ \ldots,\ \overline{w}_n)$$

игры $\mathscr{A}$ (матрица выигрышей которой $A=\|a_{ij}\|_{m,\,n}$) выполняется соотношение

$$\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i=\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j,$$

то $\overline{U}$, $\overline{W}$ — оптимальные стратегии этой игры.

8.42*. Рассмотрим задачу линейного программирования в симметричной форме записи

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j\to\max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $a_{ij}>0$ $(i=1,2,\ldots,\ m,\ j=1,2,\ldots,\ n)$, $b_i>0$ $(i=1,2,\ldots,\ m.)$

Обозначим через $\overline{L}$ максимальное значение формы $L(X)$ на множестве планов этой задачи. Доказать, что цена $\bar{v}$ игры $\tilde{\mathscr{A}}$, матрица выигрышей которой

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n & -\overline{L} \\ -a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} & b_1 \\ -a_{21} & -a_{22} & \ldots & -a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \ldots & -a_{mn} & b_m \end{Vmatrix},$$

равна нулю.

Решить игры[1]), матрицы выигрышей которых приведены в условиях задач **8.43.**—**8.48,** используя утверждение теоремы 8.2.

8.43. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. **8.44.** $A=\begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **8.45.** $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$.

8.46. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **8.47.** $A=\begin{Vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, где $a>0$.

---

[1]) Здесь под решением игры понимается нахождение оптимальных стратегий $\overline{U}$, $\overline{W}$ и цены $\bar{v}$. В случае, когда игра имеет несколько решений, найти одно из них.

8.48.
$$A=\begin{Vmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a \\ a & 1 & a & \dots & a & a \\ a & a & 1 & \dots & a & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & 1 & a \\ a & a & a & \dots & a & 1 \end{Vmatrix}_{n,n},$$
где $a>0$.

Решить игры (см. сноску к задачам 8.43—8.48), матрицы выигрышей которых приведены в условиях задач **8.49.—8.56,** используя утверждение задачи 8.30.

8.49. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.50. $A=\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

8.51. $A=\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

8.52. $A=\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

8.53. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$,

8.54. $A=\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix}$.

8.55. $\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{Vmatrix}$.

8.56. $A=\begin{Vmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & \dots & a \end{Vmatrix}_{n,n}$.

8.57. Найти цену $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ с матрицей выигрышей
$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$$
двумя способами:

1) использовать утверждение задачи 8.30;

2) использовав утверждения задач 8.28, 8.29, привести игру $\mathscr{A}$ к стратегически эквивалентной игре $\mathscr{B}$, матрица выигрышей которой B положительна; затем найти цену игры $\mathscr{B}$, используя утверждение теоремы 8.2.

8.58*. Чистая стратегия $e_k=(\underbrace{0,\ 0,\ \dots\ 0,\ 1}_{k},\ 0,\ \dots\ 0)$ $(e_l=(\underbrace{0,\ 0,\ \dots\ 0,\ 1}_{l},\ 0,\ \dots,\ 0))$ называется существенной, если существует такая оптимальная стратегия $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$ $(\bar{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n))$, для которой $\bar{u}_k>0$ $(\bar{w}_l>0)$. Доказать, что стратегия e_k (e_l) существенна тогда и только тогда, когда для любой оптимальной стратегии $\bar{W}$ $(\bar{U})$ справедливо равенство $M(e_k, \bar{W})=\bar{v}$ $(M(e_l, \bar{U})=\bar{v})$.

8.59. Рассмотрим игру $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой
$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Доказать, что чистые стратегии первого игрока $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$ и чистые стратегии второго игрока $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, 0)$, $e_4=(0, 0, 0, 1)$ являются существенными.

8.60. Показать, что если чистая стратегия первого игрока $e_k=(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)$ не является существенной, то цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ не изменится, если вычеркнуть k-ю строку матрицы выигрышей

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n}$$

и решить полученную игру.

8.61. Показать, что если чистая стратегия второго игрока $e_l=(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{l}, 0, \ldots, 0)$ не является существенной, то цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ не изменится, если вычеркнуть l-й столбец матрицы выигрышей

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n}$$

и решить полученную игру.

8.62. Привести пример игры, в которой первый игрок обладает оптимальной стратегией $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, где $\bar{u}_1=0$, однако чистая стратегия $e_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$ этого игрока является существенной.

8.63. Доказать, что множество оптимальных стратегий первого (второго) игрока есть выпуклый многогранник.

8.64*. Доказать, что разность между числами $\bar{m}$ и $\bar{n}$ существенных стратегий (см. задачу 8.58) первого и второго игроков равна

$$\bar{m}-\bar{n}=\rho_{\bar{U}}-\rho_{\bar{W}},$$

где $\rho_{\bar{U}}$, $\rho_{\bar{W}}$ — размерность многогранников оптимальных стратегий первого и второго игроков соответственно.

8.65*. Доказать, что оптимальные стратегии $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, $\bar{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ игроков в игре $\mathscr{A}$, платежная матрица которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n}$$

и цена игры $\bar{v}$, могут быть найдены по формулам

$$\bar{u}_i=\begin{cases}\bar{u}_{i_\lambda} & \text{при } i=i_\lambda,\\ 0 & \text{при } i\neq i_\lambda,\end{cases}$$

$$\lambda=1, 2, \ldots, t,$$

$$\bar{w}_j=\begin{cases}\bar{w}_{j_\mu} & \text{при } j=j_\mu,\\ 0 & \text{при } j\neq j_\mu,\end{cases}$$

$$\mu=1, 2, \ldots, t,$$

где $\bar{u}_{i_\lambda}$ ($\lambda=1, 2, \ldots, t$) и $\bar{w}_{j_\mu}$ ($\mu=1, 2, \ldots, t$) являются решениями систем

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{t} a_{i_\lambda j_\mu}\bar{w}_{j_\mu}=\bar{v}, \qquad \lambda=1, 2, \ldots, t,\\ &\sum_{\mu=1}^{t} \bar{w}_{j_\mu} \qquad =1, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{t} a_{i_\lambda j_\mu}\bar{u}_{i_\lambda}=\bar{v}, \qquad \mu=1, 2, \ldots, t,\\ &\sum_{\lambda=1}^{t} \bar{u}_{i_\lambda} \qquad =1, \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

а $\tilde{A}=\|a_{i_\lambda j_\mu}\|_{t,t}$ — некоторая невырожденная подматрица матрицы A.

8.66. Доказать, что если l-я строка матрицы $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$ больше k-й строки, т. е. $a_{lj}>a_{kj}$ ($j=1, 2, \ldots, n$), то цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n},$$

не изменится, если вычеркнуть из этой матрицы k-ю строку и решить полученную игру.

8.67. Используя утверждение задачи 8.66, найти цену $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 2n\\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2n & 3n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ n & 2n & 3n & \ldots & n(n-1) & n^2 \end{Vmatrix}.$$

8.68. Доказать, что если l-й столбец матрицы $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$ больше k-го столбца, т. е. $a_{il}>a_{ik}$ ($i=1, 2, \ldots, m$), то цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n},$$

не изменится, если вычеркнуть из этой матрицы l-й столбец и решить полученную игру.

8.69*. Используя утверждения задач 8.66 и 8.68, найти цену $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 7 & 2 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 0 & -2 & -1\\ 4 & 4 & 1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 5 & 4 & -3 \end{Vmatrix}.$$

8.70. Обобщить утверждение задачи 8.66, показав, что, если строка l матрицы $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$ меньше выпуклой комбинации строк l_t ($t=1, 2, \ldots, T$), т. е.

$$a_{lj}<\sum_{t=1}^{T}\alpha^t a_{l_t j}, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

где $\alpha^t\geqslant 0$, $t=1, 2, \ldots, T$, $\sum\limits_{t=1}^{T}\alpha^t=1$, то цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n},$$

не изменится, если вычеркнуть из этой матрицы l-ю строку и решить полученную игру.

8.71. Обобщить утверждение задачи 8.68, показав, что если столбец l матрицы $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$ больше выпуклой комбинации столбцов l_s ($s=1, 2, \ldots, S$), т. е.

$$a_{il}>\sum_{s=1}^{S}\beta^s a_{il_s}, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

где $\beta^s\geqslant 0$ ($s=1, 2, \ldots, S$), $\sum\limits_{s=1}^{S}\beta^s=1$, то цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ (платежная матрица которой $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$) не изменится, если вычеркнуть из этой матрицы l-й столбец и решить полученную игру.

8.72. Доказать, что цена $\bar{v}$ симметричной игры $\mathscr{S}$ равна нулю.

8.73. Доказать, что стратегия $U=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, оптимальная для первого игрока в симметричной игре $\mathscr{S}$, является оптимальной и для второго.

8.74. Доказать, что стратегия $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ является оптимальной стратегией для симметричной игры $\mathscr{S}$, матрица выигрышей которой

$$S=\|a_{ij}\|_{m,m},$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\bar{u}_i\geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, m.$$

8.75*. Рассмотрим игру $\mathscr{A}$ (вообще говоря, не симметричную), платежная матрица которой

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n}.$$

Из матрицы A можно образовать матрицу B по формулам

$$B=\|b_{ts}\|=\|a_{ij,kl}\|$$

($i, k=1, 2, \ldots, m$; $j, l=1, 2, \ldots, n$), где $b_{ts}=a_{ij,kl}=a_{il}-a_{kj}$.

Доказать, что:

1) игра $\mathscr{B}$ с матрицей выигрышей B симметрична;

2) если $\overline{Z}=(\bar{z}_{11}, \bar{z}_{12}, \ldots, \bar{z}_{1n}, \bar{z}_{21}, \bar{z}_{22}, \ldots, \bar{z}_{2n}, \ldots, \bar{z}_{m1}, \bar{z}_{m2}, \ldots, \bar{z}_{m,m})$ — оптимальная стратегия игры $\mathscr{B}$, то $\overline{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ и $\overline{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$, где $\bar{u}_i=\sum_{j=1}^{n} \bar{z}_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, а $\bar{w}_j=\sum_{i=1}^{m} \bar{z}_{ij}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, — оптимальные стратегии игроков в игре $\mathscr{A}$.

8.76. Использовав метод, описанный в предыдущей задаче, симметризовать игру $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

8.77. Используя метод, описанный в задаче 8.75, симметризовать игру $\mathscr{E}$, платежная матрица которой

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

8.78. Рассмотрим игру $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$, где $a_{ij}>0$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Из матрицы A образуем матрицу S:

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & A & -1'_m \\ -A' & 0 & 1'_n \\ 1_m & -1_n & 0 \end{Vmatrix},$$

где $1_m=(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{m})$, $1_n=(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})$.

Доказать, что:

1) игра $\mathscr{S}$ с матрицей выигрышей S симметрична;

2) если $\overline{Z}=(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m, \bar{z}_{m+1}, \ldots, \bar{z}_{m+n}, \bar{z}_{m+n+1})$ — оптимальная стратегия игры $\mathscr{S}$, то $\bar{z}_{m+n+1}>0$;

3) $\overline{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ и $\overline{W}=(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$,

где

$$\bar{u}_i=\frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_{m+n+1}}, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

$$\bar{w}_j=\frac{\bar{z}_{m+j}}{\bar{z}_{m+n+1}}, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

— оптимальные стратегии игроков в игре $\mathscr{A}$.

8.79. Используя метод, описанный в предыдущей задаче, симметризовать игру $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Свести решение пар двойственных задач линейного программирования, приведенных в номерах **8.80** — **8.82**, к определению оптимальных стратегий матричных игр.

8.80. Исходная задача

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\to \max, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 1, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\to \min, \\ y_1 + y_2 &\geqslant 1, \\ -y_1 + 2y_2 &\geqslant 3, \\ y_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

8.81*. Исходная задача

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \max, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1, \\ x_1 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\to \min, \\ y_1 + 2y_2 &\geqslant 1, \\ -y_1 + 3y_2 &= -1, \\ y_1 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

8.82*. Исходная задача

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &\to \max, \\ x_1 - x_2 \qquad &\geqslant 1, \\ x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 \qquad - x_3 &= 0, \\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1,\ 2, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 \qquad &\to \min, \\ y_1 \qquad + y_3 &\geqslant 1, \\ -y_1 + y_2 \qquad &\geqslant 0, \\ -y_2 - y_3 &= 0, \\ y_1 \leqslant 0,\ y_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

8.83. Рассмотрим симметричную игру $\mathscr{S}$, порожденную двойственной парой задач линейного программирования, заданных в симметричной форме записи:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j &\geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y) &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i &\geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i &\geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

Пусть

$$\overline{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m, \bar{u}_{m+1}, \ldots, \bar{u}_{m+n}, \bar{u}_{m+n+1})$$

— оптимальная стратегия игры $\mathcal{S}$ такая, что $\bar{u}_{m+n+1} = 0$. Показать, что отсюда еще не следует неразрешимость двойственной пары задач (α) и ($\tilde{\alpha}$).

8.84.** Рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования в симметричной форме записи:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ & \qquad c_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & \qquad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & \qquad b_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y) &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i &\geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i &\geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

Доказать, что все оптимальные стратегии симметричной игры $\mathcal{S}$, порожденной этими задачами, имеют либо равную нулю последнюю компоненту, либо все их последние компоненты больше нуля.

8.85. Доказать, что последняя компонента $\bar{u}_{m+n+1}$ в любой оптимальной стратегии симметричной игры $\mathcal{S}$, порожденной двойственной парой задач линейного программирования:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, &\quad i=1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0, &\quad j=1, 2, \ldots, n, \\ c_j > 0, &\quad j=1, 2, \ldots, n, \\ b_i < 0, &\quad i=1, 2, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i &\to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, &\quad j=1, 2, \ldots, n, \\ y_i \geqslant 0, &\quad i=1, 2, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

всегда положительна, если хотя бы одно из множеств M_X или M_Y ограничено. (Здесь M_X — множество планов задачи (α), а M_Y — множество планов задачи ($\tilde{\alpha}$).)

8.86.** Рассмотрим двойственную пару задач линейного программирования в симметричной форме записи:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, &\quad i=1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0, &\quad j=1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i &\to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, &\quad j=1, 2, \ldots, n, \\ y_i \geqslant 0, &\quad i=1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

Предположим, что параметры задач удовлетворяют следующим условиям:

а) $a_{ij} \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$;

б) $c_j > 0$, $j=1, 2, \ldots, n$;

в) $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

г) для любого j найдется номер i такой, что $a_{ij} > 0$.

Пусть $\overline{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, $\overline{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ и $\bar{v}$ — оптимальные стратегии игроков и цена игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой $\tilde{A} = \| \tilde{a}_{ij} \|_{m, n}$, где $\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i c_j}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказать, что векторы $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $\overline{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$, где

$$\bar{x}_j = \frac{\bar{w}_j}{\bar{v} c_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

а

$$\bar{y}_i = \frac{\bar{u}_i}{\bar{v} b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

являются решениями задач (α) и ($\tilde{\alpha}$).

8.87*. Доказать, что если $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $\overline{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ — оптимальные планы задач (α) и ($\tilde{\alpha}$) (см. задачу 8.86), то $\overline{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, $\overline{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ и $\bar{v}$, где

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\tilde{L}(\overline{Y})} \bar{y}_i b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\bar{w}_j = \frac{1}{L(\overline{X})} \bar{x}_j c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\bar{v} = \frac{1}{L(\overline{X})} = \frac{1}{\tilde{L}(\overline{Y})},$$

— оптимальные стратегии игроков и цена игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой $\tilde{A}$.

§ 2. Итеративные методы решения матричных игр

Метод «фиктивной» игры.

Рассмотрим игру $\mathscr{A}$, платежная матрица которой $A = \| a_{ij} \|_{m, n}$ удовлетворяет условиям:

1) $a_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

2) для любого j найдется номер i, при котором $a_{ij} > 0$.

Пусть $U = \{U^0, U^1, \ldots, U^s, \ldots\}$ и $W = \{W^0, W^1, \ldots, W^t, \ldots\}$ — две последовательности векторов $U^k = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_m^k)$ и $W^k = (w_1^k, w_2^k, \ldots, w_n^k)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, s, \ldots$), определенные следующими соотношениями:

а) $U^0 = e_{s_0} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{s_0}, 0, \ldots, 0)$, где s_0 — произвольное натуральное число, не превосходящее m;

$W^0 = e_{t_0} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{t_0}, 0, \ldots, 0)$, где t_0 — произвольное натуральное число, не превосходящее n;

b)
$$U^{s+1} = \frac{s}{s+1} U^s + \frac{1}{s+1} e_{i_{s+1}},$$

$$W^{t+1} = \frac{t}{t+1} W^t + \frac{1}{t+1} e_{i_{t+1}},$$

где i_{s+1} и i_{t+1} определяются равенствами

$$\max_i AW^s = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^s = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{s+1} j} w_j^s,$$

$$\min_j U^{t+1} A = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^{t+1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i j_{t+1}} u_i^{t+1}.$$

Теорема 8.4. *Справедливы соотношения:*

1) $\lim\limits_{s \to \infty} \min\limits_j U^s A = \bar{v}$,

2) $\lim\limits_{t \to \infty} \max\limits_i AW^t = \bar{v}$,

где $\bar{v}$ — *цена игры* $\mathscr{A}$.

При этом выполняется оценка

$$\left| 1 - \frac{\bar{v}_i^s}{\bar{v}} \right| \leqslant \delta \bar{v}^s = 2\, \frac{\bar{v}_2^s - \bar{v}_1^s}{\bar{v}_2^s + \bar{v}_1^s}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\bar{v}_2^s = \max_i AW^s = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^s,$$

$$\bar{v}_1^s = \min_j U^s A = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^s.$$

Рассмотрим на простом числовом примере порядок действий при решении игры описанным методом.

Пример 8. 4. Платежная матрица игры $\mathscr{A}$ имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Примем в качестве U^0 чистую стратегию e_1.

Параметры нулевой итерации:

$$U^0 = (1, 0, 0), \quad W^0 = (0, 1, 0), \quad U^0 A = (2, 0, 0),$$
$$AW^0 = (0, 2, 0), \quad v^1 = 0, \quad v^2 = 2, \quad \delta v^0 = 2.$$

Параметры первой итерации:

$$U^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \; U^1 A = (1, 1, 0), \; W^1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
$$AW^1 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right), \; v_1^1 = 0, \; v_2^1 = 1, \; \delta v^1 = 2.$$

Параметры второй итерации:

$$U^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \; U^2 A = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right), \; W^2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$AW^2 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \; v_1^2 = 0, \; v_2^2 = \frac{2}{3}, \; \delta v^2 = 2.$$

Параметры третьей итерации:

$$U^3=\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ 0\right),\quad U^3A=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right),\quad W^3=\left(0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right),$$

$$AW^3=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right),\quad v_1^3=0,\quad v_2^3=\frac{3}{4},\quad \delta v^3=2.$$

Параметры четвертой итерации:

$$U^4=\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right),\quad U^4A=\left(\frac{2}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{5}\right),\quad W^4=\left(0,\ \frac{1}{5},\ \frac{4}{5}\right),$$

$$AW^4=\left(0,\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right),\quad v_1^4=\frac{1}{5},\quad v_2^4=\frac{4}{5},\quad \delta v^4=\frac{6}{5}.$$

Параметры пятой итерации:

$$U^5=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right),\quad U^5A=\left(\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3}\right),\quad W^5=\left(0,\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right),$$

$$AW^5=\left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{6}\right),\quad v_1^5=\frac{1}{3},\quad v_2^5=\frac{5}{6},\quad \delta v^5=\frac{6}{7}.$$

Параметры шестой итерации:

$$U^6=\left(\frac{1}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{3}{7}\right),\quad U^6A=\left(\frac{2}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{3}{7}\right),$$

$$W^6=\left(\frac{1}{7},\ \frac{1}{7},\ \frac{5}{7}\right),\quad AW^6=\left(\frac{2}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{5}{7}\right),\quad v_1^6=2/7,$$

$$v_2^6=\frac{5}{7},\quad \delta v^6=\frac{6}{7}.$$

Параметры седьмой итерации:

$$U^7=\left(\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2}\right),\quad U^7A=\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right),$$

$$W^7=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{5}{8}\right),\quad AW^7=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{8}\right),\quad v_1^7=\frac{1}{4},$$

$$v_2^7=\frac{5}{8},\quad \delta v^7=\frac{6}{7}.$$

Сравнивая параметры семи итераций, имеем $v_1^s\leqslant\bar{v}\leqslant v_2^s$, отсюда $\max\limits_s v_1^s\leqslant\bar{v}\leqslant\min\limits_s v_2^s$, или $\frac{1}{3}\leqslant\bar{v}\leqslant\frac{2}{3}$. Для сравнения заметим, что точное значение цены $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ равно $\frac{1}{2}$.

Метод Неймана.

Если платежная матрица игры

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n},$$

то компоненты оптимальных стратегий $\overline{U}$, $\overline{W}$ и цена v должны удовлетворять (см. задачу 8. 30) соотношениям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i \geqslant \bar{v},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{w}_j \leqslant \bar{v},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$\bar{u}_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$\bar{w}_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Оценкой «близости» стратегий $U=(u_1, \ldots, u_m)$, $W=(w_1, \ldots, w_n)$ и числа v к оптимальным стратегиям и цене $\bar{v}$ является функция

$$\Phi=\sum_{i=1}^{m} p_i^2+\sum_{j=1}^{n} q_j^2,$$

где $p_i=\max\limits_i (P_i,\ 0)$, $q_j=\max\limits_j (Q_j,\ 0)$, а

$$P_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j-v, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

и

$$Q_j=-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i+v, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Определим последовательность $U=\{U^0,\ U^1, \ldots\}$, $W=\{W^0,\ W^1, \ldots\}$ следующим образом:

1) $U^0=\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}, \ldots,\ \frac{1}{m}\right)$,

$W^0=\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}, \ldots,\ \frac{1}{n}\right)$,

$v^0=\frac{1}{mn}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$;

2) $U^{s+1}=(1-\alpha^s)\,U^s+\alpha^s\tilde{U}^s$,

$W^{s+1}=(1-\alpha^s)\,W^s+\alpha^s\tilde{W}^s$,

$v^{s+1}=(1-\alpha^s)\,v^s+\alpha^s\tilde{v}^s$,

где $\tilde{U}^s=(\tilde{u}_1^s,\ \tilde{u}_2^s, \ldots,\ \tilde{u}_m^s)$, $\tilde{W}^s=(\tilde{w}_1^s,\ \tilde{w}_2^s, \ldots,\ \tilde{w}_n^s)$ и $\tilde{v}$ определяются так:

$$\tilde{u}_i^s=\frac{p_i^s}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^s}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$\tilde{w}_j^s=\frac{q_j^s}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_j^s}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$\tilde{v}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{u}_i\tilde{w}_j$$

(если же одна $\sum_{i=1}^{m} p_i^s = 0$ $\left(\sum_{j=1}^{n} q_j^s = 0\right)$, то в качестве $\tilde{U}^s$ ($\tilde{W}^s$) можно взять любой вектор, сумма неотрицательных компонент которого равна 1),

$$\alpha^s = \frac{\Phi^s}{\Phi^s + C^s}, \quad \text{где} \quad C^s = \sum_{i=1}^{m} (P_i^s)^2 + \sum_{j=1}^{n} (Q_j^s)^2,$$

а

$$\tilde{P}_i^s = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{w}_j^s - \tilde{v}^s, \qquad \tilde{Q}_j^s = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{u}_i^s + \tilde{v}^s.$$

Теорема 8.5. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{s \to \infty} \Phi^s = 0,$$

при этом $0 \leqslant \Phi^s \leqslant \frac{a}{s}$, *где* $a = (m+n)(\bar{a} - \underline{a})$, *а* $\bar{a} = \max_{i,j} a_{ij}$, $\underline{a} = \min_{i,j} a_{ij}$.

Пример 8.5. Рассмотрим игру $\mathscr{A}$, матрица выигрышей которой

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Параметры 3-х последовательных итераций занесены в таблицу 8.1.

	$\Phi^{(s)}$	$\alpha^{(s)}$	$u_i^{(s)}$		$w_j^{(s)}$		$P_i^{(s)}$		$Q_j^{(s)}$		$v^{(s)}$
s \ i, j	—	—	1	2	1	2	1	2	1	2	—
0	1,88	0,30	0,50	0,50	0,50	0,50	1,33	0,33	— 0,33	— 1,33	1,50
1	0,94	0,05	0,59	0,44	0,50	0,50	0,96	— 0,04	0,13	— 1,33	1,62
2	0,84	0,05	0,61	0,42	0,53	0,48	0,91	0,07	0,12	— 1,26	1,47
3	0,76	0,05	0,63	0,40	0,55	0,47	0,85	0,16	0,10	— 0,37	1,41

Табл. 8.1.

8.88. Показать, что итеративный процесс, описанный в методе «фиктивной» игры, имеет следующую игровую интерпретацию:

1) партия проводится s раз ($s = 0, 1, 2, \ldots$);

2) в нулевой партии первый игрок выбирает произвольную чистую стратегию, а второй — чистую стратегию, наилучшую (с его точки зрения) против стратегии, выбранной противником;

3) если после s партий второй игрок s_j раз выбрал чистую стратегию e_j, то первый игрок выбирает в $(s+1)$ партии чистую стратегию $e_{i_{s+1}}$, наилучшую против смешанной стратегии $W^s = (s_1/s, s_2/s, \ldots, s_n/s)$ противника. Аналогично, если после $(s+1)$ партии первый игрок выбрал чистую стратегию e_i — s_i раз, то в $(s+1)$ партии второй игрок выбирает чистую стратегию $e_{j_{s+1}}$, наилучшую против смешанной стратегии $U^s = (s_1/s, s_2/s, \ldots, s_m/s)$ противника.

