И. О. ХИНЦЕ

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

И. О. ХИНЦЕ

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

## ЕЕ МЕХАНИЗМ И ТЕОРИЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
О. В. ЯКОВЛЕВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. Н. АБРАМОВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

Scanned by Mo
foRFree

532
X 47
УДК 532. 507

# TURBULENCE

## AN INTRODUCTION TO ITS MECHANISM AND THEORY

J. O. HINZE
Professor of Fluid Mechanics
Technological University, Delft

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.
NEW YORK TORONTO LONDON
1959

*И. О. Хинце*
Турбулентность, ее механизм и теория
М., Физматгиз, 1963 г., 680 стр. с илл.
Редактор *Н. И. Розальская.*
Техн. редактор *В. Н. Крючкова.* Корректор *Т. С. Плетнёва.*

Сдано в набор 15/V 1963 г. Подписано к печати 17/X 1963 г. Бумага 60×90¹/₁₆.
Физ. печ. л. 42,5. Условн. печ. л. 42,5. Уч.-изд. л. 42,59. Тираж 6000 экз.
Цена книги 2 р. 33 к. Заказ № 1457.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . . 6

Из предисловия автора . . . . . 7

Глава 1. **Общее введение и основные понятия** . . . . . 9
§ 1. 1. Определение турбулентности и вводные понятия . . . . . 9
§ 1. 2. Уравнения движения турбулентного потока; рейнольдсовы напряжения . . . . . 23
§ 1. 3. Уравнение сохранения транспортабельной скалярной субстанции в турбулентном потоке . . . . . 36
§ 1. 4. Двойные корреляции между компонентами турбулентных пульсаций скорости . . . . . 37
§ 1. 5. Изменение двойных корреляций скорости по времени; тройные корреляции скорости . . . . . 43
§ 1. 6. Свойства двойных продольных и поперечных корреляций при однородной турбулентности . . . . . 47
§ 1. 7. Макро- или интегральный масштаб турбулентности . . . . 50
§ 1. 8. Эйлеровы временные корреляции . . . . . 53
§ 1. 9. Турбулентная диффузия жидких частиц; лагранжевы корреляции . . . . . 56
§ 1.10. Сводка корреляций . . . . . 65
§ 1.11. Эмпирические формулы для двойных корреляций . . . . . 67
§ 1.12. Одномерный энергетический спектр по Тэйлору . . . . . 71
§ 1.13. Энергетические соотношения для турбулентного течения . . 80

Глава 2. **Принципы методов и приборов для измерений в турбулентных потоках** . . . . . 91
§ 2. 1. Введение . . . . . 91
§ 2. 2. Термоанемометр . . . . . 94
§ 2. 3. Метод постоянного тока . . . . . 100
§ 2. 4. Измерение характеристик турбулентности с помощью термоанемометра; метод постоянного тока . . . . . 125
§ 2. 5. Измерение пульсаций температуры и концентрации термоанемометром; метод постоянного тока . . . . . 137
§ 2. 6. Метод постоянной температуры . . . . . 142
§ 2. 7. Ограничения термоанемометра . . . . . 145
§ 2. 8. Анемометр с электрическим разрядом . . . . . 148
§ 2. 9. Метод электромагнитной индукции . . . . . 151
§ 2.10. Методы, основанные на визуализации течения . . . . . 153
§ 2.11. Измерение осредненных величин статического давления и скорости . . . . . 160

**Глава 3. Изотропная турбулентность** . . . . . 169
§ 3. 1. Введение . . . . . 169
§ 3. 2. Корреляционные тензоры . . . . . 171
§ 3. 3. Дифференциальное уравнение динамики изотропной турбулентности . . . . . 187
§ 3. 4. Пространственный энергетический спектр . . . . . 195
§ 3. 5. Динамическое уравнение энергетического спектра . . . . . 206
§ 3. 6. Вырождение изотропной турбулентности . . . . . 242
§ 3. 7. Скалярное поле при изотропной турбулентности . . . . . 259
§ 3. 8. Пульсации давления при изотропной турбулентности . . . . 283
§ 3. 9. Замечания о влиянии сжимаемости . . . . . 289

**Глава 4. Неизотропная турбулентность** . . . . . 293
§ 4. 1. Введение . . . . . 293
§ 4. 2. Динамика одноточечной корреляции скорости $\overline{u_i u_j}$ . . . . . 295
§ 4. 3. Динамика двухточечной корреляции скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ . . 301
§ 4. 4. Динамическое уравнение энергетического спектра . . . . . 306

**Глава 5. Процессы переноса в турбулентных потоках** . . . . . 322
§ 5. 1. Введение . . . . . 322
§ 5. 2. Теория пути смешения и феноменологические теории . . . 324
§ 5. 3. Аналогии при турбулентном переносе . . . . . 344
§ 5. 4. Диффузия при однородной турбулентности . . . . . 353
§ 5. 5. Диффузия от неподвижного источника в равномерном потоке 380
§ 5. 6. Диффузия от неподвижного источника в турбулентном потоке со сдвигом . . . . . 400
§ 5. 7. Диффузия дискретных частиц при однородной турбулентности . . . . . 412
§ 5. 8. Влияние сжимаемости . . . . . 427

**Глава 6. Неизотропная свободная турбулентность** . . . . . 438
§ 6. 1. Введение . . . . . 438
§ 6. 2. Приближенные предположения, используемые для упрощения уравнений движения . . . . . 441
§ 6. 3. Распределение скорости в следе за цилиндром по классическим теориям . . . . . 448
§ 6. 4. Перенос скалярной субстанции в следе за цилиндром . . . 454
§ 6. 5. Результаты измерения распределений осредненной скорости и осредненной температуры в следе за цилиндром . . . . . 457
§ 6. 6. Измерение характеристик турбулентности в следе за цилиндром . . . . . 462
§ 6. 7. Распределение скорости в круглой свободной струе по классическим теориям . . . . . 471
§ 6. 8. Перенос скалярной субстанции в круглой свободной струе 484
§ 6. 9. Измерение распределения осредненной скорости и осредненной температуры в круглой свободной струе . . . . . 488
§ 6.10. Измерение характеристик турбулентности в круглой свободной струе . . . . . 501
§ 6.11. Структура свободного турбулентного потока со сдвигом и процессы переноса . . . . . 510

**Глава 7. Неизотропная «пристеночная» турбулентность** . . . . . 522
§ 7. 1. Введение . . . . . 522
§ 7. 2. Приближенные уравнения движения и соответствующие интегральные соотношения . . . . . 524

§ 7. 3. Ламинарный пограничный слой и явление перехода . . . . 534
§ 7. 4. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Классические теории . . . . . 538
§ 7. 5. Экспериментальные данные о распределении осредненной скорости . . . . . 551
§ 7. 6. Измерение характеристик турбулентности в пограничном слое . . . . . 563
§ 7. 7. Сводка результатов и новые формулы для распределений осредненной скорости и напряжения сдвига . . . . . 581
§ 7. 8. Турбулентное течение в прямой круглой трубе. Распределение осредненной скорости . . . . . 593
§ 7. 9. Измерение характеристик турбулентности при течении в трубе . . . . . 601
§ 7.10. Структура турбулентного потока в трубе . . . . . 614
§ 7.11. Перенос скалярной субстанции при пристеночной турбулентности . . . . . 619
§ 7.12. Отдельные задачи пристеночной турбулентности . . . . . 637

Приложение. **Элементы тензорного исчисления в декартовой системе координат** . . . . . 651

Литература . . . . . 661

Именной указатель . . . . . 672

Предметный указатель . . . . . 677

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория турбулентных течений представляет собой важнейший для практики и одновременно наиболее трудный раздел гидродинамики. Имеющиеся экспериментальные данные о структуре турбулентности являются далеко не полными. Существующие теории турбулентности делятся на две категории: в первой оперируют осредненными характеристиками потока, который считается квазистационарным (например, в теории пути смешения Прандтля); во второй используют статистические особенности структуры турбулентности (теория Колмогорова). В работах первого направления удается получить суммарные характеристики потока (напряжение трения и т. д.); работы второго направления пока еще такой возможности не дают, но являются более перспективными, так как опираются на близкую к действительности модель турбулентности.

Успешное развитие теории турбулентности должно основываться на обширных и детальных фактических сведениях о микро- и макроструктуре турбулентных течений, а это, в свою очередь, требует развития новых тонких методов диагностики таких течений.

Книга И. Хинце «Турбулентность», вышедшая в 1959 году в США, отражает современные представления о физической сущности турбулентности, содержит изложение важнейших теорий, методов и результатов экспериментальных исследований. Главное внимание уделено статистическим теориям, с помощью которых получены некоторые нетривиальные результаты.

Современность, полнота и ясность изложения материала делают монографию И. Хинце весьма полезной и доступной не только для научных работников, но также для широких кругов инженеров и студентов, интересующихся вопросами турбулентных течений.

Наряду с известной монографией А. Таунсенда, книга И. Хинце является важнейшим вкладом в гидродинамику турбулентных течений.

*Г. Абрамович*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Основным материалом для создания настоящей книги послужило содержание цикла лекций, прочитанных автором группе инженеров-химиков лабораторий фирмы «Ройял Датч-Шелл» в Амстердаме и Дельфте в 1950 году.

Цель этого курса состояла в том, чтобы познакомить слушателей с современными представлениями и теориями турбулентного течения жидкости и при этом дать им теоретическую базу, достаточную не только для изучения специальной литературы по турбулентности, но и для самостоятельных теоретических исследований тех проблем химической технологии, в которых турбулентность играет существенную роль, например перемешивания, а также тепло- и массообмена.

Книга, по существу, преследует ту же цель, однако содержание ее расширено, видоизменено и приведено в соответствие с последними достижениями в этой области. Она будет, по-видимому, представлять интерес для научных работников не только в области химической технологии, но и прикладной механики, поскольку в ней уделено особое внимание анализу механизма турбулентности в применении к задачам сопротивления течению, а также к задачам тепло- и массообмена.

Соответственно этому был сделан и выбор проблем, подлежащих рассмотрению. В книге затронуты не все вопросы, связанные с турбулентностью, поскольку в намерения автора не входило создание учебника по турбулентности. Так, теория устойчивости течения и переход ламинарного течения в турбулентное не рассмотрены вовсе, а влияния сжимаемости жидкости на различные явления турбулентности автор касался лишь от случая к случаю.

Автор пытался представить предмет рассмотрения таким образом, чтобы облегчить восприятие его читателями, которые не являются еще специалистами в гидродинамике. Однако, хотя изложение начинается с самых основных понятий, а использование математики сведено к минимуму, все же, если читатель намерен успешно ознакомиться с содержанием книги, то он должен обладать необходимым кругом знаний в области математики и физики.

Материал главы 1 служит, прежде всего, общим введением, которое знакомит читателя с различными специальными понятиями теории турбулентности. Кроме того, здесь выводятся основные формулы, которые используются в качестве исходных соотношений в других главах.

В главе 2 описываются методы и аппаратура, обычно применяемые для измерения количественных характеристик турбулентности. Эти вопросы рассмотрены более подробно, нежели можно было бы ожидать. Поводом для этого послужили соображения о целесообразности познакомить инженера-исследователя с существующими методами и присущими им особенностями, с тем чтобы вооружить его для критического анализа и интерпретации экспериментальных данных.

В главе 3 излагаются общеизвестные теории изотропной турбулентности. Представляется, что эти теории рассмотрены здесь достаточно полно, чтобы послужить в качестве отправной точки для дальнейшего теоретического изучения турбулентности.

В отличие от изотропной турбулентности, теоретические сведения о неизотропной турбулентности значительно беднее. Некоторые из наиболее важных попыток разработки статистической теории подобного рода турбулентности рассмотрены в главе 4.

Типичным для турбулентных течений является диффузионный характер процессов переноса, что связано с неупорядоченностью турбулентных движений. Эту характерную особенность турбулентности можно, по-видимому, считать настолько определяющей, что этим оправдывается рассмотрение теоретических и экспериментальных исследований процессов переноса в отдельной главе (глава 5).

Две последние главы, 6 и 7, имеют дело соответственно с неизотропной свободной турбулентностью и с турбулентным течением вдоль твердой стенки.

Приложение содержит краткое введение в тензорное исчисление в декартовых координатах, которое можно признать полезным в связи с широким использованием в книге понятий и формул тензорного анализа.

Полный перечень условных обозначений для каждой главы приводится в конце главы.

*И. О. Хинце*

ГЛАВА 1

# ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## § 1.1. Определение турбулентности и вводные понятия

Термин «турбулентность» является в настоящее время общепринятым, и, вообще говоря, его смысл понятен, по крайней мере людям, имеющим дело с техникой. Тем более любопытно отметить, что слово «турбулентный» для характеристики определенного типа течения, а именно антипода ламинарного (слоистого) движения, стало использоваться сравнительно недавно. Осборн Рейнольдс, один из пионеров изучения турбулентных течений, называл этот тип движения «извилистым».

Турбулентность является довольно знакомым понятием; однако его нелегко определить так, чтобы охватить все присущие турбулентности характерные особенности и сделать это определение соответствующим современным воззрениям на турбулентность, распространенным среди профессионалов в этой области прикладной науки.

Согласно «Новому международному словарю» Вебстера, турбулентность означает: возбуждение, сморщивание, возмущение... Однако это определение является слишком общим и не может удовлетворительно характеризовать турбулентное движение жидкости, как оно понимается сегодня. В 1937 году Тэйлор и Карман [1] *) дали следующее определение: «Турбулентность — это неупорядоченное движение, которое в общем случае возникает в жидкостях, газообразных или капельных, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой». Согласно этому определению, рассматриваемое течение должно удовлетворять условию неупорядоченности.

В самом деле, неупорядоченность является очень важной особенностью. Вследствие неупорядоченности не представляется возможным описать движение во всех деталях как функцию времени и простран-

*) Цифры в квадратных скобках указывают на литературу, помещенную в конце книги к каждой главе в отдельности.

ственных координат. Но, к счастью, турбулентное движение не упорядочено в таком смысле, что поддается описанию с помощью законов теории вероятности. При этом оказывается возможным указать точные средние значения различных величин, например: скорости, давления, температуры и т. п., что является весьма важным обстоятельством. Если бы турбулентное движение было полностью неупорядоченным, оно не поддавалось бы никакому математическому анализу.

Поэтому недостаточно лишь констатировать, что турбулентность — это неупорядоченное движение, и остановиться на этом. Определение турбулентности может быть сформулировано, по-видимому, несколько более точно следующим образом: турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение по времени и пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения.

Добавление «по времени и пространственным координатам» является необходимым, так как недостаточно определить турбулентное движение как неупорядоченное только по времени. Возьмем, к примеру, случай, когда данное количество жидкости движется как целое неупорядоченным образом; тогда движение каждой части жидкости будет неупорядоченным по времени относительно неподвижного наблюдателя, но не по отношению к наблюдателю, движущемуся вместе с жидкостью. Турбулентное движение нельзя также мыслить как неупорядоченное только в пространстве, ибо в этом случае под определение турбулентности попадало бы и установившееся течение с нерегулярными линиями тока.

Как указали в своем определении Тэйлор и Карман, турбулентность может быть возбуждена силами трения вблизи неподвижных стенок (течение в трубопроводах, след за телом) или при течении слоев жидкости с различными скоростями вдоль или поперек друг друга. Как будет ясно из дальнейшего, между видами турбулентности, возбужденной в каждом из этих двух случаев, существует резкое различие. Поэтому целесообразно называть турбулентность, возбужденную неподвижной стенкой и непрерывно подвергающуюся ее влиянию, «пристеночной турбулентностью», а турбулентность при отсутствии твердых стенок — общепринятым термином «свободная турбулентность».

В случае реальной вязкой жидкости влияние вязкости проявляется в преобразовании кинетической энергии потока в тепло; следовательно, турбулентный поток, как и любое течение такой жидкости, является по своей природе диссипативным. Если отсутствует непрерывный внешний источник энергии, необходимой для непрерывного возбуждения турбулентного движения, то это движение вырождается. Другие проявления вязкости приводят к тому, что турбулентность

становится более однородной и менее зависимой от направления. В предельном случае турбулентность во всех областях поля течения имеет количественно одну и ту же структуру; тогда турбулентность называют однородной. Турбулентность называется изотропной, если ее статистические характерные особенности не зависят от направления, так что имеет место совершенная неупорядоченность. Как мы увидим позже, в этом случае не может существовать среднего напряжения сдвига и, следовательно, градиента осредненной скорости. Эта осредненная скорость, если она существует, будет постоянна по всему полю течения.

Во всех других случаях, когда осредненная скорость имеет градиент, турбулентность будет неизотропной, или анизотропной. Поскольку градиент осредненной скорости связан с существованием среднего напряжения сдвига, то для обозначения этого класса течений часто используется выражение «турбулентность в потоке со сдвигом». Пристеночная турбулентность и анизотропная свободная турбулентность относятся именно к этому классу течений.

Для случая постоянного по всему полю течения среднего напряжения сдвига, например для плоского течения Куэтта, Карман [2] ввел понятие гомологичной турбулентности.

Довольно часто используется выражение «псевдотурбулентность», которое соответствует гипотетическому случаю потока с упорядоченной картиной течения, имеющей строго постоянную периодичность во времени и пространстве. Различие между псевдо- и реальной турбулентностью станет ясным, если сравнить картины течения в обоих случаях. Первая картина характеризуется регулярными линиями тока с постоянной периодичностью по всему полю, в то время как вторая может соответствовать этому условию только в некоторый момент времени, а в следующий момент картина течения может измениться как качественно, так и количественно. Поля псевдотурбулентного течения могут оказаться очень полезными для имитации реальных турбулентных полей, поскольку они легче поддаются теоретическому анализу; так, расчет диссипации кинетической энергии под действием вязкости в подобных полях оказывается относительно более простым. В своей книге «Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом» *) Таунсенд описывает несколько типов псевдотурбулентных течений, пригодных для изучения различных характеристик, типичных для реальных турбулентных потоков. С другой стороны, при использовании понятия псевдотурбулентности в теоретических исследованиях, посвященных анализу некоторых характерных особенностей реальной турбулентности, порой следует быть очень осторожным при интерпретации полученных результатов. Так, можно допустить серьезную

*) Таунсенд А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1959.

ошибку, если пытаться оценить расчетным путем явления переноса и диффузию, сопровождающие турбулентность, по заранее выбранной модели псевдотурбулентного течения, потому что эти процессы определяются, в основном (если не полностью), неупорядоченностью и хаотичностью реальных турбулентных движений.

Эта неупорядоченность и хаотичность турбулентности наглядно может быть продемонстрирована на следующем примере. Рассмотрим осциллограмму пульсаций скорости в некоторой точке потока. Если по этой осциллограмме находить число амплитуд, имеющих определенную величину, то в случае изотропной турбулентности получится гауссова кривая ошибок. Для турбулентного потока со сдвигом это распределение в общем случае будет более или менее асимметричным.

Как указывалось в связи с нашим определением турбулентности, в этом случае существуют средние значения величин по времени и пространству. Простое наблюдение турбулентных потоков и анализ осциллограмм различных параметров этих потоков показывают, что эти средние значения существуют по следующим причинам:

1. В некоторой данной точке турбулентной области более или менее регулярно по времени повторяется одна и та же четкая картина течения.

2. В некоторый данный момент времени одна и та же четкая картина течения повторяется более или менее регулярно в пространстве; следовательно, турбулентность имеет, вообще говоря, одинаковую всеобъемлющую структуру во всей рассматриваемой области.

Если сравнить различные турбулентные движения, в каждом из которых может быть фиксирована определенная картина течения, то будут наблюдаться различия, например, в размере этих картин течения. Это означает, что для количественного описания турбулентного движения необходимо ввести понятие масштаба турбулентности: определенный масштаб времени и определенный пространственный масштаб. Величины этих масштабов будут определяться размерами устройства, в котором имеется турбулентный поток, и скоростью движения жидкости внутри него. Например, для турбулентного потока в трубе масштаб времени следует, по-видимому, считать величиной порядка отношения диаметра трубы к скорости потока, а пространственный масштаб — величиной порядка диаметра трубы.

Очевидно, что характеризовать турбулентное движение лишь одним его масштабом недостаточно, поскольку это еще ничего не говорит об интенсивности движения. В качестве меры этой интенсивности нельзя взять среднюю величину скорости, поскольку интенсивность пульсаций по отношению к этой средней скорости — это как раз то, что хотят знать.

Если мгновенную величину скорости записать в виде

$$U = \overline{U} + u,$$

где черта сверху обозначает среднее значение и, следовательно, $\overline{u} = 0$, то среднее значение абсолютных величин пульсаций, т. е. $\overline{|u|}$, можно было бы взять в качестве меры этой интенсивности. Однако так делать не принято. По причинам, которые станут очевидными из последующего изложения, принято, как это предложили Драйден и Кьюз [36] в 1930 году, определять силу, или интенсивность, турбулентных пульсаций среднеквадратичной величиной

$$u' = \sqrt{\overline{u^2}}.$$

Тогда относительная интенсивность *) определится отношением

$$\frac{u'}{\overline{U}}.$$

Средние значения могут быть определены различными путями. Если турбулентное течение является квазистационарным, то можно пользоваться осреднением по времени. В случае потока с однородной турбулентностью можно ввести в рассмотрение осреднение по пространству. Однако если течение не является ни стационарным, ни однородным, то не всегда оказывается возможным произвести осреднение по времени или по пространству. В подобных случаях можно предположить, что среднее определяется из большого числа опытов, в которых сохраняются одинаковые начальные и граничные условия. Тогда речь идет о значениях, средних по множеству.

Если пользоваться эйлеровым методом описания течения, то к некоторой изменяющейся величине в произвольной точке потока может быть применен любой из трех перечисленных выше способов осреднения.

Если же мы хотим исследовать процессы турбулентного переноса или диффузии, то зачастую удобнее пользоваться лагранжевым описанием пути движения отдельных жидких частиц. В этом случае осреднение может быть произведено по большому числу частиц, которые характеризуются либо одинаковым начальным моментом времени, но различными исходными положениями (это требование накладывается на осреднение в однородном течении), либо одинаковым исходным положением, но различными начальными моментами времени (это требование накладывается на осреднение в квазистационарном течении). Кроме того, можно, конечно, рассматривать и средние по множеству значения.

Вообще говоря, процесс осреднения может быть произведен только в тех случаях, когда выполняются определенные условия.

---

*) Многие исследователи, в том числе Драйден и Кьюз [36], используют для только что определенной относительной интенсивности термины «интенсивность», или «степень турбулентности», либо «уровень турбулентности».

Чтобы ясно представить, о каких условиях идет речь, рассмотрим в качестве примера среднюю по времени величину скорости в некоторой точке течения. Эта средняя величина определяется следующим образом:

$$\overline{U} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} U \, dt.$$

Однако из практических соображений мы не можем выбрать период осреднения $T$ бесконечно большим. В потоке могут иметься и очень медленные изменения, которые мы не причисляем к турбулентному движению этого потока. Возьмем, к примеру, случай, когда турбулентный поток в трубе имеет слабые пульсации низкой частоты, или случай, встречающийся в метеорологии, когда мы хотим провести различие между средней скоростью ветра за определенный период порядка одного дня и средней скоростью в течение более длительного периода.

Поэтому будем считать период времени $T$ конечной величиной. Этот период должен быть достаточно большим по сравнению с временны́м масштабом турбулентности $T_1$ или, поскольку это соответствует определенной квазипериодичности, с главным периодом изменения картины течения. С другой стороны, он должен быть мал по сравнению с периодом $T_2$ любых медленных изменений течения, которые мы не причисляем к турбулентности. Ясно, что в выборе пульсаций, подлежащих анализу, имеется определенный произвол. К счастью, на практике этот выбор может быть сделан без особых затруднений. Если взять осциллограмму турбулентного потока, то на ней обычно очень легко выделить некоторый средний главный период изменения картины течения. Кроме того, полезно иметь в виду, что порядок величины главного периода соответствует размеру объекта, возбуждающего турбулентность, или аппарата, в котором исследуется турбулентный поток.

Считая период времени $T$ конечной величиной, определим его среднее значение по формуле

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} U(t+\tau) \, d\tau$$

при условии $T_1 \ll T \ll T_2$.

Это среднее значение не должно зависеть от начального момента процесса осреднения, если $t < T_2$. Следовательно, производная $\partial \overline{U}/\partial t$ должна быть либо равна нулю, либо, при незначительном изменении основного течения, — пренебрежимо малой величиной.

Среднее значение обозначалось выше чертой сверху. Подобной чертой в этой книге обозначается любой процесс осреднения. При

изучении турбулентности нам часто придется производить осреднение не только отдельных величин, но и их произведений. В этом случае черта сверху имеет следующие свойства.

Пусть $A=\bar{A}+a$ и $B=\bar{B}+b$. При любом дальнейшем процессе осреднения величины $\bar{A}$ и $\bar{B}$ могут рассматриваться как постоянные. Следовательно,

$$\bar{A}=\overline{\bar{A}+a}=\bar{\bar{A}}+\bar{a}=\bar{A}+\bar{a}, \quad \text{откуда} \quad \bar{a}=0; \quad \overline{\bar{A}\bar{B}}=\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}=\bar{A}\bar{B};$$

$$\overline{\bar{A}b}=\bar{\bar{A}}\,\bar{b}=\bar{A}\,\bar{b}=0, \quad \text{поскольку} \quad \bar{b}=0.$$

Аналогично

$$\overline{\bar{B}a}=\bar{\bar{B}}\,\bar{a}=\bar{B}\,\bar{a}=0, \quad \text{поскольку} \quad \bar{a}=0;$$

$$\overline{AB}=\overline{(\bar{A}+a)(\bar{B}+b)}=\overline{\bar{A}\bar{B}}+\overline{\bar{A}b}+\overline{\bar{B}a}+\overline{ab}=\bar{A}\bar{B}+\overline{ab}.$$

Мы уже говорили выше о понятиях пространственного и временного масштабов и соответствующей им квазипериодичности турбулентности. Анализ фотографий турбулентных потоков или осциллограмм пульсаций скорости показывает, что, собственно говоря, не может идти речи о какой-либо квазипериодичности или масштабе турбулентности. Можно говорить о средней максимальной квазипериодичности или о масштабе, определяемом главным образом размерами данного устройства. Но, помимо указанной, существует множество меньших квазипериодичностей и много других, которые еще меньше. Турбулентность состоит из большого числа наложенных друг на друга квазипериодических движений.

Обратной величиной масштаба или квазипериодичности является квазичастота. Следовательно, турбулентность характеризуется множеством квазичастот.

Характерные особенности турбулентности — хаотичность и неупорядоченность — включают в себя и прерывистость спектра различных частот, а также различных периодов и масштабов. По этой причине и была использована приставка «квази». Стало быть, если всегда иметь в виду этот прерывистый характер спектра, то для простоты приставку «квази» можно опустить.

Выше говорилось, что турбулентность представляет собой суперпозицию движений с уменьшающимся периодом, или — поскольку любая периодичность в распределении скорости связана с наличием градиентов скорости, соответствующих движению определенных вихрей, размер которых определяется этой периодичностью, — как мы теперь можем сказать, турбулентность представляет собой суперпозицию вихрей уменьшающегося размера. Но может ли этот размер уменьшаться неограниченно? Интуитивно ясно, что это не так. В реальных жидкостях, благодаря влиянию вязкости, этого

не происходит. Чем меньше вихрь, тем, вообще говоря, больше градиент скорости поперек вихря, а значит, больше и вязкие напряжения сдвига, которые противодействуют вихревому движению. Следовательно, в любом турбулентном потоке будет существовать статистический нижний предел размера наименьшего вихря; имеется также и минимальный масштаб турбулентности, который соответствует максимальной частоте турбулентного движения.

Все эти разноразмерные вихри, из которых складывается турбулентное движение, обладают определенной кинетической энергией, зависящей от их завихренности или от интенсивности пульсаций скорости на соответствующей частоте. Как только подходят к изучению более детальных особенностей турбулентности, сразу же возникает один интересный вопрос: как распределяется кинетическая энергия турбулентности по различным частотам? Хотя, как уже говорилось выше, в реальной турбулентности не наблюдается непрерывного спектра частот, все же оказывается возможным, в среднем, отнести определенное количество полной энергии к некоторому точному значению частоты. Такое распределение энергии по частотам обычно называется энергетическим спектром. Этот спектр может быть установлен с помощью соответствующей измерительной аппаратуры. Даже если представляется возможным произвести гармонический анализ пульсаций скорости, то это ни в коей мере не доказывает, что и, наоборот, турбулентные пульсации складываются из этих гармоник. Интересно провести сравнение с подобной проблемой в случае звуковых колебаний, когда можно различить шум (турбулентный) и ноту (составленную из некоторого числа гармоник). Бюргерс [3] обратил внимание на аналогичную дилемму в случае света, давно известную из теоретической оптики, а именно: можно ли утверждать, что цвета спектра присутствуют первоначально в белом свете, или они образованы спектроскопом?

Выше мы говорили о том, что турбулентное движение можно считать суперпозицией вихрей с различными размерами и завихренностью, имеющими определенный верхний и нижний пределы. Верхний предел размера вихрей определяется главным образом размером самого устройства, по которому движется жидкость, в то время как нижний предел определяется влиянием вязкости и при прочих равных условиях уменьшается с возрастанием скорости осредненного потока. Внутри этих наименьших вихрей течение больше не является турбулентным, а становится вязким, и доминирующая роль в нем принадлежит молекулярным эффектам. Здесь может возникнуть вопрос: не могут ли эти наименьшие вихри стать настолько малыми, что течение внутри них уже нельзя будет рассматривать как непрерывное? Другими словами, каков размер этих наименьших вихрей по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул? Следующие цифры, возможно, помогут понять смысл этого вопроса.

Для умеренных скоростей потока, не превышающих, скажем, 100 *м/сек*, наименьший пространственный масштаб, или размер вихря, вряд ли будет меньше приблизительно 1 *мм*; эта величина еще очень велика по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул, которая имеет порядок $10^{-4}$ *мм*. Один кубический миллиметр воздуха при атмосферных условиях содержит, грубо говоря, $2{,}7 \cdot 10^{16}$ молекул. Следовательно, газы в атмосферных условиях, а также, конечно, и жидкости при исследовании турбулентных течений с умеренными скоростями могут рассматриваться как сплошная среда.

Приемлемые значения турбулентных пульсаций составляют приблизительно 10% от средней скорости и лежат в пределах, скажем, от 1 до 1000 *см/сек*. Эти значения следует сравнить со средней скоростью молекул, которая в случае воздуха имеет порядок 50 000 *см/сек*. Если частота турбулентности изменяется, скажем, от 1 до 10 000 *сек*$^{-1}$, то частота столкновений молекул в случае воздуха составляет около $5 \cdot 10^9$ *сек*$^{-1}$.

Как видим, диапазон величин, характеризующих турбулентность, лежит достаточно далеко от диапазона соответствующих молекулярных величин.

Первое знакомство с турбулентностью мы закончим анализом нескольких фотографий движения жидкости, который поможет более наглядно представить специфические особенности турбулентного течения.

На рис. 1.1 показана картина течения непосредственно позади круглого цилиндра при малом значении числа Рейнольдса [4]. Общая картина течения настолько упорядочена, что вряд ли подходит под определение реальной турбулентности, которая характеризуется хаотичностью движения. Это течение может рассматриваться, самое большее, только как псевдотурбулентное.

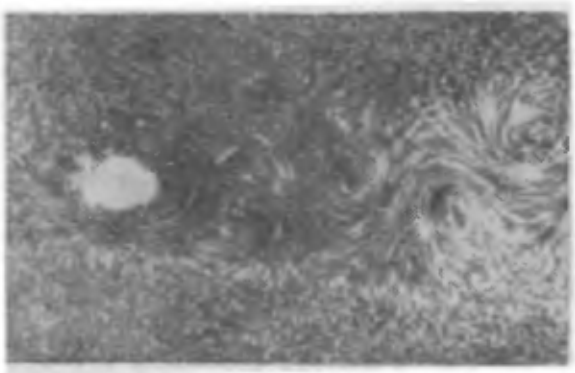


Рис. 1.1. Картина течения вниз по потоку за цилиндром.

На рис. 1.2 изображена подобная картина течения, но соответствующая более высокому значению числа Рейнольдса [5]. Вплоть до расстояний вниз по потоку, составляющих от 30 до 40 диаметров цилиндра, общая картина течения все еще достаточно упорядочена; более четкие линии тока — а вне этих расстояний также и линии тока основного течения — постепенно становятся все более и более турбулентными. Четкие линии тока турбулизируются по мере того, как число Рейнольдса возрастает. Это ясно видно из рассмотрения

рис. 1.3, который показывает картину течения непосредственно позади цилиндра при сильном увеличении [4]. Внутри зоны крупных упорядоченных вихрей картина течения — вполне турбулентная, причем

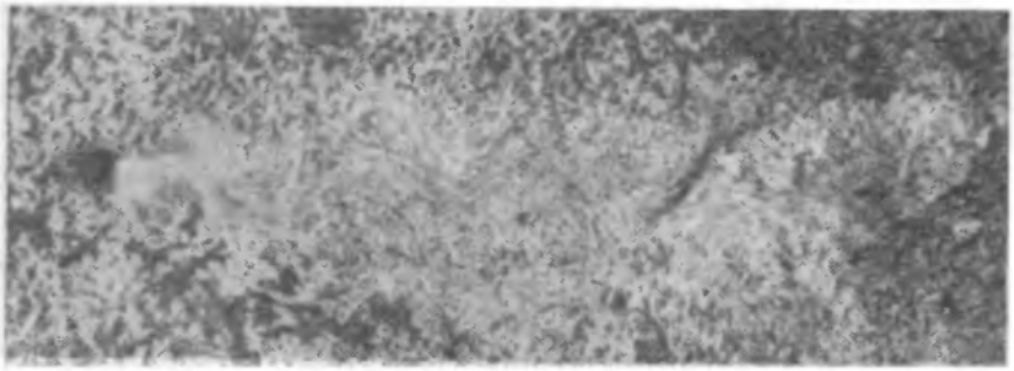


Рис. 1.2. Картина течения вниз по потоку за цилиндром.

пространственный масштаб намного меньше масштаба крупных упорядоченных вихрей.

Упорядоченность и неупорядоченность течения в следе за цилиндром хорошо иллюстрируется осциллограммами скорости, снятыми в различных точках следа. На рис. 1.4 подобные осциллограммы изображены вместе с осциллограммой для турбулентного потока в аэродинамической трубе. Осциллограмма, снятая в точке, которая лежит на линии, проходящей через центры вихрей каждого ряда (т. е. в точке, эксцентричной относительно оси следа), характеризуется одной определенной частотой, равной удвоенной предшествующей частоте (в этом проявляется влияние вихрей, которые попеременно отделяются от каждой из кромок цилиндра). Если сравнить эти осциллограммы с той, которая получена для реального турбулентного течения в аэродинамической трубе, то разница между ними сразу станет ясной.