8.89. Изменить схему «фиктивной» игры для случая, когда партнеры делают выбор не поочередно (см. задачу 8.87), а одновременно, т. е. игра проводится по следующим правилам:

1) партия повторяется s раз ($s = 0, 1, 2, \ldots$);

2) в нулевой партии первый игрок выбирает произвольную чистую стратегию и второй — произвольную чистую стратегию;

3) если после s партий второй игрок s_j раз выбрал чистую стратегию с номером j, то первый выбирает в $(s+1)$-й партии чистую стратегию $e_{i_{s+1}}$, наилучшую против стратегии $W^s = (s_1/s, \ldots, s_n/s)$ противника. Аналогично, если после s партий первый игрок s_i раз выбрал чистую стратегию e_i, то в $(s+1)$-й партии второй игрок выбирает чистую стратегию $e_{j_{s+1}}$, наилучшую против смешанной стратегии $U^s = (s_1/s, s_2/s, \ldots, s_m/s)$ противника.

8.90. Используя утверждение теоремы 8.4 о сходимости метода «фиктивной» игры, доказать сходимость метода, описанного в задаче 8.89.

8.91. Доказать, что если игра $\mathscr{A}$ обладает единственными оптимальными стратегиями, то при $s \to \infty$ справедливы соотношения:

1) $\lim\limits_{s\to\infty} U^s = \overline{U}$;

2) $\lim\limits_{s\to\infty} W^s = \overline{W}$, где $\overline{U}$, $\overline{W}$ — оптимальные стратегии игроков в игре $\mathscr{A}$.

Решить игры $\mathscr{A}$, матрицы выигрышей которых приведены в условиях задач **8.92** — **8.100**, методом «фиктивной» игры (сделать 10 итераций и оценить погрешность).

8.92. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.93. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.94. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.95. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.96. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.97. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

8.98. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.99. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.100. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

Решить игры (сделать 10 итераций), приведенные в номерах **8.101—8.106**, методом, описанным в задаче 8.88.

8.101. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.102. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

8.103. $A=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$

8.104. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

8.105. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$

8.106. $A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.107. Доказать, что если игра $\mathscr{A}$ обладает единственными оптимальными стратегиями, то справедливы следующие соотношения:

1) $\lim\limits_{s\to\infty} v^s=\bar{v}$;

2) $\lim\limits_{s\to\infty} U^s=\bar{U}$;

3) $\lim\limits_{s\to\infty} W^s=\bar{W}$,

где $\bar{U}$, $\bar{W}$ и $\bar{v}$ — оптимальные стратегии и цена игры $\mathscr{A}$.

8.108. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^s \tilde{P}_i^s+\sum_{j=1}^{n} q_j^s \tilde{Q}_j^s=0.$$

8.109. Доказать, что сходимость метода Неймана не изменится, если в качестве начальных стратегий U^0 и W^0 выбрать произвольные чистые стратегии игроков.

8.110. Доказать, что

$$|\tilde{Q}_j^s|\leqslant \bar{a}, \qquad |\tilde{P}_i^s|\leqslant \underline{a},$$
$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Решить игры (сделать десять итераций), приведенные в номерах **8.111—8.116**, методом Неймана.

8.111. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.112. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

8.113. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

8.114. $A=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

8.115. $A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

8.116. $A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. Да. **1.2.** Да. **1.3.** Нет. **1.4.** Нет. **1.5.** Нет, если отрезки не лежат на одной прямой. **1.6.** Нет. **1.8.** Да. **1.9.** Да. **1.10.** Нет. **1.11.** Нет. **1.12.** Нет. **1.13.** Да. **1.14.** Нет. **1.15.** Да. **1.16.** Нет. **1.17.** Да. **1.18.** $\lambda=0$. **1.19.** $\lambda=0$, $\lambda=-1/4$. **1.20.** $-2\leqslant\lambda\leqslant-1$. **1.21.** $\lambda\leqslant 2$, $\lambda\geqslant 3$.

1.24. Вообще говоря, нет. Например, M_1+M_2, где M_1 — отрезок на прямой, а M_2 — точка, не принадлежащая M_1.

1.25. Может. Например, $M_1+M_2+\ldots+M_n$, где M_i — отрезки на прямой, конец каждого из которых совпадает с началом следующего. **1.26.** Может.

1.27. В случае, если одно из множеств M_1 или M_2 не замкнуто, множества M_1 и M_2 могут не иметь общих точек. Если же M_1 и M_2 — замкнутые множества, то они обязательно имеют общую точку.

Рассмотреть отрезок, концы которого лежат в разных множествах, и доказать, используя замкнутость множеств-слагаемых, что предположение о пустоте пересечения противоречит выпуклости суммы.

1.29. Убедиться, что условие задачи эквивалентно следующему: многоугольник совпадает с пересечением полуплоскостей, границами которых являются прямые, содержащие стороны многоугольника.

1.30. Для доказательства необходимости заметить, что при $k=2$ условие задачи совпадает с определением выпуклости, далее воспользоваться методом математической индукции.

1.32. Множество состоит из одной точки. **1.33.** Нет.

1.34. Предположим, что A_0 не является крайней точкой множества M.

Представим A_0 в следующем виде: $A_0=\dfrac{\tilde{A}_0+\tilde{\tilde{A}}_0}{2}$, где $\tilde{A}_0$ и $\tilde{\tilde{A}}_0$ принадлежит M, причем $\tilde{A}_0\neq\tilde{\tilde{A}}_0$.

Так как расстояние в R^n между точками A и B определяется как $|B-A|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, где x_i и y_i — координаты точек A и B соответственно, то

$$|A_1-A_0|=\left|A_1-\frac{\tilde{A}_0+\tilde{\tilde{A}}_0}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|(A_1-\tilde{A}_0)+(A_1-\tilde{\tilde{A}}_0)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(|A_1-\tilde{A}_0|+|A_1-\tilde{\tilde{A}}_0|\right)\leqslant|A_1-A_0|.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши—Буняковского и тем, что

$$|A_1-\tilde{A}_0|\leqslant|A_1-A_0| \quad \text{и} \quad |A_1-\tilde{\tilde{A}}_0|\leqslant|A_1-A_0|.$$

Полученная оценка показывает, что оба неравенства должны выполняться на самом деле как точные равенства. Для этого необходимо, чтобы векторы

$A_1 - \tilde{A}_0$ и $A_1 - \tilde{\tilde{A}}_0$ были коллинеарны, т. е. $A_1 - \tilde{A}_0 = \lambda(A_1 - \tilde{\tilde{A}}_0)$, и чтобы $|A_1 - \tilde{A}_0| = |A_1 - \tilde{A}_0| = |A_1 - A_0|$. При выполнении этих условий $\tilde{A}_0 = \tilde{\tilde{A}}_0$ (проверить), что противоречит предположению. Таким образом, A_0 — обязательно крайняя точка множества M.

1.35. Воспользоваться утверждением задачи 1.34.

1.36. Воспользоваться результатом задачи 1.34. **1.38.** $\rho = 2$. **1.39.** $\rho = 0$. **1.40.** $\rho = n - 1$. **1.41.** $\rho = n$. **1.42.** $\rho = 1$. **1.43.** $\rho = 2$. **1.44.** а) $\lambda \neq 0$; б) $-1 < \lambda < 1$.

1.45. $$\rho(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda < 0 \text{ и } \lambda > 4, \\ 0 & \text{при } \lambda = 0 \text{ и } \lambda = 4, \\ \text{не определена} & \text{при } 0 < \lambda < 4. \end{cases}$$

1.46. Прямая; луч; отрезок.

1.47. б) Показать, что существование внутренней точки X_0 у множества $M \subset R^m$ эквивалентно следующему утверждению. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon_i| < \varepsilon_0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ множеству M принадлежат точки $X_0 + E = (x_{0_1} + \varepsilon_1, x_{0_2} + \varepsilon_2, \ldots, x_{0_m} + \varepsilon_m)$; здесь x_{0_i} — координаты точки X_0, а ε_i координаты вектора E.

1.48. Показать, что $X = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$, где X_i — внутренняя точка множества M_{ε_i}, является внутренней точкой множества M.

1.50. Нет. Например, отрезок на плоскости R^2 с концами в точках $X_1 = (1, 0)$ и $X_2 = (0, 1)$.

1.51. Доказать, что M удовлетворяет условиям задачи 1.48.

1.52. Для доказательства необходимости условия задачи показать, что если выбрать начало системы координат в R^n в одной из точек M, то множество M будет содержать n линейно независимых точек. Далее воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

1.54. Пусть размерность множества M_1 равна ρ_1. Это значит, что M_1 содержит ρ_1 отрезков, которые пересекаются в точке $X_1 \in M_1$ и концы которых X_1^i $(i = 1, 2, \ldots, \rho_1)$ линейно независимы (показать!). Выберем точку $X_2 \in M_2$, находящуюся на положительном расстоянии от M_1 (это можно сделать в силу того, что $M_1 \not\subset M_2$ и оба множества замкнуты).

Так как $M = M_1 + M_2$ выпукло, то точки $X_2^i = (1 - \lambda) X_2 + \lambda X_1^i$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ принадлежат M, а значит (при достаточно малом λ), и M_2.

Остается заметить, что M_2 содержит отрезки, которые пересекаются в X_2 и среди направляющих векторов которых

$$X_2^1 - X_2, \quad X_2^2 - X_2, \ldots, \quad X_2^{\rho_1} - X_2, \quad X_1 - X_2$$

не меньше чем ρ_1 линейно независимых (проверить!). Значит, $\rho_2 \geqslant \rho_1$. Обратное неравенство доказывается аналогично заменой M_2 на M_1. Окончательно $\rho_1 = \rho_2$.

1.55. Не сохранится. Пример: множество M_1 состоит из точки $\{0\}$ на прямой R^1, множество M_2 состоит из точек

$$\{x\colon 0 < x \leqslant 1\} \qquad (M_2 \subset R^1);$$

$\rho(M_1) = 0$, $\rho(M_2) = 1$, однако $M = M_1 + M_2$ — отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ на прямой R^1, т. е. выпуклое множество.

1.56. Рассмотреть два случая: а) $X_0 \in \mathscr{L}_1$, где $\mathscr{L}_1$ — линейное многообразие размерности ρ, содержащее M; б) $X_0 \notin \mathscr{L}_1$.

1.57. Показать сначала, что $\rho_\varepsilon(X_0)$ не зависит от ε при $X_0 \in M$. Затем устремить ε к бесконечности и установить, что

$$\rho(X_0) = \rho(M) \qquad \text{при} \qquad X_0 \in M.$$

1.58. 1) Покажем сначала, что из первого определения вытекает выпуклость множества $[N]$. Действительно, если $\overline{X}_1 \in [N]$, то $\overline{X}_1 = \sum_{i=1}^{s_1} t_i^1 X_i^1$, где $\sum_{i=1}^{s_1} t_i^1 = 1$, $t_i^1 \geqslant 0$, $X_i^1 \in N$; аналогично, если $\overline{X}_2 \in [N]$, то $\overline{X}_2 = \sum_{i=1}^{s_2} t_i^2 X_i^2$, где $\sum_{i=1}^{s_2} t_i^2 = 1$, $t_i^2 \geqslant 0$, $X_i^2 \in N$.

Отсюда следует, что точка $\overline{X} = \lambda \overline{X}_1 + (1-\lambda)\overline{X}_2 = \lambda \sum_{i=1}^{s_1} t_i^1 X_i^1 + (1-\lambda) \times \times \sum_{i=1}^{s_2} t_i^2 X_i^2 = \sum_{i=1}^{s_1} \bar{t}_i X_i^1 + \sum_{i=1}^{s_2} \bar{\bar{t}}_i X_i^2$ также принадлежит $[N]$, так как $\bar{t}_i$, $\bar{\bar{t}}_i \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{s_1} \bar{t}_i + \sum_{i=1}^{s_2} \bar{\bar{t}}_i = 1$ (здесь $\bar{t}_i = \lambda t_i^1$; $\bar{\bar{t}}_i = (1-\lambda) t_i^2$).

Выпуклость $[N]$ доказана.

Заметим теперь, что выпуклое множество $[N]$ не может содержать выпуклое множество M такое, что $N \subset M$. Действительно, если $N \subset M$, то M содержит точки вида $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\{X_i\}_{i=1}^{k}$ — произвольный набор точек, принадлежащих N (см. задачу 1.30), т. е. $[N] \subseteq M$. Минимальность $[N]$ доказана.

2) Пусть теперь M — наименьшее выпуклое множество, содержащее N. Прежде всего, имеем $[N] \subseteq M$ (см. первую часть). Но так как M — наименьшее выпуклое множество, содержащее N, то оно содержится в любом другом выпуклом множестве, содержащем N, в частности в множестве $[N]$, т. е. $M \subseteq [N]$. Отсюда $M = [N]$.

1.60. $x_1 + x_2 \leqslant 1$. **1.61.** $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$.

1.62. $-x_1^2 + x_2 \geqslant 0$, **1.63.** Плоскость R^2.

$$x_2 \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

1.64. $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, $x_1 - x_2 = 0$. **1.65.** $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$.

1.66. $x_1 + x_2 \geqslant -1$, $x_1 - x_2 \leqslant 1$, $x_2 \leqslant 0$. **1.67.** $-e^{x_1} + x_2 \geqslant 0$, $-|x_1| + x_2 \geqslant 0$.

1.68. $-e^{x_1} + x_2 \geqslant 0$, $-|x_1| + x_2 \leqslant 0$. **1.69.** $-|x_1| + x_2 \geqslant 0$, $x_1 > \alpha$, где α — корень уравнения $e^z + z = 0$.

1.70. Плоскость R^2. **1.71.** $-e^{x_1} + x_2 = 0$, $-|x_1| + x_2 = 0$.

1.72. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. **1.73.** $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$.

1.74. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$. **1.75.** Пространство R^n.

1.76. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$. **1.77.** $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 4$.

1.78. Вообще говоря, нет. Например, множество $N \subset R^2$, которое состоит из трех точек с координатами $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = (1, 0)$.

1.79. Доказать выпуклость множества $\{\Delta\}$, затем воспользоваться вторым определением выпуклой оболочки множества N (см. задачу 1.58).

1.81. $f(X)$ — линейный функционал в R^n, т. е.

$$f(X) = (C, X) + \alpha.$$

Рассмотреть функцию $f_1(X) = f(X) - f(X_0)$, где $X_0 \in M$.

1.82. Да, может. Пример: множество N — круг без центра на плоскости R^2.

1.83. Да, может. Пример: множество N — объединение прямой на плоскости R^2 и точки, не лежащей на этой прямой.

1.86. а) Например, N — круг на плоскости R^2 без центра. б) Например, N — круг на плоскости R^2 без граничной точки.

1.87 [1]. $x_2 = 1{,}5$. **1.88** [1]. $x_2 = 3$. **1.89** [1]. $x_1 + x_2 = 1{,}5$.

1.90. Строго разделяющей гиперплоскости не существует, так как у множеств (M_1) и (M_2) есть общая точка $(1, 1, 0)$.

1.91. Строго разделяющей гиперплоскости не существует, так как у множеств (M_1) и (M_2) есть общая точка $(0, 1)$.

1.92 [1]. $x_1 + x_2 = 5$. **1.93.** $\lambda > 1$. **1.95.** $x_2 - kx_1 = 0$, где $|k| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_1 = 0$ $(k = \infty)$.

1.96. а) См. задачу 1.94; б) M_1 состоит из точек R^2, координаты которых удовлетворяют условиям $-\frac{1}{x_1} + x_2 \geqslant 0$, $x_1 > 0$, а множество M_2 — из точек R^2, для которых $x_2 \leqslant 0$;

в) в качестве M_1 можно взять совокупность точек R^2, координаты которых удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, а в качестве M_2 — совокупность точек R^2, для которых $(x_1 + 2)^2 + x_2^2 < 1$.

1.97. Если A_0 — граничная точка выпуклого множества M, то утверждение задачи совпадает с теоремой 1.2 об опорной гиперплоскости (действительно, при доказательстве теоремы об опорной гиперплоскости не используется то, что $A_0 \in M$). Пусть теперь A_0 не является граничной точкой множества M. Так как A_0 по условию не является относительно внутренней точкой M, то это значит, что A_0 и M находятся на положительном расстоянии друг от друга (доказать). Однако именно этот факт используется при доказательстве теоремы 1.1 о разделении множеств (может оказаться, что $\rho(A_0, M) = \inf\limits_{A \in M} (A_0, A)$ не достигается на точке $A_1 \in M$; тогда при доказательстве вместо A_1 нужно рассмотреть граничную точку B множества M, расстояние которой от точки A_0 равно расстоянию между A_0 и M). Пусть $(C, X) = \alpha$ — уравнение гиперплоскости, строго разделяющей A_0 и M. Это значит, что

$$\begin{aligned} &(C, A_0) < \alpha && (X = A_0), \\ &(C, X) > \alpha \quad \text{при} && X \in M. \end{aligned}$$

Докажем, что гиперплоскость, уравнение которой $(C, X) = (C, A_0)$ является искомой. В самом деле, она проходит через A_0, так как $(C, A_0) = (C, A_0)$, и содержит M в одном из своих полупространств (если $X \in M$, то $(C, A_0) < \alpha < (C, X)$, т. е. $(C, X) > (C, A_0)$ при $X \in M$).

Объединяя этот случай с возможностью, когда A_0 — граничная точка, имеем окончательно

$$(C, X) \geqslant (C, A_0) \quad \text{при} \quad X \in M.$$

---

[1]) В ответе указана одна из бесконечного множества гиперплоскостей, разделяющих множества (A) и (B).

1.98. Рассмотрим множество $\tilde{M}$, которое состоит из точек вида

$$\tilde{A} = A_2 - A_1, \quad \text{где} \quad A_1 \in M_1,\ A_2 \in M_2.$$

Множество $\tilde{M}$ является выпуклым. Действительно, для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $\tilde{A}'$, $\tilde{A}'' \in M$ имеем

$$\lambda\tilde{A}' + (1-\lambda)\tilde{A}'' = \lambda(A_2' - A_1') + (1-\lambda)(A_2'' - A_1'') =$$
$$= [\lambda A_2' + (1-\lambda)A_2''] - [\lambda A_1' + (1-\lambda)A_1''] \in \tilde{M},$$

так как $(i = 1, 2)$ $\lambda A_i' + (1-\lambda)A_i'' \in M_i$ в силу выпуклости M_i. Точка 0 не является относительно внутренней точкой множества $\tilde{M}$, так как она не принадлежит этому множеству (если бы она принадлежала $\tilde{M}$, то $0 = A_2 - A_1$, т. е. у M_1 и M_2 имелась бы общая точка).

Применим теперь утверждение предыдущей задачи к множеству $\tilde{M}$ в точке 0.

Существует гиперплоскость, проходящая через 0 и содержащая $\tilde{M}$ в одном из своих полупространств. Это значит:

1) $(C, X) = 0$ — уравнение гиперплоскости;

2) $(C, X) \geqslant 0$ при $X \in \tilde{M}$.

Последнее неравенство означает, что $(C, A_2 - A_1) = (C, A_2) - (C, A_1) \geqslant 0$ при $A_2 \in M_2$, $A_1 \in M_1$. Утверждение доказано.

1.102. Да, существует, например окружность на плоскости R^2.

1.103. Для доказательства необходимости условия задачи провести гиперплоскость, разделяющую M и $\bar{M}$. Показать затем, что M совпадает с множеством точек X, для которых $(C, X) \geqslant \alpha$, где $(C, X) = \alpha$ — уравнение разделяющей гиперплоскости.

1.104. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

1.105. Обозначим пересечение опорной гиперплоскости к множеству M с этим множеством через $\tilde{M}$. $\tilde{M}$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество (доказать). У множества $\tilde{M}$ существует крайняя точка $\tilde{A}_0$ (это следует, например, из утверждения задачи 1.35). Докажем, что она является также крайней точкой множества M. Если это не так, то $\tilde{A}_0 = \lambda_0 A_1 + (1-\lambda_0)A_2$, где $0 < \lambda_0 < 1$, $A_1, A_2 \in M$.

Так как $\tilde{A}_0$ принадлежит опорной гиперплоскости, то $(C, \tilde{A}_0) = \alpha$, где $(C, X) = \alpha$ — уравнение опорной гиперплоскости и $(C, X) \leqslant \alpha$ для $X \in M$. Но

$$\alpha = (C, \tilde{A}_0) = (C, \lambda_0 A_1 + (1-\lambda_0)A_2) = \lambda_0(C, A_1) +$$
$$+ (1-\lambda_0)(C, A_2) \leqslant \lambda_0\alpha + (1-\lambda_0)\alpha \leqslant \alpha.$$

Равенство здесь не может достигаться, так как тогда

$$(C, A_1) = (C, A_2),$$

что противоречит тому, что $\tilde{A}_0$ — крайняя точка множества $\tilde{M}$.

1.106. Воспользоваться утверждениями задач 1.105 и 1.36.

1.107. Взять в качестве A_1 точку, принадлежащую множеству M, удаленную от A_0 на расстояние $\rho(A_0, A_1) = \min \rho(A_0, X)$, где $X \in M$.

Рассмотреть гиперплоскость, уравнение которой $(C, X) = \alpha$, где $C = A_0 - A_1$, а $\alpha = (C, A_1)$, и доказать, что эта гиперплоскость удовлетворяет условиям задачи.

1.108. В каждой граничной точке выпуклого замкнутого ограниченного множества M проведем все существующие опорные гиперплоскости к M, уравнения которых $(C_A, X) = (C_A, A)$, где A принадлежит множеству M_Γ — границе M.

Рассмотрим множество M_1, состоящее из пересечения полупространств, порожденных этими гиперплоскостями, причем из двух полупространств будем выбирать то, в котором лежит M. Докажем, что $M_1 = M$.

Очевидно, что $M \subseteq M_1$, так как если $A_1 \in M$, то A_1 принадлежит каждому из построенных полупространств, а значит, и их пересечению M_1. Остается показать, что если $A_2 \notin M$, то $A_2 \notin M_1$. Применяя утверждение предыдущей задачи к A_2 и M, получим, что существует гиперплоскость, опорная к M в точке $\tilde{A}$ и отделяющая A_2 от M. Так как мы взяли все опорные гиперплоскости в каждой точке M_Γ, то $A_2 \notin M_1$.

Утверждение доказано.

1.109. $\tilde{M}_1$ может не совпадать с M. Например, если в качестве M взять отрезок на плоскости R^2 с концами в точках (0, 0) и (1, 1), то полупространства $X_1 \geqslant X_2$ порождаются гиперплоскостью $X_1 = X_2$, опорной к M и проходящей через каждую граничную точку этого множества. Очевидно, однако, что множество точек M_1, для которых $X_1 \geqslant X_2$, не совпадает с множеством M.

1.110. Изменить решение задачи 1.108, используя утверждение задачи 1.105.

1.111. Следующий пример показывает, что утверждение задачи, вообще говоря, не выполняется:

$$M = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\},$$

а

$$R_\Pi = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_3 \leqslant 1\}.$$

1.112. Применить метод математической индукции по числу k полупространств, образующих пересечение. Показать, что если пересечение имеет бесконечное число крайних точек, то одна из граничных гиперплоскостей также имеет бесконечное число крайних точек. Выбрать затем начало координат пространства в этой гиперплоскости и свести задачу к числу полупространств $k - 1$.

1.114. Для доказательства обобщения применить метод математической индукции по числу n — размерности пространства R^n. В первой части (для граничной точки $A_\Gamma \in M$) доказательство такое же, как в теореме о представлении; во второй части (для внутренней точки $A \in M$) провести прямую через A и крайнюю точку $A_1 \in M$.

1.117. Вообще говоря, нет. **1.119.** Точка, прямая, луч.

1.120. Может. Пример: на плоскости R^2 объединение (сумма) двух прямых, пересекающихся только в одной точке.

1.123. Таким свойством обладает, например, конус $K = K_1 + K_2$, где $K_1 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 \leqslant x_2\}$ и $K_2 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \leqslant 0\}$.

1.125. Да. **1.126.** Нет. **1.127.** Да. **1.128.** Да.

1.129. Нет. **1.130.** Нет. **1.131.** Вообще говоря, нет, например, $N = K_1 + K_2$, где $K_1 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 = 0;\ x_2 \geqslant 1\}$, а $K_2 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 \geqslant 1;\ x_2 \geqslant 0\}$.

1.132. Вообще говоря, нет, например, $K = K_1 + K_2$, где $K_1 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 = 0\}$, а $K_2 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 = 0;\ x_2 \geqslant 0\}$.

1.134. $K = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 + x_2 \geqslant 0\}$.

1.135. $K = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 \geqslant c_1 + c_3;\ x_2 \geqslant c_2 + c_4\}$.

1.136. $K = \{X = (x_1, x_2):\ x_2 \geqslant 0\}$.

1.137. $K = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1 + x_2 = 0\}$.

1.138. $K = R^3$. **1.139.** $K = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1 = x_2 = 2;\ x_3 \geqslant 6\}$.

1.141. Конус K_0^+ состоит из точек, радиусы-векторы которых образуют неострые углы с радиусами-векторами точек A, где $A \in K_0$.

1.142. Прямая, проходящая через начало координат и перпендикулярная к данной прямой.

1.143. $K_0^+ = \{Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n):\ y_i \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ (K_0^+ — неположительный ортант).

1.147. Рассмотреть множество

$$K_0 = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 > 0;\ x_2 > 0\}.$$

1.148. Показать вначале, что утверждение задачи 1.146 выполняется и для конуса K_0 с вершиной в начале координат, который обладает свойством выпуклости, но не замкнут. Затем рассмотреть соотношение $K_0^{+++} \subseteq K_0^{+}$, которое вытекает из соотношения $K_0 \subseteq K_0^{++}$ (см. задачу 1.144); так как $K_0^{+++} = (K_0^{+})^{++}$, то $K_0^{+} \subseteq (K_0^{+})^{++} = K_0^{+++}$. Отсюда следует утверждение задачи.

1.149. $K_A(N) = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0\}$.

1.150. $K_A(N) = \{X = (x_1, x_2, x_3):\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leqslant 0;\ x_3 \geqslant 0\}$.

1.151. $K_A(N) = \{X = (x_1, x_2):\ e^2(1 - x_1) + x_2 \geqslant 0;\ x_2 > 0\}$.

1.156. Показать, что $\left\{l_{A_0}^{A}\right\}$ состоит из точек вида $A_0 + \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i (A_i - A_0)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\{A_i\}_{i=1}^{l} \in M$, далее воспользоваться утверждением задачи 1.152.

1.157. Достаточно доказать, что выпуклая оболочка объединения всех лучей, исходящих из A_0 и пересекающих крайние точки M, совпадает с объединением лучей, исходящих из A_0 и пересекающих все точки M. Действительно, в этом случае результат будет вытекать из утверждения предыдущей задачи. Для доказательства возьмем произвольную систему k лучей $l_{A_i} = A_0 + t(A_i - A_0)$, $t \geqslant 0$, $A_i \in M^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где M^* — совокупность крайних точек M.

Выпуклая оболочка $\left\{l_{A_i}\right\}$ состоит из точек вида

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i l_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [A_0 + t(A_i - A_0)] = A_0 + t\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i - A_0\right),$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Точка $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$ является произвольной точкой M при определенном выборе λ_i и A_i (теорема 1.3 о представлении). Значит, выпуклая оболочка множества $\left\{l_{A_0}(M^*)\right\}$ содержит любой луч, исходящий из A_0 и пересекающий M. Утверждение доказано.

1.159. Рассмотреть луч, соединяющий крайнюю точку A_0 с вершиной конуса.

1.161. Будем доказывать утверждение индукцией по размерности n пространства, в котором лежит K. Утверждение тривиально при $n = 1$. Предположим, что оно справедливо при $n = i$, и рассмотрим случай, когда $K \subset R^{i+1}$.

Пусть K — не выпуклый конус; тогда существует луч, исходящий из A_0, проходящий через A (A_0, $A \in K$), целиком не принадлежащий K. Обозначим через A_1 точку $A_1 = A_0 + t_0(A - A_1)$, где $t_0 = \sup\limits_{t>0} t$; здесь sup берется по тем t, для которых $[A_0 + t(A - A_0)] \in K$ (sup достигается в силу замкнутости K). Точка A_1 является граничной точкой (показать!). Проведем гиперплоскость в точке A_1, опорную к K, и рассмотрим пересечение K_i этой гиперплоскости с множеством K. Возможны два случая.

1) Множество K_i содержит точку A_0. Так как K_i лежит в пространстве R^i (в опорной гиперплоскости) и имеет одну крайнюю точку A_0 (проверить!), то в силу индуктивного предположения K_i — конус. Но тогда K_i содержит целиком луч A_0A_1, что противоречит построению A_1.

2) Множество K_i не содержит точку A_0. Докажем, что в этом случае у множества K существует крайняя точка $A_0' \in K_i$ ($A_0' \neq A_0$). Действительно, K_i не может содержать прямую, проходящую через A_1, так как в этом случае через A_0 проходила бы прямая, ей параллельная (показать, используя выпуклость и замкнутость K).

Это значит, что K_i содержит граничную точку A_2 (проверить!). Проведем через A_2 опорную гиперплоскость к K_i и рассмотрим множество K_{i-1} — пересечение K_i с этой опорной гиперплоскостью, найдем точку A_3, аналогичную A_2, и т. д. Заметим, что на каждом шаге размерность пространства, в котором лежит множество K_{i-1}, понижается. Это значит, что не более чем через i шагов мы получим множество, лежащее в R^1 и имеющее граничную точку A_i. Но граничная точка такого множества — его крайняя точка, а значит, и крайняя точка множества K (см. решение задачи 1.105). Полученное противоречие показывает неверность исходной предпосылки.

1.166. Вообще говоря, нет, например:

$$C'_{A_1} = \{X = (x_1, x_2):\ x_1 = 0\}, \qquad A_1 = (0, 1),$$
$$C''_{A_2} = \{X = (x_1, x_2):\ x_2 = 0\}, \qquad A_2 = (1, 0).$$

1.167. Вообще говоря, нет.

1.168. Пусть C не является выпуклым цилиндром. Это значит, что найдутся точка $A_C \in C$ и направление A_0 такие, что прямая $A_C + A_0 t$ целиком не принадлежит C.

Определим A_1 из условия $A_1 = A_C + t_0' A_0$, где $t_0' = \sup\limits_{t>0} t$, для которых $A_C + tA_0 \in C$, или $A_1 = A_C + t_0'' A_0$, где $t_0'' = \inf\limits_{t<0} t$, для которых $A_C + tA_0 \in C$ (одно из значений t_0', t_0'' конечно).

Через A_1 не может проходить прямая, целиком принадлежащая C, так как в этом случае, вопреки предположению, C — выпуклый цилиндр (доказать!).

Далее, если мы повторим рассуждения, приведенные в случае 2) решения задачи 1.161, то получим точку $\tilde{A}$ — крайнюю точку C. Это противоречит данным задачи. Утверждение доказано.

Глава 2

2.3. $i = 1$; $X_1 = (1, 2)$. **2.4.** Все ограничения жесткие. **2.5.** $i = 1, 2, 3$; $X_i = (0, 1)$. **2.6.** $i = 1, 2, 3, 4$; $X_i = (-11, 9)$. **2.7.** $i = 2$; $X_2 = (0, {}^5/_4, {}^1/_2)$. **2.8.** $i = 1, 2, 3$; $X_i = ({}^1/_2, 1, 0)$. **2.9.** Все ограничения жесткие. **2.10.** $i = 2$; $X_2 = (1, 1, \ldots, 1)$.

2.11. Рассмотреть $X_0 = (X_1 + X_2 + \ldots + X_l)/l$ где X_i — точка, координаты которой обращают нежесткое ограничение (i) в строгое неравенство.

2.12. Рассмотреть точки $X = \lambda X_0 + (1 - \lambda) X_1$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а X_1 — точка, принадлежащая M и отличная от X_0.

2.13. $\rho = 1$. **2.14.** $\rho = n$. **2.15.** $\rho = 1$. **2.16.** $\rho = 2$. **2.17.** $\rho = 2$. **2.18.** $\rho = 3$. **2.19.** $\rho = 2$. **2.20.** $\rho = 1$.

2.21. $\rho = 2$. Найти общее решение системы условий-равенств и подставить его в систему условий-неравенств.

2.22. $\rho = 1$. См. указание к задаче 2.21.

2.23. $\rho = 1$. См. указание к задаче 2.21.

2.24. $\rho(\lambda) = 0$ при $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 1$; $\rho(\lambda) = 2$ при $\lambda = 1$. При $\lambda = -2$ ограничения противоречивы.

2.25. $\rho(\lambda, \mu)=0$, если $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 0$ и $\dfrac{\lambda\mu+\mu^2+2\mu-4}{(\lambda+2)(\lambda-1)\mu} \leqslant 0$;

$\rho(\lambda, \mu)=1$ при $\lambda=\mu=-2$;

$\rho(\lambda, \mu)=2$ при $\lambda=\mu=1$.

При других значениях λ и μ ограничения противоречивы.

2.27. Размерность множества $\tilde{M}$ (множества, полученного из M присоединением дополнительного ограничения) может стать равной ρ_1, где $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho$ (предполагается, что $\tilde{M}$ непусто).

Рассмотреть в качестве M многогранное множество, ограничения которого имеют вид

$$x_i=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n-\rho,$$
$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

и присоединить ограничение вида

$$\alpha_1 x_{n-\rho+1}+\alpha_2 x_{n-\rho+2}+\ldots+\alpha_\rho x_n=0,$$

где $\alpha_i=0$ или $\alpha_i=1$. Показать далее, что $\rho_1=\rho-k$, где k — количество коэффициентов α_i, отличных от нуля.

2.28. См. ответ и указание к задаче 2.27; присоединенные условия имеют вид

$$\alpha_1 x_{n-\rho+1}+\alpha_2 x_{n-\rho+2}+\ldots+\alpha_\rho x_n \leqslant 0,$$

где α_i имеют тот же смысл, что и в предыдущем ответе.

2.30. Воспользоваться определением 2.4а грани многогранного множества M.

2.32. Воспользоваться определением 2.4б грани многогранного множества M. **2.33.** Нет, нельзя. Пример: $M=\{X=(x_1x_2)\colon x_1 \leqslant 1,\ x_2 \leqslant 1,\ x_1+x_2 \leqslant 3\}$. Если неравенство $x_1+x_2 \leqslant 3$ заменить условием $x_1+x_2=3$, то совокупность полученных условий окажется противоречивой.

Если M_1 непусто, утверждение задачи справедливо.

2.34.
$$\begin{aligned} x_1+\ \ x_2&=1,\\ x_1+2x_2&\leqslant 4,\\ x_1\qquad &\geqslant 0,\\ x_2&\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (M^1) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1+\ \ x_2&=1,\\ x_1+2x_2&\leqslant 4,\\ x_1\qquad &=0,\\ x_2&\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (M^2)$$

$$\begin{aligned} x_1+\ \ x_2&=1,\\ x_1+2x_2&\leqslant 4,\\ x_1\qquad &\geqslant 0,\\ x_2&=0. \end{aligned} \qquad (M^3)$$

2.35.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ x_i&\geqslant 0,\ \ i=1, 2, 3. \end{aligned} \qquad (M^1) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ x_1\qquad\quad &=0,\\ x_i&\geqslant 0,\ \ i=2, 3. \end{aligned} \qquad (M^2)$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ x_2\qquad &=0,\\ x_i&\geqslant 0,\ \ i=1, 3. \end{aligned} \qquad (M^3) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ x_3&=0,\\ x_i&\geqslant 0,\ \ i=1, 2. \end{aligned} \qquad (M^4)$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ x_1=x_2\qquad &=0,\\ x_3&\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (M^5) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ x_1=\qquad x_3&=0,\\ x_2\qquad &\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (M^6)$$

$$x_1+x_2+x_3=1, \qquad x_2=x_3=0, \qquad x_1 \geqslant 0. \qquad (M^7)$$

2.36. Грани M^i, $i=1, 2, \ldots, 7$ (см. ответ задачи 2. 35), и грани

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3. \end{aligned} \quad (M^8) \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &x_1 \qquad\quad =0,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=2,3. \end{aligned} \quad (M^9)$$

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &\quad x_2 \qquad =0,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,3. \end{aligned} \quad (M^{10}) \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &\qquad\qquad x_3=0,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2. \end{aligned} \quad (M^{11})$$

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &x_1=x_2 \qquad =0,\\ &\qquad\quad x_3\geqslant 0. \end{aligned} \quad (M^{12}) \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &x_1 \qquad =x_3=0,\\ &\quad x_2 \qquad \geqslant 0. \end{aligned} \quad (M^{13})$$

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &\quad x_2=x_3=0,\\ &x_1 \qquad\quad \geqslant 0. \end{aligned} \quad (M^{14}) \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\\ &x_1=x_2=x_3=0. \end{aligned} \quad (M^{15})$$

2.37.

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=3,\\ &x_1+2x_2+3x_3=6,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3. \end{aligned} \quad (M^1) \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=3,\\ &x_1+2x_2+3x_3=6,\\ &x_1 \qquad\quad =0,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=2,3. \end{aligned} \quad (M^2)$$

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3\leqslant 3,\\ &x_1+2x_2+3x_3=6,\\ &x_2 \qquad\quad =0,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,3. \end{aligned} \quad (M^3) \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=3,\\ &x_1+2x_2+3x_3=6,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,3,\\ &\quad x_2 \qquad =0. \end{aligned} \quad (M^4)$$

$$x_1+x_2+x_3\leqslant 3,\quad x_1+2x_2+3x_3=6,\quad x_1=x_2=0,\quad x_3\geqslant 0. \quad (M^5)$$

$$x_1+2x_2+3x_3=6,\quad x_1+x_2+x_3\leqslant 3,\quad x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3. \quad (M^6)$$

$$x_1+2x_2+3x_3=6,\quad x_1+x_2+x_3=3,\quad x_1=x_3=0,\ x_2\geqslant 0. \quad (M^7)$$

2.38. Показать, что если X_0 является внутренней точкой M, то $q=n$ (n — размерность пространства R^n, в котором лежит M).

2.39. Если $\rho(M)=n$, то утверждение вытекает из задачи 2.38. Для случая, когда $\rho(M)<n$, рассмотреть систему координат гиперплоскости R_1^ρ, в которой лежит M.

2.41. а) $k_0=2^n$; б) $k_1=n\cdot 2^{n-1}$; в) $k_q=2^{n-q}\cdot C_n^q$. Представим ограничения, задающие n-мерный куб M, в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad &\leqslant 1,\\ x_2 \qquad &\leqslant 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &\leqslant 1; \end{aligned}\right\} \quad (\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} -x_1 \qquad &\leqslant 0,\\ -x_2 \qquad &\leqslant 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ -x_n &\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Для того чтобы образовать грань нулевой размерности, т. е. вершину куба, надо выбрать группу из n линейно независимых ограничений системы (α), (β) и заменить в них знаки неравенств знаками равенств. Легко подсчитать число таких групп. Действительно, если в образованную группу входят условия $x_i\leqslant 1$ из (α), то из (β) не может входить $-x_i\leqslant 0$, следовательно,

k_0 равно числу всех возможных комбинаций l ограничений из (α), дополненных $n-l$ ограничениями из (β), или $k_0 = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Для определения числа k_q рассмотрим одну из вершин куба, ограничения которой (как это следует из предыдущего) имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} x_{i_1} = 1, \\ \quad x_{i_2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_{i_l} = 1, \end{array}\right\} \quad (\alpha') \qquad \left.\begin{array}{l} -x_{i_{l+1}} = 0, \\ \quad -x_{i_{l+2}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad -x_{i_n} = 0, \end{array}\right\} \quad (\beta')$$

$x_{i_j} \leqslant 1$ при $j \neq 1, 2, \ldots, l$, $-x_{i_j} \leqslant 0$ при $j \neq l+1, \ldots, n$.

Все грани размерности q можно получить, если перебрать все вершины (α'), (β') и в q условиях-равенствах заменить знак на неравенство (показать!). Подсчитаем теперь k_q. Так как число вершин k_0 равно 2^n, а из каждой группы ограничений, задающих одну вершину, можно получить (изменив в q равенствах знаки равенств знаками неравенств) C_n^q наборов ограничений, задающих q-мерную грань, то всего будет $2^n C_n^q$ наборов ограничений (очевидно, что каждый из таких наборов ограничений является непротиворечивым, т. е. действительно задает q-мерную грань M). Однако эти наборы ограничений будут повторяться. Действительно, если заменить в q ограничениях, задающих вершину, знаки равенств знаками неравенств, то все вершины, которые отличаются только этими q ограничениями, дадут одни и те же системы условий. Число таких вершин, как это следует из первой части решения, равно 2^q. Окончательно имеем $k_q = \dfrac{2^n \cdot C_n^q}{2^q} = 2^{n-q} C_n^q$.

2.42. $k_q = C_{n+1}^{q+1}$. Доказать, что система векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_{n+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ и $e_{n+2} = (1, 1, \ldots, 1)$ без любого вектора e_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, линейно независима, и свести задачу нахождения k_q к определению числа групп условий вида

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{q+1}} = 1;$$
$$x_{i_j} \geqslant 0 \text{ при } j = 1, 2, \ldots, q+1,$$
$$x_{i_j} = 0 \text{ при остальных } j.$$

2.43. $X_1 = (0, 1)$, $X_2 = (1, 0)$, $X_3 = (0, 0)$. **2.44.** $X_1 = (1, 0)$.

2.45. $X_1 = (1, 1, 1)$. **2.46.** Система ограничений противоречива. **2.47.** $X_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ($i = 1, 2, \ldots 2^n$), где $\alpha_k = 0$ или $\alpha_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.48. $X_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ($i = 1, 2, \ldots, n+1$), т. е. $x_i = 1$, а $x_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1$.

2.49. $X_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $X_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, (единица стоит на месте с номером i).

2.50. См. ответ к предыдущей задаче.

2.51. $X_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ ($i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$), где α_k равно 0 или 1, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. **2.52.** Если $k = n$, то $X_1 = (0, 0, \ldots, 0, 1)$; если $k < n$, вершин у множества нет.

2.53. Пусть вершина X_0 многогранного множества M удовлетворяет системе ограничений

$$(A_i, X_0) = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (\alpha)$$

которая получится, если из ограничений, задающих M, выбрать n линейно независимых и заменить в них знаки неравенств знаками равенств (при этом

X_0 удовлетворяет и оставшимся ограничениям). Рассмотрим гиперплоскость, уравнение которой

$$(\bar{A}, X) = \bar{b}, \quad \text{где} \quad \bar{A} = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{а} \quad \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Докажем, что эта гиперплоскость удовлетворяет требованиям задачи. Действительно:

1) $(\bar{A}, X_0) = \bar{b}$ в силу уравнений (α);

2) $(\bar{A}, X) < \bar{b}$ для $X \in M$, $X \neq X_0$, так как если предположить, что существует точка $X_1 \in M$ и $(\bar{A}, X_1) \geqslant \bar{b}$, то найдется i_0 такое, что $(A_{i_0}, X_1) > b_{i_0}$ (это противоречит тому, что $X_1 \in M$) либо при всех i ($i = 1, 2, \ldots, n$) $(A_i, X_1) = b_i$ (в этом случае $X_1 = X_0$).

Утверждение доказано. При этом получен способ построения опорной гиперплоскости, удовлетворяющей требованию задачи.

2.54. Вообще говоря, нет. Например, диагональ единичного квадрата на плоскости R^2. **2.56.** а) Существует; б), в) не существует.

2.58. $\Gamma_1 = \{X_0 = (0, 0);\ e = (1, 0);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$,
$\Gamma_2 = \{X_0 = (0, 0);\ e = (0, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$,
$\Gamma_3 = \{X_0 = (1, 0);\ e = (-1, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

2.59. См. ответ предыдущей задачи.

2.60. $\Gamma_1 = \{X_0 = (1, 0);\ e = (-1, 0);\ t \geqslant 0\}$,
$\Gamma_2 = \{X_0 = (1, 0);\ e = (-1, 1);\ t \geqslant 0\}$.

2.61. $\Gamma_1 = \{X_0 = (1, 0);\ e = (-1, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$,
$\Gamma_2 = \{X_0 = (1, 0);\ e = (-1, -1);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$,
$\Gamma_3 = \{X_0 = (0, -1);\ e = (0, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant 2\}$.

2.62. $\Gamma_1 = \{X_0 = (^2/_3, {}^1/_3, 0);\ e = (-1, 0, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant {}^2/_3\}$.

2.63. $\Gamma_1 = \{X_0 = (^2/_3, {}^1/_3, 0);\ e = (-1, 0, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant {}^2/_3\}$,
$\Gamma_2 = \{X_0 = (0, 1, 0);\ e = (0, -1, 1);\ 0 \leqslant t \leqslant {}^2/_3\}$,
$\Gamma_3 = \{X_0 = (0, 1, 0);\ e = (1, -1, 0);\ 0 \leqslant t \leqslant {}^2/_3\}$.

2.64. $\Gamma_i = \{X_0 = (0, 0, \ldots, 0);\ e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; единица в e_i стоит на месте с номером i; $t \geqslant 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.65. Ребер нет. **2.66, 2.67.** $\Gamma_1 = \{X_0 = (0, 0, \ldots, 0);\ e = (0, 0, \ldots, 0, -1, 1);\ -\infty < t < \infty\}$.

2.68. $\Gamma_i = \{X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n);\ e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 2^{n-1}$, где α_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) — числа, равные 0 или 1; $k = 1, 2, \ldots, n$; единица в e_k стоит на месте с номером k.

2.69. $\Gamma_i = \{X_0 = (0, 0, \ldots, 0, \alpha_l, 0, \ldots, 0, \alpha_k, 0, \ldots, 0);\ e = (0, 0, \ldots, 0, \beta_l, 0, \ldots, 0, \beta_k, 0, \ldots, 0);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, где $\alpha_k = \beta_l = 1$, $\alpha_l = 0$, $\beta_k = -1$; $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \ldots, n + 1$.

2.70, 2.71. Использовать метод решения задачи 2.53.

2.72. Пусть ограничения, задающие $\tilde{M}$, имеют вид

$$(A_i, X) = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, q, \tag{α}$$
$$(A_i, X) \leqslant b_i, \qquad i = q + 1, \ldots, q + p. \tag{β}$$

По определению грани $\tilde{M}$ ограничения (α) получены из ограничений-равенств, задающих M, дополненных некоторыми ограничениями, в которых знаки неравенств заменены знаками равенств. Докажем, что $\tilde{M}$ — линейное многообразие, порожденное ограничениями (α).

Заметим, прежде всего, что в ограничениях (β) можно вычеркнуть те условия, векторы A_{i_0} которых линейно зависят от системы $\{A_i\}_{i=1}^{q}$ (проверить!).

Если $\tilde{M}$ не является линейным многообразием, то среди решений системы уравнений (α) есть точка X_1, которая не удовлетворяет ограничениям (β). Рассмотрим точку

$$X(t)=X_0+t(X_1-X_0), \quad \text{где} \quad X_0 \in \tilde{M}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

При подстановке $X(t)$ в (β) имеем

$$(A_i, X(t))=(A_i, X_0)+t(A_i, X_1-X_0), \qquad i=q+1, \ldots, q+p.$$

Среди чисел $a_i=(A_i, X_1-X_0)$ должны быть положительные, иначе $X_1=X(1)$ удовлетворяло бы ограничениям (β). Очевидно, $(A_i, X_0)<b_i$ $(i=q+1, \ldots, q+p)$, иначе точка X_0 удовлетворяла бы некоторым ограничениям из (β) как точным равенствам, т. е. принадлежала бы грани $\tilde{\tilde{M}}$ меньшей размерности, чем $\tilde{M}$.

Определим t_0 из условия

$$t_0=\min \frac{b_i-(A_i, X_0)}{a_i},$$

где min берется по тем i $(i=q+1, \ldots, q+p)$, для которых $a_i>0$. Отсюда следует, что $t_0>0$.

Убедимся теперь, что $X(t_0)=X_0+t_0(X_1-X_0)$ принадлежит грани $\tilde{\tilde{M}}$ размерности меньшей, чем $\tilde{M}$. Действительно, $X(t_0)$ удовлетворяет (α), (β), причем хотя бы одному из ограничений (β) как точному равенству. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

2.73. Выпишем все ограничения, задающие грань минимальной размерности, в две группы:

$$(A_i, X)=b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, q, \tag{α}$$

$$(A_i, X) \leqslant b_i, \qquad i=q+1, \ldots, q+p. \tag{β}$$

Предположим, что среди ограничений группы (β) имеется хотя бы одно, линейно не зависящее от ограничений группы (α). Все такие ограничения должны выполняться для точек, удовлетворяющих (α) (принадлежащих $\tilde{M}$) как точные неравенства. Из утверждения предыдущей задачи следует, что $\tilde{M}$ — линейное многообразие, порождаемое системой уравнений (α). Если к системе (α) присоединить одно из линейно независимых с ней условий (β), то получим непустое (проверить!) пересечение $\mathscr{L}_1$ линейного многообразия $\tilde{M}$ с гиперплоскостью $(A_{i_0}, X)=b_{i_0}$, т. е. $\mathscr{L}_1 \subset \tilde{M}$. Отсюда следует, что точки $X \in \mathscr{L}_1$ удовлетворяют всем оставшимся (кроме $i=i_0$) ограничениям (β). Это означает, что $\mathscr{L}_1$ — грань M, размерность которой меньше $\tilde{M}$.

Значит, утверждение задачи верно.

2.74. Докажем, что если размерность многогранного множества M равна ρ и у M есть грани, отличные от M, то у M есть грань размерности $\rho-1$. Из этого будет следовать утверждение задачи.

Выделим из неравенств — нежестких ограничений неравенство, обладающее следующим свойством: существует точка $X_1 \notin M$, удовлетворяющая всем остальным ограничениям, задающим M, кроме этого неравенства. Можно убедиться (проверить!), что если в этом ограничении заменить знак неравенства на знак равенства, то полученная система ограничений определит грань множества M, размерность которой $\rho-1$. Если таких неравенств у множества нет, то, как легко показать (проверить!), множество M не обладает гранями, отличными от M.

2.75. Воспользоваться утверждениями задач 2.73, 2.74 и теоремой о размерности.

2.76. Воспользоваться утверждением задачи 2.75.

2.77. Условие не является необходимым. Пример: многогранное множество M состоит из точек луча, лежащего на плоскости R^2, вершина которого в фиксированной точке $X_0 \in R^2$.

2.78. Неравенство (нежесткое), входящее в систему условий, задающих многогранное множество M, называется несущественным ограничением, если оно выполняется для любой точки X, удовлетворяющей всем остальным ограничениям системы.