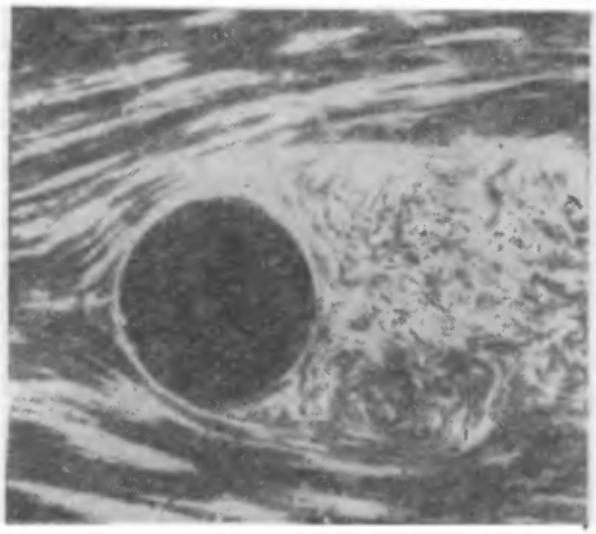


Рис. 1.3. Картина течения вблизи цилиндра. Большое число Рейнольдса.

На рис. 1.5, *а—е* показана серия картин течения, соответствующих различным, постепенно возрастающим расстояниям вниз по потоку от решетки (с шагом $M = 4{,}5$ *см* и диаметром стержней $d = 1{,}5$ *см*), которая протаскивается со скоростью 6,65 *см/сек* по покоящейся

жидкости. В то время как на рис. 1.5, *а* видны четкие и упорядоченные линии тока, последующие картины течения становятся все менее и менее четкими. На рис. 1.5, *г* — *е*, помимо постепенной турбулизации течения, заметно еще и затухание вихрей: контуры их становятся менее резкими.

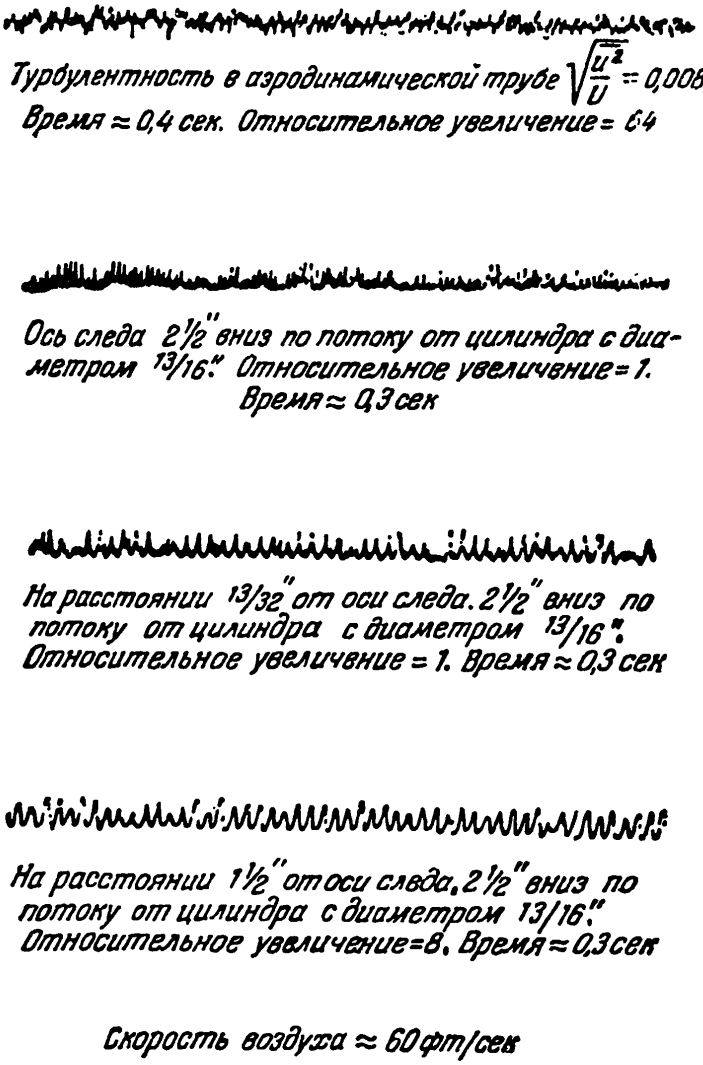



Рис. 1.4. Осциллограммы турбулентности в аэродинамической трубе и в следе за цилиндром [6].

Рассмотренные фотографии показывают, каким образом возбуждается турбулентность при течении жидкости относительно твердого тела. Возбуждение и развитие турбулентности при спутном движении соприкасающихся потоков одной и той же жидкости иллюстрируется на следующих фотографиях.

На рис. 1.6 изображены начальные вихри, образованные на границе свободной струи (граница полуструи). По ходу развития этих вихрей вниз по потоку наблюдается постепенный переход к неупорядоченному турбулентному течению. Рис. 1.7 иллюстрирует турбулентный характер течения в свободной струе, в пограничной зоне которой все еще различимы отдельные вихреобразования.

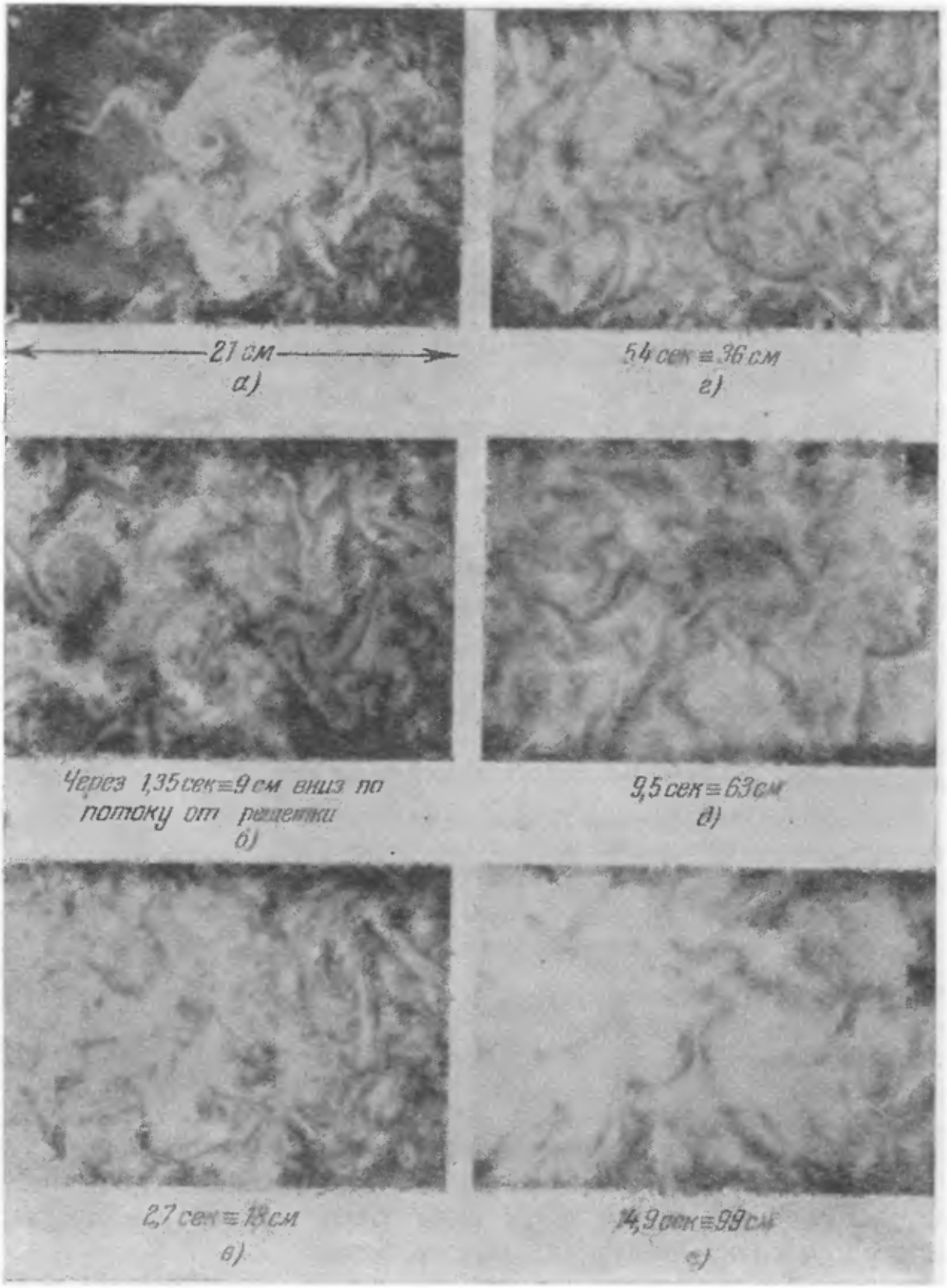



Рис. 1.5. Картина течения за решеткой. $\bar{U} = 6{,}65$ *см/сек*, $M = 4{,}5$ *см*, $d = 1{,}5$ *см* [7].



Рис. 1.6. Вихри на границе полуструи [8].



Рис. 1.7. Картина течения в свободной струе.

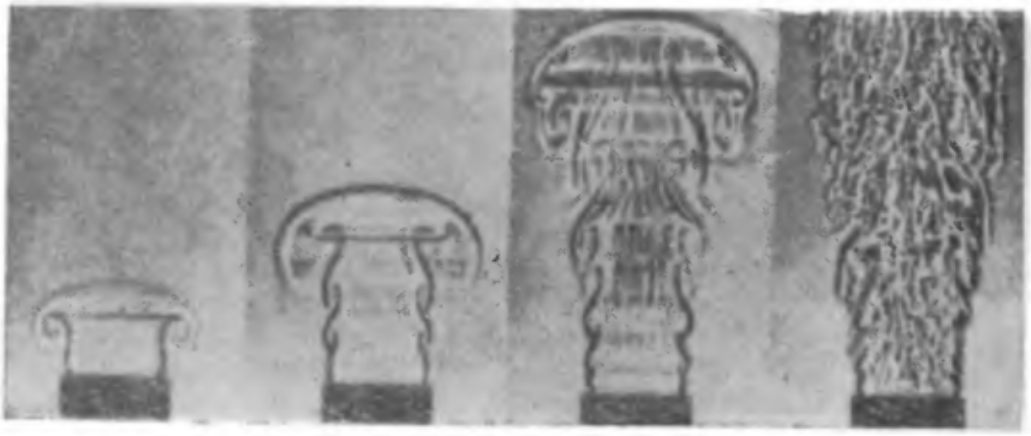


Рис. 1.8. «Шлирен»-фотографии свободной струи [9].

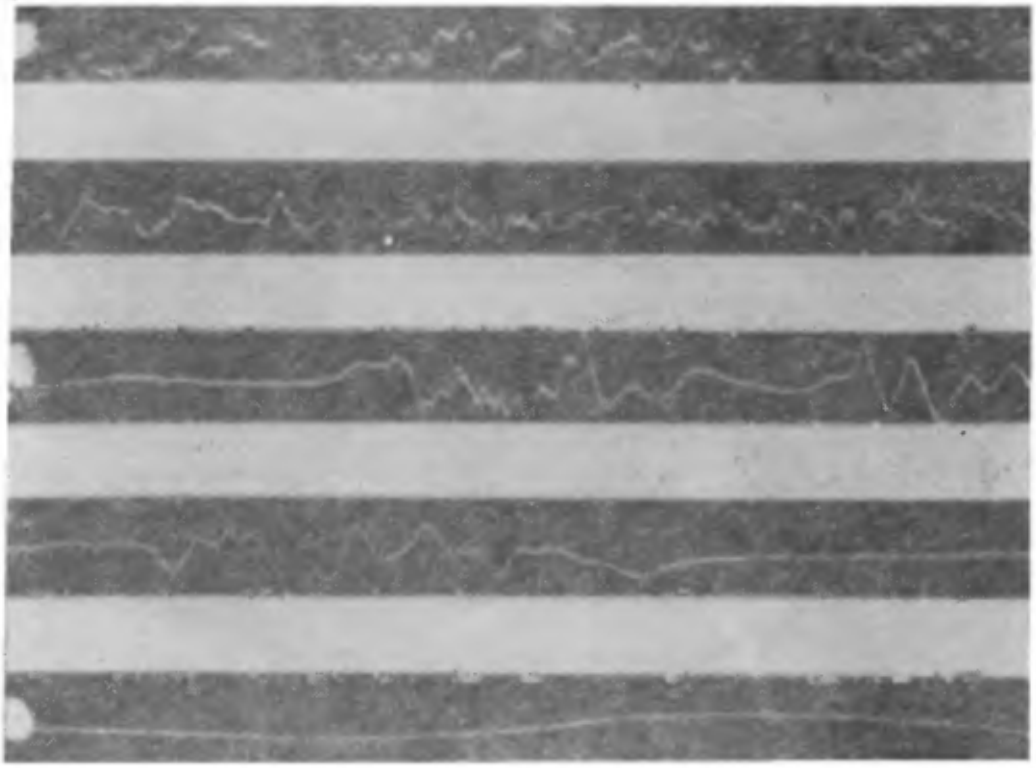


Рис. 1.9. Осциллограммы пульсаций в различных сечениях свободной струи [10].

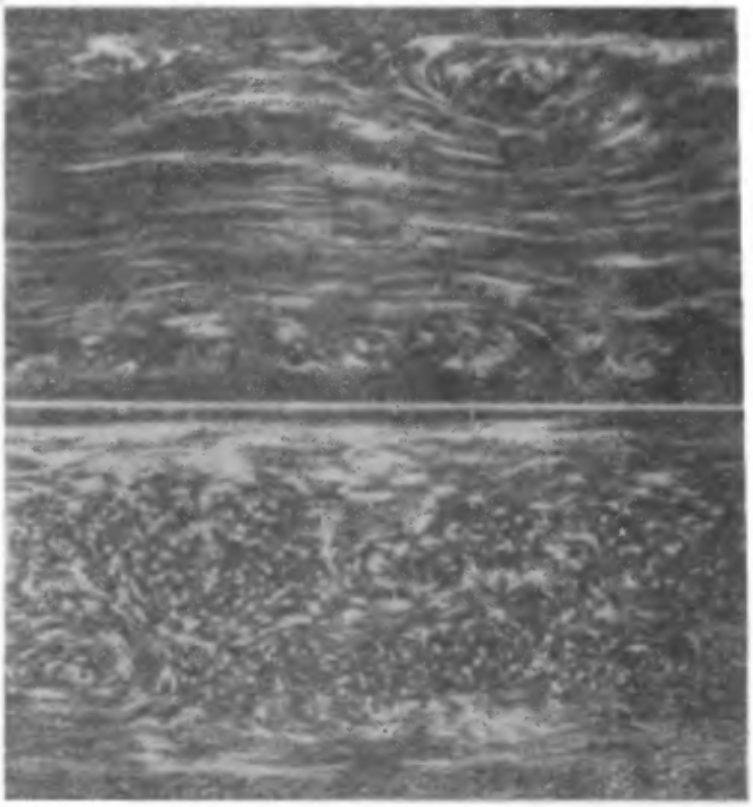



Рис. 1.10. Картина течения в канале [4].

На рис. 1.8 показаны «шлирен»-фотографии струи непосредственно в момент ее истечения [9]. На первых стадиях заметны четкие отдельные вихри, а на последующих — полностью развитое турбулентное течение.

Как следует из рассмотрения рис. 1.7, течение в центральной зоне струи отличается от течения в приграничной зоне, где оно уже не является непрерывным, а по направлению к краю струи становится все более перемежающимся. Отмеченное различие в характере течения, конечно, отражается на осциллограммах, снятых в различных точках струи (рис. 1.9). Это различие будет подробно рассмотрено в главе 6. Здесь же достаточно будет упомянуть, что эта перемежаемость, которая типична для свободной турбулентности, указывает на наличие крупномасштабных вихрей.

Наконец, на рис. 1.10, *а* и *б* изображено течение в канале, сфотографированное с помощью движущейся камеры [4]. С точки зрения более точного определения масштаба турбулентности, которое будет дано ниже, важно отметить, что внутри области, простирающейся от оси канала и, приблизительно, до половины расстояния между осью и стенкой, по-видимому, существует корреляция (связь) между скоростями (это особенно четко видно на рис. 1.10, *б*).

## § 1.2. Уравнения движения турбулентного потока; рейнольдсовы напряжения

Примем здесь, что жидкость является ньютонианской, а ее течение представляет собой решение уравнения неразрывности и уравнений движения Навье — Стокса, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям. Турбулентные течения образуют специальный класс таких решений, для которых зависимые переменные, например скорость, давление и плотность, не являются однозначными функциями пространственных координат и времени, а должны описываться законами вероятности (хаотичность движения).

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho U_i = 0. \tag{1.1}$$

В турбулентном потоке это уравнение должно удовлетворяться не только в любой момент времени, но и в среднем. Какой вид примет это уравнение для средних значений $\overline{\rho}$ и $\overline{U}_i$? Для этого запишем

$$\rho = \overline{\rho} + \widetilde{\rho} \quad \text{и} \quad U_i = \overline{U}_i + u_i.$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.1) и выполним операцию осреднения:

$$\overline{\frac{\partial (\overline{\rho} + \widetilde{\rho})}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\overline{\rho} + \widetilde{\rho})(\overline{U}_i + u_i)} = 0.$$

Используя перечисленные в § 1.1 свойства осреднения, получаем

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\bar{U}_i + \overline{\tilde{\rho} u_i}) = 0. \qquad (1.2)$$

Отсюда следует, что уравнение типа (1.1) нельзя применять просто к средним величинам $\bar{\rho}$ и $\bar{U}_i$ и что если между пульсациями плотности и скоростью существует корреляция (связь), то в уравнении появляется дополнительный член.

Как показал впервые Осборн Рейнольдс, уравнения движения для средних величин в турбулентном потоке могут быть аналогичным способом выведены из уравнений Навье — Стокса, записанных для мгновенных значений параметров потока. Но прежде чем перейти к этому, целесообразно, по-видимому, дать сначала краткий вывод этих уравнений, чтобы напомнить смысл отдельных членов, входящих в них.

Эти уравнения фактически представляют собой не что иное, как уравнения сохранения импульса. Рассмотрим, например, равновесие

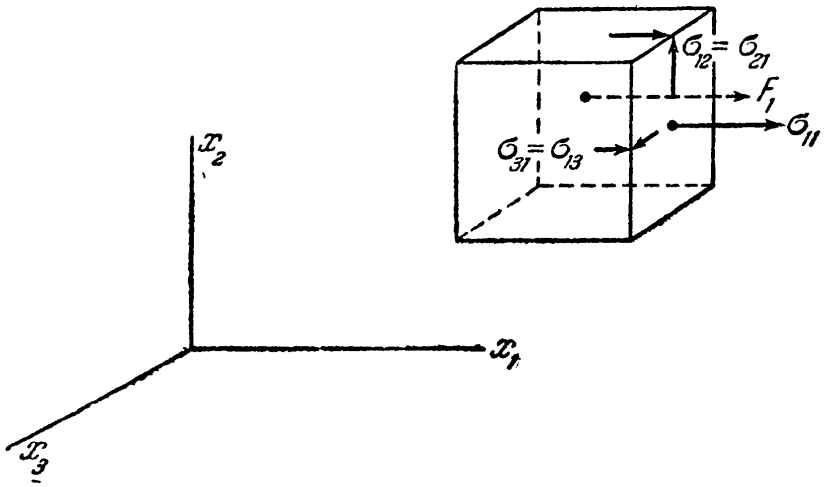



Рис. 1.11. Напряжения, действующие на элементарный куб жидкости.

некоторого куба жидкости в направлении оси $x_1$. На выделенный элемент жидкости действуют следующие поверхностные силы (см. рис. 1.11):

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}\,dx_1\,dx_2\,dx_3; \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{21}\,dx_2\,dx_1\,dx_3; \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{31}\,dx_3\,dx_1\,dx_2.$$

Здесь $\sigma_{ij}$ — напряжение, действующее на элемент поверхности, перпендикулярный к $i$-му направлению, в направлении $j$; эта величина положительна, если она направлена в сторону положительного направления $j$.

Пусть $F_1$ — внешняя сила, совершающая работу над единичным объемом жидкости; тогда, применяя к этому единичному объему

второй закон Ньютона, получаем

$$\rho \frac{dU_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{31} + F_1.$$

Подобные уравнения получаются соответственно и для равновесия в направлениях $x_2$ и $x_3$.

Используя тензорные обозначения в декартовых координатах, перепишем эти уравнения в более компактной форме:

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji} + F_i. \tag{1.3}$$

Девять компонент напряжения $\sigma_{ji}$ образуют тензор второго ранга. Этот тензор напряжений можно разбить на две части: одну, которая соответствует средней величине напряжения для всех направлений, т. е. гидростатическому давлению $P$, и другую, для которой напряжения определяются другими факторами.

Средняя величина гидростатического давления должна быть инвариантна относительно поворота осей координат; эта средняя величина записывается в виде

$$-P = \frac{1}{3}\sigma_{ii}. \tag{1.4}$$

Мы не будем давать здесь вывода этого результата; читатель сможет найти его в любом учебнике по теории упругости. Более того, аналогичный вопрос, а именно распределение турбулентных напряжений, будет более подробно рассмотрен в § 1.4.

Если указанным выше способом разбить тензор напряжений $\sigma_{ji}$ на симметричную часть, которая содержит гидростатическое давление $P$, и дополнительную часть, то он запишется в виде

$$\sigma_{ji} = \underbrace{-P\delta_{ji}}_{\text{симметричная часть}} + (\sigma_{ji} + P\delta_{ji}),$$

где $\delta_{ji}$ — символ Кронекера, или единичный тензор второго ранга.

Напряжения $\sigma_{ji}$ обусловливают деформации элементов жидкости. Поскольку эти деформации определяются частными производными $\partial U_i/\partial x_j$ от скоростей $U_i$, то оказывается возможным установить связь напряжений $\sigma_{ji}$ с этими частными производными.

Частные производные $\partial U_i/\partial x_j$ тоже образуют тензор второго ранга, который может быть разделен на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}U_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}D_{ij} + \frac{1}{2}\Omega_k\varepsilon_{ijk},$$

где $\varepsilon_{ijk}$ — антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

Симметричная часть $D_{ij}$ определяет деформацию жидкости и называется тензором скоростей деформации. Антисимметричная часть $\Omega_k \varepsilon_{ijk}$ определяет вращение жидкости без деформации; она характеризует завихренность движения. Величина $\Omega_k$ называется вектором антисимметричного тензора. Она однозначно связана с завихренностью, причем эта связь имеет вид

$$\Omega_k = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \varepsilon_{ijk}.$$

Как указывалось, напряжения вызывают деформацию элементов жидкости. Отсюда логично предположить, что между тензором напряжений и тензором скоростей деформации существует определенная связь. В случае ньютонианской жидкости эта связь считается линейной:

$$\sigma_{ji} = \mu D_{ji} \quad \text{при} \quad j \neq i, \tag{1.5}$$

где величина $\mu$ определяется как динамический коэффициент вязкости жидкости.

В случае $j = i$ появляется добавка от гидростатического давления, которое вызывает либо сжатие, либо расширение жидкого элемента. Таким образом,

$$\sigma_{ji} + P\delta_{ji} = \mu D_{ji} + \mu_1 \Theta \quad \text{при} \quad j = i, \tag{1.6}$$

где величина $\Theta = \frac{1}{2} D_{kk} = \partial U_k / \partial x_k$ обозначает дилатацию, которая представляет собой величину, обратную сжимаемости.

Уравнения (1.5) и (1.6) могут быть записаны в виде одного уравнения:

$$\sigma_{ji} + P\delta_{ji} = \mu D_{ji} + \mu_1 \Theta \delta_{ji}. \tag{1.7}$$

Чтобы определить величину $\mu_1$, применим к уравнению (1.7) операцию свертывания:

$$\sigma_{ii} + P\delta_{ii} = \mu D_{ii} + \mu_1 \Theta \delta_{ii},$$

или

$$\sigma_{ii} + 3P = \mu D_{ii} + 3\mu_1 \Theta,$$

или, поскольку $D_{ii} = 2\Theta$,

$$0 = (2\mu + 3\mu_1)\Theta,$$

откуда *)

$$\mu_1 = -\frac{2}{3}\mu.$$

*) В последнее время справедливость этого соотношения была подвергнута сомнению [13]. В выражение (1.7) величины $P$, $\mu$ и $\mu_1$ вводятся без определения $P$. Величины $\mu$ и $\mu_1$ называются соответственно первым и вторым коэффициентами вязкости. Только в том случае, если полагать спра-

Следовательно,

$$\sigma_{ji} = -P\delta_{ji} + \mu\left(D_{ji} - \frac{2}{3}\Theta\delta_{ji}\right). \tag{1.8}$$

Подстановка этого соотношения для $\sigma_{ji}$ в уравнение (1.3) дает

$$\rho\frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-P\delta_{ji} + \mu D_{ji} - \frac{2}{3}\mu\Theta\delta_{ji}\right) + F_i,$$

или

$$\rho\frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu D_{ji} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\mu\Theta + F_i. \tag{1.9}$$

Это — общее выражение для уравнений Навье — Стокса в случае сжимаемой жидкости, причем коэффициент вязкости $\mu$ считается здесь функцией пространственных координат.

Уравнение (1.9) может быть записано и в другой форме. Из уравнения неразрывности (1.1) следует

$$\Theta = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Для изэнтропического процесса

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\varkappa P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho c^2}\frac{dP}{dt},$$

где $\varkappa = c_p/c_v$ и $c$ — скорость звука. Следовательно,

$$\Theta = -\frac{1}{\rho c^2}\frac{dP}{dt}, \tag{1.10}$$

и тогда уравнение (1.9) записывается в виде

$$\rho\frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\mu D_{ji} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho c^2}\frac{dP}{dt}\right) + F_i. \tag{1.11}$$

Особый интерес представляют следующие два случая:

1. *Постоянный коэффициент вязкости*: $\mu = \text{const}$. В этом случае имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu D_{ji}) = \mu\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ji} = \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \mu\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}U_i + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \mu\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}U_i + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\Theta,$$

---

ведливым уравнение (1.4), из него можно получить $\mu_1 = -{}^2/_3\,\mu$. Этот результат получен также и в кинетической теории газов. По-видимому, его следует считать экспериментально подтвержденным опытами по поглощению звука только для совершенных одноатомных газов. Однако аналогичные опыты в случае жидкостей дали для отношения коэффициентов вязкости величину значительно большую, чем ${}^2/_3$.

так что уравнение (1.9) принимает вид

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + F_i, \qquad (1.12)$$

а уравнение (1.11)

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho c^2} \frac{dP}{dt}\right) + F_i. \qquad (1.13)$$

2. *Несжимаемая жидкость*: $\rho = \text{const}$, $\Theta = 0$.

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu D_{ji} + F_i \qquad (1.14)$$

или, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mu D_{ji} = \mu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j},$$

то

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + F_i. \qquad (1.15)$$

Полученные выше уравнения применимы как к нетурбулентному, так и к турбулентному потокам. Чтобы более наглядно представить себе турбулентное движение и его взаимодействие с осредненным движением, воспользуемся методом Осборна Рейнольдса применительно к уравнению (1.2) для течения сжимаемой жидкости с постоянной вязкостью.

Положим

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad \rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad P = \bar{P} + p,$$

где $\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t+\tau)\, d\tau$, причем время $T$ — велико по сравнению с масштабом времени турбулентного движения.

Подстановка этих выражений в уравнение (1.12) и осреднение по времени дает искомые уравнения для турбулентного потока. При выполнении операции осреднения следует пользоваться его свойствами, указанными в § 1.1. Кроме того, следует иметь в виду, что

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

Тогда левая часть уравнения (1.12) примет вид

$$\overline{\rho \frac{dU_i}{dt}} = \bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\bar{\rho} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial t}} +$$

$$+ \overline{\tilde{\rho} u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \overline{\tilde{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}},$$

а правая часть запишется в форме

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}\bar{U}_i+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_i}+\bar{F}_i.$$

Следовательно, уравнение (1.12) преобразуется так:

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\mu\left(\frac{\partial^2\bar{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_i}\right)+\bar{F}_i-$$
$$-\overline{\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}-\overline{\tilde{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial t}}-\overline{\tilde{\rho u_j}}\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}-\bar{U}_j\overline{\tilde{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}-\overline{\tilde{\rho u_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, видно, что помимо хорошо известных членов, соответствующих осредненному движению, в правой части уравнения появляются дополнительные члены, связанные с турбулентным движением; четыре из них определяются двойными и даже тройными корреляциями между пульсациями плотности и скорости и один — двойной корреляцией $\overline{u_iu_j}$.

Применяя уравнение неразрывности (1.1), можно преобразовать турбулентные члены в правой части уравнения (1.16) следующим образом:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho u_iu_j}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{\tilde{\rho}u_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{\rho}u_j}\bar{U}_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{\rho}u_i}\bar{U}_j+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{\rho}u_iu_j}\right).$$

Следовательно, влияние турбулентности определяется фактически тремя корреляциями: $\overline{u_iu_j}$, $\overline{\tilde{\rho}u_i}$ и $\overline{\tilde{\rho}u_iu_j}$.

В большинстве исследованных случаев турбулентного движения влиянием сжимаемости можно пренебречь, т. е. считать жидкость несжимаемой.

Влиянием сжимаемости при турбулентных движениях можно пренебречь, если $\tilde{\rho}/\bar{\rho}\ll 1$. При таких малых значениях $\tilde{\rho}/\bar{\rho}$ существует приближенное равенство

$$\frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}}\approx\frac{p}{\bar{\rho}c^2}.$$

Поскольку величина $p$ имеет порядок $\bar{\rho}u^2$, то, следовательно, $\overline{\tilde{\rho}/\rho}$ имеет порядок $u^2/c^2$, т. е. квадрата числа Маха турбулентности.

В этом случае уравнение (1.16) значительно упрощается, так как четырьмя из пяти турбулентных членов можно пренебречь.

Таким образом, для несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости уравнение (1.16) сводится к следующему выражению:

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}\bar{U}_i-\overline{\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+\bar{F}_i.$$

Это уравнение можно записать в другой форме, которая более наглядно показывает физический смысл турбулентных членов правой части.

Полагая жидкость несжимаемой, имеем

$$\overline{U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} = \overline{U}_i \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_j} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0.$$

Если к правой части уравнения движения прибавить величину $-\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0$, то оно примет вид

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j}\right) + \overline{F}_i. \quad (1.17)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.3), приходим к заключению, что турбулентные члены $\rho \overline{u_i u_j}$ можно интерпретировать как напряжения, действующие на элемент жидкости дополнительно к напряжениям, определяемым давлением $P$, и вязким напряжениям.

С учетом этих турбулентных напряжений полные компоненты напряжений запишутся так:

$$\sigma_{ij} = -\overline{P}\delta_{ij} + \mu \overline{D}_{ij} - \rho \overline{u_i u_j}. \quad (1.18)$$

Поскольку уравнение движения для турбулентного потока в форме (1.17) впервые было дано Рейнольдсом, турбулентные напряжения $\rho \overline{u_i u_j}$ часто называют рейнольдсовыми напряжениями.

Рейнольдсовы напряжения имеют как нормальные, так и тангенциальные компоненты. Нормальные компоненты $\rho \overline{u_n^2}$ получаются, если положить $i = j$. Покажем, что эта величина действительно может рассматриваться как нормальное напряжение.

Рассмотрим элемент поверхности $dS$, перпендикулярный, скажем, к направлению $x_1$. Будем рассматривать далее только турбулентное движение жидкости через этот элемент, т. е. будем считать, что осредненное движение со скоростью $\overline{U}_1$ отсутствует. Тогда величина $\rho \overline{u_1^2}\, dS$ означает только осредненный поток импульса через этот элемент поверхности, а именно $\overline{(\rho u_1) u_1}\, dS$. Поскольку этот поток импульса оказывает некоторую реакцию (в данном случае — давление) на поверхность $dS$, то член $\rho \overline{u_1^2}$ в выражении для положительного напряжения $\sigma_{11}$ имеет отрицательный знак.

Аналогичным способом можно показать, что члены $-\rho \overline{u_i u_j}$ при $i \neq j$ могут рассматриваться как тангенциальные (касательные) напряжения. Рассмотрим, например, величину $-\rho \overline{u_1 u_2}$. Возьмем теперь элемент поверхности $dS$, перпендикулярный к направлению $x_2$.

Жидкие элементы, проходящие через эту площадку, имеют обе компоненты скорости $u_1$ и $u_2$. Если в среднем большинство частиц с положительным значением $u_2$ обладает также и положительным значением $u_1$ и наоборот, то в среднем величина $\overline{u_1 u_2}$ тоже должна быть положительна. В этом случае сила в положительном направлении $x_1$ воздействует на жидкость вдоль той стороны площадки $dS$, которая обращена в сторону положительного направления $x_2$, и, наоборот, сила в отрицательном направлении $x_1$ приложена к жидкости со стороны площадки $dS$, обращенной в сторону отрицательного направления $x_2$. Следовательно, $\sigma_{21} = -\rho\overline{u_1 u_2}$.

Из сравнения турбулентных напряжений в уравнениях движения с соответствующими напряжениями, вызванными влиянием вязкости, напрашивается предположение, что турбулентные напряжения действуют подобно вязким напряжениям, т. е. что они прямо пропорциональны градиенту скорости. Это предположение выдвинул Буссинеск [11], который ввел понятие о «кажущейся», «турбулентной» или «вихревой» вязкости $\epsilon_m$, такой, что напряжения $\sigma_{ij}$ записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -\bar{P}\delta_{ij} + (\mu + \rho\epsilon_m)\bar{D}_{ij}. \tag{1.19}$$

Если это выражение сравнить с соответствующим соотношением (1.18), то получим следующее равенство:

$$-\overline{u_i u_j} = \epsilon_m \bar{D}_{ij} = \epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.20}$$

Согласно концепции Буссинеска, коэффициент вихревой вязкости $\epsilon_m$ является скалярной величиной. Первоначально Буссинеск ввел предположение лишь о постоянстве ее по направлению, однако в приложении этой теории к анализу турбулентных течений в канале он предположил еще, что коэффициент $\epsilon_m$ постоянен также и по величине. Следует ожидать, что подобное постоянство этой величины может наблюдаться лишь в том случае, если поле турбулентного течения, по меньшей мере, однородно. Хотя, как мы увидим ниже (см. главу 6), в нескольких случаях свободного турбулентного течения, которое не является однородным и отличается значительным градиентом скорости, а значит и напряжением сдвига, только в одном направлении, и оказывается возможным удовлетворительно описать суммарное поле течения, полагая коэффициент вихревой вязкости постоянным, все же, как правило, эту величину нельзя считать постоянной. Так, при турбулентном течении вблизи стенки с поперечным сдвигом коэффициент вихревой вязкости в пограничном слое не является постоянной величиной.

Более того, если бы величина $\epsilon_m$ была постоянным скаляром, то общее соотношение типа уравнения (1.20) было бы несправедливо,

ибо если над этим соотношением произвести операцию свертывания, то получается

$$-\overline{u_i u_i} = 2 \times \text{кинетическая энергия на единицу массы} = 2\epsilon_m \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}.$$

Для несжимаемой жидкости правая часть этого соотношения при конечных значениях $\epsilon_m$ обращается в нуль, но левая часть может обращаться в нуль только в том случае, если турбулентность вообще отсутствует.

Если мы все же хотим придерживаться предположения о скалярной вихревой вязкости, то более правильным будет выделить из турбулентных напряжений среднее турбулентное давление в виде самостоятельного члена (см. § 1.4):

$$\bar{P}_t = \rho \underbrace{\langle \overline{u_n^2} \rangle}_{\substack{\text{среднее} \\ \text{по} \\ \text{всем } n}} = \frac{1}{3} \rho \overline{u_i u_i}.$$

Тогда вместо соотношений (1.19) и (1.20) следует рассматривать равенства

$$\bar{\sigma}_{ij} = -(\bar{P} + \bar{P}_t)\delta_{ij} + (\mu + \rho\epsilon_m^*)\bar{D}_{ij}$$

и

$$-\overline{u_i u_j} + \frac{1}{3}\overline{u_k u_k}\delta_{ij} = \epsilon_m^* D_{ij}.$$

В таком случае операция свертывания, примененная к последнему соотношению, обращает обе части уравнения для несжимаемой жидкости в тождественный нуль.

Некоторые исследователи, чтобы учесть неодинаковость значений $\epsilon_m$ в различных направлениях (см., например, [12]), предлагали считать $\epsilon_m$ векторной величиной. Однако подобное предположение исключает соотношение между турбулентными напряжениями $\overline{u_i u_j}$ и тензором скоростей деформаций $\bar{D}_{ij}$ типа (1.20).

Вследствие того, что

$$\delta_{kj}(\epsilon_m)_k \bar{D}_{ij} = A_i,$$

скалярное произведение тензора второго ранга (каким является $D_{ij}$) и вектора или тензора первого ранга [такого, как $(\epsilon_m)_k$] снова дало бы вектор, а не тензор второго ранга (каким является $\overline{u_i u_j}$). Тензор второго ранга может быть образован из другого тензора второго ранга только в том случае, если последний скалярно умножается на тензор второго или нулевого ранга, т. е. на скалярную величину (см. приложение).

Пусть $(\epsilon_m)_{il}$ — тензор второго ранга, тогда

$$\delta_{lk}(\epsilon_m)_{il}\bar{D}_{jk} = (\epsilon_m)_{ik}\bar{D}_{jk} = -\overline{u_i u_j},$$

где каждый член $-\overline{u_i u_j}$ должен быть равен сумме трех членов $(\epsilon_m)_{ik}\bar{D}_{jk}$.

В новейших теориях атмосферной турбулентности, подобных разработанной Эртелем [37], вихревая вязкость считается переменной, однако, что более правильно, описываемой тензором второго ранга *).

Понятие вихревой вязкости может вызвать возражение, если оно используется по аналогии с «молекулярной» вязкостью жидкости. Дело в том, что молекулярная вязкость — реальное свойство жидкости, проявляющееся даже в том случае, когда жидкость покоится, тогда как вихревая вязкость может проявляться, лишь если имеется какое-то течение жидкости, и, ясно, не является свойством жидкости, как таковой. Однако формальное введение понятия «вихревой вязкости» не встречает никаких возражений, если мы отдаем себе полный отчет о его специфике, а именно, что оно выражает турбулентные напряжения через градиенты средней скорости в движущейся жидкости.

*Цилиндрические координаты.* Поскольку в этой книге нам придется иметь дело с задачами об осесимметричных течениях, которые наиболее целесообразно описывать в цилиндрических координатах, то для удобства мы приведем здесь уравнения неразрывности и движения в цилиндрических координатах. Эти уравнения могут быть выведены способом, аналогичным использованному в предыдущих параграфах для случая декартовых координат.

Пусть $U_r$, $U_\varphi$ и $U_z$ — компоненты скорости в направлениях трех цилиндрических координат $r$, $\varphi$ и $z$.

Тогда уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho U_r) + \rho\frac{U_r}{r} + \frac{\partial}{r\,\partial\varphi}(\rho U_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho U_z) = 0$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta = 0, \tag{1.21}$$

*) При этом все же остается неразрешенным противоречие, состоящее в том, что компоненты тензора вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{ik}$ подчинены определенным условиям, так как $\overline{u_i u_j}$ и $D_{ij}$ симметричны относительно $i$ и $j$, в то время как для несжимаемой жидкости $D_{ii} = 0$. Следствия, вытекающие из этих ограничений для тензора диффузии $(\epsilon_m)_{ik}$, и их смысл остаются все еще не полностью выясненными.

Единственным путем, позволяющим избежать всех этих трудностей, представляется введение коэффициента вихревой диффузии в виде тензора четвертого ранга, хотя это и существенно усложняет дело.

где

$$\Theta = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\varphi}{r\,\partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \tag{1.22}$$

и

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + U_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Уравнения движения в проекциях на три указанных координатных направления в предположении о постоянстве коэффициента вязкости запишутся так:

$$\rho\left(\frac{dU_r}{dt} - \frac{U_\varphi^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi}\right) + F_r, \tag{1.23а}$$

$$\rho\left(\frac{dU_\varphi}{dt} + \frac{U_r U_\varphi}{r}\right) = -\frac{\partial P}{r\,\partial \varphi} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial \Theta}{r\,\partial \varphi} + \mu\left(\nabla^2 U_\varphi - \frac{U_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial \varphi}\right) + F_\varphi, \tag{1.23б}$$

$$\rho\frac{dU_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu\nabla^2 U_z + F_z, \tag{1.23в}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\,\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Компоненты напряжений имеют вид

$$\sigma_{rr} = -P + 2\mu\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\Theta, \qquad \sigma_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{r\,\partial \varphi} - \frac{U_\varphi}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -P + 2\mu\left(\frac{\partial U_\varphi}{r\,\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\mu\Theta, \qquad \sigma_{\varphi z} = \mu\left(\frac{\partial U_z}{r\,\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial z}\right), \tag{1.24}$$

$$\sigma_{zz} = -P + 2\mu\frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\Theta, \qquad \sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right).$$

Рейнольдсовы уравнения движения для турбулентного потока могут быть получены в нашем случае путем замены величин $\rho$, $P$, $U_r$, $U_\varphi$ и $U_z$ следующими выражениями:

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad P = \bar{P} + p,$$

$$U_r = \bar{U}_r + u_r, \quad U_\varphi = \bar{U}_\varphi + u_\varphi, \quad U_z = \bar{U}_z + u_z$$

и выполнения операции осреднения, как это было сделано выше; рекомендуем читателю проделать все эти выкладки самостоятельно. В результате для осредненного движения получаются члены, совершенно одинаковые с членами уравнений (1.23), и, кроме того, дополнительные члены, связанные с двойными и тройными корреляциями между пульсациями плотности и компонентами турбулентных

пульсаций скорости. Например, в первом из уравнений (1.23) члены, связанные с турбулентными пульсациями, будучи перенесены в правую часть уравнения, образуют выражение

$$-\bar{\rho}\left(\overline{u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}}+\overline{u_\varphi\frac{\partial u_r}{r\,\partial\varphi}}+\overline{u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}}-\overline{\frac{u_\varphi^2}{r}}\right)-\overline{\tilde{\rho}\frac{\partial u_r}{\partial t}}-\overline{\tilde{\rho}u_r}\frac{\partial\bar{U}_r}{\partial r}-$$

$$-\overline{\tilde{\rho}u_\varphi}\left(\frac{\partial\bar{U}_r}{r\,\partial\varphi}-\frac{2\bar{U}_\varphi}{r}\right)-\overline{\tilde{\rho}u_z}\frac{\partial\bar{U}_z}{\partial z}-\overline{\tilde{\rho}\frac{\partial u_r}{\partial r}}\bar{U}_r-\overline{\tilde{\rho}\frac{\partial u_r}{r\,\partial\varphi}}\bar{U}_\varphi-\overline{\tilde{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial z}}\bar{U}_z+$$

$$+\overline{\frac{\tilde{\rho}u^2}{r}}-\overline{\tilde{\rho}u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}}-\overline{\tilde{\rho}u_\varphi\frac{\partial u_r}{r\,\partial\varphi}}-\overline{\tilde{\rho}u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}}.$$

Аналогичные результаты получаются для второго и третьего уравнений системы (1.23).

Можно заметить, что большинство турбулентных членов в этих уравнениях представляет собой корреляции, содержащие пульсации плотности; следовательно, в случае несжимаемой жидкости число этих членов значительно сократится. Приведем эту систему уравнений в полном виде для случая несжимаемой жидкости:

$$\rho\left(\frac{d\bar{U}_r}{dt}-\frac{\bar{U}_\varphi^2}{r}\right)=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial r}+\mu\left(\nabla^2\bar{U}_r-\frac{\bar{U}_r}{r^2}-2\frac{\partial\bar{U}_\varphi}{r^2\,\partial\varphi}\right)-\frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\overline{u_r^2}-$$

$$-\rho\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\overline{u_ru_\varphi}-\rho\frac{\partial}{\partial z}\overline{u_ru_z}+\rho\overline{\frac{u_\varphi^2}{r}}+\bar{F}_r,$$

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\bar{U}_\varphi+\frac{\bar{U}_r\bar{U}_\varphi}{r}\right)=-\frac{\partial\bar{P}}{r\,\partial\varphi}+\mu\left(\nabla^2\bar{U}_\varphi-\frac{\bar{U}_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\bar{U}_r}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\rho\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\overline{u_\varphi^2}-\rho\frac{\partial}{\partial r}\overline{u_\varphi u_r}-\rho\frac{\partial}{\partial z}\overline{u_\varphi u_z}-2\rho\overline{\frac{u_\varphi u_r}{r}}+\bar{F}_\varphi, \quad (1.25)$$

$$\rho\frac{d\bar{U}_z}{dt}=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{U}_z-\rho\frac{\partial}{\partial z}\overline{u_z^2}-\frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\overline{u_ru_z}-\rho\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\overline{u_\varphi u_z}+\bar{F}_z.$$

Компоненты напряжений запишутся так:

$$\sigma_{rr}=-\bar{P}+2\mu\frac{\partial\bar{U}_r}{\partial r}-\rho\overline{u_r^2},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=-\bar{P}+2\mu\left(\frac{\partial\bar{U}_\varphi}{r\,\partial\varphi}+\frac{\bar{U}_r}{r}\right)-\rho\overline{u_\varphi^2},$$

$$\sigma_{zz}=-\bar{P}+2\mu\frac{\partial\bar{U}_z}{\partial z}-\rho\overline{u_z^2},\quad \sigma_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial\bar{U}_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\bar{U}_r}{r\,\partial\varphi}-\frac{\bar{U}_\varphi}{r}\right)-\rho\overline{u_ru_\varphi}, \quad (1.26)$$

$$\sigma_{zr}=\mu\left(\frac{\partial\bar{U}_r}{\partial z}+\frac{\partial\bar{U}_z}{\partial r}\right)-\rho\overline{u_ru_z},\ \sigma_{\varphi z}=\mu\left(\frac{\partial\bar{U}_z}{r\,\partial\varphi}+\frac{\partial\bar{U}_\varphi}{\partial z}\right)-\rho\overline{u_\varphi u_z}.$$

Сравнив выражения (1.26) с соответствующими выражениями из (1.18), можно заметить, что эти соотношения для турбулентных напряжений одинаковы.

## § 1.3. Уравнение сохранения транспортабельной скалярной субстанции в турбулентном потоке

Рассмотрим теперь перенос некоторой скалярной субстанции, например тепла, энергии или вещества, в турбулентном потоке несжимаемой жидкости. Выражаясь более точно, будем рассматривать явление переноса при турбулентных движениях без учета переноса посредством молекулярной диффузии или вынужденной конвекции, обусловленной осредненной скоростью потока.

Применение закона сохранения скалярной субстанции $\Gamma$ в единице массы к процессу вынужденной конвекции через элементарный объем жидкости дает

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathfrak{k} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right) + F_\gamma, \tag{1.27}$$

где $\mathfrak{k}$ означает коэффициент молекулярного переноса. Здесь $F_\gamma$ — «движущая сила» источника; если, например, переносится тепло, то $F_\gamma$ характеризует выделение тепла при диссипации кинетической энергии потока.

Если считать $\mathfrak{k}$ постоянной величиной и положить, что

$$\Gamma = \overline{\Gamma} + \gamma, \quad U_i = \overline{U}_i + u_i,$$

то после выполнения обычной операции осреднения для левой части этого уравнения получим

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_i} + \overline{u_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \gamma} + \overline{F}_\gamma,$$

поскольку в случае несжимаемой жидкости $\gamma\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = 0$.

Подстановка этого выражения в уравнение (1.27) после некоторых преобразований дает

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathfrak{k} \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_i} - \overline{u_i \gamma}\right) + \overline{F}_\gamma. \tag{1.28}$$

Таким образом, на распределение $\overline{\Gamma}$ при осредненном движении влияет молекулярная диффузия и конвективные турбулентные движения, причем последний эффект определяется корреляцией $\overline{u_i \gamma}$ между турбулентными пульсациями скорости и скалярной субстанции. Точно так же, как это сделал Буссинеск в случае переноса импульса, мы тоже можем формально ввести здесь коэффициент турбулентного или вихревого переноса $\epsilon_\gamma$:

$$-\overline{u_i \gamma} = \epsilon_\gamma \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_i}. \tag{1.29}$$

Вследствие того, что величины $\overline{u_i\gamma}$ и $\partial\overline{\Gamma}/\partial x_i$ являются векторными, коэффициент турбулентного переноса должен быть либо тензором второго ранга, либо скаляром; в последнем случае справедливы соотношения (1.29). Здесь снова можно подчеркнуть, что коэффициент турбулентного переноса, вообще говоря, не остается постоянным по всему полю течения. Когда коэффициент переноса представляет собой тензор второго ранга, то связь между $\overline{u_i\gamma}$ и $\partial\overline{\Gamma}/\partial x_i$ должна иметь следующий вид:

$$-\overline{u_i\gamma} = (\epsilon_\gamma)_{ij}\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial x_j}. \tag{1.30}$$

## § 1.4. Двойные корреляции между компонентами турбулентных пульсаций скорости

В этом и последующих параграфах мы будем считать жидкость несжимаемой, а вязкость — постоянной. В § 1.2 было показано, что компоненты турбулентных пульсаций скорости в некоторой точке фигурируют в уравнениях движения в виде двойных корреляций $\overline{u_iu_j}$ и что величины $\rho\overline{u_iu_j}$ можно рассматривать как нормальные (при $i=j$) и касательные (при $i\neq j$) турбулентные напряжения.

Воспользуемся теперь для анализа этих турбулентных напряжений методом, который обычно применяется в случае напряжений, возникающих под действием вязкости, и посмотрим, к каким результатам это приведет. Рассмотрим, например, малый элемент поверхности $dS$ в жидкости, нормаль $N$ к которому составляет с осями координат $x_i$ углы $ni$.

Пусть $\sigma_{Nn} = -\rho\overline{u_n^2}$ — нормальная компонента полного турбулентного напряжения, действующего на выделенный элемент поверхности; тогда, пользуясь упомянутым выше методом анализа напряжений, установим связь этой нормальной компоненты с напряжениями $\sigma_{ij} = -\rho\overline{u_iu_j}$. Полное турбулентное напряжение $\sigma_N$ может быть разложено на три компоненты $\sigma_{Ni}$ вдоль $i$-ых направлений координатных осей. Между $\sigma_{Nn}$ и $\sigma_{Ni}$ существует следующая связь (см. рис. 1.12):

$$\sigma_{Nn} = \sigma_{Ni}\cos ni = \sigma_{Ni}e_{ni},$$

где $\cos ni$ — направляющий косинус нормали $N$ относительно оси $i$ — для краткости записан в виде $e_{ni}$.

Для равновесия жидкого элемента $OABC$ требуется, чтобы

$$\sigma_{Ni} = \sigma_{ij}e_{nj}.$$

Отсюда

$$\sigma_{Nn} = \sigma_{ij}e_{ni}e_{nj},$$

или

$$\overline{u_n^2} = \overline{u_i u_j} e_{ni} e_{nj}. \tag{1.31}$$

Если интенсивность турбулентной пульсации скорости вдоль нормали к элементарной площадке $dS$ обозначить через $u'_n = \sqrt{\overline{u_n^2}}$, то выражение (1.31) можно переписать так:

$$\overline{u_i u_j} \frac{e_{ni} e_{nj}}{u_n'^2} = 1. \tag{1.32}$$

Поскольку для данной системы координат $\overline{u_i u_j}$ — фиксированная величина, то она не зависит от изменения ориентации элементарной

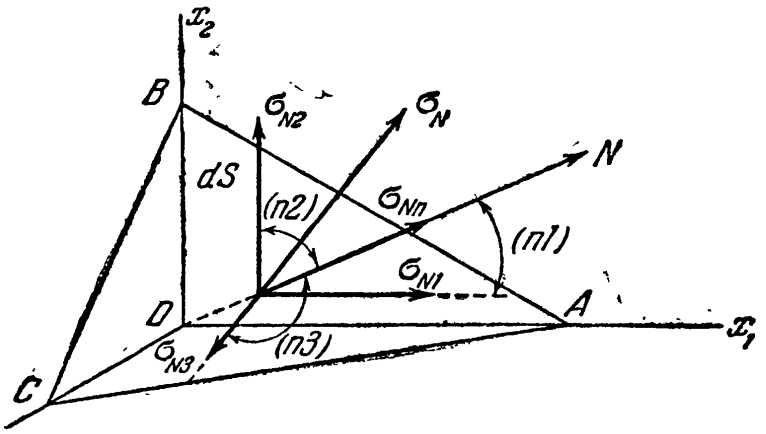



Рис. 1.12. Напряжения, действующие на элементарную поверхность $dS$.

площадки $dS$; с изменением этой ориентации изменяются только величины $e_{ni}$, $e_{nj}$ и $u'_n$. Следовательно, соотношение (1.32) является уравнением поверхности второго порядка, а именно эллипсоида, в координатах $e_{ni}/u'_n$. Точки пересечения этой поверхности с осями координат соответствуют $1/u'_i$.

Предположим, что оси координат совпадают с тремя главными осями этого эллипсоида, и обозначим эту новую координатную систему через $i^*$. Тогда уравнение эллипсоида в этой новой системе координат запишется так:

$$\overline{u_n^2} = \overline{u_{i^*}^2} e_{ni^*}^2. \tag{1.33}$$

Это уравнение не содержит смешанного произведения $\overline{u_{i^*} u_{j^*}}$ при $i^* \neq j^*$; следовательно, вдоль плоскостей, перпендикулярных к главным осям эллипсоида, напряжения сдвига отсутствуют. Это — хорошо известная теорема теории упругости.

Статическое давление в некоторой точке потока жидкости определяется как среднее значение нормальных напряжений при всевозможных ориентациях плоскости, проходящей через эту точку,

Аналогично давление в турбулентном потоке можно определить путем осреднения величин в соотношениях (1.31) по всем направлениям $N$. Поскольку

$$\overline{e_{ni}e_{nj}} = \frac{1}{3}\delta_{ij},$$

то из (1.31) имеем

$$\overline{u_n^2} = \frac{1}{3}\overline{u_i u_i} = \frac{2}{3} \times (\text{кинетическая энергия})$$

(среднее по всем $n$). Этот результат интересно сравнить с уравнением (1.4).

В общем случае, рассмотренном выше, напряжения $\rho\overline{u_i^2}$, соответствующие $i = 1$, 2 или 3, различны. А каков физический смысл совпадения величин $\overline{u_i^2}$ для различных значений $i = 1$, 2 и 3? В этом случае эллипсоид превращается в сферу, и уравнение (1.33) оказывается справедливым для любой системы координат; другими словами, это уравнение становится инвариантным относительно поворота системы координат и отражения от координатных плоскостей. Течение, которое описывается таким уравнением, называется изотропным. Ввиду того, что в этом случае ни в какой системе координат членов вида $\overline{u_i u_j}$ при $i \neq j$ не наблюдается, в изотропном турбулентном потоке не может существовать среднего турбулентного напряжения сдвига.

Кроме корреляций между компонентами скорости в фиксированной точке течения, имеющими ясный физический смысл (эти корреляции суть напряжения), существуют корреляции между скоростями в двух различных точках течения, которые имеют важное значение, ибо их можно использовать при анализе изменения поля течения во времени. При этом, например, оказывается возможным определить те области течения, в которых движения жидкости некоторым образом связаны, или коррелируют, друг с другом.

Пусть $A$ и $B$ — две точки потока, а $a$ и $b$ — соответственно два заданных направления в точках $A$ и $B$. Тогда соответствующие компоненты скорости вдоль этих направлений будут $U_a$ и $U_b$. Какова корреляция между этими скоростями?

Значения скоростей $U_a$ и $U_b$ складываются из осредненной скорости и турбулентных пульсаций скорости соответственно в точках $A$ и $B$. Предположим, что в рассматриваемом турбулентном течении осредненная скорость имеет постоянную величину. Далее, положим для простоты, что эта осредненная скорость направлена вдоль оси $x_1$. Следовательно, для произвольного момента времени

имеем

$$U_a = \overline{U}_1 e_{a1} + u_a \quad \text{в точке } A,$$
$$U_b = \overline{U}_1 e_{b1} + u_b \quad \text{в точке } B,$$

где $e_{a1}$ и $e_{b1}$ — направляющие косинусы соответственно для направлений $a$ и $b$ относительно оси $x_1$.

Корреляционное произведение $(U_a)_A$ и $(U_b)_B$,

$$\overline{(U_a)_A (U_b)_B} = \overline{U_1^2} e_{a1} e_{b1} + \overline{(u_a)_A (u_b)_B},$$

слагается, как видим, из двух частей; для описания турбулентного течения представляет интерес лишь второе слагаемое, а именно $\overline{(u_a)_A (u_b)_B}$, которое соответствует турбулентным пульсациям скорости. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только это слагаемое, т. е.

$$Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B}. \tag{1.34}$$

Для квазистационарного течения, т. е. такого, в котором осредненная картина не изменяется во времени, корреляционное произведение зависит только от местоположения точек $A$ и $B$ и направлений $a$ и $b$. Отсюда, если эти местоположения и направления заданы, то $Q_{A,B}$ имеет фиксированное значение.

Теперь можно выразить величины $(u_a)_A$ и $(u_b)_B$ соответственно через компоненты скорости $(u_i)_A$ и $(u_i)_B$ вдоль осей координат:

$$u_a = u_i e_{ai}, \quad u_b = u_i e_{bi}. \tag{1.35}$$

Тогда подстановка выражений (1.35) в соотношение (1.34) дает

$$Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B} e_{ai} e_{bj}.$$

Поскольку осреднение производится по времени, а $e_{ai}$ и $e_{bj}$ — постоянные направляющие косинусы соответственно для направлений $a$ и $b$, то черта сверху применяется фактически только к произведению $(u_i)_A (u_j)_B$:

$$Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B} e_{ai} e_{bj} = (Q_{i,j})_{A,B} e_{ai} e_{bj}. \tag{1.36}$$

Следовательно, $Q_{A,B}$ можно рассматривать как произведение $(Q_{i,j})_{A,B}$ и $e_{ai} e_{bj}$. Корреляция

$$(Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B} \tag{1.37}$$

представляет собой тензор второго ранга, так как при вращении системы координат она преобразуется, как тензор. Согласно правилу преобразования тензора (см. приложение), имеем

$$\left(Q^*_{p,q} = e_{ip} e_{jq} Q_{i,j}\right)_{A,B},$$

где $(Q^*_{p,q})_{A,B}$ — тензор, соответствующий новой системе координат, ось $p$ которой составляет с осью $i$ исходной системы координат угол $ip$, а $e_{ip}=\cos ip$ и $e_{jq}=\cos jq$. Это соотношение легко доказывается:

$$(e_{ip}e_{jq}Q_{i,j})_{A,B}=e_{ip}e_{jq}\overline{(u_i)_A(u_j)_B}=\overline{(u_p)_A(u_q)_B}=(Q^*_{p,q})_{A,B}.$$

Как уже упоминалось, величина $Q_{A,B}$ имеет фиксированное значение и, согласно соотношению (1.36), может рассматриваться как скаляр, образованный при скалярном умножении тензора $(Q_{h,k})_{A,B}$ на тензор, или диаду, $e_{ai}e_{bj}$:

$$Q_{A,B}=\delta_{hi}\delta_{kj}(Q_{h,k})_{A,B}e_{ai}e_{bj}=(Q_{i,j})_{A,B}e_{ai}e_{bj}.$$

Уравнение (1.36) показывает, что корреляционное произведение $Q_{A,B}=\overline{(u_a)_A(u_b)_B}$ можно выразить через девять корреляций $\overline{(u_i)_A(u_j)_B}$.

Когда турбулентный поток является изотропным и однородным, возможны значительные упрощения. Как будет показано ниже, корреляцию $Q_{A,B}$ можно выразить через две корреляции специального типа.

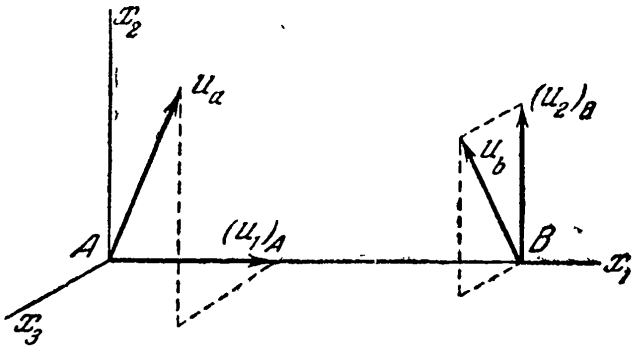


Рис. 1.13. Корреляция между скоростями $u_a$ и $u_b$.

Чтобы дать читателю представление о характерных особенностях изотропной турбулентности, приведем здесь доказательство этого положения для того частного случая, когда система координат расположена так, что ось $x_1$ проходит через обе наши точки $A$ и $B$ (см. рис. 1.13). Согласно определению изотропии, любое соотношение между величинами, характеризующими турбулентность, должно быть инвариантно относительно поворота системы координат и отражения от координатных плоскостей.

Требуется доказать, что величина $Q_{A,B}=\overline{(u_a)_A(u_b)_B}$ может быть выражена через две корреляции. Это легко показать, если воспользоваться определением изотропии, т. е. тем, что при $i\neq j$

$$(Q_{i,j})_{A,B}=\overline{(u_i)_A(u_j)_B}=0.$$

Рассмотрим, например, величины $(u_1)_A$ и $(u_2)_B$. При повороте системы координат вокруг оси $x_1$ на 180°, вследствие изотропии, должно быть справедливо соотношение

$$\overline{(u_1)_A(u_2)_B}=\overline{(u_1)_A[-(u_2)_B]}=-\overline{(u_1)_A(u_2)_B},$$

которое может выполняться только в том случае, когда $\overline{(u_1)_A(u_2)_B}=0$.

Отсюда имеем

$$Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_i)_B}\, e_{ai} e_{bi}. \tag{1.38}$$

Из трех корреляций

$$\overline{(u_1)_A (u_1)_B},\ \overline{(u_2)_A (u_2)_B},\ \overline{(u_3)_A (u_3)_B}$$

две последние должны быть одинаковы, потому что система координат инвариантна относительно поворота вокруг оси $x_1$. Следовательно, величина $Q_{A,B}$ в самом деле определяется только двумя корреляциями, а именно: продольной корреляцией скорости $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ и одной из поперечных корреляций скорости $\overline{(u_2)_A (u_2)_B}$ или $\overline{(u_3)_A (u_3)_B}$.

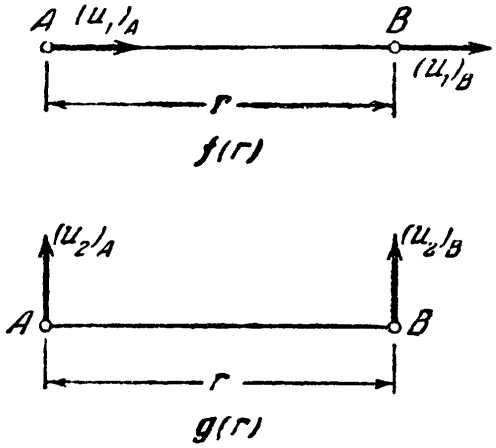



Рис. 1.14. Коэффициент продольной корреляции скорости $f$ и коэффициент поперечной корреляции $g$.

Вместо корреляционных произведений $\overline{(u_a)_A (u_b)_B}$ и $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ обычно принято пользоваться коэффициентами корреляции, которые определяются соотношениями

$$R_{A,B} = \frac{\overline{(u_a)_A (u_b)_B}}{(u'_a)_A (u'_b)_B}, \qquad (R_{i,j})_{A,B} = \frac{\overline{(u_i)_A (u_j)_B}}{(u'_i)_A (u'_j)_B}. \tag{1.39}$$

В случае однородной изотропной турбулентности имеем

$$(u'_a)_A = (u'_i)_A = (u'_b)_B = (u'_j)_B,$$

поэтому для краткости все эти величины можно обозначить через $u'$.

Коэффициенты этих двух специальных типов корреляции, через которые может быть выражена корреляция $Q_{A,B}$ или ее коэффициент $R_{A,B}$, обычно обозначаются символами $f$ и $g$ соответственно для коэффициентов продольной и поперечной корреляции скорости (см. рис. 1.14). Тогда соотношение, соответствующее выражению (1.38), запишется в следующем виде:

$$R_{A,B} = f e_{a1} e_{b1} + g (e_{a2} e_{b2} + e_{a3} e_{b3}).$$

Ниже, в главе 3, мы рассмотрим, каким образом можно выразить коэффициент корреляции $R_{A,B}$ для произвольной системы координат через эти две величины $f$ и $g$, а также через расстояние $r$ между точками $A$ и $B$.

## § 1.5. Изменение двойных корреляций скорости по времени; тройные корреляции скорости

В реальной жидкости вязкие напряжения при турбулентных движениях вызывают диссипацию кинетической энергии этих движений в тепло. Если отсутствуют внешние факторы, способствующие непрерывному подводу энергии для поддержания турбулентных движений, то они с течением времени должны вырождаться. Существенный интерес представляет задача о том, как изменяются картина течения и соотношения между скоростями в ходе этого вырождения. Поскольку эти соотношения описываются тензором $(Q_{i,j})_{A,B}$ двойных корреляций скорости, то нам следует рассмотреть изменение этого тензора во времени.

Начнем с анализа уравнений движения, поскольку именно они описывают турбулентные движения. Эти уравнения следует преобразовать таким образом, чтобы в результате получились другие уравнения, содержащие двойную корреляцию скорости $\overline{(u_a)_A (u_b)_B}$. Тогда интересующая нас величина будет представляться производной $\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_a)_A (u_b)_B}$.

Способ получения этой величины из уравнений движения состоит в следующем.

Поскольку $\overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}\, e_{ai} e_{bj}$, то достаточно рассмотреть только изменение каждой величины $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ в отдельности, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \overline{(u_i)_A \frac{\partial}{\partial t}(u_j)_B} + \overline{(u_j)_B \frac{\partial}{\partial t}(u_i)_A}.$$

Величина каждого члена в правой части этого уравнения может быть получена из уравнений движения для $U_j$ в точке $B$ и для $U_i$ в точке $A$.

Приняв теперь, что осредненная скорость $\overline{U}_i$ во всей рассматриваемой области постоянна и не зависит от времени, положим

$$(U_i = \overline{U}_i + u_i)_A, \quad (U_j = \overline{U}_j + u_j)_B.$$

Уравнение движения для $u_i$ в точке $A$ имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} u_i + (\overline{U}_k + u_k)\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} u_i\right]_A.$$

Умножим обе части этого уравнения на $(u_j)_B$:

$$(u_j)_B \frac{\partial}{\partial t}(u_i)_A + [\overline{U}_k + (u_k)_A]\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A (u_i)_A (u_j)_B =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A p_A (u_j)_B + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_A (u_i)_A (u_j)_B.$$

При этом следует иметь в виду, что величина $(u_j)_B$ при операции дифференцирования в точке $A$ может рассматриваться как постоянная.

Аналогично, умножив обе части уравнения движения для $u_j$ в точке $B$ на величину $(u_i)_A$, получим

$$(u_i)_A \frac{\partial}{\partial t}(u_j)_B + [\bar{U}_k + (u_k)_B]\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B (u_j)_B (u_i)_A = \\ = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_B p_B (u_i)_A + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)(u_j)_B (u_i)_A.$$

Для несжимаемой жидкости имеем

$$u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{и} \quad u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

а также, следовательно,

$$(u_j)_B \left(u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)_A = 0 \quad \text{и} \quad (u_i)_A \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)_B = 0.$$

Если к преобразованному уравнению движения в точке $A$ прибавить первый член, а к преобразованному уравнению движения в точке $B$ — второй член и, наконец, почленно сложить оба уравнения, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_i)_A (u_j)_B + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A (u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B (u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B\right] + \\ + \bar{U}_k\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A (u_i)_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B (u_i)_A (u_j)_B\right] = \\ = -\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A p_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_B p_B (u_i)_A\right] + \\ + \nu\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_B\right](u_i)_A (u_j)_B.$$

Нас интересует взаимосвязь турбулентных движений в точках $A$ и $B$. Следовательно, какую именно из точек $A$ и $B$ мы выберем в качестве начала системы координат, не имеет значения. Считая началом координат точку $A$, имеем

$$\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_k},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_B = \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k}.$$

Если воспользоваться этими соотношениями, то приведенное выше уравнение после осреднения по времени примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_i)_A(u_j)_B} - \frac{\partial}{\partial \xi_k}\overline{(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B} + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\overline{(u_i)_A(u_k)_B(u_j)_B} =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial \xi_i}\overline{p_A(u_j)_B} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\overline{p_B(u_i)_A}\right] + 2\nu\frac{\partial}{\partial \xi_k \partial \xi_k}\overline{(u_i)_A(u_j)_B}. \quad (1.40)$$

Заметим, что член, содержащий $\overline{U}_k$, исчез. Полученное в результате уравнение (1.40) описывает соотношения между турбулентными движениями точно так же, как если бы мы рассматривали турбулентные движения относительно системы координат, движущейся с осредненной скоростью $\overline{U}_k$.

Далее видим, что уравнение (1.40), помимо членов с двойными корреляциями скорости $\overline{(u_i)_A(u_j)_B}$, содержит еще и такие двойные корреляции, как $\overline{p_A(u_j)_B}$, а также члены с тройными корреляциями типа $\overline{(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B}$.