2.80. Да. Пример:

$$M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 \geqslant 0;\ x_1 - x_2 \geqslant 0\}.$$

2.81. Да. Пример:

$$M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 = 1;\ x_1 - x_2 = 1;\ x_1 - x_2 \geqslant {}^1/_2\}.$$

2.82. $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$. **2.83.** $x_1 + x_2 \leqslant 1$. **2.84.** $x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3$. **2.85.** $x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 0,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3$. **2.86.** $x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. **2.87.** $0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

2.89. Нет. Пример:

$$M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 \leqslant 1;\ x_1 + x_2 \leqslant 2\}.$$

2.91. M не вырождено. **2.92.** M вырождено, $X = (0, 0)$. **2.93.** M вырождено, $X = ({}^1/_2, {}^1/_2)$. **2.94.** M вырождено, $X = (1, 1, 1)$. **2.95.** M не вырождено. **2.96.** M не вырождено. **2.97.** M вырождено, все вершины вырождены (см. задачу 2.50). **2.98.** Существует. См., например, предыдущую задачу.

2.99. Может. Пример:

$$M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 = 0;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0\}.$$

2.100. Рассмотреть систему условий, определяющих невырожденную вершину X_0, и доказать, что система условий, определяющих ребро, исходящее из X_0, получится, если в одном из $(n - t)$ условий первой системы заменить знак равенства на знак неравенства.

2.101. Пример 1:

$$M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 \leqslant 0;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0\}.$$

Пример 2: k-угольная пирамида в пространстве R^3 $(k > 3)$.

2.103. Да, можно. Рассмотреть вершину X_0, принадлежащую вырожденному ребру (показать предварительно, что такая вершина существует).

2.109. Нет, не может. Показать, что вершина конуса X_0 должна принадлежать каждому из ребер множества M, а значит, — их пересечению; показать далее, что пересечение двух различных ребер M есть крайняя точка M.

2.110. Доказать, что вершина конуса X_0 обязана принадлежать каждой из граней минимальной размерности, а значит, и их пересечению; показать далее, что пересечение двух различных граней M_q размерности q (если оно непусто) есть грань M_p, где $p < q$.

2.111. Конус. **2.112.** Не конус. **2.113.** Конус. **2.114.** Конус.

Глава 3

3.2. Вообще говоря, нет. Пример: $X_1 = (0, 0)$, $X_2 = (0, 1)$, $X_3 = (0, 2)$. **3.4.** X_3, X_4. **3.5.** X_2, X_3, X_4. **3.6.** X_4, X_5, X_6, X_7. **3.7.** X_6, X_7, X_8, X_9. **3.8.** X_1, X_2, X_3, X_4. **3.9.** X_1, X_2, X_3, X_5. **3.10.** Все точки X_i. **3.11.** $X_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. **3.12.** $M = \{X = (x_1): 1 \leqslant x_1 \leqslant k\}$.

3.13. $M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 \leqslant 1;\ x_i \geqslant 0;\ i = 1, 2\}$.

3.14. $M = \{X = (x_1, x_2): x_1 + x_2 \leqslant 1;\ x_i \geqslant 0;\ i = 1, 2\}$.

3.15. $M = \{X = (x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 = 1;\ x_i \geqslant 0;\ i = 1, 2, 3\}$.

3.16. $M=\{X=(x_1, x_2, \ldots, x_n): 0\leqslant x_i\leqslant 1;\ i=1, 2, \ldots, n\}$.

3.17. Рассмотреть систему, состоящую из $2k$ точек $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ и $(-e_1, -e_2, \ldots, -e_k)$, где $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — базис $\Pi_k\subset R^n$.

3.18. Показать, что любые k точек этим свойством не обладают, затем рассмотреть систему $(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1})$, где $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — базис $\Pi_k\subset R^n$, а $e_{k+1}=-(e_1+e_2+\ldots+e_k)$.

3.20. Убедиться, что добавление ограничений $x_{j_i}=0\ (i=r+1, \ldots, n)$ не меняет жёсткости нежестких ограничений, задающих грань Г.

3.21. Воспользоваться теоремой 3.1 о представлении многогранного множества M; показать, используя утверждение задачи 3.20, что если M_0 обладает более чем одной вершиной, то M имеет несколько граней минимальной размерности; далее применить утверждение задачи 2.110.

3.22. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

3.24. Воспользовавшись теоремой 3.1 о представлении M_{n_2} и линейностью T, показать, что M_{n_1} состоит из выпуклой комбинации одной группы точек и неотрицательной комбинации другой группы точек пространства R^{n_1}; далее воспользоваться теоремой 3.2, обратной к теореме 3.1 о представлении.

3.26. Вообще говоря, нет. Пример:

$$M_{n_2}=\{X=(x_1, x_2): x_1=0;\quad x_2\geqslant 0\},\qquad T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

3.27. Рассмотреть $C=P_1+P_2+\ldots+P_N$, где $P_i\ (i=1, 2, \ldots, N)$ — единичные направляющие векторы неограниченных ребер M.

3.28. Применить метод математической индукции по размерности ρ пространства M. При переходе от ρ к $\rho+1$ провести через точку $X\in M$ прямую (используя утверждение предыдущей задачи), пересекающуюся с M по отрезку. Далее воспользоваться индуктивным предположением для точек X' и X'', являющихся пересечением прямой с границей M.

3.29. Построить множество M_1, описанное в условии задачи 3.27, и доказать, что вершины M_1 являются точками ребер (не обязательно неограниченных) множества M.

3.30. Воспользоваться утверждениями задач 3.20 и 3.29.

3.31. Показать, что граням размерности $n-r+1$, которые содержат более чем одну грань размерности $n-r$ множества M, соответствуют ограниченные ребра M_0.

3.32. Воспользоваться утверждениями задач 3.21 и 3.30.

3.46, 3.51, 3.53, 3.54, 3.58, 3.59, 3.75, 3.76, 3.80, 3.90, 3.93, 3.100, 3.101, 3.108, 3.116, 3.118. Системы не имеют решений.

3.120. $X=(\alpha_1;\ \alpha_2)$, где $\alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2\geqslant 0,\ \alpha_1+\alpha_2\leqslant 1$.

3.121. $X=(\alpha_1-\alpha_3;\ \alpha_2-\alpha_4)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3, 4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$. **3.122.** $X=(\alpha_1+\alpha_3,\ 3\alpha_1+\alpha_2)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3;\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leqslant 1$. **3.123.** $X=(\alpha_2+\alpha_3;\ 3\alpha_1+\alpha_2)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. **3.124.** $X=\left(\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;\ \frac{1}{2}\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3\right)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3, 4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$. **3.125.** $X=\left(\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;\ \frac{1}{2}\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3\right)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3, 4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$. **3.126.** $X=(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3;\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. **3.127.** $X=(-\alpha_1;\ \alpha_2-\alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,\ \sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. **3.128.** $X=(\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5;$

$-\alpha_1-\alpha_4-2\alpha_5)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 5$, $\sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i=1$. **3.129.** $X=(\alpha_2+\alpha_3-$ $-\alpha_5-\alpha_6;\ 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 6$, $\sum\limits_{i=1}^{6}\alpha_i=1$. **3.130.** $X=(100\alpha_2-10\alpha_4-10\alpha_5;\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-0{,}9\alpha_4+\alpha_5)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 5$, $\sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i=1$. **3.131.** $X=(4\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ -\alpha_2+\alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. **3.132.** $X=(\alpha_2+1{,}5\alpha_3+3\alpha_4+1{,}5\alpha_5,$ $\alpha_1+3\alpha_2+3{,}5\alpha_3-\alpha_4-2\alpha_5)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 5$, $\sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i\leqslant 1$, **3.133.** $X=\left(\frac{5}{13}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_7-\alpha_8-\frac{1}{2}\alpha_9-\frac{5}{13}\alpha_{10},\ 2\frac{1}{7}\alpha_1+2\frac{3}{26}\alpha_2+\right.$ $\left.+2\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6+\alpha_8+2\alpha_9+2\frac{3}{26}\alpha_{10}\right)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 10$, $\sum\limits_{i=1}^{10}\alpha_i=1$. **3.134.** $X=(\beta_1,\ \beta_2)$, где $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$. **3.135.** $X=(1+\beta_1,\ 1+\beta_2)$, где $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$. **3.136.** $X=(\alpha_1+2\alpha_2+\beta_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta_i\geqslant 0$, $i=1, 2$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. **3.137.** $X=(\alpha_1+2\alpha_2+\beta,\ \alpha_1+\alpha_2+\beta)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $i=1, 2$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. **3.138.** $X=(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\beta)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $i=1, 2$, $\alpha_1+\alpha_2\leqslant 1$. **3.139.** $X=(\alpha-\beta_2,\ \alpha+\beta_1+\beta_2)$, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$. **3.140.** $X=(\beta_1-\beta_2,\ \beta_1+\beta_2)$, где $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$. **3.141.** $X=(-\alpha_2+\beta_1+2\beta_2,$ $-\alpha_1+\alpha_3-\beta_2)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\beta_j\geqslant 0$, $j=1, 2$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. **3.142.** $X=(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\beta,\ \alpha_2+2\alpha_3+\beta)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\beta\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i\leqslant 1$. **3.143.** $X=\left(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\beta,\ -\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\beta\right)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\beta\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. **3.144.** $X=\left(2+\beta,\ 1+\frac{1}{2}\beta\right)$, где $\beta\geqslant 0$. **3.145.** Система противоречива. **3.146.** $X=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. **3.147.** $X=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i\leqslant 1$. **3.148.** $X=(\alpha_1+\alpha_2+$ $+\alpha_3+\alpha_4;\ \alpha_2+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_7,\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_6+\alpha_7)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{7}\alpha_i\leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, 7$. **3.149.** $X=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=1$. **3.150.** $X=\left(\alpha_1+\frac{5}{3}\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\ \frac{5}{3}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)$, где $\alpha_i\geqslant 0$,

$i=1, 2, 3, \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.151.** $X=(\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3,\ 2\alpha_1+6\alpha_2+2\alpha_3,\ 7\alpha_1+3\alpha_2+$ $+3\alpha_3)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.152.** $X=(3\alpha_1,\ \alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ 3\alpha_3)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.153.** $X=(3\alpha_1+2\alpha_4,\ \alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ 3\alpha_3+$ $+2\alpha_5)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 5$, $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1$. **3.154.** $X=(\alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_4,\ \alpha_5)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots 5$, $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1$. **3.155.** $X=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ 10\alpha_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \leqslant 1$, $i=1, 2, 3, 4$. **3.156.** $X=(\alpha_1+2\alpha_2,\ 2\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \leqslant 1$. **3.157.** $X=\left(\alpha_1+3{,}5\alpha_2+4\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_4,\ \alpha_2+2\alpha_3+\right.$ $\left.+3\alpha_4+\alpha_5,\ \alpha_6\right)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, 6$, $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \leqslant 1$. **3.158.** $X=(\beta_1,\ \beta_2,$ $1-\beta_1-\beta_2)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2$. **3.159.** $X=(\beta_1,\ \beta_2,\ 1-\beta_1-\beta_2-\beta_3)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$. **3.160.** $X=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \beta)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\beta \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \leqslant 1$. **3.161.** $X=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \alpha_3+\beta_3)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.162.** $X=(5\alpha_1+3\beta_1,\ \beta_1+\beta_2,\ 5\alpha_2+3\beta_2)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2$, $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. **3.163.** $X=(11+2\beta,\ 2+\beta,\ \beta)$, где $\beta \geqslant 0$. **3.164.** $X=(1-$ $-\beta_1-\beta_2+\beta_3,\ 1-\beta_1+\beta_2-\beta_3,\ 1+\beta_1-\beta_2-\beta_3)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$. **3.165.** $X=(2-\beta_1-\beta_2-\beta_3,\ 1-\beta_1-\beta_2+\beta_3,\ -\beta_1+\beta_2+\beta_3)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$. **3.166.** $X=(1+\beta_1+2\beta_2-\beta_3,\ -2\beta_1-\beta_2,\ -\beta_1)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$. **3.167.** $X=(1-\beta_2+\beta_3,\ 1-\beta_1+\beta_2-\beta_3,\ 1+\beta_1-\beta_2)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$. **3.168.** $X=(-\beta_1-\beta_2,\ 2\alpha_1+\beta_1-\beta_2-\beta_4,\ 2\alpha_2-\beta_1+\beta_2-\beta_3)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2$, $\beta_j \geqslant 0$, $j=1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1$. **3.169.** $X=(2\alpha_1+\alpha_2+$ $+\alpha_3-\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4,\ \alpha_1-\beta_1-\beta_4,\ -\alpha_2+\alpha_3-\beta_1+\beta_3+\beta_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, $\beta_j \geqslant 0$, $j=1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.170.** $X=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$. **3.171.** $X=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \leqslant 1$. **3.172.** $X=(6\alpha_1,\ 3\alpha_2,\ 3\alpha_3,\ 6\alpha_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3, 4$,

$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$. **3.173.** $X = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 9\alpha_4,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{11}{3}\alpha_3 + \alpha_4,\ \alpha_1 + \frac{11}{3}\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,\ 9\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\right)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$. **3.174.** $X = (1 - \beta,\ 1 + \beta,\ 1 + \beta,\ 1 - \beta)$, где $\beta \geqslant 0$. **3.175.** $X = (1 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4,\ 1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4,\ 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4,\ 1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. **3.176.** $X = (\alpha_1 + \beta_2 + \beta_4, \beta_2 + \beta_3, \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3, \beta_1 + \beta_4)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. **3.177.** $X = (\alpha_1 + \beta_2 + \beta_3,\ \beta_2 + \beta_4 + \beta_5,\ \beta_1 + \alpha_2 + \beta_4,\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_6)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\beta_j \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 1$. **3.178.** $X = (\alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ 2\alpha_2,\ 2\alpha_1)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. **3.179.** $X = (3\alpha_1 + 3\alpha_2,\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4,\ 3\alpha_3 + 3\alpha_6,\ 2\alpha_1 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6,\ 3\alpha_4 + 3\alpha_5)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1$. **3.180.** $X = (1 + \beta_1,\ 1 + \beta_2,\ 1 + \beta_3,\ 1 + \beta_4,\ 1 + \beta_5)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. **3.181.** $X = (\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2,\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_4,\ \alpha_2 + \beta_3 + \beta_5,\ \beta_2 + \beta_5 + \beta_6,\ \alpha_3 + \beta_4 + \beta_6)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $\beta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.182.** $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. **3.183.** $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 1$. **3.184.** См. ответ к задаче 3.182. **3.185.** $X = (\alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ 2\alpha_1,\ 2\alpha_2)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. **3.186.** $X = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ 3\alpha_1,\ 3\alpha_2,\ 3\alpha_3)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. **3.187.** $X = (1 - \beta - \gamma,\ \gamma)$, где $\beta \geqslant 0$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.188.** $X = (1 - \beta + \gamma,\ \gamma)$, где $\beta \geqslant 0$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.189.** $X = (\beta_2 - 2\gamma,\ 1 - \beta_1 - \beta_2 - \gamma,\ \gamma)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.190.** $X = (-\alpha_1 - 3\gamma,\ \alpha_2 - \alpha_3 - 4\gamma,\ \gamma)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.191.** $X = (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\gamma,\ -\alpha_1 - \alpha_4 - 2\alpha_5 + \gamma,\ \gamma)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.193.** $X = (\beta_1 - \beta_2 - 2\gamma,\ \beta_1 + \beta_2 - \gamma,\ \gamma)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.194.** $X = \left(2 + \beta - \gamma,\ 1 + \frac{1}{2}\beta + \gamma,\ \gamma\right)$, где $\beta \geqslant 0$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.195.** $X = \left(\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \beta - \gamma,\ -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta - \gamma,\ \gamma\right)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $\beta \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.196.** $X = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta - \gamma,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta - \gamma,\ \gamma)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.197.** $X = (\alpha_1 - \gamma,\ \alpha_2 - \gamma,\ \alpha_3 - \gamma,\ \gamma)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$,

$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.198.** $X = (3\alpha_1 - \gamma,\ \alpha_2 + \alpha_1 + 4\alpha_3 - 2\gamma,\ 3\alpha_2 - 3\gamma,\ \gamma)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.199.** $X = (1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \gamma,\ 1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \gamma,\ 1 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \gamma,\ \gamma)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.200.** $X = (2 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - 2\gamma,\ 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \gamma,\ -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\ \gamma)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.201.** $X = (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - 2\gamma,\ -\beta_1 - \beta_4 - \gamma,\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_3 + \beta_4,\ \gamma)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\beta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1$, $-\infty < \gamma < \infty$. **3.202.** $X = (\alpha_2 + 1{,}5\alpha_3 + 3\alpha_4 + 1{,}5\alpha_5 - \gamma_1 - \gamma_2,\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3{,}5\alpha_3 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - \gamma_1 + \gamma_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i \leqslant 1$, $-\infty < \gamma_j < \infty$, $j = 1, 2$. **3.203.** $X = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 + \gamma_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $-\infty < \gamma_j < \infty$, $j = 1, 2$. **3.204.** $X = (1 - \beta_1 + \beta_3 - \gamma_2,\ 1 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \gamma_1 - \gamma_2,\ 1 - \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $-\infty < \gamma_j < \infty$, $j = 1, 2$. **3.205.** $X = (\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 - \gamma_3,\ \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3,\ \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_2 - \gamma_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$, $-\infty < \gamma_j < \infty$, $j = 1, 2, 3$. **3.206.** $X = (1 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - \gamma_2,\ 1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - \gamma_2,\ 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 - \gamma_1,\ 1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 - \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1)$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $-\infty < \gamma_j < \infty$, $j = 1, 2$. **3.207.** $X = (11 + 2\beta - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_4,\ 2 + \beta - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4,\ \beta - \gamma_3 - \gamma_4,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4)$, где $\beta \geqslant 0$, $-\infty < \gamma_j < \infty$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Глава 4

4.3.
$$(C, X) \to \max,\quad AB \leqslant B,\quad -AX \leqslant -B,\quad X \geqslant 0.$$

4.4.
$$(-C, X) \to \max,\quad AX = B,\quad X \geqslant 0.$$

4.15.
$$\frac{2}{5} + \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \to \max,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0.$$

4.16.
$$-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \to \max,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0.$$

4.17.
$$-[(3 + \alpha)x_2 + 1] \to \max,\quad x_3 = 0,\quad x_3 \geqslant 0.$$

Отсюда: 1) при $3 + \alpha \neq 0$ форма не ограничена сверху; 2) при $3 + \alpha = 0$ минимум исходной линейной формы равен 1.

4.18. 1) При $\alpha \neq 2$

$$\frac{1}{2(2-\alpha)}[x_1(5-\alpha) - 3x_4 - (\alpha + 1)] \to \max,$$
$$x_1 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0;$$

2) при $\alpha = 2$

$$2x_1 - 3x_2 - 1 \to \max,$$
$$x_1 - x_4 = 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0.$$

Задача неразрешима.

4.19. $-3 - x_1 - 4x_5 \to \max,$

$x_1 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0.$

4.20. $-\frac{1}{2}x_1 - 2 \to \max,$

$x_1 \geqslant 0.$

4.21. 1) При $\alpha \neq 0$

$$x_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha - \frac{1}{\alpha} \to \max,$$
$$x_1 \geqslant 0;$$

2) при $\alpha = 0$

$$\frac{1}{2} + x_1 - x_2 \to \max,$$
$$-x_1 = 1, \quad x_1 \geqslant 0.$$

Система условий противоречива.

4.22.

$$x_1(1+\alpha) + \frac{4}{3}\alpha x_4 + \frac{1}{3}\alpha x_5 \to \max,$$
$$2x_4 - x_5 - 3x_6 = -3,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 4, 5, 6.$$

Форма не ограничена сверху при $\alpha \neq -1$.

4.23. 1) При $|\lambda| \neq 1$

$$\frac{1}{\lambda^2 - 1}[\alpha(\lambda^2 - 1) + x_3(1 - \alpha\lambda)] \to \max,$$
$$x_3 \geqslant 0;$$

2) при $\lambda = 1$

$$[x_1(1-\alpha) + \alpha] \to \max,$$
$$x_3 = 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

Отсюда: а) если $\alpha \neq 1$, то задача неразрешима; б) если $\alpha = 1$, то максимум формы равен 1.

3) $\lambda = -1$,

$$[x_1(1+\alpha) + \alpha] \to \max,$$
$$x_3 = 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

Отсюда: а) если $\alpha \neq -1$, то задача неразрешима; б) если $\alpha = -1$, то максимум формы равен -1.

4.24. 1) При $\alpha\beta \neq 1$

$$\frac{1}{1-\alpha\beta}[(1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\beta + x_3(\beta^2 - \alpha) + x_4(\alpha^2 - \beta)] \to \max,$$
$$x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0;$$

2) при $\alpha\beta = 1$

$$\left[\alpha - x_2\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha}\right) - \alpha x_3\right] \to \max,$$
$$x_3 - \alpha x_4 = 1 - \alpha,$$
$$x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0,$$

Отсюда: а) если $\alpha \neq 1$, то форма не ограничена сверху; б) если $\alpha = 1$, то максимум формы равен 1.

4.25. 1) При $a \neq 0$

$$\frac{1}{a}[1 - x_4(1+a) - x_5] \to \max,$$
$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0;$$

2) при $a = 0$

$$1 - 2x_4 \to \max,$$
$$x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_2 = 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0.$$

Задача разрешима, и максимум линейной формы равен 1.

4.26. 1) При $\alpha \neq 9$

$$[(4\alpha - 2) + x_4(3 - \alpha)] \to \max,$$
$$4x_4 - x_5 = 9,$$
$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0;$$

2) при $\alpha = 9$ условия задачи имеют вид

$$20x_4 + x_6 = 26,$$
$$4x_4 - x_5 = 9,$$
$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0;$$

т. е. задача противоречива.

4.27. 1) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$,

$$-\frac{3\lambda}{\lambda+2} + 2x_4 + 2x_5 - (\mu+1)x_6 \to \max,$$
$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0;$$

2) при $\lambda = 1$

$$-1 + 2x_5 - (\mu+1)x_6 \to \max,$$
$$x_4 = 0, \; x_4 \geqslant 0, \; x_5 \geqslant 0, \; x_6 \geqslant 0.$$

задача неразрешима;

3) при $\lambda = -2$ условия задачи противоречивы.

4.28. $\bar{X} = (1/2, 1/2)$, $L(\bar{X}) = 1$. **4.29.** $\bar{X} = (0, 1)$, $L(\bar{X}) = 2$. **4.30.** Линейная форма не ограничена сверху. **4.31.** $\bar{X} = (1/3, 1/3)$, $L(\bar{X}) = 2/3$. **4.32.** $\bar{X} = (0, 2/3)$, $L(\bar{X}) = -2/3$. **4.33.** $\bar{X} = (0, 0, 0)$, $L(\bar{X}) = 0$. **4.34.** Система условий задачи противоречива. **4.35.** $\bar{X} = (2, 2)$, $L(\bar{X}) = 10$. **4.36.** Система условий задачи противоречива. **4.37.** $\bar{X} = (1/2, 2)$, $L(\bar{X}) = 2\,1/2$. **4.38.** $\bar{X} = (1{,}5, 3{,}5)$, $L(\bar{X}) = -27{,}5$. **4.39.** $\bar{X} = (0, 1, 0)$, $L(\bar{X}) = 1$. **4.40.** $\bar{X} = (0, 0, 1)$, $L(\bar{X}) = -1$. **4.41.** $\bar{X} = (3, 1, 0)$, $L(\bar{X}) = 2$. **4.42.** $\bar{X} = (0, 4, 0)$, $L(\bar{X}) = 4$.

4.43. $\bar{X} = (0, 0, 2)$, $L(\bar{X}) = -2$. **4.44.** Линейная форма не ограничена снизу. **4.45.** Система условий задачи противоречива. **4.46.** $\bar{X} = (4, 2, 0)$, $L(\bar{X}) = 4$. **4.47.** $\bar{X} = (2, 1, 0)$, $L(\bar{X}) = 3$. **4.48.** Линейная форма не ограничена сверху. **4.49.** $\bar{X} = (1, 1, 0, 0)$, $L(\bar{X}) = 2$. **4.50.** $\bar{X} = (2, 1, 0, 0)$, $L(\bar{X}) = 3$. **4.51.** $\bar{X} = (0, 1/2, 0, 2)$, $L(\bar{X}) = -1/2$. **4.52.** $\bar{X} = (0, 3, 0, 1/2, 3/2)$, $L(\bar{X}) = 1{,}5$. **4.53.** $\bar{X} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 3)$, $L(\bar{X}) = \dfrac{6 + n^2 + n}{2}$. **4.54.** $\bar{X} = (3, 2, 0, 0)$,

$L(\bar{X})=3$. **4.55.** Система условий задачи противоречива. **4.56.** $\bar{X}=(1, 0, 0, 0)$, $L(\bar{X})=2$. **4.57.** $\bar{X}=(0, 1, 0, 0)$, $L(\bar{X})=-1$. **4.58.** $\bar{X}=(0, 0, 3, 2, 0)$, $L(\bar{X})=5$. **4.59.** $\bar{X}=(0, 0, 1, 0, 0)$, $L(\bar{X})=2$. **4.60.** Линейная форма не ограничена сверху. **4.61.** Система условий задачи противоречива. **4.62.** $\bar{X}=(1, 2, 7, 0, 0, 4)$, $L(\bar{X})=28$.

4.63. 1) $a<0$; 2) $a>0$; 3) $a=0$; 4) не существует ни одного значения a, при котором задача имеет бесконечное множество решений.

4.64. 1) При всех значениях a условия задачи совместны; 2) $a\leqslant 0$; 3) $a>0$, $a\neq 1$; 4) $a=1$.

4.65. 1) $a<0$ или $c<0$; 3) $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $b\neq 1$ и $d\neq 0$ или $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d<0$; 4) $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $b=1$, $d>0$ или $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d=0$.