Поскольку давление является скалярной величиной, корреляции $\overline{p_A(u_j)_B}$ и $\overline{p_B(u_i)_A}$ образуют тензоры первого ранга; тройные корреляции $\overline{(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B}$ и $\overline{(u_i)_A(u_k)_B(u_j)_B}$ образуют тензоры третьего ранга.

В последующих выкладках мы будем обозначать эти корреляционные тензоры первого и третьего рангов соответственно символами $(\boldsymbol{K}_{p,\,i})_A$ и $(\boldsymbol{S}_{ij,\,k})_{A,\,B}$.

Таким образом,

$$(\boldsymbol{K}_{i,\,p})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A\, p_B}, \quad (\boldsymbol{K}_{p,\,j})_{A,\,B} = \overline{p_A(u_j)_B} \quad (1.41)$$

и

$$(\boldsymbol{S}_{ik,\,j})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B}, \quad (\boldsymbol{S}_{i,\,kj})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A(u_k)_B(u_j)_B}. \quad (1.42)$$

Заметим, что индекс $p$ в символе $\boldsymbol{K}_{i,\,p}$ соответствует давлению $p$ и не является формальным индексом типа $i$ или $j$, поэтому суммирование не распространяется на $p$.

С учетом всех этих замечаний уравнение (1.40) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{Q}_{i,\,j} - \frac{\partial}{\partial \xi_k}\boldsymbol{S}_{ik,\,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\boldsymbol{S}_{i,\,kj} =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_i}\boldsymbol{K}_{p,\,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\boldsymbol{K}_{i,\,p}\right) + 2\nu\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k}\boldsymbol{Q}_{i,\,j}, \quad (1.43)$$

где все корреляции соответствуют точкам $A$ и $B$.

В наши намерения не входит давать здесь решение этого уравнения. Ниже, в главе 3, будет дано решение этого уравнения для случая изотропной турбулентности, когда это уравнение значительно упрощается.

Здесь уместно будет заметить лишь, что для решения этого уравнения относительно тензора двойных корреляций скорости $Q_{i,j}$ требуется знать другие тензоры, а именно $K_{p,i}$, а также $S_{ik,j}$ и $S_{i,kj}$. Как мы увидим ниже, это обстоятельство представляет собой основное препятствие для решения проблемы турбулентности этим путем.

Как и в случае двойных корреляций скорости, для двойных корреляций давления и скорости и для тройных корреляций скорости принято обычно вводить соответствующие коэффициенты, определяемые формулами:

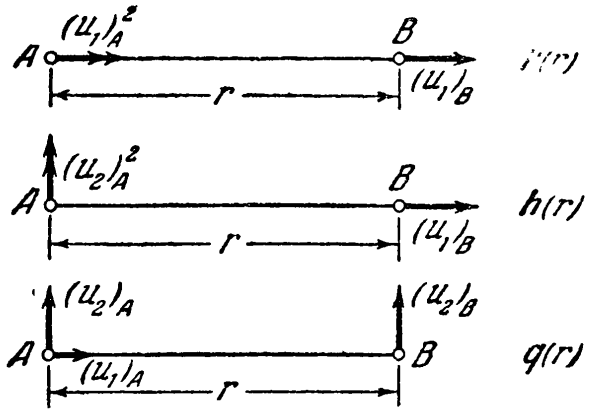



Рис. 1.15. Коэффициенты тройной корреляции скорости $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$.

$$(L_{i,p})_{A,B} = \frac{1}{(u_i')_A}(K_{i,p})_{A,B},$$
$$(L_{p,j})_{A,B} = \frac{1}{(u_j')_B}(K_{p,j})_{A,B}, \tag{1.44}$$

$$(T_{ik,j})_{A,B} = \frac{(S_{ik,j})_{A,B}}{(u_i')_A (u_k')_A (u_j')_B}, \tag{1.45}$$
$$(T_{i,kj})_{A,B} = \frac{(S_{i,kj})_{A,B}}{(u_i')_A (u_k')_B (u_j')_B}.$$

В предыдущем параграфе было показано, что в случае однородной изотропной турбулентности представляется целесообразным выразить коэффициент корреляции $R_{A,B}$ через две корреляции специального вида $f(r, t)$ и $g(r, t)$. Ниже, в главе 3, мы покажем, что для этого типа турбулентности коэффициент тройной корреляции скорости может быть выражен всего лишь через три коэффициента корреляции специального вида, обозначаемые символами $k(r, t)$, $h(r, t)$ и $q(r, t)$ (см. рис. 1.15):

$$k(r, t) = \frac{\overline{(u_1^2)_A (u_1)_B}}{u'^3} = T_{11,1},$$

$$h(r, t) = \frac{\overline{(u_2^2)_A (u_1)_B}}{u'^3} = T_{22,1} \tag{1.46}$$

$$q(r, t) = \frac{\overline{(u_2)_A (u_1)_A (u_2)_B}}{u'^3} = T_{21,2}.$$

## § 1.6. Свойства двойных продольных и поперечных корреляций при однородной турбулентности

В этом параграфе мы рассмотрим несколько важных свойств коэффициентов продольной и поперечной корреляции $f(r, t)$ и $g(r, t)$, которые были введены в § 1.4. Поскольку эти свойства одинаковы для обоих коэффициентов корреляции, то будет вполне достаточно рассмотреть здесь только один из них; мы выберем для этой цели коэффициент поперечной корреляции $g$ между поперечными компонентами скорости в двух точках $A$ и $B$. Для простоты будем считать, что точки $A$ и $B$ расположены на оси $x_2$, причем точка $A$ имеет координату $\xi_2$, а точка $B$ — координату $\xi_2 + x_2$.

По определению имеем

$$g(x_2) = \frac{\overline{u_1(\xi_2)\, u_1(\xi_2 + x_2)}}{u_1'(\xi_2)\, u_1'(\xi_2 + x_2)}. \tag{1.47}$$

Здесь операция осреднения может быть произведена по времени. Но ввиду того, что турбулентность по своим средним статистическим свойствам считается однородной по всему течению, то представляется возможным произвести осреднение также и по координате $\xi_2$. Рассмотрим для этой цели большое число точек $A$ и $B$ на оси $x_2$, расположенных через постоянные интервалы $x_2$, и найдем среднее значение корреляции для всех этих точек. Таким образом, имеем

$$\overline{u_1(\xi_2)\, u_1(\xi_2 + x_2)} = \frac{1}{\xi_2'' - \xi_2'} \int_{\xi_2'}^{\xi_2''} u_1(\xi_2)\, u_1(\xi_2 + x_2)\, d\xi_2,$$

где $(\xi_2'' - \xi_2')$ представляет собой диапазон значений $\xi_2$, рассматриваемых в процессе осреднения.

На основании предположения об однородности имеем

$$u_1'(\xi_2) = u_1'(\xi_2 + x_2) = u_1'.$$

Из определения величины $g$ следует, что $g(0) = 1$. Покажем, прежде всего, что эта величина является, кроме того, и максимальным значением коэффициента корреляции $g(x_2)$, т. е.

$$g(x_2) \leqslant 1. \tag{1.48}$$

Для этой цели рассмотрим квадрат разности скоростей

$$\overline{[u_1(\xi_2 + x_2) - u_1(\xi_2)]^2} \geqslant 0,$$

откуда следует, что

$$2u_1'^2 - \overline{2u_1(\xi_2 + x_2)\, u_1(\xi_2)} \geqslant 0,$$

и, таким образом, соотношение (1.48) доказано.

Далее, из однородности течения следует, что корреляция должна быть симметричной функцией от $x_2$. Это свойство вытекает из того, что, вследствие однородности, значение корреляции не должно изменяться при уменьшении координат точек $A$ и $B$ на величину $x_2$. Но это равноценно изменению положительного знака $x_2$ в выражении (1.48) на отрицательный. Значит,

$$g(x_2) = g(-x_2). \tag{1.49}$$

Следовательно, коэффициент $g$ является симметричной функцией от $x_2$, причем его величина при $x_2 = 0$ достигает максимального значения, равного единице, а при увеличении $x_2$ убывает. Если основываться на интуиции, то можно было бы ожидать, что коэффициент $g$, уменьшаясь, в конечном счете обращается в нуль при стремлении $x_2$ к бесконечности. Убывание $g$ с возрастанием $x_2$ должно зависеть от характера турбулентности. Оно может быть монотонного или колебательного типа. Поэтому в общем случае о форме корреляционной функции можно сказать очень мало. Можно высказать лишь некоторые соображения о форме этой функции в непосредственной окрестности точки $x_2 = 0$. В самом деле, оказывается возможным вывести определенные интересные соотношения между скоростью и различными ее производными как следствие однородности поля течения, а затем использовать эти соотношения для описания формы корреляционной функции при $x_2 = 0$.

Из предположения об однородности следует, что

$$\overline{u_1(\xi_2)\, u_1(\xi_2 + x_2)} = \overline{u_1(\xi_2 - x_2)\, u_1(\xi_2)},$$

откуда

$$\overline{u_1(\xi_2)\frac{\partial u_1(\xi_2 + x_2)}{\partial(\xi_2 + x_2)}} = -\overline{\frac{\partial u_1(\xi_2 - x_2)}{\partial(\xi_2 - x_2)}\, u_1(\xi_2)}.$$

Следовательно,

$$u_1'^2\left[\frac{\partial g}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} = \overline{\left[u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}} = -\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\, u_1\right]_{x_2=0}} = 0.$$

Опять-таки вследствие однородности имеем

$$\overline{u_1(\xi_2 - x_2)\frac{\partial u_1(\xi_2)}{\partial x_2}} = \overline{u_1(\xi_2)\frac{\partial u_1(\xi_2 + x_2)}{\partial x_2}},$$

откуда

$$-\overline{\frac{\partial u_1(\xi_2 - x_2)}{\partial(\xi_2 - x_2)}\,\frac{\partial u_1(\xi_2)}{\partial x_2}} = \overline{u_1(\xi_2)\,\frac{\partial^2 u_1(\xi_2 + x_2)}{\partial x_2\,\partial(\xi_2 + x_2)}}.$$

Следовательно,

$$u_1'^2\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right]_{x_2=0} = \overline{\left[u_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right]_{x_2=0}} = -\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]^2_{x_2=0}}.$$

Аналогичным способом эти соотношения можно обобщить и на случай производных более высокого порядка. В результате имеем

$$\left[\frac{\partial^{n+m}g}{\partial x_2^{n+m}}\right]_{x_2=0} = \frac{1}{u_1'^2}\overline{\left[\frac{\partial^n u_1}{\partial x_2^n}\frac{\partial^m u_1}{\partial x_2^m}\right]_{x_2=0}} = 0, \tag{1.50}$$

если $(n+m)$ — нечетное число, и

$$\left[\frac{\partial^{2n}g}{\partial x_2^{2n}}\right]_{x_2=0} = \frac{1}{u_1'^2}\overline{\left[u_1\frac{\partial^{2n}u_1}{\partial x_2^{2n}}\right]_{x_2=0}} = (-1)^n\frac{1}{u_1'^2}\overline{\left[\frac{\partial^n u_1}{\partial x_2^n}\right]_{x_2=0}^2}. \tag{1.51}$$

Как указывалось выше, форму корреляционной функции при $x_2=0$ можно описать с помощью производных от скорости в этой точке. Для этого разложим $g(x_2)$ в ряд Тэйлора, приняв при этом во внимание, что функция $g(x_2)$ симметрична относительно $x_2$:

$$g(x_2) = 1 + \frac{1}{2!}x_2^2\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right]_{x_2=0} + \frac{1}{4!}x_2^4\left[\frac{\partial^4 g}{\partial x_2^4}\right]_{x_2=0} + \ldots$$

Если ввести сюда соотношения (1.51), то получим

$$g(x_2) = 1 - \frac{x_2^2}{2!}\frac{1}{u_1'^2}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}^2} + \frac{x_2^4}{4!}\frac{1}{u_1'^2}\overline{\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right]_{x_2=0}^2} - \ldots \tag{1.52}$$

При очень малых значениях $x_2$ корреляция $g(x_2)$ стремится к параболической зависимости от $x_2$.

Введем некоторую длину $\lambda_g$, такую, что при очень малых значениях $x_2$

$$g(x_2) \approx 1 - \frac{x_2^2}{\lambda_g^2}. \tag{1.53}$$

Из этого определения величины $\lambda_g$ следует, что

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right]_{x_2=0} \tag{1.54}$$

и

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{2u_1'^2}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}^2}. \tag{1.55}$$

Поскольку величина $\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}^2}$ определяет среднеквадратичную интенсивность локального изменения $u_1$, то $\lambda_g$ можно рассматривать как меру этого изменения. Представим, что это локальное изменение $u_1$ обусловлено вихрями наименьшего размера, наблюдающимися в турбулентном течении. Тогда величину $\lambda_g$ можно также

рассматривать как характеристику среднего размера этих наименьших вихрей. Как будет показано ниже, диссипация кинетической энергии течения в тепло под воздействием молекулярной вязкости определяется величиной $\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2_{x_2=0}}$. Следовательно, можно также сказать, что $\lambda_g$ является мерой среднего размера вихрей, через которые, главным образом, и осуществляется диссипация *). В зависимости от того, рассматривается ли эта величина как мера наименьших вихрей или как характеристика размера вихрей, в основном способствующих диссипации, $\lambda_g$ называется микромасштабом или масштабом диссипации.

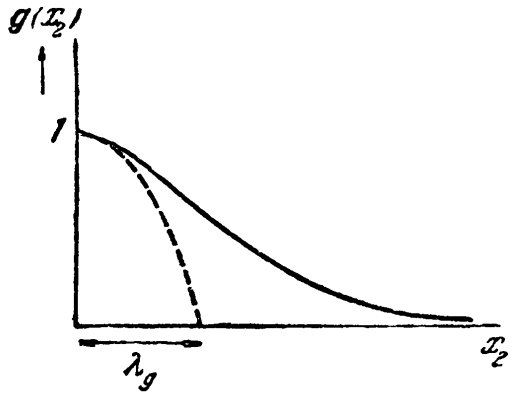



Рис. 1.16. Парабола, соприкасающаяся с кривой изменения коэффициента поперечной корреляции $g(x_2)$, и микромасштаб (или масштаб диссипации) $\lambda_g$.

Поскольку уравнение (1.53) описывает параболу с вершиной в точке $x_2 = 0$, $g = 1$, где она соприкасается с корреляционной кривой, величина $\lambda_g$ отыскивается по пересечению этой параболы с осью $x_2$ (см. рис. 1.16).

В начале этого параграфа упоминалось о том, что для коэффициента продольной корреляции

$$f(x_1) = \frac{\overline{u_1(\xi_1)\, u_1(\xi_1 + x_1)}}{u_1'^2}$$

применим аналогичный анализ, который приводит к тем же результатам. Таким образом, мы можем ввести также и микромасштаб, или масштаб диссипации, $\lambda_f$. Но поскольку в общем случае

$$\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]^2_{x_1=0}} \neq \overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]^2_{x_2=0}},$$

то и $\lambda_f \neq \lambda_g$. Соотношение между $\lambda_f$ и $\lambda_g$, например, при изотропной турбулентности можно найти в главе 3.

## § 1.7. Макро- или интегральный масштаб турбулентности

Помимо длины $\lambda_g$ или $\lambda_f$ имеется другая длина, являющаяся важной характеристикой структуры турбулентности. Это новую длину можно, до некоторой степени, считать мерой наибольшего расстояния связанности, или расстояния корреляции, между скоростями в двух точках поля течения. Логично ожидать, что с увеличением

*) Более правильно было бы сказать, что $\lambda_g$ является характеристикой размера вихрей, которые при одинаковой интенсивности производят ту же диссипацию, что и рассматриваемая турбулентность.

расстояния степень этой корреляции будет уменьшаться и что вне некоторого интервала конечной длины эта корреляция практически обращается в нуль. Таким образом, $g \approx 0$ при $x_2 > x_2^*$, где $x_2^*$ — расстояние корреляции.

Однако эта новая, только что введенная длина берется не равной этому расстоянию корреляции $x_2^*$, а определяется соотношением

$$\Lambda_g = \int_0^\infty g(x_2)\, dx_2. \tag{1.56}$$

Поэтому эта длина называется еще также интегральным масштабом. Величина $\Lambda_g$ будет сравнима с величиной $x_2^*$, если форма кривой функции $g$ не слишком сильно отличается от прямоугольной. Разница между ними становится существенной, когда $g$ принимает отрицательные значения при больших величинах $x_2$, которые наверняка будут иметь место, если, например, картина течения обладает некоторой постоянной периодичностью и, следовательно, кривая $g$ при больших величинах $x_2$ колеблется около оси $x_2$.

Для иллюстрации указанного влияния периодичности рассмотрим одну строго периодическую функцию от $x_2$:

$$u_1 = u_1' \sqrt{2} \sin 2\pi \frac{x_2}{X}.$$

Тогда, по определению,

$$g(x_2) = \frac{\overline{u_1(\xi_2)\, u_1(\xi_2 + x_2)}}{u'^2} = \frac{2}{\Xi} \int_0^\Xi \sin 2\pi \frac{\xi_2}{X} \sin 2\pi \frac{\xi_2 + x_2}{X}\, d\xi_2 =$$

$$= \frac{2}{\Xi}\left( \cos \frac{2\pi x_2}{X} \int_0^\Xi \sin^2 2\pi \frac{\xi_2}{X}\, d\xi_2 + \sin \frac{2\pi x_2}{X} \int_0^\Xi \sin 2\pi \frac{\xi_2}{X} \cos 2\pi \frac{\xi_2}{X}\, d\xi_2 \right).$$

Если положить $\Xi \to \infty$, то $g(x_2)$ становится строго периодической функцией от $x_2$:

$$g(x_2) = \cos \frac{2\pi x_2}{X}.$$

Для этой периодической корреляционной функции интегральный масштаб $\Lambda_g$ может быть определен только в том случае, если рассматривается конечная область интегрирования. Предположим, что предел интегрирования равен $\frac{1}{2} nX$, где $n$ — большое число. Тогда получим $\Lambda_g = \left(\frac{X}{2\pi}\right) \sin \pi n$; следовательно, $\Lambda_g$ обращается в нуль, когда $n$ — целое число, и принимает значения между нулем и $\pm \frac{X}{2\pi}$, когда $n$ — дробное число.

Отсюда следует, что, строго говоря, определение, даваемое формулой (1.56), имеет смысл только в том случае, если корреляционная функция не имеет строгой периодичности, что и наблюдается, когда турбулентные движения нерегулярны.

Периодичность картины течения не является существенным фактором, обусловливающим отрицательные значения $g$. Как будет показано ниже (в главе 3), при изотропной турбулентности, когда турбулентные движения целиком носят случайный характер, функция $g$ при больших значениях $x_2$ становится отрицательной. Кроме того, на следующем примере мы также увидим, что $g$ принимает отрицательные значения при больших $x_2$.

Рассмотрим турбулентный поток в плоском канале шириной $2b$. Из условия неразрывности течения имеем

$$\int_{-b}^{+b} (\overline{U} + u)\, dx_2 = \int_{-b}^{+b} \overline{U}\, dx_2 = \text{const (постоянная по времени)}.$$

Следовательно, турбулентная пульсация $u(x_2)$ должна быть такова, чтобы в любой момент времени удовлетворялось соотношение

$$\int_{-b}^{+b} u(x_2)\, dx_2 = 0.$$

Тогда для любого момента времени имеем

$$u(0) \int_{-b}^{+b} u(x_2)\, dx_2 = \int_{-b}^{+b} u(0)\, u(x_2)\, dx_2 = 0.$$

Если произвести здесь осреднение по времени и ввести

$$\overline{u(0)\, u(x_2)} = u'(0)\, u'(x_2)\, g(x_2),$$

то

$$u'(0) \int_{-b}^{+b} u'(x_2)\, g(x_2)\, dx_2 = 0,$$

или

$$\int_{-b}^{+b} u'(x_2)\, g(x_2)\, dx_2 = 0.$$

Поскольку величина $u'(x_2)$ положительна, функция $g(x_2)$ при больших значениях $x_2$ должна стать отрицательной.

Аналогично в случае круглой трубы найдем, что

$$\int_0^{D/2} r u'(r)\, g(r)\, dr = 0.$$

Тэйлор [14] показал, что экспериментальные данные Симмонса подтверждают это соотношение.

## § 1.8. Эйлеровы временные корреляции

В предыдущих параграфах мы рассматривали корреляции между компонентами скорости в некоторой фиксированной точке течения и корреляции между компонентами скорости в двух точках течения; в последнем случае корреляции оказываются функциями расстояния между двумя выбранными точками. В этом параграфе мы рассмотрим корреляцию между значениями пульсирующей величины, например компоненты скорости в заданном направлении, в некоторой фиксированной точке течения в два различных момента времени $t'$ и $t'-t$ или $t'+t$. По очевидным причинам мы будем называть эту корреляцию также эйлеровой корреляцией.

Рассмотрим компоненту скорости $u_1(x_j, t)$ при постоянном значении $x_j$. Предположим, что среднее статистическое изменение однородно по времени, т. е. что течение является квазистационарным. Попытаемся выяснить свойства эйлеровой корреляции

$$\overline{u_1(t')\,u_1(t'-t)}$$

или ее коэффициента

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_1(t')\,u_1(t'-t)}}{u_1'^2}, \tag{1.57}$$

где осреднение произведено по времени $t'$.

На основании предположения об однородности можно показать точно так же, как это сделано в § 1.6, что $R_E(t)$ является симметричной функцией $t$ и что выполняется следующее соотношение:

$$\left[\frac{\partial^{n+m}R_E}{\partial t^{n+m}}\right]_{t=0} = \frac{1}{u_1'^2}\left[\overline{\frac{\partial^n u_1}{\partial t^n}\frac{\partial^m u_1}{\partial t^m}}\right]_{t=0} = 0 \tag{1.58}$$

при $(n+m)$ нечетном, и

$$\left[\frac{\partial^{2n}R_E}{\partial t^{2n}}\right]_{t=0} = \frac{1}{u_1'^2}\left[\overline{u_1\frac{\partial^{2n}u_1}{\partial t^{2n}}}\right]_{t=0} = \frac{1}{u_1'^2}(-1)^n\left[\overline{\frac{\partial^n u_1}{\partial t^n}}\right]^2_{t=0}. \tag{1.59}$$

Следовательно, форма кривой $R_E(t)$ в окрестности точки $t=0$ может быть описана при помощи производных от скорости по времени:

$$R_E(t) = 1 - \frac{t^2}{2u_1'^2}\left[\overline{\frac{\partial u_1}{\partial t}}\right]^2_{t=0} + \frac{t^4}{4!\,u_1'^2}\left[\overline{\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}}\right]^2_{t=0} - \ldots \tag{1.60}$$

Уравнение параболы, которая касается кривой $R_E$ вблизи ее вершины, имеет вид

$$R_E(t) \approx 1 - \frac{t^2}{\tau_E^2},$$

где

$$\frac{1}{\tau_E^2} = \frac{1}{2u_1'^2}\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]_{t=0}^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2}\right]_{t=0}. \tag{1.61}$$

В данном случае эйлеров временной микромасштаб является мерой наиболее быстрых изменений, которые происходят в пульсациях величины $u_1(t)$.

Подобно интегральному масштабу $\Lambda$, определенному уравнением (1.56), масштаб

$$\mathcal{J}_E = \int_0^\infty R_E(t)\,dt \tag{1.62}$$

можно рассматривать как весьма приближенную меру наибольшей протяженности связи при изменении величины $u_1(t)$ под действием турбулентных пульсаций.

Существует ли связь между величинами $R_E$ и $f$ или $g$? Если поле турбулентности по своей среднестатистической структуре однородно, то есть основания ожидать, что такая связь существует. Однако ответить на вопрос, существует ли эта связь в общем случае, очень трудно. В настоящее время по этому вопросу почти ничего не известно.

Эта связь, да и то лишь приближенная, известна только для того случая, когда однородное течение имеет постоянную осредненную скорость, например $\overline{U}_1 = \overline{U}$, в направлении оси $x_1$. В этом случае обычно считается (гипотеза Тэйлора), что

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\overline{U}\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{1.63}$$

Знак минус взят здесь потому, что положительное значение $\frac{\partial}{\partial x_1}$ в некоторой точке пространства соответствует отрицательному значению $\frac{\partial}{\partial t}$.

Более тщательный анализ вскоре покажет нам, что соотношение (1.63) выполняется приближенно, да и то лишь в том случае, когда величина $u_1$ очень мала по сравнению с $\overline{U}$. Это можно показать путем использования уравнения движения

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\overline{U} + u_i)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_k}u_1$$

или

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \overline{U}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -u_i\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_k}u_1.$$

Стало быть, гипотеза Тэйлора справедлива лишь в том случае, когда все члены в правой части уравнения очень малы по сравнению с чле-

нами в левой части. Это определенно имеет место, если $u_1/\bar{U} \ll 1$, так как пульсация давления $p$ имеет порядок величины $\rho u_1^2$.

Более строгий подход к этой проблеме был предложен Корсином [15] и Линем [16]. Линь показал, что при изотропной турбулентности и больших числах Рейнольдса справедливость гипотезы Тэйлора может быть установлена на основании соотношения

$$\frac{\overline{(du_1/dt)^2}}{\bar{U}^2\,\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}} \approx 5\frac{u_1'^2}{\bar{U}^2},$$

но что для потока с поперечным сдвигом справедливость гипотезы Тэйлора представляется менее ясной.

Физический смысл соотношения (1.63) состоит в том, что при $\bar{U} \gg u_1$ пульсации в некоторой фиксированной точке течения можно представить как результат воздействия всего турбулентного течения, проходящего через эту точку с постоянной скоростью $\bar{U}$. Осциллограмма пульсаций скорости в этой точке будет тогда почти идентична с мгновенным распределением скорости $u_1$ вдоль оси $x_1$, проходящей через точку. Таким образом, корреляция $\overline{u_1(t')\,u_1(t'-t)}$, осредненная по $t'$, должна быть идентична с корреляцией $\overline{u_1(\xi_1)\,u_1(\xi_1 - x_1)}$, осредненной по $\xi_1$; следовательно,

$$f(x_1) \equiv R_E(t), \tag{1.64}$$

где связь между $x_1$ и $t$ определяется формулой

$$|x_1 - x_1^0| = \bar{U}\,|(t - t^0)|. \tag{1.65}$$

Наконец, между эйлеровым интегральным масштабом $\mathcal{J}_E$, определенным формулой (1.62), и пространственным интегральным масштабом $\Lambda_f$, определяемым формулой

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f(x_1)\,dx_1$$

[эквивалент выражения (1.56)], существует простая связь

$$\Lambda_f = \bar{U}\,\mathcal{J}_E. \tag{1.66}$$

Как мы увидим в главе 2, соотношение (1.65) или (1.63) может служить очень полезным средством упрощения методов измерения; но при этом следует иметь в виду, что эти соотношения носят приближенный характер.

Для почти изотропного турбулентного потока, наблюдаемого на больших расстояниях вниз по потоку от турбулизирующей сетки, осредненная скорость $\bar{U}$ обычно велика по сравнению с турбулентными

пульсациями; следовательно, степень приближения в соотношении (1.65) вполне достаточна. Вырождение является относительно медленным процессом; значит, течение можно считать достаточно однородным, чтобы пользоваться этим соотношением. Но если то же самое соотношение применять к измерениям в турбулентном потоке с поперечным сдвигом при наличии относительно больших пульсаций, какие существуют, например, в свободных струях, в которых картина турбулентного течения к тому же, конечно, неоднородна, то к анализу результатов подобных измерений следует подходить с большой осторожностью. Эту осторожность действительно необходимо проявлять в отношении всех полученных выше формул, основанных на предположении об однородности течения.

Представление о справедливости гипотезы Тэйлора (1.63) можно составить по рис. 1.17, на котором изображены корреляции $f(x_1)$ и

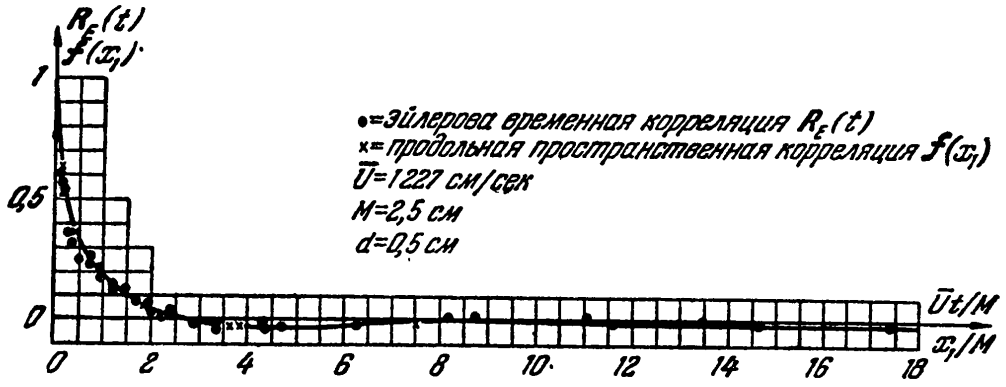



Рис. 1.17. Сравнение временной и пространственной корреляций по гипотезе Тэйлора [39].

$R_E(t)$, измеренные порознь в опытах Фаврэ и его сотрудников [39] в изотропном турбулентном потоке на расстоянии $x_1 = 40M$ вниз по течению от сетки ($\bar{U} = 1227$ *см/сек*; размер ячейки $M = 2{,}5$ *см*; диаметр стержней $d = 0{,}5$ *см*; $\mathrm{Re}_M = \dfrac{\bar{U}M}{\nu} = 21\,500$; $\dfrac{u_1'}{\bar{U}}$ от 0,01 до 0,02).

## § 1.9. Турбулентная диффузия жидких частиц; лагранжевы корреляции

Известно, что при реальной турбулентности движения жидких частиц распределены хаотично. При турбулентных движениях, как и при движении молекул в газе, которое также носит хаотичный характер, две произвольные жидкие частицы или две молекулы движутся таким образом, что статистически расстояние между ними возрастает с течением времени. Если мы рассмотрим некоторое число частиц или молекул, расположенных в определенный момент

времени рядом друг с другом, и будем наблюдать положение различных частиц или молекул в последующие моменты времени, то мы заметим постепенное распространение этих частиц в пространстве. В этом состоит основной смысл диффузии.

В кинетической теории газов соотношения для диффузии молекул выводятся на основании понятия о хаотическом движении молекул. Для краткого ознакомления с этим вопросом можно рекомендовать «Введение в кинетическую теорию газов» Джинса [17].

При изучении диффузионных явлений часто вводят коэффициент диффузии. Рассмотрим, например, плоскость $(x_1, x_3)$, перпендикулярную к оси $x_2$, и через $\Gamma$ обозначим некоторую транспортабельную субстанцию. Тогда перенос $\mathfrak{I}_\gamma$ субстанции через единицу площади нашей плоскости пропорционален градиенту величины $\Gamma$ в направлении $x_2$:

$$\mathfrak{I}_\gamma = -D_\gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}.$$

Коэффициент диффузии для субстанции $\Gamma$ определяется как коэффициент пропорциональности $D_\gamma$.

Рассмотрим теперь вторую плоскость, параллельную первой и расположенную от нее на малом расстоянии $dx_2$. Закон сохранения вещества применительно к субстанции $\Gamma$ в пространстве между этими двумя плоскостями описывается уравнением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{I}_\gamma}{\partial x_2} = D_\gamma \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_2^2}. \tag{1.67}$$

Простейшее решение этого уравнения

$$\Gamma(x_2, t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4D_\gamma t}\right) \tag{1.68}$$

соответствует случаю, в котором молекулы постепенно диффундируют от плоскости $x_2 = 0$. Уравнение (1.68) дает значение $\Gamma$ при $x_2$ по истечении промежутка времени $t$ с того момента, как молекулы начали диффундировать от плоскости $x_2 = 0$.

Если в качестве транспортабельной субстанции взять массу самих молекул, то получим

$$n(x_2, t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4Dt}\right), \tag{1.69}$$

где $D$ — коэффициент молекулярной диффузии. Здесь $n(x_2, t)$ — число молекул, достигших плоскости $x_2$ по истечении времени $t$.

Рассмотрим теперь хаотичное движение молекул, предполагая, что отрезки свободного пробега всех молекул по длине одинаковы, постоянны, а по направлению параллельны направлению оси $x_2$. Можно

показать [17], что вероятность продвижения молекулы на расстояние $x_2$ после прохождения ею $N$ длин свободного пробега составляет

$$P(x_2, N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2l^2N}\right), \tag{1.70}$$

где $l$ — длина свободного пробега молекулы. Эту вероятность можно выразить также и через время $t$, если ввести скорость молекулы $c$; тогда

$$N = \frac{ct}{l},$$

что вместе с соотношением (1.70) дает

$$P(x_2, t) = \sqrt{\frac{2l}{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2clt}\right).$$

Эта формула абсолютно одинакова с выражением (1.69). В самом деле, величина $P(x_2, t)$ идентична с $n(x_2, t)$; отсюда, как видим, получается

$$D = \frac{1}{2} cl = \frac{Nl^2}{2t}. \tag{1.71}$$

Рассмотрим, далее, случай последовательных перемещений молекул на расстояние $\Delta y_i$ в направлении оси $x_2$ через интервалы времени $\Delta t$. Будем считать, что эти перемещения велики по сравнению с $l$, неодинаковы между собой, не зависят одно от другого и носят случайный характер. По истечении $N$ интервалов времени результирующее перемещение молекулы будет

$$y_2 = \sum_1^N \Delta y_i.$$

Если предположить, что рассматриваемое поле однородно, то среднее значение перемещения по большому числу молекул будет равно нулю: $\overline{y_2} = 0$. Однако среднеквадратичное значение (или дисперсия) величины $y_2$ будет равно

$$\overline{y_2^2} = \overline{\left(\sum_1^N \Delta y_i\right)^2} = \overline{\sum_1^N \sum_1^N \Delta y_i \Delta y_j} = N\overline{\Delta y^2},$$

поскольку средние значения членов, представляющих собой произведения, обращаются в нуль ввиду независимости отдельных перемещений.

В случае хаотичного движения молекул для коэффициента диффузии мы получим формулу (1.71), в которой величина $Nl^2$ представляет собой сумму квадратов перемещений молекул между последовательными столкновениями.

Если в последнем случае вместо $Nl^2$ взять сумму квадратов $N\overline{\Delta y^2}$, то выражение для коэффициента диффузии будет иметь вид

$$D = \frac{N\overline{\Delta y^2}}{2N\Delta t} = \frac{\overline{y_2^2}}{2t}. \qquad (1.72)$$

Это соотношение, как и формула (1.71), показывает, что в процессе диффузии квадратный корень из среднеквадратичного значения $\sqrt{\overline{y_2^2}}$ пропорционален величине $\sqrt{t}$.