4.69. $L(\bar{X})=1$. **4.70.** Линейная форма не ограничена сверху. **4.71.** $L(\bar{X})=1$. **4.72.** Линейная форма не ограничена сверху. **4.73.** $L(\bar{X})=2$. **4.74.** $L(\bar{X})=4$. **4.75.** $L(X)=5$. **4.76.** Система условий задачи противоречива. **4.77.** $L(\bar{X})=4$. **4.78.** Линейная форма не ограничена сверху. **4.79.** $L(\bar{X})=1$. **4.80.** $L(\bar{X})=n$. **4.81.** $L(\bar{X})=2$. **4.82, 4.83.** При всех a условия задачи непротиворечивы и задача имеет решение. **4.84.** 1) $ab<0$ или $a=0$, $b\neq 0$; 2) $a=b=0$; 3) $ab\geqslant 0$, $a\neq 0$. **4.85.** 1) Условия задачи непротиворечивы. Задача разрешима при всех значениях a. **4.86.** 1) $b>4$; 2) $b\leqslant 4$, $a>0$; 3) $b\leqslant 4$, $a\leqslant 0$.

4.87. 1) $b>1$; 3) $b\leqslant 1$.

4.88. 1) $c<0$ или $0\leqslant c<1$, $b\leqslant 0$; 2) $c\geqslant 0$, $b>0$, $ab-d>0$; 3) $c\geqslant 1$, $b\leqslant 0$ или $c\geqslant 0$, $b>0$, $ab-d\leqslant 0$.

4.89. а) Пример: $L(X)=-x_2$,

$$N=\{X=(x_1, x_2): -e^{x_1}+x_2\geqslant 0\}.$$

б) Пример: $F(\bar{X})=-e^{x_1}$,

$$M=\{X=(x_1, x_2): x_2\leqslant 0\}.$$

4.91. $\max L(X)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i$. **4.92.** Показать, что к данной задаче можно применить теорему 4.1 о разрешимости.

4.94. Предположить противоположное и рассмотреть C, равное P, где P — направляющий вектор неограниченного ребра множества M.

4.96. Привести ограничения, задающие выпуклое многогранное множество M, к виду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=A_iX\leqslant b_i,\ i=1, 2, \ldots, p,$$

и рассмотреть $C=\sum_{i=1}^{p}A_i$.

4.97. $\bar{X}=(0, -1)$, $L(\bar{X})=2$. **4.98.** $\bar{X}=(0,2)$, $L(\bar{X})=16$. **4.99.** $\bar{X}=(10, 1)$, $L(\bar{X})=41$. **4.100.** $\bar{X}=(2, 0, 0)$, $L(\bar{X})=2$. **4.101.** $\bar{X}=(0, 0, 4)$, $L(\bar{X})=20$. **4.102.** $\bar{X}=(0, 0, 4)$, $L(\bar{X})=20$. **4.103.** $\bar{X}=(1, 0, 0, 0)$, $L(\bar{X})=3$. **4.104.** $\bar{X}=(0, 0, 1)$, $L(\bar{X})=5$. **4.105.** $\bar{X}=(-1, -1, 1)$, $L(\bar{X})=1$. **4.106.** $\bar{X}=(0, 0, 10)$, $L(\bar{X})=10$.

4.107. $\bar{X}=(0,0,0)$, $L(\bar{X})=0$. **4.108.** $\bar{X}=(7,5,0,0)$, $L(\bar{X})=12$. **4.109.** $\bar{X}=(7,5,0,0,0)$, $L(\bar{X})=17$. **4.110.** $\bar{X}=(0,0,0,3)$, $L(\bar{X})=3$. **4.111.** $\bar{X}=(0,0,\ldots,0,n)$, $L(\bar{X})=n^2$. **4.112.** $\bar{X}=(1,1,\ldots,1)$, $L(\bar{X})=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4.113. Показать, что если задача линейного программирования разрешима, то ограничения, задающие множество $\bar{M}$, состоят из ограничений задачи, дополненных условием $(C,X)=(C,X_0)$, где X_0 — оптимальный план задачи.

4.116. а) $x_1+x_2\to\max$, $x_1\leqslant 0$, $x_2\leqslant 0$. б) $x_1+x_2\to\max$, $x_1+x_2\leqslant 1$. в) $x_1+x_2+x_3\to\max$, $x_1+x_2+x_3=1$, $x_i\geqslant 0$, $i=1,2,3$.

4.117. Воспользоваться указанием к задаче 4.113. **4.119.** $\bar{X}=(4,-3)$. **4.120.** $\bar{X}=(1/3\alpha_1, 1/3\alpha_1+1/2\alpha_2)$, где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. **4.121.** $\bar{X}=(1/2,0)$. **4.122.** $\bar{X}=(2\alpha_1,0,2\alpha_2)$, где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. **4.123.** $\bar{X}=(\alpha_3+\frac{5}{2}\alpha_4, \frac{3}{2}\alpha_2+\frac{3}{2}\alpha_4, \alpha_1+5/2\alpha_2, 3\alpha_1+3\alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,2,3,4$, $\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=1$. **4.125.** $\bar{X}=(5/2,3/2,0,0)$. **4.126.** а) Если $c<0$, то $\bar{X}=(1,0,0,1)$; б) если $c=0$, то $\bar{X}=(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_4)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,2,3,4$, $\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=1$; в) если $c>0$, то $\bar{X}=(0,1,1,0)$. **4.127.** а) Если $c<0$, то $\bar{X}=(\alpha_1,0,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)$, где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$; б) если $c=0$, то $\bar{X}=(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_4)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,2,3,4$, $\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=1$; в) если $c>0$, то $\bar{X}=(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, 0)$, где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. **4.128.** а) Если $c_1=c_2=c_3$, то $\bar{X}=(1,1,\ldots,1,3\alpha_1,3\alpha_2,3\alpha_3)$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,2,3$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=1$; б) если $c_1\leqslant c_2<c_3$, то $\bar{X}=(1,1,\ldots,1,0,0,3)$; в) если $c_1<c_2=c_3$, то $\bar{X}=(1,1,\ldots,1,0,3\alpha_1,3\alpha_2)$, где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$.

4.129. Всегда, когда множество

$$M=\{X=(x_1,x_2,\ldots,x_n): AX=B, X\geqslant 0\}$$

непусто. Воспользоваться утверждением задачи 4.96.

4.130. Нет, не всегда. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2\to\max,\\ &-x_1+x_2=b,\\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

4.133. Для доказательства утверждения убедиться в том, что две допустимые задачи в канонической форме записи, отличающиеся лишь векторами ограничений, разрешимы или неразрешимы одновременно.

4.134. Нет, не существует. Воспользоваться утверждением задачи 4.133.

4.135. Нет, не может. Предположить противоположное и рассмотреть два случая: 1) $B_0\neq 0$; показать, что это противоречит утверждению задачи

4.133; 2) $B_0=0$; показать, что $B=A\bar{X}$, где $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, $\bar{x}_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, принадлежит N_B (предполагается, что $A\neq 0$), т. е. $a_{i_0 j_0}\neq 0$ при некоторых i_0, j_0.

4.136. Вообще говоря, нет. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2\to\max, \\ &x_1-x_2=1, \qquad -x_1+x_2=1, \\ &x_1=1, \qquad\qquad x_1=1, \\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \qquad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$A_1=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\in N_A, \qquad A_2=\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\in N_A,$$

а матрица

$$\frac{1}{2}(A_1+A_2)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\notin N_A,$$

так как задача

$$\begin{aligned} &x_1+x_2\to\max, \\ &0\cdot x_1+0\cdot x_2=1, \\ &x_1=1, \\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

противоречива.

4.138. Пример:

$$\begin{aligned} &(C, X)\to\max, \\ &x_1+x_2+x_3=1, \\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0. \end{aligned}$$

$C_1=(1, 1, 0)$, $C_2=(-1, -1, 0)$. Здесь $V_0(C_1+C_2)=0$, а $V_0(C_1)+V_0(C_2)=1$.

4.140. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1-x_2\to\max, \\ &x_1+x_2+x_3=b_1, \\ &x_1-x_2+x_4=b_2, \\ &x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$B_1=(5, 1)$, $B_2=(0, 2)$. Здесь $V_0(B_1+B_2)=3$, а $V_0(B_1)+V_0(B_2)=1$.

4.143. Нет, так как из утверждения задачи 4.136 следует, что множество N_A невыпукло, а выпуклые функции определены лишь на выпуклых множествах.

4.144. Воспользоваться теоремой о существовании опорного решения и оценить величину $(\tilde{X}, \Delta C_k)$ при $k\to\infty$, где $\tilde{X}$ — опорный план задачи (α_k), а $\Delta C_k=C-C_k$.

4.145. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1\to\max, \\ &x_1+x_2=1, \\ &\beta_k x_1+x_3=0, \\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ \beta_k\geqslant 0. \end{aligned}$$

Если β_k стремится к нулю, то функция V_0 терпит разрыв. Действительно, $V_0(\beta_k)=0$, если $\beta_k>0$, и $V_0(\beta_k)=1$, если $\beta_k=0$.

Глава 5

5.4. Вообще говоря, нет. Пример: условия задачи имеют вид

$$x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}+x_m=m-1,$$
$$x_2+\ldots+x_{m-1}+x_m=m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{m-1}+x_m=1,$$
$$x_m=0,$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ n\ (n>m).$$

Опорный план $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m,\ldots,\bar{x}_n)$, где

$$\bar{x}_i=1\ (i=1,\ 2,\ldots,\ m-1),\ \bar{x}_i=0\ (i=m,\ m+1,\ldots,\ n),$$

вырожден, но имеет единственный базис $Б_{\bar{X}}=\{A_1,\ A_2,\ldots,\ A_m\}$, так как все A_i при $i>m$ — нулевые векторы, а поэтому не могут входить в базис $Б_{\bar{X}}$.

5.7. Пример:

$$x_1-x_2+2x_3=0,$$
$$x_2-x_3=0,$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3.$$

План $\bar{X}=(0,\ 0,\ 0)$ вырожден, $\mu=2$; $C^2_{3-2+2}=3$; $\bar{X}$ обладает базисами:

$$Б^1_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2),\qquad Б^2_{\bar{X}}=(A_2,\ A_3),\qquad Б^3_{\bar{X}}=(A_1,A_3).$$

5.8. Вообще говоря, нет. Пример:

$$x_1+x_2+x_3=1,$$
$$x_2-x_3=-1,$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3.$$

Система векторов условий $(A_1,\ A_2)$ является линейно независимой, однако единственный опорный план задачи $\bar{X}=(0,0,1)$ имеет базис $Б_{\bar{X}}=(A_2,\ A_3)\neq$ $\neq(A_1\ A_2)$.

5.9. $Б_{\bar{X}}=(A_1)$. **5.10.** $Б_{\bar{X}}=(A_2)$. **5.11.** $Б^1_{\bar{X}}=(A_1)$; $Б^2_{\bar{X}}=(A_2)$. **5.12.** $Б_{\bar{X}}=$ $=(A_1,\ A_2)$. **5.13.** $Б_{\bar{X}}=(A_1,\ A_3)$. **5.14.** $Б^1_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2)$; $Б^2_{\bar{X}}=(A_2,\ A_3)$. **5.15.** $Б^1_{\bar{X}}=$ $=(A_1,A_2)$; $Б^2_{\bar{X}}=(A_1,\ A_4)$. **5.16.** $Б^1_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2,\ A_3)$; $Б^2_{\bar{X}}=(A_1,\ A_3,\ A_4)$. **5.17.** $Б^1_{\bar{X}}=$ $=(A_1,A_2,\ldots,A_{n-1})$; $Б^2_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2,\ldots,A_{n-2},A_n)$. **5.18.** а) Если $a\cdot b\neq 0$, то $Б_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2)$; б) если $a>0$, $b=0$, то $Б^1_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2)$, $Б^2_{\bar{X}}=(A_1,\ A_3)$; в) если $a=0, b>0$, то $Б^1_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2)$, $Б^2_{\bar{X}}=(A_2,\ A_3)$; г) если $a=b=0$, то $Б^1_{\bar{X}}=(A_1,\ A_2)$, $Б^2_{\bar{X}}=(A_1,\ A_3)$, $Б^3_{\bar{X}}=(A_2,\ A_3)$. **5.19.** $\bar{X}=(1,0)$. **5.20.** Не существует опорного плана, базис которого состоит из векторов $(A_1,\ A_2)$. **5.21.** $\bar{X}=(0,0,2)$. **5.22.** $\bar{X}=(1,0,0)$. **5.23.** $\bar{X}=(0,2,0,0)$. **5.24.** $\bar{X}=(0,1,0,0)$. **5.25.** $\bar{X}=(1/2,\ 1/2,\ 1/2,$ $0,0,0)$. **5.26.** 1) Если $\alpha\geqslant\beta\geqslant 0$, то $\bar{X}=(\alpha,\beta,\alpha-\beta,0)$; 2) если не выполняется одно из неравенств 1), то не существует опорного плана, базис которого состоит из векторов $(A_1,\ A_2,\ A_3)$.

5.28. Пример:

$$x_2\to\max,$$
$$x_1+x_2+2x_3=1,$$
$$x_2+x_3=1,$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,$$

$\bar{X}=(0,1,0)$, $Б_{\bar{X}}=(A_2, A_3)$. В базисе $Б_{\bar{X}}$ параметры Δ_j равны $\Delta_1=-1$, $\Delta_2=\Delta_3=0$. Однако в базисе $Б'_{\bar{X}}=(A_1, A_2)$ $\Delta'_1=\Delta'_2=0$, $\Delta'_3=1$, т. е. признак оптимальности выполняется.

5.30. Нет, нельзя. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+2x_3+8x_4\to\max,\\ &x_1\qquad\quad -x_3+\ \ x_4=1,\\ &\qquad\quad x_2+x_3+3x_4=1,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,\\ &\bar{X}=(1,1,0,0). \end{aligned}$$

В базисе $Б_{\bar{X}}=(A_1, A_2)$ $\Delta_1=\Delta_2=0$, $\Delta_3=-2$, $\Delta_4=-4$. Если ввести в базис $Б_{\bar{X}}$ вектор A_4, то приращение линейной формы окажется равным 4/3, а если ввести вектор A_3, то форма увеличится на 2.

5.31. $Б_{\bar{X}}=(A_1, A_2)$, $\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{Vmatrix}$.

5.32. $Б_{\bar{X}}=(A_2, A_3)$ $\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}-18&1&0\\-7&0&1\end{Vmatrix}$.

5.33. $Б^1_{\bar{X}}=(A_1, A_2)$, $\|x^{(1)}_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&1\end{Vmatrix}$;

$Б^2_{\bar{X}}=(A_1, A_3)$, $\|x^{(2)}_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&-1&0&-2\\0&1&1&1\end{Vmatrix}$;

$Б^3_{\bar{X}}=(A_1, A_4)$, $\|x^{(3)}_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&1\end{Vmatrix}$.

5.34. $Б_{\bar{X}}=(A_1, A_2, A_3)$, $\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{Vmatrix}$.

5.35. $Б_{\bar{X}}=(A_1, A_2, A_3, A_4)$, $\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\\0&0&0&1&-1&1\end{Vmatrix}$.

5.36. $Б_{\bar{X}}=(A_1, A_2, A_3)$, $\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{Vmatrix}$.

5.37. $Б_{\bar{X}}=(A_1, A_2, A_3)$, $\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&\alpha\\0&1&0&1&\alpha\\0&0&1&1&\alpha\end{Vmatrix}$, где $\alpha=\dfrac{1}{a+b+c}$.

5.38. $Б^1_{\bar{X}}=(A_1, A_2)$, $\|x^{(1)}_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&\alpha\\0&1&\beta\end{Vmatrix}$, где $\alpha=\dfrac{ce-bf}{ae-bd}$, $\beta=\dfrac{af-dc}{ae-bd}$.

Если $af\neq cd$, то $\bar{X}$ обладает, кроме этого, базисом $Б^2_{\bar{X}}=(A_1, A_3)$, $\|x^{(2)}_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&\alpha_1&0\\0&\beta_1&1\end{Vmatrix}$, где $\alpha_1=\dfrac{bf-ce}{af-cd}$, $\beta_1=\dfrac{ae-db}{af-cd}$.

5.40. Существует. Пример:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1, \\ x_2 \qquad &= 1, \\ x_2 \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для опорного плана $\bar{X} = (1, 1, 0)$ с базисом $Б_{\bar{X}} = (A_1, A_2)$ $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

5.41. План $\bar{X}$ оптимален. **5.42, 5.43.** План $\bar{X}$ можно улучшить. **5.44.** Задача неразрешима. **5.45.** План $\bar{X}$ оптимален. **5.46.** План $\bar{X}$ оптимален. **5.47.** План $\bar{X}$ можно улучшить. **5.48.** План $\bar{X}$ оптимален.

5.49. 1) Если $a \leqslant 3$, то план $\bar{X}$ оптимален; 2) если $a > 3$, то план $\bar{X}$ можно улучшить.

5.50. 1) Если $a \leqslant 1$, $a \leqslant 7 - 3b$, то план $\bar{X}$ оптимален; 2) в остальных случаях план $\bar{X}$ можно улучшить.

5.51. 1) Если $a > -1$, то задача неразрешима; 2) если $a \leqslant -1$, то план $\bar{X}$ оптимален.

5.52. 1) Если $2a - 1 \geqslant 0$, то план $\bar{X}$ оптимален; 2) если $2a - 1 < 0$, то задача неразрешима.

5.53. План $\bar{X}$ оптимален при всех a, b, c.

5.54. 1) Если $2 - b \geqslant 0$, то план $\bar{X}$ оптимален при всех a; 2) если $b > 2$, $a < 0$, задача неразрешима; 3) если $b > 2$, $a > 0$, то план $\bar{X}$ можно улучшить.

5.56. 1) Если $2a + b \leqslant 3$, $a - 3b \leqslant 6$, то план $\bar{X}$ оптимален; 2) если $2a + b > 3$ или $a - 3b > 6$, то план $\bar{X}$ можно улучшить.

5.57. 1) Если $-3 + b - a \geqslant 0$, $a - \frac{11}{3} b \geqslant 0$, то план $\bar{X}$ оптимален; 2) если $a - b < 0$, то задача неразрешима; 3) если $a - b \geqslant 0$, $a - \frac{11}{3} b < 0$, то план $\bar{X}$ можно улучшить.

5.58. 1) Если $b + c - a \leqslant 1$, $a - c \leqslant 1$, $d \geqslant 2$, то план $\bar{X}$ оптимален; 2) если $d \leqslant 0$, задача неразрешима; 3) если $d > 0$ и выполняется одно из условий: $d < 2$, $b + c - a > 1$, $a - c > 1$, то план $\bar{X}$ можно улучшить.

5.59. $\Lambda = (-1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3,\ 3 + 2\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3,\ 1 + \beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3$, где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$.

Применить теорему 3.1 о представлении выпуклого многогранного множества к системе линейных неравенств $\Delta_j(\Lambda) = \Delta_j(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geqslant 0$, $j = 3, 4, 5$.

5.60. 1) $\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &\geqslant 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &\leqslant 3 \end{aligned}$ (см. рис. 5.1); 2) $\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &< 0, \\ \lambda_1 &\leqslant 0, \\ \lambda_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$ (см. рис. 5.2).

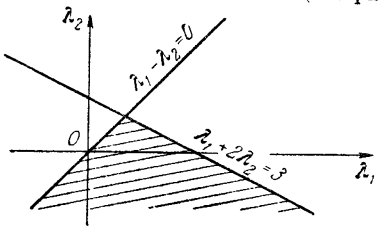

Рис. 5.1.

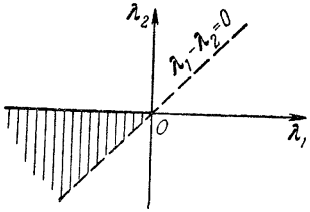

Рис. 5.2.

На рис. 5.2—5.4 пунктир означает, что граница не принадлежит заштрихованной области.

3) а) $\lambda_1-\lambda_2<0$, $\lambda_1>0$ и $\lambda_1-\lambda_2<0$, $\lambda_2>0$ (см. рис. 5.3);
б) $\lambda_1+2\lambda_2>3$ (см. рис. 5.4).

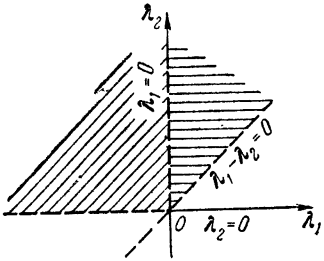

Рис. 5.3.

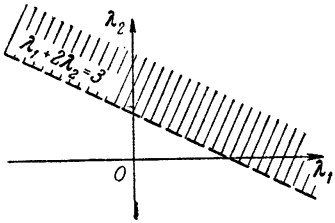

Рис. 5.4.

5.62. $\bar{\Lambda}=(1, 5, -1)$, $L_1(\bar{\Lambda})=5$.
Решить задачу линейного программирования

$$L_1(\Lambda)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\to\max,$$
$$\Delta_j(\Lambda)=\Delta_j(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\geqslant 0,\ j=4, 5, 6.$$

5.63. Всегда: 1) достаточно положить $c_j'=0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$; 2) необходимо и достаточно, чтобы $x_{ik}\leqslant 0$; при некотором k и всех i $(i=1, 2, \ldots, m)$ (положить $c_j=0$ при базисных переменных, а $c_k=1$); 3) необходимо и достаточно, чтобы $x_{rk}>0$, для некоторых r и k (положить $c_i=0$ при базисных переменных, а $c_k=1$).

5.64. Пример:

$$-x_1-x_2-\quad x_3\to\max$$
$$x_1-x_2+a_{13}x_3=0,$$
$$x_1+x_2+a_{23}x_3=2,$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,$$
$$\bar{X}=(1, 1, 0).$$

5.65. $\bar{X}_1=(1,0)$, $L(\bar{X}_1)=1$. **5.66.** $\bar{X}_1=(0, 1)$, $L(\bar{X}_1)=3$. **5.67.** $\bar{X}_1=(0, 3, 1)$, $L(\bar{X}_1)=1$. **5.68.** $\bar{X}_1=(0, 1, 1)$, $L(\bar{X}_1)=3$. **5.69.** $\bar{X}_1=(1/2, 0, 9/2)$, $L(\bar{X}_1)=-19/2$. **5.70.** $\bar{X}_1=(0, 2, 1)$, $L(\bar{X}_1)=14$. **5.71.** $\bar{X}_1=(2, 0, 0, 0)$, $L(\bar{X}_1)=4$. **5.72.** $\bar{X}_1=(2/3, 0, 1/3, 0)$, $L(\bar{X}_1)=7/3$. **5.73.** $\bar{X}_1=(0, 2, 0, 4)$, $L(\bar{X}_1)=10$. **5.74.** $\bar{X}_1=(1, 0, 4, 1)$, $L(\bar{X}_1)=7$. **5.75.** $\bar{X}_1=(0, 4, 2, 1)$, $L(\bar{X}_1)=11$. **5.76.** $\bar{X}_1=(0, 2, 1, 5, 0)$, $L(\bar{X}_1)=18$. **5.77.** $\bar{X}_1=(0, 1, 2, 2, 0)$, $L(\bar{X}_1)=-1$. **5.78.** $\bar{X}_1=(0, 2, 3, 2, 0, 1)$, $L(\bar{X}_1)=8$.
5.80. $\bar{X}_1=(1/a, 0)$, $L(\bar{X}_1)=1/a$. **5.81.** $\bar{X}_1=(1/a, 0)$, $L(\bar{X}_1)=1/a$. **5.82.** $\bar{X}_1=(0, 1+1/a, 1/a)$, $L(\bar{X}_1)=\dfrac{a+2}{a}$. **5.83.** $\bar{X}_1=(0, 1/a, 2)$, $L(\bar{X}_1)=\dfrac{1-2a}{a}$. **5.84.** $\bar{X}_1=(0, 3, 2-2/a, 0, 2/a)$, $L(\bar{X}_1)=7-2/a$. **5.85.** $\bar{X}_1=(1-b, 0, 0, 1)$, $L(\bar{X}_1)=2-b$. **5.86.** $\bar{X}_1=(0, 1/a, 0, 2-b/a)$, $L(\bar{X}_1)=2-\dfrac{b+c}{a}$.

5.87. $\bar{X}_1=(0,\ 1-b,\ 0,\ 1)$, $L(\bar{X}_1)=3-b$. **5.88.** $\bar{X}_1=(1-a,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $L(\bar{X}_1)=c_1(1-a)+c_3$.

5.89. 1) Если $c_1b_1+c_2-c_4<0$, то $\bar{X}_1=(1-b,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $L(\bar{X}_1)=(1-b)c_1+c_3+c_4$; 2) если $c_2+c_3b-c_5<0$, то $\bar{X}_1=(1,\ 0,\ 1-b,\ 0,\ 1)$, $L(\bar{X}_1)=(1-b)c_3+c_1+c_5$.

5.90. 1) Если $f>0$, то $\bar{X}_1=(0,\ 1-g/f,\ 1/f)$, $L(\bar{X}_1)=c_2-\frac{c_2g}{f}+\frac{c_3}{f}$; 2) если $f<0$, то $\bar{X}_1=(1-f/g,\ 0,\ 1/g)$, $L(\bar{X}_1)=c_1-\frac{c_1f}{g}+\frac{c_3}{g}$.

5.92. $L(\bar{X})=5$. **5.93.** $L(\bar{X})=4$. **5.94.** $L(\bar{X})=5$. **5.95.** $L(\bar{X})=4$.

5.96. $L(\bar{X})=6$. **5.97.** $L(\bar{X})=-3$. **5.98.** $L(\bar{X})=5$. **5.99.** Задача неразрешима. **5.100.** $L(\bar{X})=8$. **5.101.** $L(\bar{X})=10$. **5.102.** Задача неразрешима. **5.103.** $L(\bar{X})=3$. **5.104.** $L(\bar{X})=11$. **5.105.** Задача неразрешима. **5.106.** $L(\bar{X})=15$. **5.107.** $L(\bar{X})=12$. **5.108.** $L(\bar{X})=2$.