Следует заметить, что полученные выше результаты справедливы лишь в том случае, когда время диффузии велико по сравнению со временем, требующимся для прохождения средней длины свободного пробега или перемещения $\Delta y_i$. Кроме того, движения молекул предполагаются прерывными, и в приближенной теории, изложенной выше, считается, что молекулы при столкновениях полностью сохраняют свои свойства.

Попытаемся теперь применить подобный подход и к анализу процесса диффузии жидких частиц при турбулентном движении жидкости. При этом движения жидких частиц являются непрерывными; более того, весьма вероятно, что из-за интенсивного взаимодействия частиц между ними может происходить непрерывный обмен транспортабельной субстанцией.

Тэйлор [18], полагая движения жидких частиц непрерывными, обобщил этот анализ на случай диффузии в турбулентном потоке посредством рассмотрения пути, пройденного меченой жидкой частицей при ее движении в поле течения.

Пусть $v_2(t)$ — (турбулентная) скорость частицы в направлении оси $x_2$. Расстояние $y_2(t) - y_2(0)$, проходимое меченой частицей в этом направлении за промежуток времени $t$, определяется формулой

$$y_2(t) = y_2(0) + \int_0^t v_2(t')\,dt'. \qquad (1.73)$$

Читатель уже, по-видимому, заметил, что мы подчеркиваем различие между лагранжевой координатой частицы $y_2$ и эйлеровой координатой точки пространства $x_2$.

Если бы функция $v_2(t)$ была периодической, то среднее значение $y_2(t)$ равнялось бы $y_2(0)$. При этом периодическом движении размер и число положительных «шагов» были бы равны размеру и числу отрицательных «шагов». При турбулентном движении это не совсем так, причем это отличие больше, чем в остальных рассмотренных случаях хаотичных движений. Интервалы с положительным значением $v_2$ могут быть больше или меньше интервалов с отрицательными

значениями. В результате по истечении некоторого промежутка времени частица получит положительное или отрицательное перемещение относительно $y_2(0)$.

Рассмотрим теперь большое число частиц и будем считать, что они последовательно начинают свое движение из фиксированной точки $O(x_1, x_2, x_3)$. Через определенный промежуток времени, прошедший с начального момента движения каждой частицы, некоторые из них получат результирующее перемещение в одном направлении, а некоторые — в другом. Если структура поля является изотропной и однородной как во времени, так и в пространстве, то распространение частиц будет (сферически) симметрично относительно точки $O$.

Предположим, далее, что все течение имеет постоянную скорость в направлении оси $x_1$. Если в точке $O$ к движущемуся полю непрерывно подводится красящее вещество, то вниз по потоку от этой точки можно будет наблюдать, как окрашенная полоса жидкости расширяется с увеличением расстояния от точки $O$, будучи симметричной относительно оси $x_1$.

Эта симметрия наблюдается также и в тех условиях, когда течение неоднородно в направлении потока, но однородно в других направлениях. Однородность во времени остается при этом необходимым условием, ибо в противном случае мы не имели бы возможности производить осреднение по большому числу частиц, которые начинают свое движение в последовательные моменты времени.

Когда течение неоднородно по времени (нестационарное течение), то все еще оказывается возможным выполнить операцию осреднения по большому числу частиц, если рассматривать одновременный «старт» этих частиц из такого же множества точек поля при условии пространственной однородности течения.

Следовательно, для того чтобы осреднение по большому числу частиц было возможно, течение должно быть однородным либо во времени (если все частицы начинают свое движение из одной и той же точки), либо в пространстве (если частицы начинают свое движение в один и тот же момент времени из различных точек).

Чтобы более подробно изучить процесс диффузии при непрерывном турбулентном движении, впервые рассмотренный Тэйлором, предположим, что турбулентное течение однородно в пространстве и во времени. Наш анализ будет немного отличаться от того, который дан Тэйлором в его оригинальной работе [18]. Возьмем простейший случай диффузии только в одном направлении, скажем, вдоль оси $x_2$. Уравнение (1.73) дает перемещение относительно точки $y_2(0)$ той частицы, скорость которой по истечении промежутка времени $t$ равняется $v_2$. Для простоты выберем эту точку в качестве начала отсчета, так что $y_2(0) = 0$. Поскольку $v_2(t)$ — случайная величина, то для большого числа частиц среднее значение $\overline{y_2(t)} = 0$.

Пусть $y_2(t_0+t)$ — расстояние, пройденное меченой жидкой частицей с начального момента $t_0$ в течение интервала времени $t$:

$$y_2(t_0+t)=\int_0^t v_2(t_0+t')\,dt'.$$

Используя предположение об однородности течения, получаем выражение для дисперсии $y_2$:

$$\begin{aligned}\overline{y_2^2}(t)&=\frac{1}{T}\int_0^T y_2^2(t_0+t)\,dt_0=\\&=\frac{1}{T}\int_0^T dt_0\int_0^t dt'\int_0^t v_2(t_0+t')\,v_2(t_0+t'')\,dt''=\\&=\int_0^t dt'\int_0^t dt''\frac{1}{T}\int_0^T v_2(t_0+t')\,v_2(t_0+t'')\,dt_0=\\&=\int_0^t dt'\int_0^t \overline{v_2(t_0+t')\,v_2(t_0+t'')}\,dt''.\end{aligned}$$

Осреднение выполняется здесь по большому числу частиц, движение которых начинается в различные моменты времени $t_0$.

Область интегрирования в плоскости $(t', t'')$ представляет собой квадрат с пределами 0 и $t$. Вместо этого квадрата можно взять два одинаковых треугольника, на которые делит квадрат его диагональ, так как подынтегральное выражение симметрично относительно $t'$ и $t''$. Тогда

$$\int_0^t\int_0^t dt'\,dt''=2\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''$$

и, следовательно,

$$\overline{y_2^2}(t)=2\int_0^t dt'\int_0^{t'}\overline{v_2(t_0+t')\,v_2(t_0+t'')}\,dt''. \qquad (1.74)$$

В этом случае — в отличие от соответствующего случая хаотичного движения молекул — движения жидких частиц в моменты времени $t'$ и $t''$ не являются независимыми, но в большей или меньшей степени связаны (коррелированы) друг с другом. Поэтому введем лагранжев коэффициент корреляции

$$R_L(\tau)=\frac{\overline{v_2(t)\,v_2(t+\tau)}}{v_2'^2}. \qquad (1.75)$$

Чтобы подставить эту корреляцию в соотношение (1.74), положим

$$t'' - t' = \tau;$$

тогда (1.74) преобразуется следующим образом:

$$\overline{y_2^2}(t) = 2\int_0^t dt' \int_{-t'}^{0} \overline{v_2(t')\, v_2(t'+\tau)}\, d\tau =$$

$$= 2\int_0^t dt' \int_0^{t'} \overline{v_2(t')\, v_2(t'-\tau)}\, d\tau = 2v_2'^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} R_L(\tau)\, d\tau. \qquad (1.76)$$

Это и есть соотношение, полученное Тэйлором [18].

Если произвести интегрирование по частям, то это выражение можно записать в несколько ином виде:

$$\int_0^t dt' \int_0^{t'} R_L(\tau)\, d\tau = \left| t' \int_0^{t'} R_L(\tau)\, d\tau \right|_0^t - \int_0^t t' R_L(t')\, dt' =$$

$$= t\int_0^t R_L(\tau)\, d\tau - \int_0^t \tau R_L(\tau)\, d\tau.$$

Тогда вместо (1.76) имеем

$$\overline{y_2^2}(t) = 2v_2'^2 \int_0^t (t-\tau)\, R_L(\tau)\, d\tau. \qquad (1.77)$$

Это соотношение было впервые получено Кампе де Ферье [19].

Лагранжева корреляция $R_L(\tau)$ имеет свойства, подобные свойствам рассмотренных выше эйлеровых корреляций, а именно: $R_L(0) = 1$; $R_L(\tau)$ — симметричная относительно $\tau$ функция (вследствие однородности поля) и убывает с увеличением $\tau$; поэтому при больших значениях $\tau$ функция $R_L(\tau)$ в конечном счете обращается в нуль.

Особо рассмотрим очень малые и очень большие значения времени $t$.

При очень малых значениях $\tau$ корреляция $R_L(\tau)$ приблизительно равна единице и в любом из соотношений (1.76) и (1.77) ее можно считать постоянной величиной.

После интегрирования при условии, что $t$ мало́, а $R_L(\tau) \approx 1$, получаем

$$\overline{y_2^2}(t) \approx v_2'^2 t^2,$$

или

$$y_2'(t) \approx v_2' t. \qquad (1.78)$$

Отсюда следует, что диффузия происходит пропорционально времени.

Если, с другой стороны, обратиться к очень продолжительным периодам времени, когда $t \gg t^*$, где $t^*$ — промежуток времени, для которого $R_L(t^*) \approx 0$, то соотношение (1.77) дает

$$\int_0^t (t-\tau) R_L(\tau)\, d\tau = t \int_0^{t^*} R_L(\tau)\, d\tau - \int_0^{t^*} \tau R_L(\tau)\, d\tau.$$

При $t \gg t^*$ второй член в правой части этого уравнения очень мал по сравнению с первым членом, так что им можно пренебречь. Постоянную часть нашего интеграла обозначим через

$$\mathcal{J}_L = \int_0^{t^*} R_L(\tau)\, d\tau. \tag{1.79}$$

Величина $\mathcal{J}_L$ обычно рассматривается как мера наиболее длительного интервала времени, в течение которого частица, в среднем, испытывает перемещение в данном направлении.

Здесь также можно ввести микромасштаб времени, а именно лагранжев масштаб времени $\tau_L$, определяемый выражением

$$\frac{1}{\tau_L^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R_L}{\partial t^2}\right]_{t=0}.$$

Если воспользоваться величиной $\mathcal{J}_L$ для больших значений $t$ ($t \gg t^*$), когда $R_L(t^*) \approx 0$ или $t \gg \mathcal{J}_L$, то из соотношения (1.77) получим

$$\overline{y_2^2}(t) \approx 2v_2'^2 \mathcal{J}_L t,$$

или

$$y_2' \approx v_2' \sqrt{2\mathcal{J}_L t}. \tag{1.80}$$

В этом случае диффузия пропорциональна квадратному корню из времени.

Для этих продолжительных интервалов времени можно ввести коэффициент вихревой диффузии, определяемый формулой, сходной с (1.72):

$$\epsilon = \frac{\overline{y_2^2}(t)}{2t} = v_2'^2 \mathcal{J}_L = v_2'^2 \int_0^{t^*} R_L(\tau)\, d\tau = v_2'^2 \int_0^{\infty} R_L(\tau)\, d\tau. \tag{1.81}$$

Здесь использован тот факт, что $R_L(t) \approx 0$ при $t > t^*$.

Это соотношение может быть записано также следующим образом:

$$\epsilon = v_2' \Lambda_L, \tag{1.82}$$

где

$$\Lambda_L = v_2' \mathcal{J}_L = v_2' \int_0^\infty R_L(\tau)\, d\tau. \tag{1.83}$$

Величину $\Lambda_L$ можно интерпретировать как некоторый пространственный масштаб, при котором движение частицы происходит существенно только в одном направлении.

Поскольку величина $\Lambda_L$ играет роль меры вихревой диффузии, ее часто называют масштабом вихревой диффузии. В последнем соотношении интенсивность турбулентных пульсаций частиц $v_2'$, вследствие предположения об однородности течения, можно положить равной $u_2'$.

Здесь снова возникает вопрос о существовании связи между лагранжевыми и эйлеровыми корреляциями. В случае изотропного или даже однородного турбулентного течения можно ожидать, что между этими величинами действительно имеется определенная связь. Однако найти ее из чисто теоретических соображений пока еще не удалось. Как будет показано ниже, известные соответствующие эмпирические соотношения свидетельствуют о том, что порядок величин $\Lambda_L$ и $\Lambda_f$ приблизительно одинаков.

Выражение для величины $\epsilon$, определяемое формулой (1.81), было бы справедливо также и для эффективного коэффициента турбулентного переноса субстанции Г, если бы на пути движения частицы отсутствовал обмен этой субстанцией между частицей и окружающей жидкостью. Однако поскольку изолированная частица, рассматриваемая в турбулентном потоке, состоит из большого комплекса молекул, то обмен, по крайней мере молекулярный, всегда будет происходить. Интенсивность этого обмена будет различна в зависимости от того, что является транспортабельной субстанцией — импульс, тепло или вещество. Следует ожидать, что, чем выше интенсивность обмена, тем скорее транспортабельная субстанция частицы будет уравновешиваться с субстанцией в окружающей среде и тем меньше будет величина $\epsilon$.

Если $\alpha$ представляет собой некоторый коэффициент обмена, то можно ожидать, что для величины $(\Lambda_L)_\gamma$ существует выражение вида

$$(\Lambda_L)_\gamma = v_2' \int_0^\infty f(\alpha, \tau) R_L(\tau)\, d\tau,$$

где функция $f(\alpha, \tau)$ учитывает влияние обмена на протяжении пути частицы. Следовательно,

$$\epsilon(\alpha) = v_2'^2 \int_0^\infty f(\alpha, \tau) R_L(\tau)\, d\tau.$$

## § 1.10. Сводка корреляций

В предыдущих параграфах мы ввели различного рода корреляции. Для читателя может оказаться удобным свести их воедино.

### Эйлеровы пространственные корреляции

*Двойные корреляции между какой-либо компонентой скорости и давлением или другой скалярной величиной.* Тензор первого ранга:

$$K_{A,B} = \overline{(u_a)_A\, p_B} = (K_{i,p})_{A,B}\, e_{ai}, \quad K_{A,B} = \overline{(u_a)_A\, \gamma_B} = (K_{i,\gamma})_{A,B}\, e_{ai},$$

$$(K_{i,p})_{A,B} = \overline{(u_i)_A\, p_B}, \quad (K_{i,\gamma})_{A,B} = \overline{(u_i)_A\, \gamma_B}.$$

Коэффициент корреляции:

$$(L_{i,p})_{A,B} = \frac{(K_{i,p})_{A,B}}{(u_i')_A}.$$

(Суммирования не производится.)
Особый случай, когда $A \equiv B$:

$$K_{i,\gamma}(0) = \overline{\gamma u_i} = -\epsilon_\gamma \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_i}.$$

Мера «вихревого» переноса.

*Двойные корреляции между двумя компонентами скорости* (см. рис. 1.13). Тензор второго ранга:

$$Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = (Q_{i,j})_{A,B}\, e_{ai} e_{bj}, \quad (Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}.$$

Коэффициент корреляции:

$$(R_{i,j})_{A,B} = \frac{\overline{(u_i)_A (u_j)_B}}{(u_i')_A (u_j')_B}.$$

Особый случай, когда $A \equiv B$:

$$Q_{i,j}(0) = \overline{u_i u_j} = -(\epsilon_m)_{ik} \left( \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right).$$

Мера турбулентных напряжений, вихревая «вязкость» или коэффициент вихревого переноса импульса.

Изотропная однородная турбулентность (см. рис. 1.14):
Коэффициент продольной корреляции:

$$f(r) = \frac{\overline{(u_r)_A (u_r)_B}}{u'^2}.$$

Коэффициент поперечной корреляции:

$$g(r) = \frac{\overline{(u_n)_A (u_n)_B}}{u'^2}.$$

Интегральный масштаб:

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f(r)\,dr, \quad \Lambda_g = \int_0^\infty g(r)\,dr.$$

Микромасштаб или масштаб диссипации:

$\lambda_f$ определяется из соотношения $\frac{1}{\lambda_f^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0}$,

$\lambda_g$ определяется из соотношения $\frac{1}{\lambda_g^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right]_{r=0}$.

*Тройные корреляции между компонентами скорости.* Тензор третьего ранга:

$$(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}.$$

Коэффициент корреляции:

$$(T_{ik,\,j})_{A,\,B} = \frac{\overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}}{(u_i')_A (u_k')_A (u_j')_B}.$$

Изотропная однородная турбулентность (см. рис. 1.15):

$$k(r) = T_{rr,\,r} = \frac{\overline{(u_r)_A^2 (u_r)_B}}{u'^3}, \quad h(r) = T_{nn,\,r} = \frac{\overline{(u_n)_A^2 (u_r)_B}}{u'^3},$$

$$g(r) = T_{nr,\,n} = \frac{\overline{(u_n)_A (u_r)_A (u_n)_B}}{u'^3}.$$

Эйлерова временна́я корреляция

$R_E(t) = \frac{\overline{u(\tau)\,u(\tau - t)}}{u'^2}$ для скорости $u$ в фиксированной точке.

Стационарное течение; осреднение по времени:
Эйлеров интегральный масштаб времени:

$$\mathcal{J}_E = \int_0^\infty R_E\,dt.$$

Эйлеров микромасштаб времени:

$\tau_E$ определяется из соотношения $\frac{1}{\tau_E^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2}\right]_{t=0}$.

Если течение обладает равномерной осредненной скоростью $\overline{U}$, такой, что $\overline{U} \gg u$, то, поскольку $x = \overline{U}t$, между $\mathcal{J}_E$ и $\Lambda_f$ существует простая связь:

$$\Lambda_f = \overline{U}\mathcal{J}_E$$

и

$$f(x) \equiv R_E(t).$$

Лагранжева временна́я корреляция

$$R_L(t) = \frac{v(\tau)\, v(\tau - t)}{v'^2}$$

для компонент скорости жидкой частицы. Однородное течение. Осреднение по большому числу частиц.

Лагранжев или диффузионно-интегральный масштаб времени:

$$\mathcal{J}_L = \int_0^\infty R_L\, dt.$$

Лагранжев микромасштаб времени:

$\tau_L$ определяется из соотношения $\dfrac{1}{\tau_L^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 R_L}{\partial t^2}\right)_{t=0}$.

Лагранжев или диффузионно-интегральный масштаб длины:

$$\Lambda_L = v'\mathcal{J}_L.$$

Коэффициент вихревой диффузии для жидких частиц:

$$\epsilon = v'\Lambda_L = v'^2 \int_0^\infty R_L\, dt.$$

Аналогично для переноса субстанции Г жидкими частицами:

$$\epsilon_\gamma(\alpha) = v'^2 \int_0^\infty f(\alpha,\ t)\, R_L(t)\, dt,$$

где функция $f(\alpha,\ t)$ учитывает влияние обмена на пути частиц.

## § 1.11. Эмпирические формулы для двойных корреляций

Учитывая важность коэффициента корреляции для изучения турбулентного течения, было бы очень удобно, если бы корреляционную кривую удалось аналитически описать подходящей формулой. Известно, что при однородной турбулентности функция двойной корреляции симметрична, а соответствующая ей кривая вблизи

вершины имеет параболическую форму. Однако, за исключением этих скудных сведений, теоретические представления о точной форме других участков этой кривой в общем случае турбулентного течения крайне ограниченны. Несколько лет назад Карману [20] удалось теоретическим путем получить формулу для двух коэффициентов корреляции $f(r)$ и $g(r)$ в случае изотропного турбулентного потока при больших числах Рейнольдса. Бэтчелором [21], хотя и в незамкнутой форме, было получено решение, с помощью которого можно аналитически определить формулу кривых для функций $f(r)$ и $g(r)$ опять-таки в случае изотропного турбулентного потока, но при меньших числах Рейнольдса. Для еще меньших чисел Рейнольдса, при которых вязкость оказывает на турбулентное движение доминирующее влияние, для этих коэффициентов корреляции можно вывести весьма простую формулу. Мы вернемся к теоретическому анализу корреляций ниже, в главе 3. Эти теории, как и экспериментальные факты, показывают, что для коэффициентов корреляции не существует какой-либо универсальной формулы, а в зависимости от типа, условий и стадии турбулентного течения должны применяться различные соотношения.

Поскольку в настоящее время эти формулы известны лишь для нескольких ограниченных случаев и, более того, они в своем большинстве являются очень сложными, то пока, по-видимому, остается пользоваться эмпирическими формулами, приближенно описывающими корреляционные кривые, которые соответствуют различным типам, условиям и стадиям турбулентности.

Во многих случаях, особенно при больших числах Рейнольдса, форму таких кривых можно приближенно описать с помощью экспоненциальной функции. Применительно к экспериментальным корреляционным кривым для изотропного турбулентного потока за решетками попытки в этом направлении делались Драйденом [22] и его сотрудниками. Они обнаружили, что

$$g(x_2) = \exp\left(-\frac{x_2}{\Lambda_g}\right). \tag{1.84}$$

Такое же выражение было получено Калинске и Пяном [23] для коэффициента лагранжевой корреляции $R_L(t)$. Тэйлор в своей работе по диффузии при непрерывных движениях [18] также использовал подобную экспоненциальную функцию для лагранжевой временной корреляции. Для этого вида лагранжевой корреляции расчеты, проведенные Доубом [24] применительно к броуновскому движению, говорят в пользу предположения об экспоненциальной кривой. Доуб пришел к выводу о том, что корреляции, соответствующие этому движению, являются экспоненциальными функциями.

Однако легко заметить, что, хотя экспоненциальная функция, определяемая формулой (1.84), и удовлетворительно описывает в общих

чертах форму корреляционной кривой, выбор ее нельзя считать правильным по следующим причинам: 1) эта функция не является параболической в своей вершине; 2) эта функция существенно положительна при всех значениях своего аргумента, в то время как, по крайней мере в случае корреляции $g$, действительная кривая для больших расстояний между рассматриваемыми точками должна иметь отрицательные значения.

Однако не считаясь с приведенными выше соображениями, примем, что подобная экспоненциальная функция все же справедлива; в таком случае ею будет очень удобно пользоваться при дальнейшем теоретическом анализе. Рассмотрим, например, выражение (1.76) для диффузии жидких частиц, в которое введем функцию

$$R_L(t) = \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{T}_L}\right).$$

Эта функция удовлетворяет соотношению (1.79). Тогда имеем

$$\overline{y_2^2}(t) = 2v_2'^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} \exp\left(-\frac{\tau}{\mathcal{T}_L}\right) dt = 2v_2'^2 \mathcal{T}_L^2 \left\{\frac{t}{\mathcal{T}_L} - \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{T}_L}\right)\right]\right\}.$$

Это выражение, как и полученное раньше, ясно показывает, что для коротких интервалов времени диффузия прямо пропорциональна времени, а для продолжительных периодов — квадратному корню из времени.

Мы уже говорили о том, что экспоненциальная функция (1.84) не удовлетворяет свойствам действительной корреляционной функции, особенно в окрестности ее вершины. В поисках каких-либо других функций можно задаться вопросом: не существует ли определенного минимума требований, накладываемых действительными корреляционными функциями, которым должны удовлетворять искомые нами функции? И в самом деле, число подобных ограничений невелико. Так, например, при однородной турбулентности коэффициенты корреляции $g$ или $f$ должны удовлетворять по крайней мере следующим условиям:

$$-1 \leqslant g(x_2) \leqslant 1, \quad \lim_{x_2 \to \infty} g(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2 \to 0} g(x_2) = 1,$$

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{dg}{dx_2} = 0; \quad \lim_{x_2 \to 0} \frac{d^2g}{dx_2^2} = \text{конечная величина} = -\frac{2}{\lambda_g^2}.$$

Проверим, как выполняются эти условия в случае функции более общего вида

$$g(x_2) = \exp\left(-|cx_2|^m\right). \tag{1.85}$$

Легко показать, что все перечисленные выше требования удовлетворяются, если $m \geqslant 2$. При $m = 2$ имеем

$$\left[\frac{d^2g}{dx_2^2}\right]_{x_2=0} = -2c^2,$$

так что $c = 1/\lambda_g$. С другой стороны, согласно определению $\Lambda_g$ по формуле (1.56), величина $c$ связана с интегральным масштабом $\Lambda_g$ соотношением

$$c = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\Lambda_g} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\Lambda_g} \approx \frac{0{,}88}{\Lambda_g}.$$

Отсюда в случае $m = 2$, который соответствует гауссовой кривой ошибок, отношение $\lambda_g/\Lambda_g$ имеет постоянное значение, а именно $2/\sqrt{\pi} \approx 1{,}14$. Как будет показано ниже, в главе 3, подобная кривая Гаусса и в самом деле без всяких погрешностей применима к реальным корреляционным кривым, но лишь в конечной стадии периода вырождения изотропной турбулентности. Ее нельзя использовать для более ранних стадий вырождения, в которых, помимо всего, отношение $\lambda_g/\Lambda_g$ не всегда сохраняет постоянное значение в процессе вырождения.

Френкиль [25] применил функцию (1.85) к анализу различных корреляционных кривых, которые были получены при измерениях турбулентности, генерированной с помощью сеток в аэродинамической трубе. Хотя эта функция дает удовлетворительное решение, включая и участок в окрестности вершины корреляционной кривой, только при $m \geqslant 2$, однако Френкиль показал, что адекватная аппроксимация всей корреляционной кривой чаще достигается при $1 < m < 2$ (в большинстве случаев ближе к 1). Отсюда можно заключить, что функция (1.85) слишком проста для описания большинства действительных корреляционных кривых.

По этой причине, а также потому, что вычисления с использованием экспоненциальной функции типа (1.85) при дробных значениях $m$ очень трудоемки, Френкиль [26] оценил применимость других функций. Он пришел к выводу о том, что в общем случае наиболее близкое соответствие с корреляционными кривыми получается для функций следующего типа:

$$\varphi(x_2)\exp(-|cx_2|),$$

где

$$\varphi(x_2) = a_0 + \sum a_n \cos m_n c x_2$$

или

$$\varphi(x_2) = 1 + \sum a_n c^n |x_2|^m.$$

## § 1.12. Одномерный энергетический спектр по Тэйлору

В § 1.1 мы ссылались на возможность анализа кинетической энергии турбулентных пульсаций в части распределения ее по различным частотам, наблюдающимся при пульсациях. Возьмем, например, компоненту $u_1$ турбулентной пульсации скорости в некоторой фиксированной точке течения. Предположим, что это течение является квазистационарным, т. е. статистически однородным по времени. Тогда существует постоянное среднее значение $\overline{u_1^2}$, которое можно рассматривать как сумму составляющих по всем частотам $n$.

Пусть $E_1(n)\,dn$ представляет составляющую величины $\overline{u_1^2}$ для частот из диапазона между $n$ и $n+dn$; тогда функция распределения $E_1(n)$ должна удовлетворять условию

$$\int_0^\infty E_1(n)\,dn = \overline{u_1^2}. \tag{1.86}$$

При рассмотрении эйлеровой временной корреляции пульсации скорости $u_1$ в фиксированной точке мы нашли соотношение между микромасштабом времени $\tau_E$ и формой корреляционной кривой $R_E$ вблизи ее вершины [см. формулу (1.61)]. Время $\tau_E$ оказалось мерой наиболее быстрых изменений пульсации $u_1(t)$; на основании этого можно предположить наличие непосредственной связи между величиной $\tau_E$ и наивысшими частотами, наблюдающимися при пульсациях.

Подобная связь между формой корреляционной кривой и частотой вовсе не обязательно должна быть ограничена вершиной этой кривой и наивысшими частотами. Интегральный масштаб тоже оказался характеристикой среднего размера наибольших вихрей. Представим себе, что весь поток движется с равномерной скоростью $\overline{U}$ в направлении оси $x_1$. Тогда в некоторой неподвижной точке вихри наибольших размеров будут вызывать пульсации низкой частоты, в то время как наиболее мелкие вихри приведут к высокой частоте. Если турбулентность содержит только крупные вихри, то функция распределения $E_1(n)$ будет существенна главным образом в области низких частот; если же имеются только мелкие вихри, то $E_1(n)$ будет существенна главным образом в области высоких частот. На основании этого можно ожидать, что когда кривая $R_E$ быстро стремится к нулю, то спектр будет иметь большие значения в области высоких частот.

Связь, существующая между корреляционной и спектральной функциями, впервые была представлена в аналитическом виде Тэйлором [27]. Ниже мы дадим вывод этого соотношения, однако наш способ будет несколько отличаться от тэйлоровского.

Предположим, что пульсация скорости $u_1(t)$ может быть представлена интегралом Фурье

$$u_1(t) = 2\pi \int_0^\infty [a(n)\cos 2\pi nt + b(n)\sin 2\pi nt]\,dn, \qquad (1.87)$$

где

$$a(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\cos 2\pi nt\,dt, \quad b(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\sin 2\pi nt\,dt.$$

Из теории интегралов Фурье известно [28], что интегралы $a(n)$ и $b(n)$ существуют только в том случае, когда величина $u_1(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(t)|\,dt = \text{конечная величина}.$$

Ввиду неизменного статистического характера турбулентности, благодаря которому среднее значение $u_1^2(t)$ является постоянной величиной, удовлетворить этому условию не представляется возможным. Чтобы преодолеть это затруднение, обычно предполагают, что длительность пульсации $u_1(t)$ конечна, т. е. величина $u_1(t)$ отлична от нуля только в диапазоне между $-T$ и $+T$. Поскольку этот интервал времени $T$ может иметь любую наперед заданную величину при условии, что она остается конечной, это предположение с физической точки зрения фактически не представляет собой какого-либо ограничения.

Таким образом, для величин $a(n)$ и $b(n)$ мы используем следующие выражения:

$$a(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T} u_1(t)\cos 2\pi nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\cos 2\pi nt\,dt,$$

$$b(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T} u_1(t)\sin 2\pi nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\sin 2\pi nt\,dt,$$

поскольку при $t > T$ и $t < -T$ величина $u_1(t) = 0$.

Пользуясь теперь выражением (1.87) для $u_1(t)$, вычислим величину коэффициента корреляции

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau - t)}}{\overline{u_1^2}},$$

где мы должны взять среднее значение по времени в интервале, равном, по меньшей мере, $2T$. Но поскольку величина $\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau - t)}$

отлична от нуля только в интервале $2T - t$, то

$$(2T-t)\,\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)} = \int_{-T_1}^{+T_1} u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)\,d\tau,$$

где $T_1 > T$.

Подстановка выражения (1.87) вместо $u_1(t)$ дает

$$\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)} = \frac{1}{2T-t}\int_{-T_1}^{+T_1} u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)\,d\tau =$$

$$= \frac{4\pi^2}{2T-t}\int_{-T_1}^{+T_1} d\tau \int_0^\infty dn \int_0^\infty [a(n)\cos 2\pi n\tau + b(n)\sin 2\pi n\tau]\times$$

$$\times [a(m)\cos 2\pi m(\tau-t) + b(m)\sin 2\pi m(\tau-t)]\,dm.$$

Далее имеем

$$\int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \cos 2\pi m(\tau-t)\,d\tau = \cos 2\pi mt \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \cos 2\pi m\tau\,d\tau +$$

$$+ \sin 2\pi mt \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \sin 2\pi m\tau\,d\tau =$$

$$= \cos 2\pi mt\left[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} + \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\right].$$

Аналогичным путем получаем

$$\int_{-T_1}^{+T_1} \sin 2\pi n\tau \sin 2\pi m(\tau-t)\,d\tau =$$

$$= \cos 2\pi mt\left[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} - \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\right],$$

$$\int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \sin 2\pi m(\tau-t)\,d\tau =$$

$$= -\sin 2\pi mt\left[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} + \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\right],$$

$$\int_{-T_1}^{+T_1} \sin 2\pi n\tau \cos 2\pi m(\tau-t)\,d\tau =$$

$$= \sin 2\pi mt\left[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} - \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\right]$$

Отсюда

$$\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{2T-t}\int_0^\infty dn \int_0^\infty \Big\{ a(n)\,a(m)\cos 2\pi mt \Big[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} + \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\Big] -$$

$$- a(n)\,b(m)\sin 2\pi mt \Big[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} + \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\Big] +$$

$$+ a(m)\,b(n)\sin 2\pi mt \Big[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} - \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\Big] +$$

$$+ b(n)\,b(m)\cos 2\pi mt \Big[\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)} - \frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\Big]\Big\}\,dm.$$

Следующий шаг состоит в интегрировании по $n$:

$$\int_0^\infty a(n)\,\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)}\,dn = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi mT_1}^\infty \frac{\sin z}{z}\,a\Big(m+\frac{z}{2\pi T_1}\Big)\,dz,$$

где $z = 2\pi(n-m)T_1$.

Предположим теперь, что $T_1$ неограниченно возрастает; тогда этот интеграл приводится к хорошо известному интегралу Дирихле:

$$\lim_{T_1\to\infty}\int_0^\infty a(n)\,\frac{\sin 2\pi(n-m)T_1}{2\pi(n-m)}\,dn = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\,a(m)\,dz = \frac{1}{2}\,a(m).$$

Аналогично

$$\lim_{T_1\to\infty}\int_0^\infty a(n)\,\frac{\sin 2\pi(n+m)T_1}{2\pi(n+m)}\,dn = \lim_{T_1\to\infty}\int_{2\pi mT_1}^\infty \frac{\sin z}{z}\,a\Big(\frac{z}{2\pi T_1}-m\Big)\,dz = 0.$$

Выполняя тем же способом интегрирование остальных выражений, получаем следующее окончательное выражение для коэффициента корреляции:

$$\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)} = \frac{4\pi^2}{2T-t}\int_0^\infty \frac{a^2(m)+b^2(m)}{2}\cos 2\pi mt\,dm,$$

откуда при $t=0$ имеем

$$\overline{u_1^2} = \pi^2\int_0^\infty \frac{a^2(m)+b^2(m)}{T}\,dm = \int_0^\infty E_1(m)\,dm.$$

Нам известно, что при больших значениях $t$ корреляция $R_E(t)$ стремится к нулю, но, с другой стороны, мы можем выбрать для $T$ намного большее значение, нежели любая величина $t$, для которой $R_E(t)$ существует. Таким образом, всегда имеется возможность выбрать настолько большое значение $T$, что $t/T \ll 1$. Тогда выражение для корреляции можно записать в следующем виде:

$$\overline{u_1(\tau)\,u_1(\tau-t)} = \pi^2 \int_0^\infty \frac{a^2(m)+b^2(m)}{T} \cos 2\pi m t\, dm =$$

$$= \int_0^\infty E_1(m) \cos 2\pi m t\, dm$$

или

$$R_E(t) = \frac{1}{\overline{u_1^2}} \int_0^\infty E_1(n) \cos 2\pi n t\, dn. \tag{1.88}$$

Чтобы выразить $E_1(n)$ через $R_E(t)$, умножим обе части соотношения (1.88) на $\cos 2\pi m t$ и проинтегрируем полученные выражения по $t$ в пределах от $-T_1$ до $+T_1$. Интегрирование производится абсолютно тем же способом, что и выше. Имеем

$$\overline{u_1^2} \int_{-T_1}^{+T_1} R_E(t) \cos 2\pi m t\, dt =$$

$$= \int_{-T_1}^{+T_1} dt \int_0^\infty E_1(n) \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t\, dn =$$

$$= \int_0^\infty E_1(n)\, dn \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t\, dt =$$

$$= \int_0^\infty E_1(n) \left[ \frac{\sin 2\pi (n-m) t}{4\pi (n-m)} + \frac{\sin 2\pi (n+m) t}{4\pi (n+m)} \right]_{-T_1}^{+T_1} dn =$$

$$= \int_0^\infty E_1(n) \left[ \frac{\sin 2\pi (n-m) T_1}{2\pi (n-m)} + \frac{\sin 2\pi (n+m) T_1}{2\pi (n+m)} \right] dn =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi m T_1}^\infty \frac{\sin z}{z} E_1\left(m + \frac{z}{2\pi T_1}\right) dz + \frac{1}{2\pi} \int_{+2\pi m T_1}^\infty \frac{\sin z}{z} E_1\left(\frac{z}{2\pi T_1} - m\right) dz.$$

При $T_1 \to \infty$ получается

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}E_1(m)\,dz=\frac{1}{2}E_1(m).$$

Отсюда

$$E_1(m)=2\overline{u_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}R_E(t)\cos 2\pi mt\,dt=4\overline{u_1^2}\int_0^{\infty}R_E(t)\cos 2\pi mt\,dt. \qquad (1.89)$$

Таким образом, из соотношений (1.88) и (1.89) следует, что величины $R_E(t)$ и $E_1(m)$ представляют собой преобразования Фурье; этот факт впервые был установлен Тэйлором.

Если положить, что турбулентное течение имеет равномерную среднюю скорость $\overline{U}$ в направлении оси $x_1$ и что значение $\overline{U}$ велико по сравнению с турбулентными пульсациями скорости, а следовательно, можно пользоваться приближенной связью между временем $t$ и расстоянием $x_1$ по формуле (1.65), а также если принять во внимание идентичность $f(x_1)$ и $R_E(t)$, то из уравнений (1.88) и (1.89) получим

$$f(x_1)=\frac{1}{\overline{u_1^2}}\int_0^{\infty}E_1(n)\cos\frac{2\pi nx_1}{\overline{U}}\,dn, \qquad (1.90)$$

$$E_1(n)=\frac{4\overline{u_1^2}}{\overline{U}}\int_0^{\infty}f(x_1)\cos\frac{2\pi nx_1}{\overline{U}}\,dx_1. \qquad (1.91)$$

Из только что приведенных соотношений между $R_E(t)$ или $f(x_1)$ и $E_1(n)$ можно получить следующие интересные результаты:

1. Найдем в формулах (1.89) и (1.91) пределы при $n=0$:

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{\overline{u_1^2}}E_1(n)=4\int_0^{\infty}R_E(t)\,dt=4\mathcal{J}_E, \qquad (1.92)$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{\overline{u_1^2}}E_1(n)=\frac{4}{\overline{U}}\int_0^{\infty}f(x_1)\,dx_1=\frac{4}{\overline{U}}\Lambda_f. \qquad (1.93)$$

Эти равенства показывают, что интегральные масштабы $\mathcal{J}_E$ и $\Lambda_f$ можно найти по пересечению кривой $[E_1(n), n]$ с осью $E_1(n)$. Этот факт дает способ определения этих масштабов.

2. Согласно соотношению (1.61), с учетом (1.88) имеем

$$\frac{1}{\tau_E^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2}\right]_{t=0}=\frac{2\pi^2}{\overline{u_1^2}}\int_0^{\infty}n^2E_1(n)\,dn,$$

и аналогично

$$\frac{1}{\lambda_f^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1=0} = \frac{2\pi^2}{\overline{U^2}\,\overline{u_1^2}}\int_0^\infty n^2 E_1(n)\,dn. \qquad (1.94)$$

Эти результаты вновь указывают на то, что размер микровихрей, который характеризуется микромасштабами $\tau_E$ и $\lambda_f$, соответствует главным образом величине $E_1(n)$ для больших значений частоты $n$.

Анализ экспериментальных кривых корреляции $f$ показывает, что их общее очертание, исключая кривизну вблизи вершины кривой функции $f$, не зависит от скорости $\overline{U}$. Отсюда на основании (1.91) можно было бы сделать вывод, что величина $\overline{U}E_1(n)$ зависит только от $n/\overline{U}$. Это, однако, справедливо лишь для относительно низких значений $n$. Ибо если бы величина $\overline{U}E_1(n)$ была функцией только $n/\overline{U}$, то этим же свойством, согласно (1.94), обладал бы и микромасштаб $\lambda_f$. Но этот вывод не подтверждается опытом, который, наоборот, свидетельствует о том, что $\lambda_f$ уменьшается с возрастанием $\overline{U}$. Отсюда вытекает, что при больших значениях $n$, при которых величина $\lambda_f$ определяется в основном функцией $E_1(n)$, величина $\overline{U}E_1(n)$ непременно должна зависеть как от $n/\overline{U}$, так и от $\overline{U}$. Более тщательный анализ экспериментальных кривых $E_1(n)$ при больших значениях $n$ показывает, что это так и есть на самом деле [29].

Поскольку функции $E_1(n)$ и $f(x_1)$ оказались преобразованиями Фурье, то одна из них может быть найдена по другой при помощи интегрирования, аналитического или графического. Естественно, ее можно определить аналитически только в том случае, если известно аналитическое выражение подынтегральной функции. Но если такого теоретического соотношения не имеется, то можно попытаться аппроксимировать кривые $f(x_1)$ каким-либо эмпирическим уравнением или сделать ту же попытку в отношении кривых $E_1(n)$.

С теоретической стороны все это вполне законно; поэтому было бы весьма привлекательно иметь возможность обойтись измерением лишь одной из этих двух функций. Однако в действительности существующие методы экспериментального определения спектральных функций, как, впрочем, и корреляционных функций, все еще приводят к значительным погрешностям. Вообще говоря, измерение корреляционной функции осуществляется более точно, когда расстояние между двумя рассматриваемыми точками не слишком мало, а большая точность при измерении спектральных функций достигается в диапазоне более высоких частот. Таким образом, дальнейшее аналитическое исследование, при котором используется, например, спектральная функция, целиком полученная интегрированием экспериментальной корреляционной кривой, является довольно рискованным.

На наш взгляд, соотношение между спектральной и корреляционной функциями целесообразнее рассматривать просто как удобное средство проверки результатов экспериментального определения каждой из них.

Тем не менее интересно посмотреть, какое выражение получается для спектральной функции при аппроксимации корреляционной кривой экспонентой вида $\exp(-x_1/\Lambda_f)$.

Подстановка этого выражения для $f(x_1)$ в интеграл (1.91) дает

$$\frac{1}{\overline{u_1^2}} E_1(n) = \frac{4}{\bar{U}} \int_0^\infty \cos \frac{2\pi n x_1}{\bar{U}} \exp\left(-\frac{x_1}{\Lambda_f}\right) dx_1 = \frac{4}{\bar{U}} \frac{\Lambda_f}{1+\left(\frac{4\pi^2 n^2}{\bar{U}^2}\right)\Lambda_f^2},$$

или

$$\frac{\bar{U} E_1(n)}{4\overline{u_1^2}\Lambda_f} = \frac{1}{1+\left(\frac{4\pi^2 n^2}{\bar{U}^2}\right)\Lambda_f^2}. \tag{1.95}$$

И именно в той мере, в какой функция $\exp(-x_1/\Lambda_f)$ является удовлетворительной аппроксимацией формы многообразия кривых $f(x_1)$, уравнение (1.95) оказывается в удовлетворительном соответствии с экспериментально определенными спектральными кривыми, за исключением, конечно, того участка кривой $E_1(n)$, который принадлежит диапазону высоких значений $n$. Когда $n$ стремится к нулю, величина

$$\frac{\bar{U}_1 E_1(n)}{\overline{u_1^2}\Lambda_f} = 4$$

весьма удовлетворительно согласуется с опытными данными, полученными посредством экстраполяции того участка кривой $E_1(n)$, для которого имеются экспериментальные зависимости [29].

Представление о степени этой аппроксимации можно получить по рис. 1.18, заимствованному из работы Фавр [39]. Условия, при которых производились измерения, те же, что и для измерений, показанных на рис. 1.17. Спектральное распределение продольной компоненты турбулентных пульсаций определялось двумя путями, а именно: непосредственным измерением и при помощи вычислений по соответствующей корреляционной кривой.

Аналогично могут быть рассмотрены и компоненты $u_2(t)$ и $u_3(t)$ турбулентной пульсации скорости в некоторой фиксированной точке. Кроме того, по соответствующим эйлеровым временным корреляциям можно определить преобразования Фурье $E_2(n)$ и $E_3(n)$. Если снова воспользоваться предположением, что течение обладает в направлении оси $x_1$ скоростью $\bar{U}$ и, следовательно, $x_1 = \bar{U}t$, то эйлеровы пространственные корреляции величин $u_2(t)$ и $u_3(t)$ в направлении оси $x_1$ оказываются корреляциями $g(x_1)$, которые в случае

изотропной турбулентности одинаковы для $u_2$ и $u_3$. Следовательно, их преобразования Фурье $E_2(n)$ и $E_3(n)$ также будут одинаковы.

Далее, вместо двух точек, расположенных на оси $x_1$, рассмотрим две произвольные точки течения. Выше уже было показано, что

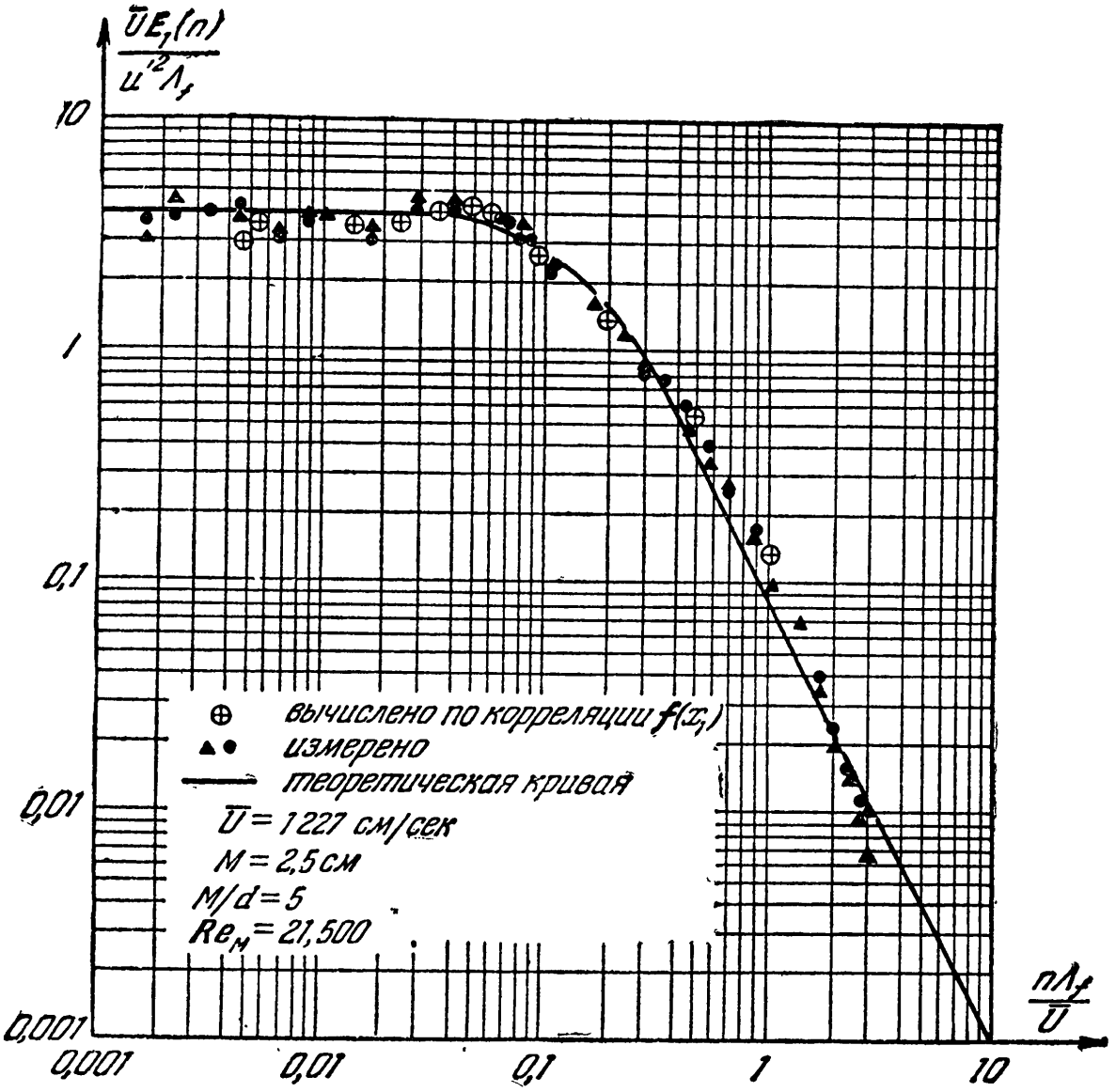



Рис. 1.18. Спектральное распределение $E_1(n)$ продольной компоненты турбулентных пульсаций скорости [39].

корреляция между пульсациями скорости в двух таких точках может быть описана корреляционным тензором $(R_{i,j})_{A,B}$. Девяти компонентам этого тензора соответствуют девять спектральных функций, которые образуют компоненты спектрального тензора. Каждая компонента этого тензора является преобразованием Фурье соответствующей компоненты корреляционного тензора.

К этому вопросу мы вновь возвратимся в главе 3. Там будет показано, что спектральная функция Тэйлора фактически предста-

вляет собой одномерное сечение трехмерной спектральной функции. Трехмерная спектральная функция — это не то же самое, что упоминавшийся выше спектральный тензор, но на самом деле тесно связана с ним.

В этой связи можно упомянуть о работе Кампе де Ферье [30], которая основана на свойствах спектрального тензора. Кампе де Ферье показал, что операции со спектральным тензором обладают в математическом отношении преимуществом над операциями с корреляционным тензором. Одно из этих преимуществ с физической точки зрения состоит в том, что интересующие нас соотношения можно вывести, не прибегая к ограничительному предположению об изотропности; при этом достаточно потребовать лишь, чтобы поле было однородным.

## § 1.13. Энергетические соотношения для турбулентного течения

Рассмотрим теперь энергетические соотношения для турбулентного потока несжимаемой жидкости. Известно, что турбулентное течение реальной жидкости по своей природе является диссипативным. Вследствие этой диссипации энергии для поддержания турбулентности требуется непрерывный подвод энергии. В то же время благодаря этому турбулентному движению происходит диффузия жидких частиц вместе с их кинетической энергией. Таким образом, в среднем стационарное состояние наблюдается только в том случае, когда между энергией, подведенной к турбулентному движению, и диффузией и диссипацией энергии турбулентности существует равновесие.

В нестационарном состоянии этого равновесия не наблюдается и любой избыток энергии должен быть равен изменению энергии турбулентности.

Поскольку динамика потока может быть, в принципе, описана с помощью уравнений движения, то наш анализ, по-видимому, можно начать с рассмотрения уравнений (1.14) в предположении о постоянстве коэффициента вязкости и об отсутствии внешних сил, т. е. именно для того случая, который мы и собираемся изучить. Тогда, умножая обе части этих уравнений на $U_i$ и суммируя по индексу $i$, после некоторых преобразований получаем уравнение энергии. Это уравнение содержит различные члены, каждый из которых имеет определенный физический смысл. Однако смысл некоторых из этих членов не всегда ясен. Поэтому мы дадим вывод уравнения энергии иным способом, который позволяет понять смысл всех членов более отчетливо.

Рассмотрим работу, производимую напряжениями $\sigma_{ij}$ на единицу массы в единицу времени при деформации движущейся жидкости. Эта работа $\mathscr{W}^{\circ}$ на единицу массы в единицу времени выражается

следующим образом:

$$\mathcal{W}^{\circ} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}U_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{21}U_1 + \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{31}U_1 + \right.$$
$$\left. + \text{то же для } U_2 \text{ и } U_3\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}U_j. \quad (1.96)$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}U_j = U_j\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij} + \sigma_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

Далее, согласно второму закону Ньютона, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij} = \rho\frac{dU_j}{dt},$$

следовательно,

$$U_j\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij} = \rho U_j\frac{dU_j}{dt} = \frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}U_jU_j,$$

что как раз и обозначает изменение кинетической энергии жидких частиц.

Второй член в выражении для $\mathcal{W}^{\circ}$, а именно $\sigma_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}$, характеризует работу деформации, которая должна быть равна диссипации на единицу массы.

Для несжимаемой жидкости из уравнения (1.8) получаем

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).$$

Отсюда

$$\mathcal{W}^{\circ} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}U_j = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}U_jU_j - \frac{P}{\rho}\delta_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_i} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}U_jU_j + \nu\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_i},$$

поскольку в случае несжимаемой жидкости $\delta_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$.

Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что первый член в правой части этого соотношения означает изменение кинетической энергии жидких частиц на единицу массы в единицу времени, а второй член — диссипацию на единицу массы.

Записанное выше выражение для $\sigma_{ij}$ тоже можно подставить прямо в соотношение (1.96):

$$\mathcal{W}^{\circ} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}U_j = \frac{\partial}{\partial x_i}U_j\left[-P\delta_{ij} + \nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right] =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{P}{\rho}U_i + \nu\frac{\partial}{\partial x_i}U_j\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).$$

Здесь первый и второй члены в правой части означают работу на единицу массы в единицу времени, произведенную соответственно гидростатическим давлением и вязкими напряжениями.

Приравнивая друг другу записанные выше выражения для $\mathcal{W}^\circ$, получаем уравнение энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}U_jU_j=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}U_jU_j+\frac{1}{2}U_k\frac{\partial}{\partial x_k}U_jU_j=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{P}{\rho}U_i+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}U_j\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

или, учитывая что для несжимаемой жидкости $U_k\frac{\partial}{\partial x_k}U_jU_j=$

$$=\frac{\partial}{\partial x_k}U_kU_jU_j,$$

$$\underset{\text{I}}{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}U_jU_j}=-\frac{\partial}{\partial x_i}U_i\underbrace{\left(\frac{P}{\rho}+\frac{U_jU_j}{2}\right)}_{\text{II}}+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}U_j\underbrace{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{III}}-$$

$$-\nu\underbrace{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{IV}}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}. \quad (1.97)$$

Согласно тому, что было сказано выше, первый член в правой части этого уравнения можно интерпретировать как работу, произведенную полным давлением $P+(\rho/2)U_jU_j$ на единицу массы в единицу времени. Но этот член можно еще рассматривать и как изменение переноса полной энергии $(P/\rho)+(1/2)U_jU_j$ на единицу массы посредством конвекции со скоростью $U_i$.

Таким образом, физический смысл различных членов уравнения энергии (1.97) состоит в следующем:

I — локальное изменение кинетической энергии на единицу массы в единицу времени;

II — изменение конвективного переноса полной энергии на единицу массы в единицу времени, или работа, произведенная полным динамическим напором на единицу массы в единицу времени;

III — работа, совершенная вязкими напряжениями на единицу массы в единицу времени;

IV — диссипация на единицу массы.

Уравнение энергии (1.97) применимо к любому типу течения несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости. Для того чтобы наглядно продемонстрировать роль турбулентного движения, воспользуемся известным способом разделения каждой величины на ее осредненную и пульсационную составляющие:

$$U_i=\overline{U}_i+u_i, \quad P=\overline{P}+p,$$

$$U_iU_i=\overline{U}_i\overline{U}_i+2\overline{U}_iu_i+u_iu_i=\overline{U}_i\overline{U}_i+2\overline{U}_iu_i+q^2.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1.97) и осреднение по времени дает

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{U}_j\bar{U}_j+\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_i\left(\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{1}{2}\bar{U}_j\bar{U}_j\right)+$$
$$+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_j\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}\right)-\nu\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)}-\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_j\overline{u_iu_j}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_i\overline{q^2}+$$
$$+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}.$$

Умножая уравнение движения (1.17) на $\bar{U}_i$ (величины $F_i$ предполагаются равными нулю), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{U}_j\bar{U}_j=-\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_i\left(\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{1}{2}\bar{U}_j\bar{U}_j\right)+\nu\bar{U}_i\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}\bar{U}_i-$$
$$-\bar{U}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_j}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_i\left(\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{1}{2}\bar{U}_j\bar{U}_j\right)+$$
$$+\nu\bar{U}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}\right)-\bar{U}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_j}.$$

Почленное вычитание этого уравнения из предыдущего дает

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_i\overline{q^2}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}-\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{U}_j\overline{u_iu_j}+$$
$$+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_iu_j}+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}},$$

или

$$\underset{\text{I}}{\frac{d}{dt}\frac{\overline{q^2}}{2}}=\underset{\text{II}}{-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}}\underset{\text{III}}{-\overline{u_iu_j}\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}}\underset{\text{IV}}{+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}-$$
$$\underset{\text{V}}{-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}}. \quad (1.98)$$

Итак, мы получили уравнение энергии турбулентности, согласно которому изменение (I) кинетической энергии турбулентности на единицу массы жидкости равняется (II) конвективной диффузии (вследствие турбулентности) полной энергии турбулентности плюс (III) энергия, перенесенная от осредненного потока под действием турбулентных напряжений сдвига, или порождение энергии турбулентности плюс (IV) работа, совершенная вязкими напряжениями сдвига при турбулентном движении на единицу массы в единицу времени, плюс (V) диссипация при турбулентном движении на единицу массы.

Два вязких члена в уравнении (1.98) часто записывают в несколько отличной форме, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}-\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{q^2}-\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}-\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\overline{q^2}-\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}},$$

поскольку для несжимаемой жидкости $\overline{u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_j}}=0$. Тогда уравнение (1.98) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\overline{q^2}}{2}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}-\overline{u_iu_j}\frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\overline{q^2}-\nu\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \quad (1.99)$$

Следует заметить, что оба вязких члена в уравнении (1.99) имеют уже не тот смысл, как соответствующие члены (IV и V) в уравнении (1.98); так, последний член в уравнении (1.99) не является диссипативным, как член V в уравнении (1.98) [38]. Этот последний член соответствует диссипации лишь в случае однородной турбулентности.

Из анализа уравнения энергии турбулентности можно сделать следующие интересные выводы.

Рассмотрим поток, скорость которого возрастает в направлении оси $x_1$, т. е. $\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}>0$. Тогда член уравнения (1.98) или (1.99), соответствующий этому осредненному движению, а именно $-\overline{u_1^2}\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}$, имеет отрицательный знак. И наоборот, если $\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}<0$, то энергия турбулентности будет иметь тенденцию к повышению. Отсюда вытекает следующее правило. В потоке с положительным градиентом скорости в направлении течения (ускоряющийся пространственный поток) наблюдается тенденция к уменьшению относительной интенсивности турбулентности; в потоке с отрицательным градиентом скорости (замедляющийся пространственный поток) наблюдается тенденция к повышению интенсивности турбулентности.

Поскольку в общем случае возрастание скорости связано с уменьшением статического давления и наоборот, то вышесказанное можно сформулировать также следующим образом. При уменьшении статического давления в направлении течения интенсивность турбулентности понижается, а увеличение статического давления способствует

повышению интенсивности турбулентности при условии, что градиенты давления не обусловлены воздействием трения.

До сих пор мы рассматривали только неограниченное течение. Возьмем теперь случай, в котором течение ограничено твердыми стенками. Тогда скорость потока на этих границах должна быть равна нулю. Отсюда следует, что если уравнение (1.98) проинтегрировать по всей области течения, то члены II и IV обратятся на границах в нуль (математически это непосредственно вытекает из теоремы Гаусса). Это значит, что влияние конвективной диффузии и работы вязких напряжений сдвига при турбулентном движении в обынтегрированном уравнении исчезает.

Пусть

$$\mathscr{E}_t = \frac{1}{2}\rho \int\int\int \overline{q^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

является полной кинетической энергией турбулентности во всей ограниченной области.

Поскольку

$$\rho \int\int\int \frac{d}{dt}\overline{q^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \rho \int\int\int \left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{q^2} + \bar{U}_i \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \rho \int\int\int \frac{\partial}{\partial t}\overline{q^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \rho \frac{d}{dt}\int\int\int \overline{q^2}\, dx_1 dx_2 dx_3 = 2\frac{d\mathscr{E}_t}{dt},$$

то уравнение (1.98) после интегрирования запишется так:

$$\frac{d\mathscr{E}_t}{dt} = -\rho \int\int\int \left(\overline{u_i u_j}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 -$$

$$-\mu \int\int\int \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \qquad (1.100)$$

Здесь второй член в правой части уравнения (диссипативный член) всегда положителен. Первый член может быть либо положительным, либо отрицательным. Если первый член является отрицательным, а его абсолютная величина больше второго члена, то производная $d\mathscr{E}_t/dt$ может стать положительной.

Уравнение (1.100) было получено Рейнольдсом и Лорентцем [31]. Оно использовалось в качестве исходного соотношения при вычислении критического значения числа Рейнольдса, ниже которого любое возмущение подавляется под действием диссипации. Рассмотрим, например, ламинарное течение вязкой жидкости и предположим, что на основное вязкое движение наложено малое возмущение. Если для этого возмущения выбрать подходящее аналитическое выражение, то оба члена в правой части уравнения (1.100) могут быть вычислены. Если это вычисление покажет, что второй член больше первого, то

возмущение затухает, и течение остается ламинарным. Если, наоборот, энергия, переданная возмущению основным движением, больше диссипации, то возмущение в результате будет нарастать, а ламинарное течение станет неустойчивым и будет наблюдаться переход его в турбулентное течение. В предельном случае $d\mathscr{E}_t/dt = 0$; следовательно, отношение двух членов в правой части уравнения (1.100) в точности равно единице. Исходя из предположения о виде возмущения, можно произвести оценку турбулентных членов уравнения (1.100). При увеличении скорости осредненного потока $\bar{U}_i$ градиент скорости $\partial \bar{U}_i/\partial x_j$ возрастает. При определенной величине этого градиента, т. е. при определенном значении $\bar{U}_i$, а значит и при определенном числе Рейнольдса, производная $d\mathscr{E}_t/dt$ обращается в нуль и число Рейнольдса достигает критического значения. Это показывает, почему переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при увеличении скорости основного движения выше некоторого критического значения. Лорентц вычислил этим способом критическое число Рейнольдса для потока в цилиндрической трубе. То же самое было сделано Орром [32], который определил это критическое число также и для течения Куэтта. Самим же Рейнольдсом были произведены расчеты для напорного течения между параллельными стенками. Все эти вычисления дают в результате критические значения числа Рейнольдса, которые оказываются существенно ниже экспериментальных значений. Так, Рейнольдсом для напорного течения между параллельными стенками (удаленными друг от друга на расстояние $h$) было получено критическое число Рейнольдса $\bar{U}_{\text{ср}}h/\nu = 516$, в то время как опыты дали величину, заключенную между 1100 и 1200. Для течения Куэтта Лорентц получил $U_0h/\nu = 288$, тогда как по измерениям Куэтта эта критическая величина составляет 1900.

Может возникнуть вопрос, правильно ли отправляться от интегральной формы уравнения энергии. Известно, например, что в реальных потоках турбулентность зарождается более или менее локально. Поэтому в качестве отправной точки при расчете локальной неустойчивости основного потока по отношению к определенным возмущениям следует использовать значительно более сложное уравнение (1.98) или (1.99).

В связи с этим можно отметить, что современные исследования устойчивости ламинарного пограничного слоя и т. п. основываются не на уравнениях энергии (1.98) или (1.99), а на уравнениях движения. Предыдущий метод, который связан с именем Рейнольдса, часто называют методом баланса энергии; второй метод обычно называется методом возмущений. Рэлей [33] также рассматривал переход к турбулентности как локальное явление; он показал, что течение является неустойчивым, если профиль скорости имеет точку перегиба.

Теории, основанные на методе возмущений и подтвержденные многими экспериментальными исследованиями, показали, что, в случае неустойчивости первоначально ламинарного течения по отношению к синусоидальным возмущениям определенного типа, амплитуда синусоидальных волн возрастает вниз по потоку. Хотя еще и не совсем ясно, каким образом изолированная волна непременно перерастает в полностью турбулентное течение, тем не менее это определенно связано с нелинейным характером уравнений движения. Нелинейные члены этих уравнений обусловливают взаимодействие между движениями с различной частотой, так что кинетическая энергия переносится от движений с более низкой частотой к движениям с более высокой частотой. Другими словами, влияние нелинейных членов в уравнениях движения сводится к увеличению амплитуды движений с более высокой частотой. Указанием на это может служить теоретическое исследование Бюргерса [34] по упрощенной модели турбулентного течения.

Последние исследования [40, 41] показывают, что перерастание этих синусоидальных волн в турбулентность происходит через образование очагов турбулентности из-за вторичной неустойчивости течения. Эти турбулентные очаги, аналогично акустическим возмущениям в сверхзвуковом потоке, растут и распространяются в направлении вниз по течению до тех пор, пока все поле течения не станет турбулентным. Кроме того, имеются указания на то, что вторичные волны образуют более или менее упорядоченную систему вихрей с осями, расположенными вдоль вогнутых искривленных линий тока, подобно пространственным вихрям, которые, как показал Гертлер [42], наблюдаются в потоке вдоль вогнутой поверхности.

Характерной особенностью перехода к турбулентности является его внезапное возникновение: относительно слабые и медленные возмущения за очень короткий промежуток времени превращаются в очаг турбулентности высокой интенсивности и широкого спектра. Этот очаг быстро растет не только в осевом, но также и в поперечном направлении, параллельно стенке, что указывает на пространственный характер турбулентности в очаге. Это происходит даже в том случае, когда исходное возмущение является плоским.

Можно упомянуть также об интересных результатах, полученных Линем [43] и Линдгреном [44]. Линь показал, что влияние вязкости вблизи стенки приводит к смещению по фазе между осевой компонентой скорости $u_1$ и нормальной компонентой скорости $u_2$ плоского возмущения, а стало быть, к положительной величине турбулентного напряжения сдвига $-\rho\overline{u_1 u_2}$. Поскольку вблизи стенки $\partial\bar{U}_1/\partial x_2 > 0$, то член III в уравнении (1.98), характеризующий порождение энергии турбулентности, имеет положительную величину. Этот результат согласуется с выводом, к которому пришел Линдгрен на основании своих опытов по явлению перехода при течении в трубе, а именно:

«турбулентность должна возникать под влиянием стенки, распространяющимся на возмущенный поток в непосредственной близости от ограничивающих стенок или в точках соприкосновения с ними».

Еще одной проблемой, которая при исследовании турбулентности нами до сих пор не рассматривалась, но тоже тесно связана с нелинейным характером уравнений движения, является механизм поддержания турбулентности. Все теории, за исключением разработанной Бюргерсом [34] и несколькими другими авторами, основаны на линеаризации уравнений движения. Подобные теории в состоянии объяснить тенденцию течения к турбулизации, но совершенно непригодны для объяснения существования турбулентности. Мунк [35] сделал попытку визуализировать механизм турбулентности, что могло бы послужить основой для теоретических работ, ведущих к этому объяснению. Он исходил из представления о том, что турбулентность является существенно пространственным движением, при котором хаотично распределенные вихревые кольца вращаются, вытягиваются или сплющиваются, накапливаются и диффундируют. Более крупные и сильные вихри образуются путем слияния, но в то же время вихревые кольца распадаются на более мелкие, интенсивность которых уменьшается затем под действием вязкости или диффузии. В этом отношении можно сослаться также на упоминавшиеся выше результаты Линя и Линдгрена, касающиеся влияния стенки не только на возбуждение, но и на самоподдержание турбулентности вблизи стенки.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

$c$ — скорость звука; скорость молекулярного движения.
$D$ — коэффициент молекулярной диффузии.
$D_{ij}$ — тензор скоростей деформации.
$d$ — диаметр цилиндра или стержня.
$E$ — спектральная функция кинетической энергии турбулентности.
$e_{ij}$ — направляющие косинусы.
$F$ — сила; движущая сила.
$f$ — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.
$g$ — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.
$h$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.
$K_l$ — корреляционный тензор первого ранга.
$k$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$L_i$ — коэффициент корреляционного тензора первого ранга.

$l$ — средняя длина свободного пробега молекул.

$M$ — размер ячейки.

$N$ — нормаль к плоскости.

$n$ — частота; число молекул.

$P$ — статическое давление; $\overline{P}$ — осредненная по времени величина; $p$ — турбулентная пульсация статического давления.

$\overline{P}_t$ — осредненная по времени величина турбулентного «давления».

$P$ — вероятность.

$Q_{ij}$ — тензор корреляции скорости второго ранга.

$q$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$q^2$ — $u_i u_i$ — удвоенная энергия турбулентности; $\overline{q^2}$ — осредненная по времени величина.

$R_{ij}$ — коэффициент тензора корреляции скорости второго ранга.

$R_E$ — коэффициент эйлеровой временно́й корреляции.

$R_L$ — коэффициент лагранжевой временно́й корреляции.

$r$ — цилиндрическая полярная координата в радиальном направлении.

$S_{i,kj}$ или $S_{ik,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.

$T$ — период времени.

$T_{i,kj}$ или $T_{ik,j}$ — коэффициент корреляционного тензора третьего ранга.

$t$ — время.

$U$ — эйлерова скорость; $\overline{U}$ — осредненная по времени величина.

$u$ — компонента турбулентных пульсаций; $u' = \sqrt{\overline{u^2}}$ — корень квадратный из среднеквадратичной величины компоненты турбулентной пульсации скорости; индексы 1, 2, 3, $i$, $j$, $k$ относятся к декартовой системе координат, $n$ — к нормальной компоненте, $r$, $\varphi$, $z$ — к цилиндрической полярной системе координат.

$v$ — лагранжева турбулентная пульсация скорости; $v' = \sqrt{\overline{v^2}}$.

$x_i$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

$y_i$, $y_1$, $y_2$, $y_3$ — лагранжевы координаты в декартовой системе.

$z$ — цилиндрическая полярная координата в осевом направлении.

$\alpha$ — коэффициент обмена.

$\partial$ — оператор частной производной.

$\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

$\epsilon_{ijk}$ — антисимметричный единичный тензор.

$\epsilon$ — коэффициент вихревой диффузии; $\epsilon_m$ — то же для импульса; $\epsilon_\gamma$ — то же для скалярной субстанции.

$\mathscr{E}_t$ — полная кинетическая энергия турбулентности в конечном объеме.

$\varphi$ — цилиндрическая полярная координата в угловом направлении.

$\Gamma$ — скалярная субстанция; $\overline{\Gamma}$ — осредненная по времени величина.

$\gamma$ — турбулентная пульсация скалярной субстанции.

$\mathscr{J}_E$ — эйлеров интегральный масштаб времени.

$\mathscr{J}_L$ — лагранжев интегральный масштаб времени.

$\mathfrak{S}$ — поток через единицу площади.

$\varkappa$ — $c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей.

$\mathfrak{k}$ — коэффициент молекулярного переноса.

$\Lambda$ — пространственный интегральный масштаб; $\Lambda_f$ — продольный интегральный масштаб; $\Lambda_g$ — поперечный интегральный масштаб.