5.109. Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи.

5.110. $L(\bar{X})=10$. **5.111.** $L(\bar{X})=10$.

5.114. 1) Если $a\geqslant 0$, то $L(\bar{X})=a+3$; 2) если $a<0$, то $L(\bar{X})=a+1$.

5.115. 1) Если $a\geqslant 0$, то $L(\bar{X})=3a$; 2) если $a<0$, то $L(\bar{X})=a$.

5.116. 1) Если $2c+1>0$, то линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи; 2) если $2c+1\leqslant 0$, то $L(\bar{X})=2+c$.

5.117. 1) Если $c_1+c_3>0$ или $c_2+c_4>0$, то линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи; 2) если $c_1+c_3\leqslant 0$, $c_2+c_4\leqslant 0$, то $L(\bar{X})=c_1+c_2$.

5.118. При всех значениях параметров a, b, c линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи.

5.119. 1) Если $c_1+c_2-c_3\geqslant 0$, то $L(\bar{X})=2c_1+c_2$; 2) если $c_1+c_2-c_3<0$, то $L(\bar{X})=c_1+c_3$.

5.120. 1) Если $ac_1+bc_2-c_3\geqslant 0$, то $L(\bar{X})=c_1+c_2$; 2) $L(\bar{X})=c_2\left(1-\frac{b}{a}\right)+\frac{c_3}{a}$ при $ac_1+bc_2-c_3<0$, если $a>0$, $b\leqslant 0$ или $0<b<a$; 3) $L(\bar{X})=c_1\left(1-\frac{a}{b}\right)+\frac{c_3}{b}$ при $ac_1+bc_2-c_3<0$, если $a\leqslant 0$, $b>0$ или $0<a\leqslant b$; 4) если $ac_1+bc_2-c_3<0$, $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$, то линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи.

5.121. 1) Если $c_1a+c_2b-c_3\geqslant 0$, $c_1a-c_2b-c_4\geqslant 0$, то $L(\bar{X})=c_1+c_2$; 2) $L(\bar{X})=c_1\left(1+\frac{a}{b}\right)-\frac{c_4}{b}$ при $c_1a+c_2b-c_3\geqslant 0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, если $a\leqslant 0$, $b<0$, $2ac_1-c_4-c_3\geqslant 0$ или $a>0$, $b<0$, $a+b<0$, $2ac_1-c_4-c_3\geqslant 0$; 3) $L(\bar{X})=\frac{c_4}{a}+c_2\left(1+\frac{b}{a}\right)$ при: а) $c_1a+c_2b-c_3\geqslant 0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, если $a>0$, $b\geqslant 0$, $c_4+2bc_2-c_3\geqslant 0$ или $a>0$, $b<0$, $a+b\geqslant 0$; б) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, если $a>0$, $b\leqslant 0$, $a+b\geqslant 0$, $c_3-2bc_2-c_4<0$, или $0<b\leqslant a$, $c_3-2bc_2-c_4\geqslant 0$, или $0<a<b$, $c_3-c_4-2bc_2<0$; 4) $L(\bar{X})=\frac{c_3}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{c_4}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ при: а) $c_1a+c_2b-c_3\geqslant 0$, c_1a-c_2b-

$-c_4<0$, $a>0$, $b<0$, $a+b<0$, $2ac_1-c_3-c_4<0$; б) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4\geqslant 0$, $0<a\leqslant b$, $2ac_1-c_3-c_4<0$; в) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, если $a>0$, $b\leqslant 0$, $a+b<0$, $c_3-2bc_2-c_4<0$ или $0<a<b$, $c_3-c_4-2c_2b\geqslant 0$; 5) $L(\bar{X})=c_1\left(1-\frac{a}{b}\right)+\frac{c_3}{b}$ при $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4\geqslant 0$, если $a\leqslant 0$, $b>0$, $2ac_1-c_3-c_4\geqslant 0$ или $0<a\leqslant b$, $2ac_1-c_3-c_4\geqslant 0$; 6) $L(\bar{X})=\frac{c_3}{a}+c_2\left(1-\frac{b}{a}\right)$ при: а) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4\geqslant 0$, $a>0$, $b\leqslant 0$; б) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, если $a>0$, $b\leqslant 0$, $c_3-2bc_2-c_4\geqslant 0$ или $0<b\leqslant a$, $c_3-2bc_2-c_4<0$; 7) линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи при: а) $c_1a+c_2b-c_3\geqslant 0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, если $a\leqslant 0$, $b\geqslant 0$ или $a\leqslant 0$, $b<0$; б) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4\geqslant 0$, если $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$ или $a\leqslant 0$, $b>0$; в) $c_1a+c_2b-c_3<0$, $c_1a-c_2b-c_4<0$, $a\leqslant 0$.

5.123. $L(\bar{X})=39$. **5.124.** $L(\bar{X})=0$. **5.125.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.126.** $L(\bar{X})=3$. **5.127.** $L(\bar{X})=4$. **5.128.** $L(\bar{X})=2$. **5.129.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.130.** $L(\bar{X})=34$. **5.131.** $L(\bar{X})=14$. **5.132.** $L(\bar{X})=2$. **5.133.** $L(\bar{X})=\frac{11}{2}$. **5.134.** $L(\bar{X})=2$. **5.135, 5.136.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.137.** $L(\bar{X})=9$.

5.138. $L(\bar{X})=7$. **5.139.** $L(\bar{X})=20$. **5.140.** $L(\bar{X})=18$.

5.141. Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи.

5.142. 1) Если $a\leqslant 0$, то $L(\bar{X})=2$; 2) если $a>0$, то $L(\bar{X})=a^2+2$.

5.144. 1) Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи при: а) $c_1+2c_2+c_4>0$; б) $c_1+2c_2+c_4\leqslant 0$, $3c_1+4c_2-c_3<0$, $c_1-c_3-2c_4<0$, $3c_4+c_3+2c_2>0$; 2) $L(\bar{X})=c_1+c_2$ при $c_1+2c_2+c_4\leqslant 0$, $3c_1+4c_2-c_3\geqslant 0$; 3) $L(\bar{X})=\frac{c_1+c_3}{4}$ при $c_1+2c_2+c_4\leqslant 0$, $3c_1+4c_2-c_3<0$, $c_1-c_3-2c_4\geqslant 0$; 4) $L(\bar{X})=\frac{c_3+c_4}{2}$ при $c_1+2c_2+c_4\leqslant 0$, $3c_1+4c_2-c_3<0$, $c_1-c_3-2c_4<0$, $3c_4+c_3+2c_2\leqslant 0$.

5.145. 1) Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи при: а) $2c_1+c_2+1>0$; б) $2c_1+c_2+1\leqslant 0$, $c_1+2c_2-1<0$, $2a\leqslant b$, $c_2<1$, $c_1>-1$; в) $2c_1+c_2+1\leqslant 0$, $c_1+2c_2-1<0$, $2a>b$, $c_1+1>0$; 2) $L(\bar{X})=ac_1+bc_2$ при $2c_1+c_2+1\leqslant 0$, $c_1+2c_2-1\geqslant 0$; 3) $L(\bar{X})=a+c_2(b-2a)$ при $2c_1+c_2+1\leqslant 0$, $c_1+2c_2-1<0$, $2a\leqslant b$, $c_2\geqslant 1$; 4) $L(\bar{X})=b-a$ при $2c_1+c_2+1\leqslant 0$, $c_1+2c_2-1<0$, $2a\leqslant b$, $c_2<1$, $c_1\leqslant -1$; 5) $L(\bar{X})=c_1\left(a-\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}$ при $2c_1+c_2+1\leqslant 0$, $c_1+2c_2-1<0$, $2a>b$, $c_1+1\leqslant 0$.

5.149. $L(\bar{X})=-14$. **5.150.** $L(\bar{X})=12$. **5.151.** $L(\bar{X})=22$. **5.152.** $L(\bar{X})=26$. **5.153.** $L(\bar{X})=10$. **5.154.** $L(\bar{X})=12$. **5.155.** $L(\bar{X})=22$.

5.156. 1) Применять теорему 4.1 о разрешимости задачи линейного программирования; 2) воспользоваться тем, что при решении задачи (β) методом последовательного улучшения плана получается опорное оптимальное решение; 3) предположить противоположное и рассмотреть план $\tilde{X}_1=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$, где $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — опорный план задачи (α).

5.157. Пример:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1, 2, 3, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} -x_4 - x_5 &\to \max \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 &= 0, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

План $\tilde{X} = (0, 0, 0, 0, 0)$ с базисом $Б_{\tilde{X}} = (A_4, A_5)$ является опорным планом задачи (α), так как он оптимален для задачи (β), а базис его состоит из искусственных векторов.

5.159. Показать, что в случае 2) элементы столбца A_0 не изменятся, а система векторов, полученная заменой A_{s_i} на A_j, останется линейно независимой.

5.160. Пример:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \max, \\ -x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 0, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \qquad &= 0, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Таблица, соответствующая последней итерации вспомогательной задачи, имеет вид

№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	—1	A_5	0	—1	—1	0	1	1	0	0
2	—1	A_6	0	0	1	—1	—2	0	1	0
3	—1	A_7	0	—2	—1	—1	0	0	0	1

Табл. 5.11.

Заменяя A_5 на A_1, A_6 на A_3, получим таблицу,

№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	1	A_1	0	1	1	0	—1	—1	0	0
2	1	A_3	0	0	—1	1	2	0	—1	0
3	1	A_7	0	0	0	0	0	—2	—1	1

Табл. 5.12.

из которой видно, что базис исходного опорного плана состоит из векторов A_1, A_3. Условие задачи после этого можно записать в виде

$$x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0,$$
$$- x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

5.162. Привести к каноническому виду путем введения неотрицательных переменных x_{n+i}, $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+m,$$

затем систему условий преобразовать к виду

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{kj} - a_{ij})\, x_j - x_{n+k} + x_{n+i} = b_k - b_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - x_{n+k} = b_k,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+m,$$

где $b_k = \max\limits_i b_i$.

5.163. Пусть для определенности линейно независимы первые m векторов условий. Преобразовать систему условий к виду

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}^0 x_j,$$

т. е. решить систему m уравнений относительно первых m переменных. Заменить затем полученную систему эквивалентной:

$$x_i = (x_i^0 - x_k^0) + x_k + \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}^0 - x_{kj}^0)\, x_j,$$

$$x_k = x_k^0 + \sum_{j=m+1}^{n} x_{kj}^0 x_j,$$

где $x_k^0 = \min\limits_i x_i^0$.

5.164. $L(\bar{X}) = 13$. **5.165.** $L(\bar{X}) = 3$. **5.166.** $L(\bar{X}) = 10$. **5.167.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.168.** $L(\bar{X}) = 3$. **5.169.** Система условий задачи противоречива. **5.170.** $L(\bar{X}) = 6$. **5.171.** $L(\bar{X}) = -10$. **5.172.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.173.** $L(\bar{X}) = 2$. **5.174.** Система условий задачи противоречива. **5.175.** $L(\bar{X}) = 9$. **5.176.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.177.** $L(\bar{X}) = 15$. **5.178.** Система условий задачи противоречива.

5.179. 1) Если $-c_1b^2 + c_2 - c_3 \geqslant 0$, $c_1 + 2c_2 + c_4 \leqslant 0$, то $L(\bar{X}) = 2c_1 + c_2$; 2) если $c_1 + 2c_2 + c_4 \leqslant 0$, $-c_1b^2 + c_2 - c_3 < 0$, $c_1(1 + 2b^2) + 2c_3 + c_4 \leqslant 0$, то $L(\bar{X}) = c_1(2 + b^2) + c_3$; 3) линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи при: а) $c_1 + 2c_2 + c_4 > 0$; б) $c_1 + 2c_2 + c_4 \leqslant 0$, $-c_1b^2 + c_2 - c_3 < 0$, $c_1(1 + 2b^2) + 2c_3 + c_4 > 0$.

5.180. 1) Система условий задачи противоречива при $a \neq b$ или при $a = b < 0$; 2) линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи при $a = b \geqslant 0$, $c_3 + c_2 > 0$; 3) $L(\bar{X}) = 4ac_3 + 2ac_4$ при $a = b \geqslant 0$,

$c_2+c_3\leqslant 0$, $4c_3+3c_4-c_1\geqslant 0$; 4) $L(\bar{X})=\frac{2a}{3}(c_1+2c_3)$ при $a=b\geqslant 0$, c_2+ $+c_3\leqslant 0$, $4c_3+3c_4-c_1<0$.

5.182. Воспользоваться теоремой 4.1 о разрешимости задачи линейного программирования.

5.183. Предположить, что утверждение задачи несправедливо, и рассмотреть $M_1=\max\left(M_0, \frac{m_1-L(X)}{m_2}\right)$, где $m_1=\max L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ на множестве опорных планов задачи (β_M), $m_2=\min\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_{n+i}$ по всем опорным планам задачи (β_M), для которых хотя бы одна компонента $x_{n+i}>0$, X — опорный план исходной задачи (α).

5.184. Предположим, что в результате применения метода последовательного улучшения плана к исходной задаче получен оптимальный план $X=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ с базисом $Б_X=\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$. Очевидно, что план $\tilde{X}=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, 0, 0, \ldots, 0)$ является опорным планом задачи (β_M) при любом M. Исследуем его на оптимальность. Оценки

$$\Delta_j \ (j=n+1, n+2, \ldots, n+m)$$

имеют вид

$$\Delta_j=z_j+M, \quad \text{где} \quad z_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}$$

(здесь x_{ij} — коэффициенты разложения дополнительных векторов A_j по векторам базиса $Б_X$).

Если положить $M_2'\geqslant\max(-z_j)$, то получим $\Delta_j\geqslant 0$, $j=n+1, n+2, \ldots$ $\ldots, n+m$. В случае, когда исходная задача была невырожденной, в базисе $Б_X$ выполнялся признак оптимальности: $\Delta_j\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Поэтому достаточно положить

$$M_2=\max(0, M_2'),$$

чтобы утверждать, что при $M>M_2$ задача (β_M) разрешима.

В случае, когда исходная задача вырождена, рассмотрим все оптимальные базисы $Б_X^1, Б_X^2, \ldots, Б_X^l$ и выберем для каждого из них $M_2^1, M_2^2, \ldots, M_2^l$. Нетрудно показать (проверить!), что

$$M_2=\max_{i=1, 2, \ldots, l}(0, M_2^i)$$

удовлетворяет требованию задачи.

5.186. $L(\bar{X})=6$. **5.187.** $L(\bar{X})=3$. **5.188.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.189.** Система условий задачи противоречива. **5.190.** $L(\bar{X})=5$. **5.191.** $L(\bar{X})=4$. **5.192.** Система условий задачи противоречива. **5.193.** $L(\bar{X})=5$. **5.194.** Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи. **5.196.** Система условий задачи противоречива. **5.197.** $L(\bar{X})=15$.

5.198. Линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи.

5.200. Нет, не всегда. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ -&x_1 + x_2 \qquad = 0, \\ &x_1 \qquad + x_3 = 1, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

План $X = (0, 0, 1)$ является вырожденным, но не удовлетворяет требованиям задачи.

5.201. Показать, что базисные компоненты X_i, соответствующие тем номерам i, на которых достигается $\theta_{\min}$, равны нулю.

5.204. Взять в качестве исходного базиса $Б_X^0 = (A_1, A_2, A_7)$, затем рассмотреть последовательность базисов

$$Б_X^1 = (A_3, A_2, A_7), \quad Б_X^2 = (A_3, A_4, A_7), \quad Б_X^3 = (A_5, A_4, A_7),$$
$$Б_X^4 = (A_5, A_6, A_7), \quad Б_X^5 = (A_1, A_6, A_7), \quad Б_X^6 = (A_1, A_2, A_7) = Б_X^0.$$

5.205. $\bar{X} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$; $L(\bar{X}) = 1$.

5.206. Воспользоваться утверждением теорем 5.1, 5.2.

5.207. Воспользоваться утверждением теорем 5.1, 5.2.

5.208. Рассмотреть $X(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon))$, где $x_i(\varepsilon) = x_i + \varepsilon^i$ при $i \in I_Б$ — множество базисных индексов опорного плана исходной задачи; $x_i(\varepsilon) = 0$ при $i \notin I_Б$.

5.209. Вообще говоря, нет. Пример:
условия исходной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ &x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, \end{aligned} \qquad \|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

тогда условия ε-задачи приобретают вид

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = -\varepsilon, \\ &x_1 - x_2 + x_3 = -\varepsilon^2, \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Отсюда и следует недопустимость задачи при любом $\varepsilon > 0$.

5.210. Воспользоваться утверждением задачи 5.208 и тем, что основная и ε-задача отличаются лишь векторами ограничений. **5.211.** $L(\bar{X}) = 1$. **5.212.** $L(\bar{X}) = 1$. **5.213.** $L(\bar{X}) = 1$. **5.214.** $L(\bar{X}) = 2$. **5.218.** $L(\bar{X}) = 1$. **5.219.** $L(\bar{X}) = 8$. **5.220.** $L(\bar{X}) = 0$. **5.221.** $L(\bar{X}) = -1$.

5.226. Рассмотреть систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{n+j} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Показать, что если данная система совместна, то система (α) совместна, но не имеет неотрицательных решений; если же данная система несовместна, то уравнения (α) противоречивы.

5.227. Справедливость утверждения задачи следует из соотношений

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} z_j x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}\right) x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij}\right) c_{s_i} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \bar{x}_{s_i} = L(\bar{X}).$$

(Заметим, что эти выкладки в точности повторяют доказательство признака оптимальности, в котором нигде не используется, что $\bar{x}_{s_i} \geqslant 0$.)

5.228. Воспользоваться теоремой 4.1 о разрешимости задач линейного программирования и результатом задачи 5.227.

5.230. Пример:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$\bar{X} = (1, 0, 0)$ — единственное решение задачи, хотя в базисе $Б_X = (A_1, A_2)$ $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

5.232. Можно, если план $\bar{X}$ не вырожден.

5.233. Совершить элементарное преобразование: в базис ввести вектор A_k, а вывести любой вектор A_{s_i}; при этом в качестве θ можно взять любое положительное число.

5.234. Воспользоваться указанием к задаче 5.233. **5.235.** Решений нет. **5.236.** $\bar{X} = (1, 0, 1)$; $\bar{\bar{X}} = (1/8, 1/8, 0)$. **5.237.** $\bar{X} = (2, 4, 6, 0, 0)$; $\bar{\bar{X}} = (0, 2, 4, 2, 0)$. **5.238.** Решение $\bar{X} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ единственно.

Глава 6

6.10. $$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

6.11. $$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

6.12. $$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

6.13. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

6.14. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n,$$

$$y_i \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m.$$

6.15. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.16. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

6.17. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.18. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n_2,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n_2, \quad n_2 \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j=n_2+1, n_2+2, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m_2,$$
$$y_i \leqslant 0, \quad i=m_1+1, m_1+2, \ldots m_2, \quad m_2 \leqslant m.$$

6.19. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n_2,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=n_1+1, \; n_1+2, \ldots, n_2, \quad n_2 \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j=n_2+1, \; n_2+2, \ldots, n,$$

$$y_i \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m_2,$$
$$y_i \geqslant 0, \quad i=m_1+1, \; m_1+2, \ldots, m_2, \quad m_2 \leqslant m.$$

6.20. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant -M, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

6.21. $\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j z'_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z''_j \to \min,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + z'_j - z''_j = c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$z'_j, \; z''_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

6.26. $W(V, U)=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max,$

$$v_j + u_i \leqslant c_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \; j=1, 2, \ldots, n.$$

6.27. $W(V, U)=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max,$

$$\alpha_{ij} u_i + \beta_{ij} v_j \leqslant c_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$
$$v_j \leqslant 0, \quad u_i \leqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

6.28. $W(V, U, Z)=\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} b_{jk} v_{jk} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} a_{ik} u_{ik} +$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_{ij} \to \max,$$

$$v_{jk} + u_{ik} + z_{ij} \leqslant c_{ijk}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$
$$k=1, 2, \ldots, r,$$
$$u_{ik} \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad k=1, 2, \ldots, r,$$
$$z_{ij} \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Использовать то, что три компоненты векторов условий A_{ijk} исходной задачи равны единице, а остальные компоненты — нули.

6.29. $$W(V, U, Z) = \sum_{k=1}^{r} a_k v_k + \sum_{j=1}^{n} b_j u_j + \sum_{i=1}^{m} d_i z_i \to \min,$$

$$\alpha_{ijk} v_k + \beta_{ijk} u_j + \gamma_{ijk} z_i \geqslant c_{ijk},$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

6.30.

$$\sum_{l=1}^{k} \left\{ \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{n_{l-1}} \sum_{i_{l+1}=1}^{n_{l+1}} \cdots \sum_{i_k=1}^{n_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_k} v_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_k} \right\} \to \min,$$

$$v_{i_2 i_3 \ldots i_k} + v_{i_1 i_3 \ldots i_k} + \ldots + v_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} i_{l+1} \ldots i_k} + \ldots + v_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \geqslant c_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$$i_j = 1, 2, \ldots, n_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Воспользоваться тем, что k компонент векторов условий $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ исходной задачи равны единице, а остальные компоненты — нули.

6.34. $L(\bar{X}) = 1$. **6.35.** $L(\bar{X}) = 1$. **6.36.** $L(\bar{X}) = 1$. **6.37.** $L(\bar{X}) = 11/3$. **6.38.** $L(\bar{X}) = 3$. **6.39.** $L(\bar{X}) = 1$. **6.40.** $L(\bar{X}) = 2$. **6.41.** Система условий задачи противоречива.

6.42. Линейная форма не ограничена снизу на множестве планов задачи. Проверить, что вектор $\bar{X} = (0, 0, 0, 0)$ удовлетворяет условиям задачи, т. е. условия задачи непротиворечивы, а множество планов двойственной задачи пусто. **6.43.** $L(\bar{X}) = 3$. **6.44.** $L(\bar{X}) = n$. Рассмотреть задачу, двойственную к исходной.

6.45. 1) Если $n = 2k + 1$, то $L(\bar{X}) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$; 2) если $n = 2k$, то: а) $L(\bar{X}) = \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k-1}$, если $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2k} \geqslant \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k-1}$; б) $L(\bar{X}) = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2k}$, если $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2k} < \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k-1}$. Рассмотреть задачу, двойственную к исходной.

6.46. 1) $L(\bar{X}) = \frac{1}{\lambda + 2}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$, если $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$; 2) $L(\bar{X}) = \tilde{\mu}$, где $\tilde{\mu} = \max\limits_{i=1,2,3} \mu_i$, если $\lambda = 1$; 3) задача неразрешима, если $\lambda = -2$. Рассмотреть задачу, двойственную к исходной.

6.47. 1) $L(\bar{X}) = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}\mu_1 + \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}\mu_2 + \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}\mu_3$, если: а) $\tilde{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant -\sqrt{2}$, где $\tilde{\lambda}$ — корень уравнения $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, расположенный в интервале $(-3, -\sqrt{2})$; б) $\tilde{\tilde{\lambda}} \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{2}$, где $\tilde{\tilde{\lambda}}$ — корень уравнения $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, расположенный в интервале $(1/2, \sqrt{2})$; 2) при всех других значениях λ задача неразрешима. Рассмотреть задачу, двойственную к исходной.

6.48. 1) $L(\bar{X}) = \mu_1(2 - \lambda^2) + \mu_2(2\lambda - 1) + \mu_3(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1)$ при $\lambda_3 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{2}$, где λ_3 — наибольший корень уравнения $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$; 2) $L(\bar{X}) = 0$, если: а) $\lambda = 0$; б) $\lambda = -3$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leqslant 1$; 3) при всех других значениях λ задача неразрешима. Рассмотреть задачу, двойственную к исходной.

6.49. Достаточно рассмотреть любую разрешимую задачу линейного программирования.

6.50. Пример:

исходная задача	двойственная задача
$x_1 + x_2 \to \max,$	$y_2 \to \min,$
$x_1 - 2x_2 \leqslant 0,$	$y_1 - y_2 \geqslant 1,$
$-x_1 + x_2 \leqslant 1,$	$-2y_1 + y_2 \geqslant 1,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$	$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0.$

6.51. Пример:

исходная задача	двойственная задача
$x_1 + 3x_2 \to \max,$	$y_1 - 3y_2 \to \min,$
$x_1 - 2x_2 \leqslant 1,$	$y_1 - y_2 \geqslant 1,$
$-x_1 + 2x_2 \leqslant -3,$	$-2y_1 + 2y_2 \geqslant 3,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$	$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0.$

6.53. Воспользоваться тем, что множество планов задачи, двойственной к исходной, не зависит от B, а значит, непусто при всех значениях B, если непусто при $B = B_0$ (здесь B_0 — значение B, при котором исходная задача разрешима).

6.56. Воспользоваться тем, что исходная задача непротиворечива (вектор $X = 0$ является планом этой задачи); доказать далее, что вектор $Y = (0, 0, \ldots, 0, \bar{y}_i, 0, \ldots, 0)$ при достаточно большом $\bar{y}_i$ является планом двойственной задачи.

6.57. Нет, не сохранится. Пример:

$$x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 1,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$$

6.59. Показать, что исходная задача допустима (вектор $X = 0$ является ее планом); показать далее, что вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где значение y_{s_i} достаточно велико, а $y_i = 0$ при $i \neq s_i$, является планом двойственной задачи (здесь s_i определяется следующим образом: для каждого j находится $a_{ij} > 0$ и s_i полагается равным i).