$\Lambda_L$ — лагранжев интегральный масштаб длины.

$\lambda$ — пространственный микромасштаб.

$\mu$ — динамический коэффициент вязкости.

$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

$\nabla^2$ — оператор Лапласа $\partial^2/\partial x_i\,\partial x_i$.

$\Omega_k$ — завихренность.

$\pi$ — 3,14159...

$\rho$ — плотность; $\overline{\rho}$ — осредненная по времени величина; $\tilde{\rho}$ — турбулентная пульсация.

$\sigma_{ij}$ — тензор напряжений.

$\tau$ — время.

$\tau_E$ — эйлеров микромасштаб времени.

$\tau_L$ — лагранжев микромасштаб времени.

$\Theta$ — дилатация.

$\mathscr{W}$ — работа на единицу массы в единицу времени.

$\Xi_i$, $\Xi_1$, $\Xi_2$, $\Xi_3$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

$\xi_i$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

ГЛАВА 2

# ПРИНЦИПЫ МЕТОДОВ И ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

## § 2.1. Введение

При экспериментальных исследованиях течения жидкости было разработано и использовалось большое количество методов, приборов и аппаратуры; поэтому среди них в настоящее время имеется широкий выбор, причем для измерений какого-либо специального типа одни подходят больше, чем другие. Большинство из этих методов и приборов предназначено для измерения скорости в потоках, которые либо являются, либо считаются нетурбулентными; фактически лишь некоторые из них пригодны для надежных измерений в турбулентных потоках или, в более узком смысле, для измерений самой турбулентности.

Основные затруднения при измерении турбулентности вызываются тем, что турбулентность представляет собой хаотичный, пульсирующий поток и носит трехмерный характер. Более того, высокая частота пульсаций, представляющих для нас интерес в турбулентных потоках, создает большие трудности при выборе измерительного прибора в смысле всестороннего удовлетворения основного требования, которое предъявляется к подобным приборам, а именно, чтобы регистрация величины, подлежащей измерению, была свободна, насколько это возможно, от искажения.

При измерении турбулентных потоков следует проводить различие между измерениями осредненного потока и измерениями собственно турбулентности. Проблемы, связанные с этими двумя типами измерений, до некоторой степени взаимосвязаны, однако требования, которым должны удовлетворять соответствующие методы и приборы, являются различными. Например, результаты измерения осредненной скорости в данной точке в большей или меньшей степени зависят от турбулентности потока и при этом необходимо знать поправку, которую следует внести в показания измерительного прибора. Однако при измерении собственно турбулентности нельзя допустить какого-либо влияния осредненной скорости, которое наверняка будет

служить источником ошибок в зарегистрированных турбулентных пульсациях скорости.

В этой главе мы рассмотрим прежде всего принципы измерения собственно турбулентности, а позднее методы измерения осредненных величин. Может показаться странным, почему не выбран обратный порядок изложения, поскольку это представляется более логичным. Ответ на этот вопрос состоит в том, что проблемы, связанные с измерением осредненного потока, будут более понятными, если мы хорошо познакомимся с проблемами, встречающимися при измерении турбулентности. Кроме того, на большинство из современных методов измерения осредненных величин влияет турбулентность; поэтому в экспериментальные данные приходится вносить поправки. Эти поправки могут быть сделаны лишь в том случае, если параметры турбулентности известны; значит, в дополнение к этим осредненным параметрам необходимо измерять величины, характеризующие турбулентность.

Различные методы, аппаратуру и приборы можно, вообще говоря, разделить на две группы.

В первой группе методов используются трассирующие частицы или какой-либо другой индикатор, который вводится в жидкость с тем, чтобы сделать картину течения поддающейся либо визуальному наблюдению (фотографическая регистрация), либо регистрации с помощью чувствительного прибора, расположенного вне поля течения.

Во второй группе методов чувствительный элемент вводится непосредственно в движущуюся жидкость, а характеристики турбулентности определяются по изменениям механических, физических или химических свойств этого элемента.

Когда для измерения величин, характеризующих турбулентность, применяются методы первой группы, то мы сразу же сталкиваемся с трудностями, связанными с очень быстрыми изменениями во времени и пространстве, что приводит к необходимости практически мгновенной регистрации, чаще всего в течение очень коротких интервалов времени. Более того, пространственный характер турбулентных движений отнюдь не упрощает интерпретацию этих показаний, а, наоборот, усложняет ее.

Что касается второй группы, то для того, чтобы измерение турбулентности было надежным, чувствительный элемент и остальная часть измерительной аппаратуры должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Чувствительный элемент, введенный в движущееся поле, должен быть настолько мал, чтобы вызываемое им возмущение картины течения было минимально допустимым.

2. Мгновенное распределение скорости в области, занятой этим элементом, должно быть равномерным. Это означает, что чувствительный элемент по своим размерам должен быть меньше микромасштаба

турбулентности. Если измерения ограничены потоками малой или умеренной скорости, то размеры чувствительного элемента не должны превышать, скажем, 1 *мм*.

3. Прибор должен обладать настолько малой инерционностью, чтобы его реакция даже на наиболее быстрые пульсации была практически мгновенной. При не слишком больших скоростях потока можно ожидать пульсаций с частотой вплоть до 5000 $сек^{-1}$.

4. Прибор должен быть достаточно чувствительным, чтобы регистрировать малые различия в пульсациях; эти различия чаще всего составляют всего лишь несколько процентов от среднего значения.

5. Прибор должен быть стабильным, чтобы в течение по меньшей мере одного испытания не происходило заметных изменений параметров его тарировочной кривой.

6. Прибор должен быть достаточно прочным и достаточно жестким, чтобы не происходило вибраций или движений под действием турбулентного потока.

В соответствии с этими требованиями обычная трубка полного напора, или трубка Пито, которая столь успешно применяется при измерениях в нетурбулентных потоках, оказывается полностью непригодной для измерения турбулентности (за исключением, по всей вероятности, турбулентности очень большого масштаба и очень низкой частоты, которая могла бы иметься, например, в атмосфере) главным образом вследствие чрезвычайно высокой инерционности; тем не менее при измерениях часто пользуются тонкой трубкой, соединенной с прибором-преобразователем, чувствительным к давлению.

Имеется всего лишь один прибор, который по своей разработке и применению для измерений в турбулентных потоках намного превзошел другие приборы, в том числе и современные, это — термоанемометр. Причину его популярности при измерениях турбулентности легко понять, если учесть, что это — единственный прибор, который вполне удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям, хотя, конечно, и имеет свои ограничения.

Поскольку термоанемометр с нагретой нитью вплоть до наших дней является наиболее важным прибором для измерения турбулентности, то читатель поймет, почему непропорционально большая часть этой главы посвящена описанию (все же довольно ограниченному) именно этого прибора и связанных с ним методов измерения различных характеристик турбулентности, таких, как интенсивность, корреляция, интегральный масштаб, микромасштаб и т. д. В связи с тем, что основная цель этой главы — ознакомить читателя, хотя бы до некоторой степени, с различными методами измерения и присущими им особенностями и, таким образом, дать ему возможность критически рассматривать и интерпретировать эмпирические данные, мы ограничимся рассмотрением только принципиальных вопросов, не вникая в технические подробности конструкции приборов. Читатель не

должен надеяться получить полное описание измерительной аппаратуры, которое он может найти в специальных учебниках по этому предмету. Так, мы не будем рассматривать ни детали конструкции собственно термоанемометра, ни его электронного оборудования, ибо это увело бы нас далеко от цели нашей книги.

## § 2.2. Термоанемометр

Чувствительный элемент термоанемометра представляет собой очень тонкую короткую металлическую нить, которая нагревается электрическим током. Нить охлаждается протекающей жидкостью, что вызывает падение ее температуры и, следовательно, уменьшение электрического сопротивления нити. Для измерения турбулентности в газах используются нити диаметром от 2 до 10 *мк*. Материалами, из которых изготовляются нити, обычно являются платина, сплав платины с иридием и вольфрам.

Полное количество переносимого тепла зависит от следующих факторов:

1) скорости потока,
2) разницы температур нити и жидкости,
3) физических свойств жидкости,
4) размеров и физических свойств нити.

Обычно факторы (2) и (4) являются известными. Если фактор (3) известен или сохраняется постоянным, то можно измерить величину (1), или если (1) известен или постоянен, то можно измерить (3).

Нить охлаждается благодаря теплопроводности, свободной и вынужденной конвекции и излучению. Вообще говоря, влиянием излучения обычно пренебрегают; влиянием свободной конвекции также можно пренебречь.

Поскольку термоанемометр используется в большинстве случаев для измерений в воздушных потоках, мы ограничимся здесь применением его именно в этих условиях. В § 2.7 будет рассмотрено использование термоанемометра для измерения турбулентности в капельных жидкостях.

Если пренебречь пока каким-либо влиянием сжимаемости, то теплообмен цилиндра с обтекающим его газом можно описать при помощи безразмерных критериев Нуссельта (Nu), Прандтля (Pr), Грасгофа (Gr) и Рейнольдса (Re):

$$\mathrm{Nu}=\frac{\alpha d}{\kappa_g},\quad \mathrm{Pr}=\frac{c_p\mu_g}{\kappa_g},\quad \mathrm{Gr}=\frac{g\rho_g^2 d^3\beta\Delta\theta}{\mu_g^2},\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho_g U d}{\mu_g},$$

где $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи, $\kappa_g$ — коэффициент теплопроводности газа при температуре $\theta_g$, $\mu_g$ — абсолютный коэффициент вязкости газа при температуре $\theta_g$, $c_p$ — удельная теплоемкость газа при постоянном

давлении, $\beta$ — коэффициент объемного расширения газа, $\rho_g$ — плотность газа при температуре $\Theta_g$, $g$ — ускорение земного тяготения, $\Delta\Theta$ — разность температур цилиндра и газа, $U$ — скорость газа, $d$ — диаметр цилиндра.

Для случая, когда влиянием свободной конвекции можно пренебречь, многими исследователями были собраны данные о теплообмене цилиндра с газом или жидкостью, движущимися перпендикулярно к оси цилиндра. Наиболее важные результаты приводятся в книге Мак-Адамса [1]. Крамерсом [2] было предложено следующее эмпирическое соотношение, которое дает весьма удовлетворительные результаты для многих газов и жидкостей:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}42\mathrm{Pr}^{0,2} + 0{,}57\mathrm{Pr}^{0,33}\mathrm{Re}^{0,50}. \tag{2.1}$$

Для воздуха и двухатомных газов справедливость этого соотношения доказана в диапазоне

$$0{,}01 < \mathrm{Re} < 10\,000.$$

Содержащиеся в безразмерных критериях величины, характеризующие свойства газа, отнесены к «пленочной температуре»

$$\Theta_f = \frac{\Theta_w + \Theta_g}{2} = \Theta_g + \frac{\Delta\Theta}{2}, \tag{2.2}$$

где $\Theta_g$ — температура газа, а $\Theta_w$ — температура нити.

Для воздуха при $\Delta\Theta = 100^\circ$ C имеем $(\mu/\rho)_f \approx 0{,}20$ *см*$^2$/*сек*; поэтому величина $Ud$ должна находиться в диапазоне

$$0{,}002 < Ud < 2000 \ \textit{см}^2/\textit{сек}.$$

При измерении турбулентности обычно применяются нити с диаметрами от 2 до 7 *мк*. Выбрав в качестве средней величины диаметр нити в 5 *мк*, получим интервал скоростей, в котором можно воспользоваться соотношением (2.1):

$$4 < U < 4 \cdot 10^6 \ \textit{см/сек}.$$

Эти пределы охватывают все случаи практического применения термоанемометра.

Может возникнуть вопрос, вправе ли мы игнорировать влияние свободной конвекции и излучения на теплообмен. Опыты показывают, что влияние свободной конвекции зависит главным образом от величины комплекса $\mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr}$. Согласно измерениям Ван дер Хегге Цийнена [35] в диапазоне $\mathrm{Re} > 0{,}5$, этим эффектом можно пренебречь, если

$$\mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr} = \frac{g c_p \rho_f^2 \beta_f d^3 \Delta\Theta}{\mu_f \kappa_f} < 10^{-4}.$$

В случае воздуха при диаметре нити 5 *мк* величина $\mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr}$ имеет порядок $10^{-6}$, т. е. лежит намного ниже указанного предельного значения.

Влияние излучения на теплообмен с окружающим воздухом в обычных условиях, когда температура нити не превышает 300° С, оказывается пренебрежимо малым.

Количество тепла, переносимого в единицу времени от нити длиной $l$ с равномерно распределенной температурой к окружающему газу, равно

$$\alpha \pi \, dl \, (\Theta_w - \Theta_g)$$

или, если заменить величину $\alpha$ по соотношению (2.1),

$$\pi \kappa_f l \, (\Theta_w - \Theta_g) \left[0{,}42 \, (\mathrm{Pr})_f^{0{,}20} + 0{,}57 \, (\mathrm{Pr})_f^{0{,}33} \, (\mathrm{Re})_f^{0{,}50}\right].$$

Индекс $f$ соответствует значению, взятому при пленочной температуре.

При условии теплового равновесия потери тепла в единицу времени должны равняться количеству тепла, выделяемого в единицу времени электрическим током, проходящим через нить; иначе говоря, их величина составляет $I^2 R_w$, где $I$ — сила электрического тока, а $R_w$ — полное электрическое сопротивление нити.

Таким образом, для теплового равновесия нити требуется, чтобы

$$I^2 R_w = e \pi \kappa_f l \, (\Theta_w - \Theta_g) \left[0{,}42 \, (\mathrm{Pr})_f^{0{,}20} + 0{,}57 \, (\mathrm{Pr})_f^{0{,}33} \, (\mathrm{Re})_f^{0{,}50}\right]. \quad (2.3)$$

Здесь $e$ — коэффициент преобразования. Обычно левая часть этого уравнения выражается в *дж/сек*, а правая часть — в *кал/сек*; в этом случае $e = 4{,}2$. Величины, которые характеризуют свойства газа и содержатся в правой части этого уравнения, зависят от $\Theta_f$, т. е. от $\Theta_g$ и $(\Theta_w - \Theta_g)$. Они обычно порождают эффекты второго порядка, к которым мы вернемся несколько позже.

Влияние температурной зависимости электрического сопротивления нити имеет первый порядок, именно на этом эффекте основано применение нагретой нити как анемометра. Указанная температурная зависимость может быть выражена следующей формулой:

$$R_w = R_0 \left[1 + b \, (\Theta_w - \Theta_0) + b_1 \, (\Theta_w - \Theta_0)^2 + \ldots\right], \quad (2.4)$$

где $R_0$ — сопротивление при характерной температуре $\Theta_0$, например при 273° К; $b$, $b_1$ — температурные коэффициенты удельного электрического сопротивления нити.

При нормальных условиях работы термоанемометра квадратичный член в этой формуле можно опустить, так как величина $b_1$ намного меньше $b$. Например, для платины

$$b = 3{,}5 \cdot 10^{-3} (^\circ\mathrm{C})^{-1}, \quad b_1 = -5{,}5 \cdot 10^{-7} (^\circ\mathrm{C})^{-2},$$

для вольфрама

$$b = 5{,}2 \cdot 10^{-3}(°C)^{-1}, \quad b_1 = 7{,}0 \cdot 10^{-7}(°C)^{-2}.$$

Следовательно, влияние квадратичного члена в уравнении (2.4) зависит от температуры и свойств материала нити. К рассмотрению этого вопроса мы еще вернемся.

Опуская квадратичный член в (2.4), легко выразить разность температур $(\Theta_w - \Theta_g)$ в уравнении (2.3) через величину $(R_w - R_g)$, где $R_g$ — электрическое сопротивление нити при температуре газа $\Theta_g$; при этом получим

$$\Theta_w - \Theta_g = \frac{R_w - R_g}{bR_0}. \tag{2.5}$$

Тогда соотношение (2.3) можно записать следующим образом:

$$I^2R_w = \frac{e\pi K_f l}{b}\frac{R_w - R_g}{R_0}\left[0{,}42\,(\mathrm{Pr})_f^{0,20} + 0{,}57\,(\mathrm{Pr})_f^{0,33}(\mathrm{Re})_f^{0,50}\right]. \tag{2.6}$$

Применительно к термоанемометрическим измерениям удобно и общепринято записывать это соотношение в форме

$$\frac{I^2R_w}{R_w - R_g} = A + B\sqrt{U}, \tag{2.7}$$

где

$$A = 0{,}42\,\frac{e\pi K_f l}{bR_0}(\mathrm{Pr})_f^{0,20}, \tag{2.8}$$

$$B = 0{,}57\,\frac{e\pi K_f l}{bR_0}(\mathrm{Pr})_f^{0,33}\left(\frac{\rho_f d}{\mu_f}\right)^{0,50}. \tag{2.9}$$

В теории термоанемометрических измерений для описания процесса охлаждения нити потоком газа вначале пользовались не формулой (2.3), основанной на эмпирической зависимости Крамера (2.1), а соотношением, теоретически выведенным Кингом [3] в предположении о потенциальном обтекании нити и о том, что перенос тепла от нити не вызывает изменения условий ее обтекания:

$$I^2R_w = eK_g l\,(\Theta_w - \Theta_g)\left(1 + \sqrt{2\pi\frac{\rho_g c_p\,dU}{K_g}}\right), \tag{2.10}$$

справедливым при

$$\frac{\rho_g c_p\,dU}{K_g} > 0{,}08.$$

Отсюда для воздуха при комнатной температуре имеем $Ud > 0{,}015\ см^2/сек$. Для практических приложений этот предел достаточно низок. Сравнение формул (2.10) и (2.3) показывает, что единственно общее между ними — это зависимость от квадратного корня из величины $dU$; при этом выражения для коэффициентов $A$ и $B$ существенно различны.

В практике термоанемометрических измерений коэффициенты $A$ и $B$ не вычисляются ни из соотношений (2.8) и (2.9), ни из соотношений, вытекающих из формулы Кинга (2.10), а определяются экспериментально. Однако «теоретические» формулы для $A$ и $B$ все же используются для оценки влияния свойств газа и нити на их значения. Вполне очевидно, что для этой цели желательно пользоваться наиболее надежными формулами для $A$ и $B$. Поэтому здесь рекомендуются выражения (2.8) и (2.9), которые и будут использоваться нами в дальнейшем.

Экспериментальное определение коэффициентов $A$ и $B$ довольно просто. При постоянной температуре, т. е. при постоянном электрическом сопротивлении нити, связь между $I^2$ и $\sqrt{U}$, согласно (2.7), должна быть линейной. Эта линейная зависимость обычно вполне удовлетворительно подтверждается опытом. На рис. 2.1 показано, как выглядит подобная эмпирическая кривая. Из пояснений, приведенных на рисунке, видно, как можно вычислить значения $A$ и $B$.

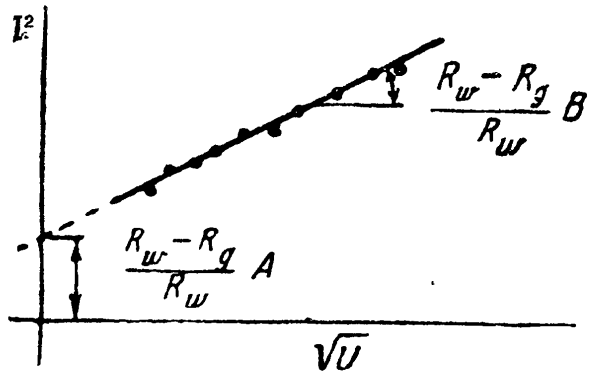



Рис. 2.1. Линейная связь между $I^2$ и $\sqrt{U}$ для нити термоанемометра.

Следует заметить, что эта тарировочная кривая получена для невозмущенного потока газа, интенсивность турбулентности в котором, насколько это возможно, низка. Может возникнуть вопрос, являются ли определенные таким способом значения $A$ и $B$ одинаковыми с теми значениями, которые будут наблюдаться в турбулентном потоке с такой же средней скоростью $U$. Какое-либо различие между указанными значениями следует отнести за счет нелинейных эффектов, которые связаны с зависимостью величин, входящих в $A$ и $B$, от температуры. Однако более подробный анализ показывает, что при нормальных рабочих условиях эти эффекты являются слабыми, и поэтому при измерении турбулентности с уверенностью можно пользоваться значениями $A$ и $B$, полученными по «статической» тарировочной кривой.

Для измерения турбулентных пульсаций скорости применяются два различных метода.

В первом методе электрический ток $I$ поддерживается постоянным; во втором методе постоянными остаются температура, а следовательно, и сопротивление. В первом случае температура, а значит, и электрическое сопротивление изменяются в зависимости от пульсационной скорости; во втором случае пульсирующей величиной является электрический ток. Нагретая нить включается в цепь моста Уитстона, как схематически изображено на рис. 2.2, где показана

также и основная электронная аппаратура. Очевидно, что эта аппаратура для каждого из двух методов существенно различна.

Со времени первых попыток применения термоанемометра для измерений турбулентности метод постоянного тока получил широкое распространение и стал довольно несложным инструментом исследования. Как будет показано ниже, метод постоянной температуры

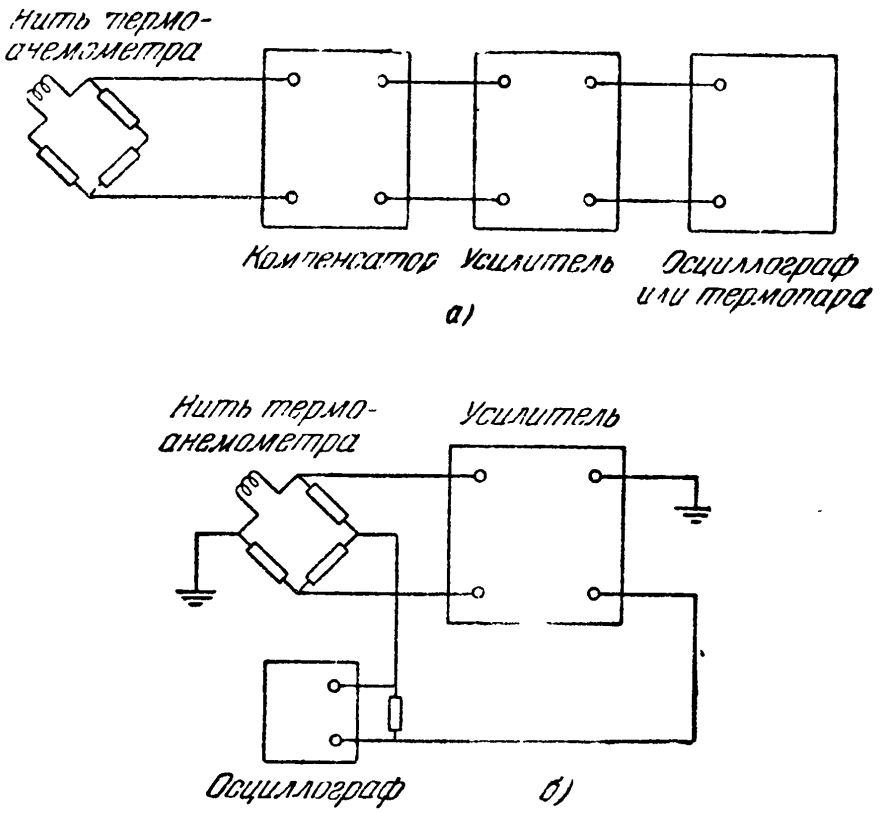



Рис. 2.2. Схемы блоков для метода постоянного тока (*а*) и метода постоянной температуры (*б*).

имеет по сравнению с методом постоянного тока принципиальные преимущества в отношении точности измерений. Однако присущая ему нестабильность системы обратной связи, необходимой для поддержания сопротивления и температуры нити постоянными, долгое время считалась почти непреодолимым препятствием. И лишь в последние годы, благодаря существенному развитию электроники, оказалось возможным создать стабильно работающие системы обратной связи, которые, однако, пока еще не достигли уровня вполне надежных и несложных в работе электронных схем, используемых в методе постоянного тока. Фактически большинство имеющейся сейчас аппаратуры работает пока по методу постоянного тока.

Исходя из этого, мы рассмотрим сначала метод постоянного тока, причем значительно подробнее, нежели метод постоянной температуры.

## § 2.3. Метод постоянного тока

Чтобы пользоваться нагретой нитью для измерения турбулентности, надо знать характеристику нагретой нити, помещенной в пульсирующий поток воздуха. Для этой цели в качестве исходного соотношения воспользуемся уравнением (2.7) и введем следующие обозначения:

$$U = \bar{U} + u, \quad R_w = \bar{R}_w + r_w.$$

Если относительную интенсивность турбулентности считать низкой, т. е.

$$\frac{u}{\bar{U}} \ll 1,$$

то можно положить также, что

$$\frac{r_w}{\bar{R}_w - R_g} \ll 1.$$

Тогда соотношение (2.7) может быть приближенно представлено формулой

$$\frac{I^2\bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g}\left(1 - \frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g}\frac{r_w}{\bar{R}_w}\right) \approx A + B\sqrt{\bar{U}}\left(1 + \frac{u}{2\bar{U}}\right)$$

или, поскольку

$$\frac{I^2\bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} = A + B\sqrt{\bar{U}},$$

формулой

$$-\frac{I^2 R_g r_w}{(\bar{R}_w - R_g)^2} \approx B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{2\bar{U}}.$$

Отсюда получим изменение напряжения на нити, соответствующее турбулентной пульсации скорости $u$:

$$e = Ir_w = -\frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2IR_g} B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{\bar{U}}. \tag{2.11}$$

Если ввести чувствительность нити $s$ по формуле

$$\sqrt{\overline{e^2}} = s\sqrt{\overline{u^2}}, \tag{2.12}$$

то $s$ запишется как

$$s = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2IR_g}\frac{B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{U}} \tag{2.13}$$

и

$$e = -su.$$

Следовательно, если ограничиться низкой относительной интенсивностью турбулентности, то примененный выше способ линеаризации дает простую связь между напряжением $e$ и турбулентной пульсацией скорости $u$. Поскольку пульсации электрического сопротивления и температуры нити остаются малыми по сравнению с их осредненными значениями, то величину $A$, в которую входят коэффициенты теплопроводности и вязкости воздуха, и температурный коэффициент удельного электрического сопротивления можно считать практически постоянными.

Поддерживать электрический ток $I$ постоянным независимо от изменения электрического сопротивления можно различными способами. Самым простым и наиболее часто применяемым способом является использование последовательно соединенных больших сопротивлений.

Соотношение (2.11) между пульсациями напряжения и скорости справедливо для нити, распределения скорости и температуры вдоль которой равномерны, а влияние инерции отсутствует. Однако на практике на характеристику нити оказывают еще влияние: 1) конечная тепловая инерция нити, 2) охлаждающее воздействие крепления нити и 3) неравномерное распределение скорости вдоль нити.

Рассмотрим каждый из этих факторов в отдельности.

*Влияние тепловой инерции.* Уравнение (2.7) основано на предположении об идеальном равновесии между теплом, выделяющимся при прохождении электрического тока, и теплом, переносимым к движущемуся газу. Если пульсации газового потока являются очень быстрыми, то нить должна нагреваться и охлаждаться с одинаковой частотой. Это возможно только в том случае, если тепловая инерция нити бесконечно мала. Однако в действительности тепловая инерция имеет конечную величину, и благодаря этому между быстрыми пульсациями скорости газа и соответствующими пульсациями температуры нити наблюдается некоторый период запаздывания.

Если температура вдоль нити распределена равномерно, то тепловое равновесие нити в произвольный момент времени описывается следующим уравнением:

$$I^2R_w = (R_w - R_g)\left(A + B\sqrt{U}\right) + e\rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2 l \frac{d\Theta_w}{dt} = .$$

$$= (R_w - R_g)\left(A + B\sqrt{U}\right) + eC_w \frac{d\Theta_w}{dt}, \quad (2.14)$$

где $\rho_w$ — плотность материала нити, $c_w$ — удельная теплоемкость материала нити на единицу массы; $C_w$ — полная теплоемкость нити.

Чтобы проанализировать влияние турбулентности, предположим, что

$$U = \bar{U} + u, \quad R_w = \bar{R}_w + r_w, \quad \Theta_w = \bar{\Theta}_w + \theta_w.$$

Полагая относительную интенсивность турбулентности малой: $u/\bar{U} \ll 1$ и, следовательно, $r_w/\bar{R}_w \ll 1$, получаем соотношение между $r_w$, $\theta_w$ и $u$:

$$I^2 r_w = \left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right) r_w + (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}} + eC_w \frac{d\theta_w}{dt}.$$

Если пренебречь квадратичным членом, то величину $\theta_w$ можно выразить через $r_w$ при помощи соотношения (2.5):

$$r_w = R_0 b \theta_w.$$

После этого получим

$$I^2 r_w = \left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right) r_w + (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}} + \frac{eC_w}{bR_0} \frac{dr_w}{dt},$$

или

$$\frac{dr_w}{dt} + \frac{1}{M} r_w = \varphi(t), \tag{2.15}$$

где для краткости введены обозначения:

$$\varphi(t) = -\frac{bR_0 (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}}}{eC_w} \frac{u}{2\bar{U}}, \tag{2.16}$$

$$M = \frac{eC_w}{bR_0 \left[-I^2 + \left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right)\right]}, \tag{2.17}$$

или поскольку

$$A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2 = \frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g} I^2,$$

то

$$M = \frac{eC_w (\bar{R}_w - R_g)}{bI^2 R_0 R_g}. \tag{2.18}$$

Решение дифференциального уравнения (2.15) имеет вид

$$r_w = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau) \exp\left[-\left(\frac{1}{M}\right)(t - \tau)\right] d\tau. \tag{2.19}$$

Предположим, что турбулентная пульсация скорости $u$ является простой периодической функцией при угловой частоте $\omega$, а именно:

$$u(t) = u^* \exp\left(\sqrt{i^*\omega t}\right), \quad \text{где} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Тогда

$$\varphi(t) = \varphi^* \exp\left[i(\omega t - \pi)\right]$$

и

$$\varphi^* = \frac{bR_0(\bar{R}_w - R_g)B\sqrt{\bar{U}}}{eC_w}\frac{u^*}{2\bar{U}} = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B\sqrt{\bar{U}}}{MI^2R_g}\frac{u^*}{2U}.$$

В этом случае решение (2.19) запишется в виде

$$r_w = -\varphi^* M\frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega M} = r_w^* \exp[i(\omega t - \psi)],$$

где

$$r_w^* = \frac{-\varphi^* M}{\sqrt{1+\omega^2M^2}}, \quad \psi = \operatorname{arctg}(-\omega M).$$

Связь между пульсацией напряжения $e = Ir_w$ и пульсацией скорости определяется формулой

$$e = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2M^2}}\frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B\sqrt{\bar{U}}}{IR_g}\frac{u^*}{2\bar{U}}\exp[i(\omega t - \psi)].$$

Это соотношение показывает, что при абсолютно гармонических пульсациях скорости $u$ чувствительность $s$, введенная по формуле (2.12), определяется выражением

$$s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2M^2}}\frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2IR_g}\frac{B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{U}}, \tag{2.20}$$

которое отличается от формулы (2.13) коэффициентом

$$(1+\omega^2M^2)^{-1/2}.$$

Таким образом, мы видим, что чувствительность нагретой нити зависит от частоты пульсаций скорости вследствие конечной тепловой инерции нити; при этом для больших значений частоты она уменьшается. Величина частоты, выше которой ее влияние становится заметным, зависит от значения «постоянной времени» $M$. Чем меньше значение постоянной времени, тем выше может быть та частота пульсаций скорости, при которой характеристика нити начинает заметно искажаться.

В случае реальной турбулентности, которая складывается из многих гармоник, при оценке чувствительности необходимо учитывать вклад всех гармоник.

Из решения (2.19) следует, что

$$r_w = A\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\exp\left[-\left(\frac{1}{M}\right)(t-\tau)\right]d\tau = A\int_0^{\infty} u(t-t')\exp\left(-\frac{t'}{M}\right)dt',$$

где

$$A = -\frac{bR_0(\bar{R}_w - R_g)B\sqrt{\bar{U}}}{2eC_w\bar{U}}.$$

Отсюда

$$\overline{e^2} = I^2\overline{r_w^2} = I^2A^2\int_0^\infty dt'\int_0^\infty \overline{u(t-t')\,u(t-t'')}\exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right)dt'' =$$

$$= I^2A^2u'^2\int_0^\infty dt'\int_0^\infty R_E(t''-t')\exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right)dt'',$$

на основании чего выражение для чувствительности принимает вид

$$s = IA\left[\int_0^\infty dt'\int_0^\infty R_E(t''-t')\exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right)\right]^{1/2}dt''.$$

При вычислении двойного интеграла воспользуемся методом, предложенным Бюргерсом [80]. Введем новые переменные

$$t_1 = t'+t'', \quad t_2 = t''-t'.$$

Согласно правилу преобразования имеем

$$\int\int f(t', t'')\,dt'\,dt'' = \int\int f(t_1, t_2)\begin{vmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t_1} & \frac{\partial t'}{\partial t_2} \\ \frac{\partial t''}{\partial t_1} & \frac{\partial t''}{\partial t_2}\end{vmatrix} dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int f(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, соответствующие новым переменным, следует принять во внимание, что интегрирование в плоскости $(t', t'')$ должно выполняться по всему первому квадранту $(0 \leqslant t' \leqslant \infty; 0 \leqslant t'' \leqslant \infty)$, а интегрирование в плоскости $(t_1, t_2)$ должно распространяться на область, соответствующую первому квадранту плоскости времени $(t', t'')$. Следовательно,

$$\int_0^\infty dt'\int_0^\infty dt'' = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt_1\int_{-t_1}^{+t_1} dt_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\int_{t_2}^{\infty} dt_1.$$

Подстановка этого выражения в интеграл, содержащийся в формуле для $s$, дает

$$\int_0^\infty dt'\int_0^\infty R_E(t''-t')\exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right)dt'' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\int_{t_2}^{\infty} R_E(t_2)\exp\left(-\frac{t_1}{M}\right)dt_1 =$$

$$= \int_0^\infty dt_2\int_{t_2}^{\infty} R_E(t_2)\exp\left(-\frac{t_1}{M}\right)dt_1 = M\int_0^\infty R_E(t_2)\exp\left(-\frac{t_2}{M}\right)dt_2.$$

Тогда выражение для $s$ принимает вид

$$s = \frac{bIR_0(\bar{R}_w - R_g)B\sqrt{\bar{U}}}{2eC_w\bar{U}}\left[M\int_0^\infty R_E(t)\exp\left(-\frac{t}{M}\right)dt\right]^{1/2}$$

или

$$s = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B\sqrt{\bar{U}}}{2IR_g\bar{U}}\left[\frac{1}{M}\int_0^\infty R_E(t)\exp\left(-\frac{t}{M}\right)dt\right]^{1/2}. \qquad (2.21)$$

Этот результат тоже показывает, что с возрастанием постоянной времени $M$ чувствительность уменьшается. При очень малом $M$, когда $\exp(-t/M)$ заметно отличается от нуля только при $t \approx 0$ и $R_E(t) \approx R_E(0) = 1$, это выражение преобразуется в (2.13); но при очень большом $M$, когда $\exp(-t/M) \approx 1$ в диапазоне, где $R_E(t) \neq 0$, имеем

$$s \approx \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B\sqrt{\bar{U}}}{2IR_g\bar{U}}\sqrt{\frac{\mathcal{T}_E}{M}}.$$

Каким путем можно получить высокую чувствительность $s$? Согласно формулам, выведенным для $s$, например (2.21), высокая чувствительность достигается в том случае, когда значение $M$ мало́, а комплекс $(\bar{R}_w - R_g)^2 \frac{B}{IR_g}$ велик.