6.60. Да, существует. Пример:

исходная задача	двойственная задача
$x_1 - x_2 \to \max,$	$y_1 - y_2 \to \min,$
$x_1 - x_2 \leqslant 1,$	$y_1 - y_2 \geqslant 1,$
$-x_1 + x_2 \leqslant -1,$	$-y_1 + y_2 \geqslant -1,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$	$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0.$

6.61. Да, существует. Пример:

исходная задача	двойственная задача
$-x_1 + x_2 \to \max,$	$y \to \min,$
$x_1 + x_2 \leqslant 1,$	$y \geqslant -1,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$	$y \geqslant 1,$
	$y \geqslant 0.$

6.62. Пример:

исходная задача	двойственная задача
$L(X) = (C, X) \to \max,$	$\tilde{L}(Y) = (B, Y) \to \min,$
$AX = B,$	$YA = C,$

где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица порядка $n \times n$ с определителем, отличным от нуля.

6.63. Предположим, что множества M и $\tilde{M}$ ограничены. Из условия задачи следует, что одно из ограничений имеет вид $l(X) \leqslant b$, где $l(X)$ — линейная форма от координат вектора X (для определенности положим, что это условие содержится в числе ограничений исходной задачи). Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$l(X) \to \min, \quad X \in M.$$

Так как M по предположению — многогранник, то $l(X)$ имеет конечный минимум на M. Обозначим его через $\bar{b}$. Возьмем теперь $\underline{b} < \bar{b}$ и рассмотрим множество $M(\underline{b})$, которое получится, если в ограничениях, задающих M, заменить условие $l(X) \leqslant b$ условием $l(X) \leqslant \underline{b}$. Это множество непусто, так как оно является областью определения задачи, двойственная к которой разрешима, поскольку отличается от двойственной к исходной лишь коэффициентом $\underline{b}$ линейной формы (здесь мы воспользовались тем, что предположили ограниченность $\tilde{M}$). Очевидно, однако, что если $X \in M(\underline{b})$, то $X \in M$, что противоречит определению числа $\underline{b}$.

6.66. Необходимость. Пусть система (α) не имеет неотрицательных решений. Это значит, что обе задачи двойственной пары

$$\left.\begin{aligned} &L(X) = (0, X) \to \min, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \\ &x_j \geqslant 0, \\ &i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots n, \end{aligned}\right\} (\gamma) \qquad \left.\begin{aligned} &\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max \\ &-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant 0, \\ &j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} (\tilde{\gamma})$$

неразрешимы. Но множество планов задачи ($\tilde{\gamma}$) непусто (вектор $Y = 0$ является планом этой задачи), значит, неразрешимость ее обусловлена неограниченностью сверху линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на множестве планов задачи ($\tilde{\gamma}$). Таким образом, существует вектор $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i > N, \quad \text{где } N \text{ — любое число.}$$

Достаточность. Пусть совместна система (β). Докажем, что обе задачи (γ) и ($\tilde{\gamma}$) неразрешимы. Действительно, если $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — оптимальные планы этих задач, то из первой теоремы двойственности следует равенство

$$L(\bar{X}) = \tilde{L}(\bar{Y}).$$

Но это равенство невозможно, так как $L(X) \equiv 0$, а $\tilde{L}(\bar{Y}) \geqslant \tilde{L}(\tilde{Y}) > 0$, где через $\tilde{Y}$ обозначены частные решения системы (β).

Неразрешимость задачи (γ) может быть обусловлена (в силу того, что $L(X) \equiv 0$) только противоречивостью ее системы условий.

6.67. Необходимость. Пусть система неравенств (α) совместна. Это значит, что обе задачи двойственной пары

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{L}(Y)\equiv(0,\ Y)\to\max,\\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\leqslant c_j,\\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\end{array}\right\}(\tilde{\gamma})\qquad \left.\begin{array}{l}L(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j\to\min,\\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0,\\ x_j\geqslant 0,\\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\end{array}\right\}(\gamma)$$

разрешимы. Но так как $\min L(X)=0$, то при любом $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющем условиям задачи (γ),

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j\geqslant 0.$$

Достаточность. Если для любого $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющего условиям задачи (γ),

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j\geqslant 0,$$

то эта задача разрешима. Действительно, из этого условия вытекает ограниченность снизу линейной формы $L(X)$ на множестве планов задачи, которое непусто (вектор $X=0$ удовлетворяет условиям задачи (γ)).

Но из разрешимости задачи (γ) вытекает, в силу первой теоремы двойственности, разрешимость задачи ($\tilde{\gamma}$), а значит, непротиворечивость системы (α).

6.68. Для доказательства необходимости рассмотреть двойственную пару задач:

исходная задача	двойственная задача
$L(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j\to\min,$	$\tilde{L}(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m} b_iy_i\to\max,$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i=c_j,$
$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$	$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

6.69. Рассмотреть двойственную пару задач:

исходная задача	двойственная задача
$L(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j\to\min,$	$\tilde{L}(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m} b_iy_i\to\max,$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}y_i\leqslant c_j,$
$x_j\geqslant 0,$	$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$
$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$	

6.70. Рассмотреть задачу, двойственную к исходной, и воспользоваться утверждением задачи 4.144.

6.71. Рассмотреть систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=m_1+1, m_1+2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \qquad j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m_1, \quad m_1 \leqslant m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j = \sum_{i=1}^{m} b_iy_i.$$

6.74. Условие $x_1 \geqslant 0$ свободное. **6.75.** Условие $x_1 \geqslant 0$ закрепленное. **6.76.** Условие $x_1 \geqslant 0$ свободное. **6.77.** Условие $x_1 \geqslant 0$ закрепленное.

6.78. 1) Если $a > 0$, то условие $x_1 \geqslant 0$ свободное; 2) если $a = 0$, то условие $x_1 \geqslant 0$ закрепленное; 3) если $a < 0$, то система условий задачи противоречива.

6.79. I. Условие $x_1 \geqslant 0$ свободное, если: 1) $c_1a + c_2b - c_3 \geqslant 0$; 2) $c_1a + c_2b - c_3 < 0$, $a \leqslant 0$, $b > 0$; 3) $c_1a + c_2b - c_3 < 0$, $0 < a < b$. II. Условие $x_1 \geqslant 0$ закрепленное, если: 1) $c_1a + c_2b - c_3 < 0$, $a = b > 0$; 2) $c_1a + c_2b - c_3 < 0$, $a > 0$, $b \leqslant 0$; 3) $c_1a + c_2b - c_3 < 0$, $0 < b < a$. III. При всех остальных значениях параметров, т. е. при $c_1a + c_2b - c_3 < 0$, $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$, задача неразрешима из-за неограниченности линейной формы на множестве планов задачи.

6.80. Вообще говоря, нельзя. Пример:

исходная задача	двойственная задача
$x_1 \to \max,$	$0 \cdot y_1 \to \min,$
$x_1 = 0,$	$y_1 \geqslant 1.$
$x_1 \geqslant 0,$	

Оптимальные планы $\bar{X} = (0)$ и $\bar{Y} = (1)$ обращают двойственную пару условий $x_1 \geqslant 0$ и $y_1 \geqslant 1$ в равенства. Очевидно, однако, что условие $y_1 \geqslant 1$ свободное (достаточно рассмотреть оптимальный план $\tilde{Y} = (\tilde{y})$, где $\tilde{y} > 1$).

6.81. Необходимость. Предположим, что система (α) имеет положительные решения. Рассмотрим двойственную пару задач линейного программирования:

$$\left.\begin{array}{c} L(X) = (0, X) \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \\ x_j \geqslant 0, \\ i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, n, \end{array}\right\} (\gamma) \qquad \left.\begin{array}{c} \tilde{L}(Y) = (0, Y) \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant 0, \\ j=1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\} (\tilde{\gamma})$$

Так как система условий задачи (γ) непротиворечива, то эта задача, а значит и двойственная к ней задача ($\tilde{\gamma}$) (в силу первой теоремы двой-

ственности), разрешима. Но по второй теореме двойственности одно из условий двойственной пары

$$x_j \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

закрепленное. Так как $\bar{X} > 0$, то закрепленным является каждое из условий

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. система (β) не имеет решения.

Достаточность. Пусть теперь система (β) не имеет решения. Это значит, что любой вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, удовлетворяющий условиям задачи ($\tilde{\gamma}$), обращает каждое из них в строгое равенство. Значит, каждое из условий

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

закрепленное. Из второй теоремы двойственности следует, что каждое из условий $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ свободное. Это значит, что существует вектор $\bar{X}$, удовлетворяющий системе (α), все компоненты которого $x_j > 0$.

6.82. Рассмотреть двойственную пару задач

$$\left.\begin{array}{c} L(X) = (0, X) \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \\ x_j \geqslant 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n, \end{array}\right\} (\gamma) \qquad \left.\begin{array}{c} \tilde{L}(Y) = (0, Y) \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0, \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\} (\tilde{\gamma})$$

Показать, что утверждение «система (β) неразрешима» эквивалентно тому, что хотя бы одно из условий задачи ($\tilde{\gamma}$) закрепленное. Затем применить утверждение второй теоремы двойственности к задачам (γ) и ($\tilde{\gamma}$).

6.83. Рассмотреть двойственную пару задач

$$\left.\begin{array}{c} L(X) = (0, X) \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant 0, \\ x_j \geqslant 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n, \end{array}\right\} (\gamma) \qquad \left.\begin{array}{c} \tilde{L}(Y) = (0, Y) \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0, \\ y_i \geqslant 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\} (\tilde{\gamma})$$

Применить утверждение второй теоремы двойственности к двойственной паре условий

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

показав сначала, что утверждение «система (β) не имеет решений» эквивалентно тому, что хотя бы одно из столбцовых условий ($\tilde{\gamma}$) закрепленное.

6.84. Показать, что множество $\bar{M}$ совпадает с множеством $\tilde{M}$, система ограничений которого имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \quad \text{если} \quad j \in J,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant c_j, \quad \text{если} \quad j \notin J,$$

где J — совокупность индексов свободных векторов задачи ($\tilde{\alpha}$).

6.85. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

6.88. Пример:

исходная задача		двойственная задача	
$y_1 + y_2 \to \max,$ $y_1 + y_2 \leqslant 1,$ $y_1 - y_2 \leqslant 1,$ $-y_1 + y_2 \leqslant -1,$	(α)	$x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$ $x_1 + x_2 - x_3 = 1,$ $x_1 - x_2 + x_3 = 1,$ $x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3.$	$(\tilde{\alpha})$

Единственное опорное решение задачи ($\tilde{\alpha}$) $\bar{X} = (1,\ 0,\ 0)$ вырождено, однако задача (α) имеет единственное решение

$$\bar{Y} = (1,\ 0).$$

6.90. Вектор $\Lambda = (\lambda_1\ \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ называется разрешающим вектором задачи (α), если:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$

2) $\lambda_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$

3) для некоторого плана $\bar{X} = (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ задачи (α): а) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j$ при $\bar{x}_j > 0$; б) $\lambda_i = 0$ при $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j < b_i$.

6.91. Вектор $\Lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m)$ называется разрешающим вектором задачи (α), если:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$

2) для некоторого плана $\bar{X} = (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ задачи (α) выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j \quad \text{при} \quad \bar{x}_j > 0.$$

6.92. Для оптимальности плана $\bar{X} = (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ задачи (α) необходимо и достаточно, чтобы существовал разрешающий вектор $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}_1,\ \bar{\lambda}_2,\ \ldots, \bar{\lambda}_m)$, для которого:

а) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{\lambda}_i = c_j$ при $\bar{x}_j > 0$;

б) $\bar{\lambda}_i = 0$ при $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j < b_i$.

6.93. Для оптимальности плана $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ задачи (α) необходимо и достаточно, чтобы существовал разрешающий вектор $\bar{\Lambda}=(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{\lambda}_i = c_j \quad \text{при} \quad \bar{x}_j > 0.$$

6.95. Показать, что если $\bar{x}_j > 0$, то не существует разрешающего вектора $\bar{\Lambda}$, связанного с $\bar{X}$ условиями оптимальности.

6.96. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче. **6.98.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.99.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.100.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.101.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.102.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.103.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.104.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.105.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.106.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.107.** План $\bar{X}$ оптимален при $c_1a+c_2b-c_3 \geqslant 0$, $c_1a-c_2b-c_4 \geqslant 0$, $c_1b-c_2a \leqslant 0$, $c_1b+c_2a \geqslant 0$. **6.108.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.109.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.110.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.111.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.112.** План $\bar{X}$ оптимален при $c \leqslant a+b$. **6.113.** План $\bar{X}$ не оптимален. **6.114.** План $\bar{X}$ оптимален. **6.115.** План $\bar{X}$ оптимален при $a \leqslant b$, $a+b+c \leqslant 1$. **6.117** Воспользоваться утверждением задачи 6.116. **6.119.** Воспользоваться утверждением задачи 6.117. **6.121.** Воспользоваться утверждением задачи 6.120. **6.122.** Так как $\bar{X}$ — решение задачи (6.9) — (6.11), то существует вектор $\tilde{Y}$ такой, что точка $\{\bar{X}, \tilde{Y}\}$ — седловая точка функции Лагранжа этой задачи. С другой стороны, так как $\bar{Y}$ — решение задачи, двойственной к (6.9) — (6.11), то найдется вектор $\tilde{X}$ такой, что $\{\bar{Y}, \tilde{X}\}$ — седловая точка функции Лагранжа этой двойственной задачи, а значит, $\{\tilde{X}, \bar{Y}\}$ — седловая точка функции Лагранжа исходной задачи (здесь мы воспользовались утверждением задачи 6.117). Это значит, что при $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$ справедливы соотношения

$$F(X, \tilde{Y}) \leqslant F(\bar{X}, \tilde{Y}) \leqslant F(\bar{X}, Y) \qquad (\alpha)$$

и

$$F(X, \bar{Y}) \leqslant F(\tilde{X}, \bar{Y}) \leqslant F(\tilde{X}, Y). \qquad (\beta)$$

Полагая в (α) $X=\tilde{X}$, $Y=\bar{Y}$, а в (β) $X=\bar{X}$, $Y=\tilde{Y}$, получим

$$F(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leqslant F(\bar{X}, \tilde{Y}) \leqslant F(\bar{X}, \bar{Y}) \leqslant F(\tilde{X}, \bar{Y}) \leqslant F(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Отсюда $F(\bar{X}, \bar{Y}) = F(\bar{X}, \tilde{Y}) = F(\tilde{X}, \bar{Y}) = F(\tilde{X}, \tilde{Y})$.

Утверждение задачи следует теперь из соотношения

$$F(X, \bar{Y}) \leqslant F(\tilde{X}, \bar{Y}) = F(\bar{X}, \bar{Y}) = F(\bar{X}, \tilde{Y}) \leqslant F(\bar{X}, Y),$$

которое выполняется при $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$.

6.123. Воспользоваться утверждением задачи 6.122. **6.125.** Воспользоваться теоремой 6.5 и утверждением задачи 6.122. **6.126, 6.127, 6.128, 6.129.** Воспользоваться утверждением задачи 6.125. **6.130.** Используя теорему 6.5, доказать вначале соотношение $\Delta V_0 \leqslant (\bar{Y}, A\Delta\bar{X})$, где $\Delta\bar{X}$ определяется из условий: а) $\bar{X}$ — решение задачи (α); б) $\bar{X}+\Delta\bar{X}$ — решение задачи (β). Затем воспользоваться утверждением задачи 6.123.

6.133. Воспользоваться утверждениями задач 4.142, 6.131 и 6.132 и тем, что вогнутая функция обладает левыми и правыми частными производными.

6.138. $\tilde{L}(\bar{Y})=1$. **6.139.** $\tilde{L}(\bar{Y})=2$. **6.140.** Система условий двойственной задачи противоречива. **6.141.** Линейная форма двойственной задачи не ограничена снизу на множестве планов. **6.142.** $\tilde{L}(\bar{Y})=3$. **6.143.** Линейная форма двойственной задачи не ограничена снизу на множестве планов. **6.144.** Система условий двойственной задачи противоречива. **6.145.** Система условий двойственной задачи противоречива. **6.146.** $\tilde{L}(\bar{Y})=4$.

Глава 7

7.1 Вообще говоря, нет. Пример:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 \qquad &= 2, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Вектор $\bar{X} = (1, -1, 0)$ удовлетворяет требованию задачи, однако, как легко проверить, не является ее псевдопланом.

7.2. Воспользоваться тем, что вектор $\bar{Y}$, который определяется из системы уравнений

$$\bar{Y}\tilde{A} = \tilde{C},$$

является опорным планом задачи (7.4), (7.5), двойственной к (7.1) — (7.3).

(Здесь $\tilde{A}$ — матрица $\| A_{s_1} A_{s_2} \ldots A_{s_m} \|$, а $\tilde{C} = (c_{s_1}, c_{s_2}, \ldots, c_{s_m})$.

7.3. Воспользоваться утверждением задачи 7.2. **7.5.** Вектор $\bar{X}$ не является псевдопланом задачи. **7.6.** Вектор $\bar{X}$ — псевдоплан задачи. **7.7.** Вектор $\bar{X}$ — псевдоплан задачи. **7.8.** 1) При $a \leqslant -1$ вектор $\bar{X}$ — псевдоплан задачи; 2) при $a > -1$ вектор $\bar{X}$ не является псевдопланом задачи. **7.9.** 1) Вектор $\bar{X}$ является псевдопланом задачи, если $l = 0$, $ad \neq bc$, $2 - f \geqslant 0$, $1 - g \geqslant 0$; 2) во всех остальных случаях вектор $\bar{X}$ не является псевдопланом задачи.

7.11. $\max(a + b + c + d) = 1{,}5$. **7.12.** $\min(a - b) = 1$.

7.13. Да, существуют. Достаточно рассмотреть двойственную пару задач линейного программирования, для которых:

а) множества M и M_D (здесь M_D — множество планов двойственной задачи) непусты;

б) множество M пусто, а M_D непусто;

в) множество M непусто, а M_D пусто;

г) оба множества M и M_D пусты.

(См., например, ответы к задачам 6.50 и 6.51.)

7.17. Воспользоваться теоремой 4.1 о разрешимости задач линейного программирования и утверждением задачи 7.16.

7.18. а) Пример:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Псевдоплан $\bar{X} = (-1, 1, 0)$.

б) Пример:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Псевдоплан $\bar{X} = (-1, 0, 0)$.

7.19. а) Пример:

$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 \qquad &= 0, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Единственный опорный план задачи $X = (1, 1, 0)$ не вырожден, и псевдоплан $\bar{X} = (0, 0, -2)$ имеет только одну компоненту, отличную от нуля.

б) Пример:

$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Единственный опорный план задачи $X = (1, 0, 0)$ вырожден, и псевдоплан $\tilde{X} = (0, 0, -1)$ имеет только одну компоненту, отличную от нуля.

в) Пример:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 10x_3 \to \max, \\ &x_1 + x_2 - \quad x_3 = 0, \\ &x_1 - x_2 - \ 2x_3 = -1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Единственный опорный план задачи $X = (0, 1, 1)$ не вырожден, и псевдоплан $\tilde{X} = X$ имеет две компоненты, отличные от нуля.

7.21. Пример:

$$\begin{aligned} &0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \to \max, \\ &x_1 \qquad\quad - 2x_3 = 1, \\ &\qquad\quad x_2 + 3x_3 = 1, \\ &x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Легко проверить, что векторы $\bar{X}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{X}_2 = (0, 5/2, -1/2)$ и $\bar{X}_3 = (5/3, 0, 1/3)$ являются псевдопланами этой задачи. Число этих псевдопланов $3 = C_3^2$.

7.22. $\tilde{L}(Y(\theta)) = \tilde{L}(Y) + \theta \cdot x_{r0}$, где r — номер вектора условий A_r, выводимого из базиса плана $\bar{Y}$. **7.23.** Условия задачи противоречивы. **7.24.** Псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.25.** Псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.26.** Псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.27.** Система условий задачи противоречива. **7.28.** Псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.29.** 1) Система условий задачи противоречива, если: а) $a \geqslant 0$, $c \leqslant 0$; б) $b \geqslant 0$, $d \geqslant 0$; 2) во всех остальных случаях псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить.

7.31. 1) Псевдоплан $\bar{X}$ — решение задачи, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 2) псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить, если хотя бы одно из значений a или b меньше нуля.

7.32. 1) Псевдоплан $\bar{X}$ — решение задачи, если $c \geqslant 0$; 2) система условий задачи противоречива, если $c < 0$, $b \geqslant 0$; 3) псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить, если $c < 0$, $b < 0$.

7.33. 1) Система условий задачи противоречива, если $a \geqslant 0$, или $b \geqslant 0$, или $c > 0$; 2) псевдоплан $\bar{X}$ можно улучшить, если $a < 0$, $b < 0$, $c \leqslant 0$.

7.36. Вообще говоря, нет. Пример: рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad\quad \to \max, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad\quad = 0, \\ &x_1 - x_2 \qquad\quad - 2x_4 = -2, \\ &x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Легко проверить, что вектор $\bar{Y} = (1, 0)$ является оптимальным планом задачи, двойственной к (α). Однако одним из псевдопланов, порожденных $\bar{Y}$, является $\bar{X} = (-1, 1, 0, 0)$, который не является решением задачи (α).

7.39. Использовать утверждение задачи 7.38 и пример задачи 5.204.

7.40. $L(\bar{X}) = -3/4$. **7.41.** $L(\bar{X}) = -77$. **7.42.** Система условий задачи противоречива. **7.43.** Система условий задачи противоречива.

7.44. $L(\bar{X}) = 30$. **7.45.** $L(\bar{X}) = -4$. **7.46.** $L(\bar{X}) = -26$. **7.47.** $L(\bar{X}) = (C_2, \tilde{X})$. Показать, что вектор $\bar{X} = (0, \ldots, 0, -\tilde{x}_1, -\tilde{x}_2, \ldots, -\tilde{x}_m)$ является псевдопланом задачи, удовлетворяющим признаку оптимальности. **7.48.** См. указание к предыдущей задаче.

7.57. 1) Определяется система условий, которым план Y удовлетворяет как равенствам. Из этих условий выражаются r переменных y_{s_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$, которые подставляются в оставшиеся ограничения и линейную форму задачи.

Возможны два случая:

а) Среди коэффициентов b'_j при переменных y_j $(j \neq s_i)$ линейной формы хотя бы один отличен от нуля, в этом случае составляются параметры Δ_j и μ_j. Если все $\mu_j \leqslant 0$ $(j \neq s_i)$, то решение заканчивается, так как линейная форма задачи не ограничена снизу на множестве планов. Если же среди μ_j $(j \neq s_i)$ имеются положительные, то совершается преобразование плана Y с параметром $\theta = \theta^1_{\min}$, в результате чего определяется план Y^1, обращающий не меньше чем $r + 1$ линейно независимое ограничение задачи в строгие равенства.

б) Если среди b'_j все нули, то определяется $\theta^2_{\min}$ и совершается элементарное преобразование плана Y с параметром $\theta = \theta^2_{\min}$. В результате находится план Y^2, обладающий тем же свойством, что и план Y^1.

2) К плану Y^1 в случае а) (к плану Y^2 в случае б)) применяются преобразования, описанные в 1), и так далее, пока не будет получен опорный план $\bar{Y}$ задачи (предполагается, что задача обладает опорными планами).

7.62. $L(\bar{X}) = 1$. **7.63.** $L(\bar{X}) = -3$. **7.64.** Система условий задачи противоречива. **7.65.** $L(\bar{X}) = 4$. **7.66.** Система условий задачи противоречива.

7.68. Имеет место цепочка соотношений

$$L(\bar{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i y_i = \tilde{L}(Y) - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i y_i,$$

так как при $\bar{x}_j > 0$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j = b_i - \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

7.69. Обратное утверждение неверно. Пример:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Плану $Y = (0, 0)$ задачи, двойственной к (α), соответствует квазиплан $\bar{X} = (0, 0, 0)$ с вектором невязок $E = (5, 10)$ (его невязка $\varepsilon_0 = 15$). Однако $L(\bar{X}) = \tilde{L}(Y) = 0$.

7.70. Воспользоваться утверждением задачи 7.68.

7.73. Да, существует. Пример:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 &\to \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Вспомогательная задача, порожденная планом $Y=(1, 1)$, совпадает с расширенной задачей. Обе они имеют вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1+\varepsilon_2\to\min,\\ &x_1+2x_2+x_3-3x_4+\varepsilon_1 \qquad =7,\\ &x_1-\ \ x_2-x_3+4x_4 \qquad +\varepsilon_2=3,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\\ &\varepsilon_1\geqslant 0,\ \varepsilon_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

7.74. Рассмотреть квазиплан $\bar{X}$, порожденный планом $Y=(0, 0, \ldots, 0, y_{i_0}, 0, \ldots, 0)$, где y_{i_0} настолько велико, что при подстановке Y в систему ограничений двойственной задачи каждое из них обращается в строгое неравенство.

7.76. Пример:

$$\left.\begin{aligned} &x_1-x_2+2x_3\to\max,\\ &x_1-x_2+2x_3=0,\\ &x_1-x_2+\ \ x_3=0,\\ &x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Задача, двойственная к (α), имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &0\cdot y_1+0\cdot y_2\to\min,\\ &y_1+\ \ y_2\geqslant 1,\\ &-y_1-\ \ y_2\geqslant -1,\\ &2y_1+\ \ y_2\geqslant 2. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

Очевидно, что первые два условия задачи $(\tilde{\alpha})$ — жесткие ограничения; в то же время план $Y=(1, 0)$ задачи $(\tilde{\alpha})$ порождает квазиплан $\bar{X}=(0, 0, 0)$ задачи (α).

7.77. Воспользоваться тем, что в условия задачи, двойственной к вспомогательной, входят ограничения

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i\leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad j\in E_Y.$$

7.82. Воспользоваться указанием к задаче 7.68. **7.83.** $\bar{X}=(0, 0, 4)$; $\mathrm{E}=(0, 0)$; $\varepsilon_0=0$. **7.84.** $\bar{X}=(0, 0, 0)$; $\mathrm{E}=(1, 0)$; $\varepsilon_0=1$. **7.85.** $\bar{X}=(0, 0, 0, 0)$; $\mathrm{E}=(2, 3)$; $\varepsilon_0=5$. **7.86.** $\bar{X}=(10, 14, 9, 0, 0, 0)$; $\mathrm{E}=(0, 0, 0, 11)$; $\varepsilon_0=11$. **7.87.** $\bar{X}=(1, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\mathrm{E}=(0, 0, 0)$; $\varepsilon_0=0$.

7.88. 1) $\bar{X}=(1, 0, 0)$; $\mathrm{E}=(0, 1)$; $\varepsilon_0=1$ при: а) $ac>1$, $2c>1$; б) $ac>1$, $2c=1$, $b\leqslant 2$; в) $ac=1$, $2c=1$, $b<2$; 2) $\bar{X}=\left(\frac{b-4}{b-2}, \frac{1}{b-2}, 0\right)$; $\mathrm{E}=(0, 0)$; $\varepsilon_0=0$ при: а) $ac>1$, $2c=1$, $b\geqslant 4$; б) $ac=1$, $2c=1$, $b\geqslant 4$; 3) $\bar{X}=\left(0, \frac{2}{b}, 0\right)$; $\mathrm{E}=\left(\frac{b-2}{b}, 0\right)$; $\varepsilon_0=\frac{b-2}{b}$ при $ac\geqslant 1$, $2c=1$, $2\leqslant b<1+\sqrt{5}$; 4) $\bar{X}=\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$; $\mathrm{E}=\left(0, \frac{4-b}{2}\right)$; $\varepsilon_0=\frac{4-b}{2}$ при $ac\geqslant 1$, $2c=1$, $1+\sqrt{5}\leqslant b\leqslant 4$.

7.89. Можно перейти к квазиплану с меньшей невязкой. **7.90.** Квазиплан $\bar{X}$ — решение задачи. **7.91.** Квазиплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.92.** Квазиплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.93.** Система условий задачи противоречива. **7.94.** Квазиплан $\bar{X}$ можно улучшить. **7.95.** Квазиплан $\bar{X}$ — решение задачи. **7.96.** Система условий задачи противоречива.

7.97. 1) Квазиплан $\bar{X}$ — решение задачи при: а) $c>-1$, $a=2$; б) $c=-1$, $a-2\geqslant 0$; 2) квазиплан $\bar{X}$ можно улучшить при: а) $c>-1$, $a\leqslant -1$; б) $c>-1$, $a=0$; в) $c>-1$, $-1\leqslant a<0$; г) $c>-1$, $0<a\leqslant 1$; д) $c>-1$; $1<a$; е) $c=-1$, $a-2<0$.

7.101. $L(\bar{X})=4$. **7.102.** $L(\bar{X})=3$. **7.103.** $L(\bar{X})=0$. **7.104.** Система условий задачи противоречива. **7.106.** Система условий задачи противоречива. **7.111.** $L(\bar{X})=1$. **7.112.** $L(\bar{X})=1$. **7.113.** Система условий задачи противоречива. **7.114.** $L(\bar{X})=2$. **7.115.** Система условий задачи противоречива. **7.116.** $L(\bar{X})=4$. **7.123.** $L(\bar{X})=1/2$. **7.124.** Система условий задачи противоречива. **7.125.** $L(\bar{X})=2$. **7.126.** $L(\bar{X})=5/4$. **7.127.** Система условий задачи противоречива.

Глава 8

8.1. $A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

8.2. $A=\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=\begin{cases} i-j & \text{при } i\geqslant j, \\ -i-j & \text{при } i<j. \end{cases}$

При $k=5$

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -5 & -6 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.3.

$$A=k\times\begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.4.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

У первого полководца (второго полководца) $m+1$ чистая стратегия ($n+1$ чистая стратегия): стратегия e_i, $i=0, 1, 2, \ldots, m$, — распределение дивизий, при котором на первую заставу направляются i дивизий (стратегия e_j, $j=0, 1, 2, \ldots, n$, — распределение дивизий, при котором на первую заставу направляются j дивизий).

8.5.

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

У первого партнера шесть чистых стратегий $e_i=(k, l)$ — назвать число k ($k=1, 2$) и предположить, что второй игрок назвал число l ($l=1, 2, 3$). У второго партнера также шесть чистых стратегий $e_j=(l, k)$ — назвать

число l ($l=1, 2, 3$) и предположить, что первый игрок назвал число k ($k=1, 2$).

8.7. 1)

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=1=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

2)

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=-1<1=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

8.8. Если первый игрок выбирает чистую стратегию с номером i_0, то он получает выигрыш не меньше чем $a_{i_0j_0}$, а если второй выбирает чистую стратегию с номером j_0, то он проигрывает не больше чем $a_{i_0j_0}$.

8.9. 1) Пусть

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i_0j_0}.$$

Выберем $j=j_0$, при котором

$$\max_i a_{ij_0}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i_0j_0},$$

и выберем $i=i_0$, при котором

$$\min_j a_{i_0j}=\max_i \min_j a_{ij}=a_{i_0j_0}.$$

В силу выбора i_0 и j_0 имеем

$$a_{ij_0}\leqslant a_{i_0j_0}\leqslant a_{i_0j} \qquad \text{при всех} \quad i \text{ и } j.$$

2) Пусть $a_{i_0j_0}$ — седловая точка матрицы A, т. е. при всех i и j выполняются неравенства

$$a_{ij_0}\leqslant a_{i_0j_0}, \tag{α}$$

$$a_{i_0j_0}\leqslant a_{i_0j}. \tag{β}$$

Из неравенств (α) следует, что

$$\max_i a_{ij_0}\leqslant \max_i a_{i_0j_0}=a_{i_0j_0},$$

а значит,

$$\min_j \max_i a_{ij}\leqslant a_{i_0j_0}. \tag{$\tilde{\alpha}$}$$

Из неравенств (β) следует, что

$$\min_j a_{i_0j}\geqslant \min_j a_{i_0j_0}=a_{i_0j_0},$$

а значит,

$$\max_i \min_j a_{ij}\geqslant a_{i_0j_0}. \tag{$\tilde{\beta}$}$$

Объединяя ($\tilde{\alpha}$) и ($\tilde{\beta}$), получаем

$$\min_j \max_i a_{ij}\leqslant \max_i \min_j a_{ij}.$$

Но из утверждения задачи (8.6) следует, что $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}\leqslant \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. Отсюда получаем требуемое равенство.

8.10. Да, может. Пример: матрица

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\, n},$$

где $a_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), обладает $m \times n$ седловыми точками.

8.11. $a_{i_0 j_0} = 1$. Воспользоваться утверждением задачи 8.9.

8.12. $a_{i_0 j_0} = 0$. Воспользоваться утверждением задачи 8.9.

8.13. Занумеровать элементы столбцов матрицы A следующим образом:

$$a_{11} \geqslant a_{21} \geqslant \ldots \geqslant a_{n1},$$

и показать, воспользовавшись утверждением задачи (8.9), что a_{11} — седловая точка этой матрицы.

8.15. 1) Пусть игра $\mathscr{A}$ имеет решение в чистых стратегиях. Это значит, что существуют $\bar{U} = e_{i_0} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i_0}, 0, \ldots, 0)$ и $\bar{W} = e_{j_0} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{j_0}, 0, \ldots, 0)$ такие, что неравенства

$$M(U, \bar{W}) \leqslant M(\bar{U}, \bar{W}) \leqslant M(\bar{U}, W) \tag{α}$$

выполняются для всех $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ $\left(u_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \sum\limits_{i=1}^{m} u_i = 1\right)$ и $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ $\left(w_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \sum\limits_{j=1}^{n} w_j = 1\right)$.

Полагая в (α) $U = e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), $W = e_j = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), получаем

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0 j_0} \leqslant a_{i_0 j} \tag{β}$$

при всех i и j, т. е. $\bar{v} = a_{i_0 j_0}$ — седловая точка матрицы A.

2) Пусть теперь матрица A обладает седловой точкой $a_{i_0 j_0}$, т. е. неравенства (β) выполняются при всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Умножая первые неравенства, входящие в (β), на u_i ($u_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i = 1$) и суммируя по i, получим

$$\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij_0} \leqslant \sum_{i=1}^{m} u_i a_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0}. \tag{γ_1}$$

Умножая вторые неравенства, входящие в (β), на w_j ($w_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j = 1$) и суммируя по j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} w_j a_{i_0 j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} w_j a_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0}. \tag{γ_2}$$

Объединяя (γ_1) и (γ_2), получим, что стратегии $\bar{U} = e_{i_0}$ и $\bar{W} = e_{j_0}$ являются оптимальными стратегиями для игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой — A, при этом цена $\bar{v}$ игры равна $a_{i_0 j_0}$.

8.16. Вообще говоря, нет. Пример: матрица

$$A^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

имеет седловую точку $a^1_{i_0 j_0} = 0$; матрица

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

имеет седловую точку $a^2_{i_0 j_0} = 0$; однако матрица

$$A = A^1 + A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

седловой точкой не обладает.

8.17. $\bar{v} = 3$. **8.18.** $\bar{v} = 2$. **8.19.** $\bar{v} = 0$. **8.20.** Игра не имеет решения в чистых стратегиях. **8.21.** Игра не имеет решения в чистых стратегиях. **8.22.** $\bar{v} = 1$. **8.23.** 1) $\bar{v} = 3$, если $a \geqslant 3$; 2) $\bar{v} = a$, если $1 \leqslant a < 3$; 3) $\bar{v} = 1$, если $a < 1$.

8.24. 1) $\bar{v} = 0$, если $a \geqslant 0$, или $b \geqslant 0$; 2) при всех других значениях a и b задача не имеет решения в чистых стратегиях.

8.27. Пример: платежная матрица игры $\mathscr{A}$ имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что стратегии $\bar{U} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\bar{W} = (1/3, 1/3, 1/3)$ являются оптимальными, цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ равна единице. Рассмотрим стратегии $\tilde{U} = \bar{U} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\tilde{W} = (1, 0, 0)$. Для этой пары стратегий $M(\tilde{U}, \tilde{W}) = \bar{v} = 1$; однако легко убедиться, что они не являются оптимальными. Действительно, $M(e_1, \tilde{W}) = 3 > 1 = M(\tilde{U}, \tilde{W})$, что противоречит определению оптимальности.

8.30. 1) Пусть $\{\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n), \bar{v}\}$ и $\{\bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n), \bar{v}\}$ — решения задач (α) и ($\tilde{\alpha}$) соответственно (последние их компоненты равны в силу первой теоремы двойственности).

Это значит, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leqslant \bar{v}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_j \bar{u}_i \geqslant \bar{v}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i = 1, \tag{3}$$

$$\bar{w}_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\bar{u}_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Возьмем произвольные векторы

$$W = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n) \quad \left(w_i \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\right),$$

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \quad \left(u_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1\right).$$

Умножим i-е неравенство, входящее в (1), на u_i, а j-е неравенство, входящее в (2), на w_j и просуммируем по всем i и j соответственно. Получим, используя (3),

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} u_i \overline{v} = \overline{v} = \sum_{j=1}^{n} w_j \overline{v} \leqslant \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{u}_i, \qquad (6)$$

т. е. $\overline{W}$, $\overline{U}$ — оптимальные стратегии, а $\overline{v}$ — цена игры $\mathscr{A}$.

2) Пусть теперь $\overline{U}=(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m)$, $\overline{W}=(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n)$ и $\overline{v}$ — оптимальные стратегии и цена игры $\mathscr{A}$.

Это значит, что соотношение (6) выполняется при всех

$$U=(u_1, u_2, \ldots, u_m) \quad \left(u_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1\right)$$

и

$$W=(w_1, w_2, \ldots, w_n) \quad \left(w_j \geqslant 0,\ j=1, 2, \ldots, n,\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\right).$$

Полагая в (6) $U=e_i=(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$, $(i=1, 2, \ldots, m)$, $W=e_j=(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, получим, что справедливы соотношения (1)—(5), т. е. векторы $\{\overline{W}=(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n), \overline{v}\}$ и $\{\overline{U}=(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m), \overline{v}\}$ являются планами задач (α) и ($\tilde{\alpha}$) соответственно. Так как линейные формы задач совпадают на этих планах, то планы оптимальны в силу следствия 6.3 из первый теоремы двойственности.

8.32. Исходная задача

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leqslant 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leqslant 1, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\to \min, \\ y_1 + 4y_2 &\geqslant 1, \\ 2y_1 + 5y_2 &\geqslant 1, \\ 3y_1 + 6y_2 &\geqslant 1, \\ y_i \geqslant 0, \quad i &= 1, 2. \end{aligned}$$

8.33. Исходная задача

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &\leqslant 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &\leqslant 1, \\ x_i \geqslant 0, \quad i &= 1, 2, \ldots, 5, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\to \min, \\ y_1 + y_2 &\geqslant 1, \\ y_1 + 2y_2 &\geqslant 1, \\ 2y_1 + 3y_2 &\geqslant 1, \\ 2y_1 + 4y_2 &\geqslant 1, \\ 3y_1 + 5y_2 &\geqslant 1, \\ y_i \geqslant 0, i &= 1, 2. \end{aligned}$$

8.34. Исходная задача

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leqslant 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ x_i \geqslant 0, \ i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\to \min, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 &\geqslant 1, \\ 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geqslant 1, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &\geqslant 1, \\ y_i \geqslant 0, \ i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

8.35. Исходная задача

$$\begin{aligned} &v \to \min, \\ &w_1 \leqslant v, \\ &w_1 + w_2 \leqslant v, \\ &w_1 + w_2 = 1, \\ &w_i \geqslant 0, i = 1, 2, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} &v \to \max, \\ &u_1 + u_2 \geqslant v, \\ &u_2 \geqslant v, \\ &u_1 + u_2 = 1, \\ &u_i \geqslant 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

8.36. Исходная задача

$$\begin{aligned} &v \to \min, \\ &w_1 - w_2 \leqslant v, \\ &-w_1 + 2w_2 + w_3 \leqslant v, \\ &w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ &w_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} &v \to \max, \\ &u_1 - u_2 \geqslant v, \\ &-u_1 + 2u_2 \geqslant v, \\ &u_2 \geqslant v, \\ &u_1 + u_2 + u_3 = 1, \\ &u_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

8.37. 1) При всех a игра эквивалентна следующей паре задач линейного программирования:

исходная задача

$$\begin{aligned} &v \to \min, \\ &w_1 + w_2 + w_3 \leqslant v, \\ &w_1 + aw_2 + w_3 \leqslant v, \\ &w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ &w_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} &v \to \max, \\ &u_1 + u_2 + u_3 \geqslant v, \\ &u_1 + au_2 + u_3 \geqslant v, \\ &u_1 + u_2 + u_3 = 1, \\ &u_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2) При $a > 0$ игра эквивалентна также следующей паре задач линейного программирования:

исходная задача

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ &x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

двойственная задача

$$\begin{aligned} &y_1 + y_2 + y_3 \to \min, \\ &y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 1, \\ &y_1 + ay_2 + y_3 \geqslant 1, \\ &y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

8.38. Воспользоваться тем, что

$$\bar{v} = \min_W \max_U M(U, W) = \max_U \min_W M(U, W)$$

(см. утверждение задачи 8.26).

8.42. Воспользовавшись утверждением задачи 8.30, свести решение игры к нахождению оптимальных планов пары двойственных задач:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} &v \to \min, \\ &c_j u_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leqslant v, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\ &-\bar{L} u_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \leqslant v, \\ &\sum_{i=1}^{m+1} u_i = 1, \\ &u_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m+1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} & v \to \max, \\ & b_i w_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \geqslant v, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & -\bar{L} w_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} c_j w_j \geqslant v, \\ & \sum_{j=1}^{n+1} w_j = 1, \\ & w_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots n+1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Показать затем, что в оптимальном плане задачи (1) $\bar{v} \geqslant 0$, а в оптимальном плане задачи (2) $\bar{v} \leqslant 0$.

8.43. $\bar{U} = (0, 1)$, $\bar{W} = (1, 0)$, $\bar{v} = 1$. **8.44.** $\bar{U} = (1/4, 3/4)$, $\bar{W} = (3/4, 1/4)$, $\bar{v} = 7/4$. **8.45.** $\bar{U} = (1, 0)$, $\bar{W} = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{v} = 1$. **8.46.** $\bar{U} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, $\bar{W} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, $\bar{v} = 7/4$. **8.47.** $\bar{U} = (1, 0,)$ $\bar{W} = (1, 0)$, $\bar{v} = 1$. **8.48.** $\bar{U} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, $\bar{W} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, $\bar{v} = \dfrac{(n-1)a+1}{n}$. **8.49.** $\bar{U} = (1, 0)$, $\bar{W} = (0, 1, 0)$, $\bar{v} = 0$. **8.50.** $\bar{U} = (2/5, 3/5)$, $\bar{W} = (3/5, 2/5)$, $\bar{v} = 1/5$. **8.51.** $\bar{U} = (0, 1)$, $\bar{W} = (1, 0, 0)$, $\bar{v} = 1$. **8.52.** $\bar{U} = (1/2, 1/2)$, $\bar{W} = (1/4, 1/4, 1/2)$, $\bar{v} = 0$. **8.53.** $\bar{U} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\bar{W} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\bar{v} = 1/3$. **8.54.** $\bar{U} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\bar{W} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\bar{v} = a/3$. **8.55.** $\bar{U} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, $\bar{W} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, $\bar{v} = a/n$. **8.56.** $\bar{U} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, $\bar{W} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, $\bar{v} = a$. **8.57.** $\bar{v} = 10/7$.

8.58. Воспользоваться утверждением задачи 8.30 и второй теоремой двойственности 6.2

8.62. Пример. Рассмотрим игру $\mathscr{A}$, платежная матрица которой

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$\bar{U} = e_2 = (0, 1)$ — оптимальная стратегия первого игрока, однако чистая стратегия $e_1 = (1,0)$ — существенная (e_1 — оптимальная стратегия, и первая ее компонента больше нуля).

8.64. Воспользоваться утверждениями задач 8.30, 8.58 и теоремой 2.1 о размерности ρ выпуклого многогранного множества. **8.65.** Воспользоваться утверждением задачи 8.30 и теоремой 4.2 о существовании опорного решения. **8.67.** $\bar{v} = n$. **8.69.** $\bar{v} = -1$. Вычеркивая из матрицы A последовательно первую строку, первый столбец, третью строку, второй столбец, третью строку, первый столбец, привести ее к виду

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Затем найти цену $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$, платежная матрица которой равна $\tilde{A}$.

8.75. Воспользовавшись утверждением задачи 8.74, показать, что

$$\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i \geqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{w}_j,$$

затем воспользоваться утверждениями задач 8.40 и 8.41.

8.76.

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.77. $S = \| a_{ij,\,kl} \|$, где

$$a_{ij,\,kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = l, \quad k \neq j, \\ -1, & \text{если } i \neq l, \quad k = j, \\ 0, & \text{если } i = l, \quad k = j, \\ & \text{или } i \neq l, \quad k \neq j. \end{cases}$$

8.79.

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.80. Платежная матрица S игры имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.81. Платежная матрица S игры имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Привести исходную задачу к симметричной форме.

8.82. Платежная матрица S игры имеет вид

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Привести исходную задачу к симметричной форме.

8.83. Пример:

исходная задача

$$\left.\begin{aligned} 0\cdot x_1 &\to \max, \\ 0\cdot x_1 &\leqslant 1, \\ x_1 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\to \min, \\ 0\cdot y_1 &\geqslant 0, \\ y_1 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\alpha})$$

Очевидно, что задачи (α) и $(\tilde{\alpha})$ разрешимы. Матрица выигрышей симметричной игры $\mathcal{S}$, порожденной задачами (α) и $(\tilde{\alpha})$, имеет вид

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что стратегия $\bar{U}=(0, 1, 0)$ оптимальна для игры $\mathcal{S}$. (Заметим, что это не противоречит теореме 8.3, так как игра $\mathcal{S}$ имеет оптимальную стратегию $\bar{\bar{U}}=(0, 0, 1)$, в которой последняя компонента больше нуля.)

8.84. Предположим, что игра $\mathcal{S}$, порожденная задачами (α) и $(\tilde{\alpha})$, имеет две оптимальные стратегии: $\bar{U}^1=(\bar{Y}^1, \bar{X}^1, \bar{t}^1)$ и $\bar{U}^2=(\bar{Y}^2, \bar{X}^2, \bar{t}^2)$ (здесь $\bar{X}^i=\left(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i, \ldots, \bar{x}_n^i\right)$, $\bar{Y}^i=\left(\bar{y}_1^i, \bar{y}_2^i, \ldots, \bar{y}_m^i\right)$, $i=1, 2$, причем $\bar{t}^1=0$, а $\bar{t}^2>0$). Из задач 8.30 и 8.72 следует, что $\bar{U}^1$ и $\bar{U}^2$ удовлетворяют условиям

$$S\bar{U}^1\leqslant 0, \qquad S\bar{U}^2\leqslant 0,$$
$$\bar{U}^1\geqslant 0, \qquad \bar{U}^2\geqslant 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m+n+1}\bar{u}_i^1=1, \quad \sum_{i=1}^{m+n+1}\bar{u}_i^2=1,$$

где S — матрица выигрышей игры $\mathcal{S}$.

Эти соотношения в развернутом виде записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j^1 &\leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \\ \bar{x}_j^1 &\geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i^1 \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,\\ \bar{y}_i^1 \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^1 + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i^1 = 1, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j^2 \leqslant b_i\bar{t}^2, \quad i=1, 2, \ldots, m,\\ \bar{x}_j^2 \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i^2 \geqslant c_j\bar{t}^2, \quad j=1, 2, \ldots, n,\\ \bar{y}_i^2 \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^2 + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i^2 + \bar{t}^2 = 1,\\ \bar{t}^2 > 0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Хотя бы одна из компонент вектора $\bar{X}^1 = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \ldots, \bar{x}_n^1)$ или вектора $\bar{Y}^1 = (\bar{y}_1^1, \bar{y}_2^1, \ldots, \bar{y}_m^1)$ должна быть положительна. Предположим вначале, что $\bar{X}^1 \neq 0$. В силу утверждения задачи 6.83, примененного к (1), система

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

не имеет решений, но это противоречит (5), так как $c_j > 0$, $\bar{t}^2 > 0$.

Если же $\bar{X}^1 = 0$, то $\bar{Y}^1 \neq 0$. Используя снова утверждение задачи 6.83, получим, что система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \qquad x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

неразрешима, что противоречит (4), так как $b_i < 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, $\bar{t}^2 > 0$.

8.85. Воспользоваться утверждениями теоремы 8.3 и задачи 8.84.

8.86. Из утверждения теоремы 8.2 следует, что оптимальные стратегии $\bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$ игроков и цена $\bar{v}$ игры $\mathscr{A}$ удовлетворяют соотношениям

$$\bar{u}_i = \bar{s}_i\bar{v}, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$
$$\bar{w}_j = \bar{t}_j\bar{v}, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$
$$\bar{v} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \bar{s}_i},$$

где $\bar{T}=(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n)$ и $\bar{S}=(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_m)$ — решения следующих задач:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} t_j \to \max, \\ &\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} t_j \leqslant 1, \quad i=1, 2, \ldots, m, \\ &t_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} s_i \to \min, \\ &\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} s_i \geqslant 1, \quad j=1, 2, \ldots, n, \\ &s_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\beta})$$

Условия задач (β) и ($\tilde{\beta}$) можно переписать (подставляя вместо $\tilde{a}_{ij}$ их выражения через a_{ij}) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{t_j}{c_j} \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad t_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{s_i}{b_i} \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad s_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Теперь очевидно, что векторы $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $\bar{Y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$, где

$$\bar{x}_j=\frac{\bar{w}_j}{c_j\bar{v}}=\frac{\bar{t}_j}{c_j}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad \bar{y}_i=\frac{\bar{u}_i}{b_i\bar{v}}=\frac{\bar{s}_i}{b_i}, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

являются планами задач (α) и ($\tilde{\alpha}$) соответственно. Линейные формы этих задач имеют равные значения на планах $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Действительно,

$$L(\bar{X})=\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\bar{w}_j}{c_j\bar{v}}=\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_j=\frac{1}{\bar{v}}, \qquad \tilde{L}(\bar{Y})=\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\bar{u}_i}{b_i\bar{v}}=\sum_{i=1}^{m} \bar{s}_i=\frac{1}{\bar{v}}.$$

Отсюда, в силу следствия 6.3, планы $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — решения задач (α) и ($\tilde{\alpha}$).

8.87. Используя утверждения теоремы 8.2, свести решение игры к нахождению оптимальных планов задач (β) и ($\tilde{\beta}$) (см. ответ к предыдущей задаче).

Построить затем оптимальные стратегии $\bar{U}$, $\bar{W}$ и цену $\bar{v}$, используя оптимальные планы $\bar{T}$ и $\bar{S}$ задач (β) и ($\tilde{\beta}$) соответственно.

8.88. 1) $U^0=e_{s_0}$, $W^0=e_{t_0}$, где s_0 и t_0 — произвольные числа;

2) $$U^{s+1}=\frac{s}{s+1}U^s+\frac{1}{s+1}e_{i_{s+1}}, \qquad W^{s+1}=\frac{s}{s+1}W^s+\frac{1}{s+1}e_{j_{s+1}},$$

где i_{s+1} — номер максимальной компоненты вектора AW^s, а j_{s+1} — номер минимальной компоненты вектора U^sA.

Цена 69 к.