С помощью выражений (2.7), (2.8) и (2.9) можно показать, что при заданной скорости $\bar{U}$ коэффициент $(\bar{R}_w - R_g)^2\frac{B}{IR_g}$ зависит главным образом от величин $\frac{\bar{R}_w}{R_g}$, $\frac{R_g}{R_0}$ и $lR_0d$. Отсюда следует, что коэффициент $(\bar{R}_w - R_g)^2 B/IR_g$ можно сделать большим, когда значения $\bar{R}_w/R_g$ и $lR_0d$ велики. Поскольку отношение $\bar{R}_w/R_g$ или $\bar{\Theta}_w/\Theta_g$ в силу ограниченности максимально допустимой температуры нити имеет предел, то следует указать еще и на другую возможность повышения чувствительности, связанную с величиной $lR_0d$. Так как $R_0 \sim l/d^2$, то $lR_0d \sim l^2/d$; следовательно, большую величину $lR_0d$ можно получить путем уменьшения $d$ и увеличения $l$.

Из выражения для $M$ (2.18) можно сделать вывод, что при постоянном значении $\bar{R}_w/R_g$ величина $M$ практически пропорциональна $C_w$, т. е. $ld^2$.

Отсюда следует, что при заданных значениях осредненной скорости $\bar{U}$ и $\bar{R}_w/R_g$ или $\bar{\Theta}_w/\Theta_g$ сокращение диаметра нити приводит к значительному уменьшению постоянной времени и возрастанию чувствительности нити $s$.

Чтобы получить представление о величине постоянной времени для нитей, обычно используемых при исследованиях турбулентности, представим себе, что в турбулентный поток, средняя скорость которого

составляет 30 *м/сек*, помещена вольфрамовая нить с диаметром 5 *мк*. Пусть разность средних температур составляет $\bar{\Theta}_w - \Theta_g = 115°\,\mathrm{C}$, а $\theta_g = 288°\,\mathrm{K}$; тогда соответствующий электрический ток равен 76 *ма*. Для указанных параметров расчетное значение постоянной времени составляет $M = 3 \cdot 10^{-4}$ *сек*. Это означает, что по сравнению с нагретой нитью, не обладающей тепловой инерцией, чувствительность при частоте пульсаций 250 $сек^{-1}$ уменьшится почти на 10% или что измеряемая амплитуда пульсации будет на 10% ниже, а смещение по фазе составит около 25°.

Для точного измерения этих пульсаций, а также пульсаций с более высокими частотами должен применяться электронный компенсатор, который по крайней мере компенсировал бы уменьшение коэффициента $(1 + \omega^2 M^2)^{-1/2}$, обусловленное тепловой инерцией.

В числе первых исследователей, показавших необходимость компенсации запаздывания, связанного с тепловой инерцией, и применивших электронную компенсационную схему при измерениях турбулентности, были Драйден и Кьюз [5].

Обычно принято обеспечивать лишь компенсацию амплитуды, причем это оказывается достаточным не только для измерения интенсивности турбулентности и спектра энергии турбулентности, но также и для измерения корреляционных функций, которые представляют собой преобразования Фурье от функции энергетического спектра.

Однако если требуется получить неискаженную осциллограмму пульсаций скорости, то к нулю также должно быть сведено и смещение по фазе, что достигается с помощью соответствующей компенсации.

Как уже отмечалось, при отсутствии компенсации измеряемая интенсивность будет ниже действительной. Более того, оказывается, что измерение пространственных корреляций при помощи двух нагретых нитей без компенсации дает слишком пологую корреляционную кривую, особенно вблизи ее вершины; вследствие этого получаются сильно завышенные значения микромасштаба $\lambda$ (см. [4]). Но поскольку микромасштаб можно считать характеристикой размера мелких вихрей, благодаря которым происходит диссипация (см. § 1.6), то измерения с некомпенсированными нитями приводят к завышению размеров этих вихрей. Ввиду того, что интенсивность, деленная на микромасштаб, является мерой диссипации, то при этом будет получаться слишком малая величина диссипации.

Рассмотренные факторы оказывают влияние также и на измеряемую величину интегрального масштаба, которая получается больше действительной, однако это влияние проявляется значительно слабее, нежели преувеличение микромасштаба.

*Охлаждающее воздействие крепления нити.* Обычно по соображениям, которые излагаются ниже, крепление нити по сравнению с самой нитью делают более массивным; поэтому тепловую инерцию

крепления можно считать бесконечно большой, а его температуру — практически равной температуре окружающего воздуха. Вследствие разницы температур нити и крепления, нить подвергается охлаждающему воздействию из-за непосредственной передачи тепла креплению путем теплопроводности. Благодаря этому охлаждению эффективная длина нити сокращается. Максимальная температура посредине нити и средняя температура всей нити оказываются неодинаковыми. Средняя температура нити оказывает решающее влияние на полное электрическое сопротивление нити. С другой стороны, максимальная температура нити является фактором, определяющим прочность нити и возможное поверхностное окисление. Помимо этого, неравномерность распределения температуры влияет на величину постоянной времени. Перечисленные факты требуют создания таких условий, при которых распределение температуры было бы, по возможности, равномерным.

Для анализа распределения температуры вдоль нити, обусловленного охлаждающим воздействием ее крепления, рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда нить обтекается установившимся потоком воздуха с равномерным распределением скорости, а крепление, температура которого постоянна и равна температуре окружающей среды, имеет бесконечно большую теплоемкость.

Распределение температуры определяется в этом случае следующим дифференциальным уравнением:

$$I^2\mathcal{R}_w = (\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_g)\left(A + B\sqrt{U}\right) - e\frac{\pi}{4}d^2\mathcal{K}_w\frac{d^2\theta_w}{dx^2}, \qquad (2.22)$$

где $\mathcal{R}_w$ и $\mathcal{R}_g$ — электрические сопротивления на единицу длины соответственно при температуре нити и газа, а $\mathcal{K}_w$ — коэффициент теплопроводности материала нити. Поскольку $\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_g \approx b\mathcal{R}_0(\Theta_w - \Theta_g)$, то уравнение (2.22) принимает вид

$$\frac{d^2(\Theta_w - \Theta_g)}{dx^2} - \frac{b\mathcal{R}_0\left(A + B\sqrt{U} - I^2\right)}{e\frac{\pi}{4}d^2\mathcal{K}_w}(\Theta_w - \Theta_g) + \frac{I^2\mathcal{R}_g}{e\frac{\pi}{4}d^2\mathcal{K}_w} = 0.$$

Если начало системы координат $x = 0$ поместить посредине нити, то граничные условия запишутся так:

$$\Theta_w - \Theta_g = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm\frac{l}{2},$$

$$\frac{d}{dx}(\Theta_w - \Theta_g) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

а решение дифференциального уравнения получится следующим:

$$\Theta_w - \Theta_g = \frac{I^2\mathcal{R}_g/\mathcal{R}_0}{b\left(A + B\sqrt{U} - I^2\right)}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{l_c}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2l_c}\right)}\right]. \qquad (2.23)$$

Из этого решения имеем

$$\frac{(\Theta_w)_{\max}-\Theta_g}{(\Theta_w)_{\text{ср}}-\Theta_g}=\frac{\frac{l}{2l_c}\operatorname{ch}\left(\frac{l}{2l_c}\right)-\frac{l}{2l_c}}{\frac{l}{2l_c}\operatorname{ch}\left(\frac{l}{2l_c}\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{l}{2l_c}\right)}, \tag{2.24}$$

где

$$l_c=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{e\pi K_w}{b\mathcal{R}_0(A+B\sqrt{U}-I^2)}}. \tag{2.25}$$

Величина $l_c$ имеет размерность длины. Она учитывает охлаждающее воздействие крепления и физически может интерпретироваться как длина той части нити, которая прилегает к креплению и эффективно им охлаждается. Поэтому указанная величина называется «холодной длиной»; этот термин был введен Бетховом [6].

Соотношение (2.24) показывает, что распределение температуры с увеличением отношения $l/2l_c$, или $l/d$, становится более равномерным; это вполне очевидно. Полученное уравнение позволяет вычислить минимальные отношения $l/2l_c$, или $l/d$, необходимые для получения достаточно равномерного распределения температуры. Подобные вычисления показывают, что для платиноиридиевых нитей величина $l/2l_c$ не должна быть меньше, скажем, 5 или около этого, величина $l/d$ должна составлять по крайней мере 100, а желательно даже более 200; для вольфрамовых нитей эта величина еще выше, так как $K_w$ для вольфрама почти в 2,5 раза больше, чем для платины.

Охлаждающее воздействие крепления несколько иным путем исследовалось также Лоувэллом [7]. Он оценил относительные концевые потери, которые он определил как отношение количества тепла, отводимого благодаря теплопроводности в крепление, и количества тепла, отдаваемого непосредственно воздушному потоку.

Если мы хотим определить влияние неравномерного распределения температуры на динамику процессов в нити, то следует исходить из более полного дифференциального уравнения, которое представляет собой комбинацию уравнений (2.14) и (2.22), а именно:

$$I^2\mathcal{R}_w=(\mathcal{R}_w-\mathcal{R}_g)(A+B\sqrt{U})+\rho_w c_w\frac{\pi}{4}d^2\frac{\partial\Theta_w}{\partial t}-eK_w\frac{\pi}{4}d^2\frac{\partial^2\Theta_w}{\partial x^2}. \tag{2.26}$$

Как и раньше, величину $\Theta_w$ можно выразить через $\mathcal{R}_w$ при помощи формулы

$$\mathcal{R}_w=\mathcal{R}_g+b\mathcal{R}_0(\Theta_w-\Theta_g).$$

Если снова ввести соотношения

$$U=\bar{U}+u,\quad \mathcal{R}_w=\bar{\mathcal{R}}_w+\mathrm{r}_w,$$

где пульсации принимаются малыми по сравнению с осредненными величинами, то после отделения членов, содержащих осредненные

по времени параметры, от членов, соответствующих пульсационным величинам, получим

$$I^2\bar{\mathcal{R}}_w = (\bar{\mathcal{R}}_w - \mathcal{R}_g)(A + B\sqrt{\bar{U}}) - \frac{e\kappa_w \frac{\pi}{4} d^2}{b\mathcal{R}_0} \frac{d^2\bar{\mathcal{R}}_w}{dx^2}$$

и

$$\frac{\partial \mathrm{r}_w}{\partial t} - \frac{e\kappa_w}{\rho_w c_w} \frac{\partial^2 \mathrm{r}_w}{\partial x^2} + b\mathcal{R}_0 \frac{A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2}{\rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2} \mathrm{r}_w =$$

$$= - \frac{b\mathcal{R}_0 (\bar{\mathcal{R}}_w - \mathcal{R}_g)}{\rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2} B\sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}. \quad (2.27)$$

Это дифференциальное уравнение было подробно изучено Бетховом [6]. Решение его является очень громоздким и трудно поддается интерпретации. Однако удалось обнаружить, что из-за очень сложной частотной характеристики нельзя осуществить компенсацию во всем диапазоне изменения $\omega$ при помощи всего лишь одной электронной цепи, частотная характеристика которой просто пропорциональна величине $(1 + i\omega M)$. Более того, смещение по фазе $\psi$ непостоянно вдоль нити. Однако при $l/2l_c > 3$ отклонения от полной компенсации остаются малыми (в пределах 2%), если компенсационная схема настраивается на точную компенсацию при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

Не вдаваясь в подробности расчетов Бетхова, достаточно проанализировать влияние охлаждения нити ее креплением на постоянную времени нити. Выше уже упоминалось, что, благодаря этому охлаждающему воздействию, эффективная длина нити оказывается меньше ее действительной длины.

Посмотрим, каково будет влияние этого фактора на постоянную времени $M$. Для этой цели воспользуемся уравнением (2.27). Поскольку нас интересует динамика процессов во всей нити, то проинтегрируем это уравнение по $x$, принимая во внимание, что величина $A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2$ по длине нити постоянна, и предполагая, что коэффициенты $\kappa_m$ и $c_w$ не зависят от температуры. Вводя обозначения

$$r_w = 2\int_0^{l/2} \mathrm{r}_w\, dx, \quad R_w = 2\int_0^{l/2} \bar{\mathcal{R}}_w\, dx, \quad R_g = \mathcal{R}_g l, \quad R_0 = \mathcal{R}_0 l,$$

получаем

$$\frac{dr_w}{dt} + bR_0 \frac{A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2}{eC_w} r_w - \frac{2\kappa_w}{\rho_w c_w} \left[\frac{\partial \mathrm{r}_w}{\partial x}\right]_0^{l/2} =$$

$$= - \frac{bR_0 (\bar{R}_w - R_g)}{eC_w} B\sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}. \quad (2.28)$$

Таким образом, для постоянной времени $M$ получается выражение, аналогичное (2.17). Но при одном и том же отношении $\bar{R}_w/R_g$ электрический ток $I$ при различной эффективной длине нити неодинаков. Из соотношения (2.23) после интегрирования по $x$ получаем

$$\frac{\bar{R}_w}{R_g} = 1 + \frac{I^2}{A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th} l^*}{l^*}\right),$$

где $l^* = l/2l_c$. Вместо уравнения $\dfrac{I^2\bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} = A + B\sqrt{\bar{U}}$ имеем

$$\frac{I^2\bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g}\left(1 - \frac{R_g}{\bar{R}_w}\frac{\operatorname{th} l^*}{l^*}\right) = A + B\sqrt{\bar{U}}.$$

Подставляя в (2.17) соотношение

$$A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2 = \left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right)\frac{1 - \dfrac{\operatorname{th} l^*}{l^*}}{\dfrac{\bar{R}_w}{R_g} - \dfrac{\operatorname{th} l^*}{l^*}},$$

получаем

$$M = \frac{C_w}{ebR_0\left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right)}\frac{\bar{R}_w}{R_g}\frac{1 - \dfrac{R_g}{\bar{R}_w}\dfrac{\operatorname{th} l^*}{l^*}}{1 - \dfrac{\operatorname{th} l^*}{l^*}}. \qquad (2.29)$$

При отсутствии охлаждающего воздействия крепления ($l_c = 0$ и $l^* = \infty$) постоянная времени имела бы вид

$$[M]_{l_c=0} = \frac{C_w}{ebR_0\left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right)}\frac{\bar{R}_w}{R_g}$$

[ср. с уравнением (2.17) после исключения $I^2$].

Следует заметить, что формула (2.29) не дает выражения для $M$ в явном виде, так как, согласно (2.25), холодная длина $l_c$ включает в себя член $\left(A + B\sqrt{\bar{U}} - I^2\right)$, а стало быть, и постоянную времени $M$. Из уравнений (2.25) и (2.17) получим

$$l^* = \frac{l}{2d}\sqrt{\frac{\rho_w c_w d^2}{\kappa_w M}}. \qquad (2.30)$$

Исключение величины $l^*$ из соотношений (2.29) и (2.30) приводит к очень громоздкой неявной связи между $M$ и $l/d$. Однако соотношениями (2.29) и (2.30) можно воспользоваться для оценки влияния $l_c$ на $M$. При этом оказывается, что $M$ уменьшается с возрастанием $l^*$ или с увеличением $l/d$. Согласно этой зависимости, на первый взгляд, необходимо пользоваться длинными нитями. Однако, как будет показано ниже, имеются другие, более веские соображе-

ния в пользу применения коротких нитей. Более того, при значениях $l^*$, рекомендованных ранее для обеспечения компенсации во всем диапазоне частот (а именно $l^* > 3$), влияние $l^*$ на величину $M$ весьма невелико.

При анализе охлаждающего воздействия крепления на распределение температуры вдоль нити предполагалось, что крепление обладает бесконечно большой теплоемкостью, а температура его равна температуре окружающего газа. Очевидно, что эти предположения справедливы только в том случае, если размеры крепления велики по сравнению с диаметром нити и если, кроме того, теплопроводность материала крепления высока. Приближенный расчет показывает, что если теплопроводность материала крепления не ниже, чем у материала нити, то, когда отношение площадей поперечных сечений крепления и нити превышает примерно 100, влияние конечного диаметра крепления оказывается пренебрежимо малым. Таким образом, для нити с диаметром 5 *мк* это должно было бы наблюдаться в тех случаях, когда диаметр крепления больше 0,05 *мм*, а это условие всегда выполняется. Поэтому требование относительно большой теплоемкости крепления не будет определять собой нижнего предела допустимого диаметра крепления.

Этот нижний предел скорее будет определяться требованиями, обусловленными жесткостью крепления и возможными вибрациями. Вибрации могут иметь либо «сейсмическое» происхождение, либо могут порождаться течением газа позади нити или крепления (эоловы тона). Указанные вибрации нежелательны не только с механической точки зрения, но даже еще в большей степени с аэродинамической, так как соответствующие вибрации нити могли бы походить на не существующую в потоке за нитью турбулентность и, следовательно, могли бы измеряться и интерпретироваться именно как таковые. Проблема жесткости была рассмотрена Ван дер Хегге Цийненом [8] и Лоуэллом [7].

*Неравномерность распределения скорости вдоль нити.* Во всем предшествовавшем анализе предполагалось, что распределение скорости вдоль нити равномерно. Известно, однако, что в турбулентном потоке распределение скорости не является равномерным даже в зонах, протяженность которых имеет порядок микромасштаба турбулентности. Следовательно, для осуществления действительно «точечных» измерений длина нити термоанемометра не должна превышать, скажем, 0,5 *мм* даже в турбулентных потоках с умеренной осредненной скоростью. Таким образом, для аэродинамической эффективности термоанемометра нить должна быть, насколько это возможно, короче. С другой стороны, было показано, что, ввиду охлаждающего воздействия крепления, нить не должна быть слишком короткой, ибо тогда распределение температуры вдоль нити будет довольно неравномерным. Поэтому отношение длины к диаметру

для платиноиридиевых нитей рекомендуется брать не менее 200, а для вольфрамовых нитей еще выше.

Чтобы удовлетворять этому требованию, нити короче, чем 0,5 *мм*, должны иметь диаметр менее 2,5 *мк*. Однако этот диаметр уже точно определен как предельно допустимая минимальная величина для обеспечения минимальной требуемой прочности. Более того, было бы затруднительно сконструировать крепление нити так, чтобы оно не вызывало отрицательного аэродинамического взаимодействия с нитью, если бы нить была короче, чем 0,5 *мм*. Поэтому можно с уверенностью рассматривать длину 0,5 *мм* как практически нижний предел для термоанемометра.

Но если распределение скорости в зонах меньших, чем длина нити, существенно отклоняется от равномерного (а это наступает очень скоро при увеличении скорости турбулентного потока), то при измерении характеристик турбулентности будут наблюдаться ошибки. Скрэмстед [9] не только первым обнаружил это явление, но и предложил поправочные формулы для интенсивности турбулентности и для коэффициентов корреляции, когда используются две нагретые нити.

Рассмотрим случай, когда надлежит измерить интенсивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости $u_1$; при этом нить помещается перпендикулярно к направлению осредненной скорости $\overline{U}_1$. Если бы распределение скорости вдоль нити было равномерным, то среднеквадратичная величина напряжения на нити записывалась бы как

$$\overline{e^2} = K^2 l^2 \overline{u_1^2}, \tag{2.31}$$

где $K$ — постоянная величина, зависящая от характеристик нити и рабочих условий.

Наоборот, величина $\overline{u_1^2}$, вычисленная из этого выражения для $\overline{e^2}$, была бы правильной, если бы с помощью нити осуществлялось действительно «точечное» измерение.

В предположении об однородном и изотропном турбулентном потоке Скрэмстед показал, что ввиду существенной неравномерности распределения скорости, мерой которой является, например, коэффициент двойной эйлеровой корреляции $g(x_2)$ (см. § 1.6), измеренная величина квадрата напряжения должна записываться следующим образом:

$$(\overline{e^2})_{\text{измер}} = 2K^2 u_1'^2 \int_0^l (l - x_2)\, g(x_2)\, dx_2, \tag{2.32}$$

где $x_2$ — ось координат, направленная вдоль нити.

Введем поправочный коэффициент $C$, определяемый формулой

$$\overline{e^2} = C\,(\overline{e^2})_{\text{измер}}. \tag{2.33}$$

Тогда из (2.31) и (2.32) получим

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l - x_2)\, g(x_2)\, dx_2. \tag{2.34}$$

Для вычисления $\mathcal{C}$ по этой формуле можно рассмотреть три случая: 1) $l$ очень велико по сравнению с интегральным масштабом $\Lambda_g$, 2) $l$ сравнимо с $\Lambda_g$, и 3) $l$ очень мало по сравнению с $\Lambda_g$.

Если $l \gg \Lambda_g$, то из формулы (2.34) следует, что с увеличением $l/\Lambda_g$ значение $\mathcal{C}$ неограниченно возрастает, так как в этом случае величина $1/\mathcal{C}$ становится пропорциональной $\Lambda_g/l$. Таким образом, бесконечно длинная нить вообще не измерила бы никакой турбулентности!

Прежде чем рассмотреть случай $l \approx \Lambda_g$, обратимся к случаю $l \ll \Lambda_g$, который может наблюдаться, когда $l$ меньше микромасштаба $\lambda_g$. Форма корреляционной кривой для таких небольших значений $x_2$ является параболической (см. § 1.6):

$$g(x_2) \approx 1 - \frac{x_2^2}{\lambda_g^2}. \tag{1.53}$$

Тогда после вычисления интеграла в (2.34) получаем

$$\mathcal{C} = \left(1 - \frac{l^2}{6\lambda_g^2}\right)^{-1}.$$

Наконец, в последнем случае, когда $l \approx \Lambda_g$, поправочный коэффициент будет зависеть от формы корреляционной кривой. Экспоненциальная функция в качестве $g(x_2)$ была уже рассмотрена Скрэмстедом. В дополнение к этому выберем для описания этой зависимости гауссову функцию ошибок. Если

$$g(x_2) = \exp\left(-\frac{|x_2|}{\Lambda_g}\right),$$

получаем

$$\mathcal{C} = 0{,}5\,\frac{l^2}{\Lambda_g l - \Lambda_g^2\left[1 - \exp\left(-\frac{l}{\Lambda_g}\right)\right]}.$$

Разлагая экспоненту в ряд Тэйлора, это выражение в случае $l/\Lambda_g < 1$ можно приближенно заменить более простым:

$$\mathcal{C} \approx 1 + \frac{1}{3}\frac{l}{\Lambda_g} - \ldots$$

Когда

$$g(x_2) = \exp\left(-\pi x_2^2/4\Lambda_g^2\right),$$

поправочный коэффициент записывается в виде

$$\frac{1}{\mathscr{C}} = 2\frac{\Lambda_g}{l}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{l}{\Lambda_g}\right) - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\Lambda_g^2}{l^2}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi l^2}{4\Lambda_g^2}\right)\right],$$

где

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{l}{\Lambda_g}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{l}{\Lambda_g}} \exp(-y)\,dy.$$

Для измеренного значения коэффициента продольной корреляции между пульсациями скорости $u_1$ в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние $x_3$, Скрэмстед получил формулу

$$[g(x_3)]_{\text{измер}} = \frac{2\mathscr{C}}{l^2}\int_0^l (l - x_2)\, g\left(\sqrt{x_2^2 + x_3^2}\right) dx_2.$$

Интеграл, входящий в эту формулу, может быть вычислен, если $g$ описывается либо экспонентой, либо гауссовой функцией ошибок.

Когда $g(x_3)$ описывается гауссовой функцией ошибок, то получается любопытный результат

$$[g(x_3)]_{\text{измер}} = g(x_3),$$

согласно которому корреляционная функция измеряется правильно.

В случае, когда

$$g(x_3) = \exp\left(-\frac{x_3}{\Lambda_g}\right),$$

для $[g(x_3)]_{\text{измер}}$ получается более громоздкое выражение. Однако если предположить, что $l/x_3 \ll 1$ и, стало быть, $l/\Lambda_g \ll 1$, то получается очень простая приближенная формула, а именно:

$$g(x_3) \approx \frac{1}{\mathscr{C}}[g(x_3)]_{\text{измер}} \approx \left(1 - \frac{1}{3}\frac{l}{\Lambda_g}\right)[g(x_3)]_{\text{измер}}.$$

Из этого соотношения имеем

$$\frac{\Lambda_g}{(\Lambda_g)_{\text{измер}}} \approx 1 - \frac{1}{3}\frac{l}{(\Lambda_g)_{\text{измер}}} - \ldots$$

Если измеряется не коэффициент продольной корреляции $g$, а коэффициент поперечной корреляции $f$, то для однородного изотропного турбулентного потока можно воспользоваться соотношением между $f$ и $g$, которое будет дано в главе 3, а именно уравнением (3.9).

Тогда вместо (2.34) получаем

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{l}\int_0^l f(x_2)\,dx_2$$

и

$$f(x_1) = \frac{e}{l}\int_0^l f\left(V\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)dx_2.$$

Выражения, аналогичные тем, которые получил Скрэмстед, были выведены Френкилем несколько иным путем. Помимо этого, Френкиль значительно расширил область расчетов, рассмотрев более общий случай неизотропной, но однородной турбулентности. Полный отчет о вычислениях Френкиля можно найти в работе [10].

*Краткие выводы.* Для читателя может оказаться полезным кратко перечислить рассмотренные выше эффекты, связанные с диаметром и длиной нити, а также с отношением длины к диаметру.

Для правильной реакции термоанемометра на высокочастотные пульсации скорости необходимо, чтобы постоянная времени имела малую величину. Это требует, в свою очередь, чтобы (1) нить была тонкой, а (2) распределение температуры вдоль нити было равномерным, что наблюдается, когда отношение $l/d$ достаточно велико (больше 200).

Тонкая нить обеспечивает меньшую постоянную времени термоанемометра, повышает его чувствительность и увеличивает отношение сигнала к шуму электронной схемы.

Однако требования прочности накладывают на величину диаметра нити ограничение снизу. Это противоречит требованию максимального значения $l/d$, а также минимального значения $d$. Для применяемых в настоящее время материалов нити этот предел следует считать практически равным 2,5 *мк*.

Соображения аэродинамической эффективности при измерении характеристик турбулентности требуют, чтобы нить была как можно короче. Но когда нить очень коротка, то значительно усиливается неблагоприятный фактор аэродинамического воздействия крепления на нить.

По-видимому, следует считать, что используемые сейчас в лабораторных опытах для измерений в турбулентных потоках воздуха нити с диаметрами от 2,5 до 5 *мк* и длиной от 0,5 до 1 *мм* являются приемлемым компромиссом между перечисленными выше противоречивыми требованиями.

*Нелинейные эффекты, обусловленные температурной зависимостью коэффициентов.* В уравнении (2.3) содержится несколько коэффициентов, зависимость которых от температуры может привести к возникновению нелинейных эффектов.

Температурную зависимость электрического сопротивления нити $R_w$ можно считать линейной лишь приближенно. Если учесть третий, квадратичный член в правой части формулы (2.4) для $R_w$, то уравнение (2.3) станет нелинейным относительно $\theta_w - \theta_g$.

К счастью, второй коэффициент $b_1$ очень мал по сравнению с $b$ для всех материалов, применяемых для термоанемометров (см., например, значения, приведенные для вольфрама и платины). Поэтому при обычных рабочих температурах нагретой нити квадратичный член в формуле (2.4) все же очень мал по сравнению с линейным членом, и им, несомненно, можно пренебречь.

Правая часть уравнения (2.3) содержит коэффициенты теплопроводности $k_f$ и вязкости $\mu_f$, удельную теплоемкость $c_p$ и плотность газа $\rho_f$, причем все эти величины берутся при пленочной температуре.

Удельная теплоемкость $c_p$ практически не зависит от температуры, но коэффициенты теплопроводности и вязкости, а также плотность газа зависят от нее очень сильно. Поскольку коэффициенты теплопроводности и вязкости изменяются с температурой, по существу, одинаково, а именно почти линейно в довольно широком диапазоне температур, то число Прандтля $\mathrm{Pr} = c_p\mu/k$ практически не зависит от температуры. Комплекс $k\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{0,5}$ зависит от температуры лишь незначительно, а для двухатомных газов, например воздуха, даже очень слабо.

Следовательно, если рассматривать оба коэффициента $A$ и $B$ в уравнении (2.7), то чувствительным к изменению температуры практически является только коэффициент $A$, который пропорционален $k_f$.

Если аппроксимировать температурную зависимость $k_f$ линейной функцией, то можно записать

$$k_f = a + a_1\theta_f, \tag{2.35}$$

где в случае воздуха

$$a = 12 \cdot 10^{-6}\ кал/см \cdot сек\,(°C), \quad a_1 = 0{,}17 \cdot 10^{-6}\ кал/см \cdot сек\,(°C)^2.$$

Тогда зависимость коэффициента $A_f$ от температуры выразится следующей формулой:

$$A_f = 0{,}42\frac{e\pi l}{bR_0}\mathrm{Pr}^{0,2}(a + a_1\theta_f) = A_g\left[1 + \frac{a_1}{2(a + a_1\theta_g)}(\theta_w - \theta_g)\right], \tag{2.36}$$

где

$$A_g = 0{,}42\frac{e\pi l}{bR_0}\mathrm{Pr}^{0,2}(a + a_1\theta_g).$$

Для воздуха при $\theta_g = 300°\,\mathrm{K}$ имеем

$$A_f = A_g[1 + 0{,}0013(\theta_w - \theta_g)].$$

Используя для $A_f$ соотношение (2.36) вместо (2.7), получаем

$$\frac{I^2R_w}{R_w-R_g}=A_g\left[1+\frac{a_1}{2(a+a_1\Theta_g)}(\Theta_w-\Theta_g)\right]+B\sqrt{U}=$$
$$=A_g\left[1+\frac{a_1}{2(a+a_1\Theta_g)\,bR_0}(R_w-R_g)\right]+B\sqrt{U}. \quad (2.37)$$

Бетхов и Уэллинг [11, 12] провели теоретическое и экспериментальное исследование эффекта, обусловленного этой нелинейностью. При теоретическом анализе они исходили из уравнения, по существу аналогичного (2.37). Результаты расчетов Бетхова показали, что при этом получается более равномерное распределение температуры вдоль нити, чем по «линеаризованной» теории. Этот вывод вполне понятен, так как квадратичный член обусловливает более высокую интенсивность переноса тепла от нити к движущемуся газу на участках с повышенной температурой, нежели на участках с более низкой температурой. Помимо того, этот член оказывает благоприятное влияние на термодинамические свойства; постоянная времени при этом становится меньше. Отмеченные эффекты зависят от отношения $l/d$, от диаметра нити и от уровня ее температуры. Для платиноиридиевой нити с диаметром 7 *мк* и длиной 1,15 *мм* при электрическом токе силой $I=75$ *ма* и скорости воздуха 500 *см/сек* величина постоянной времени оказывается почти наполовину меньше значения, которое получается по «линеаризованной» теории.

Однако при этом сравнении Бетхов и Уэллинг принимали для $A$ в «линеаризованной» теории величину $A_g$, т. е. коэффициент, вычисленный по температуре окружающего газа, в то время как коэффициент $A$ должен иметь величину $A_f$, взятую при средней пленочной температуре. Если выбрать эту последнюю величину, то нелинейный эффект значительно ослабевает. Несколько специально поставленных опытов подтвердили, по крайней мере качественно, существование нелинейного эффекта в случае платиновой и платиноиридиевой нитей.

*Влияние больших турбулентных пульсаций на характеристику нагретой нити.* До сих пор молчаливо предполагалось, что относительная интенсивность турбулентности мала, ибо именно это условие позволяло линеаризовать характеристику термоанемометра по отношению к турбулентным пульсациям [см., например, соотношение (2.11) между пульсацией напряжения и пульсацией скорости].

Представляет практический интерес выяснить, при каких интенсивностях турбулентности подобная линеаризация еще допустима, т. е. не вносит слишком больших ошибок в результаты измерения интенсивности турбулентности.

Относительная интенсивность турбулентности в потоке на некотором расстоянии от турбулизирующей решетки редко превышает

10%. Из чисто интуитивных соображений эту интенсивность можно считать достаточно низкой, чтобы линеаризовать характеристику термоанемометра. Турбулентность, наблюдаемая при течении в трубах и в свободных струях, обычно заметно превосходит приведенную выше величину $10\%$; опять-таки, основываясь на чистой интуиции, можно заключить, что в этих случаях следует ожидать искажения линеаризованной характеристики термоанемометра. Многие исследователи, в том числе Корсин [13], проводившие опыты с турбулентными свободными струями, обнаруживали это отклонение от линейной характеристики при высокой интенсивности турбулентности и делали попытки оценить ошибку, получающуюся в результате предположения о линейной характеристике термоанемометра.

Влияние больших турбулентных пульсаций на характеристику термоанемометра можно оценить, прежде всего, удерживая в разложении в ряд квадратного корня из скорости [см. уравнение (2.7)] члены второго и более высокого порядков. В то же время больше уже недопустимо ограничиваться рассмотрением только компонент турбулентных пульсаций, имеющих то же направление, что и скорость основного потока $\overline{U}$; следует учитывать также и другие компоненты турбулентных пульсаций. Но нагретая нить чувствительна, по существу, только к тем компонентам скорости, направление которых перпендикулярно к ней; лишь когда компонента скорости, параллельная нити, становится очень большой, то ее влияние на охлаждение становится заметным по сравнению с влиянием компонент, перпендикулярных к нити.

Таким образом, если через $u_1$ обозначить компоненту турбулентной пульсации скорости в основном направлении потока $\overline{U}$ (которое считается перпендикулярным к нити), а через $u_2$ — поперечную компоненту турбулентной пульсации скорости, перпендикулярную к нити, то в качестве скорости, определяющей охлаждение нити, следует рассматривать величину

$$U_{\text{эфф}} = \sqrt{(\overline{U} + u_1)^2 + u_2^2}. \tag{2.38}$$

Разложение в ряд дает

$$U_{\text{эфф}} = \overline{U}\left(1 + \frac{u_1}{\overline{U}} + \frac{u_2^2}{2\overline{U}^2} - \frac{u_1 u_2^2}{2\overline{U}^3} + \ldots\right),$$

откуда для среднего значения $\overline{U}_{\text{эфф}}$ получаем

$$\overline{U}_{\text{эфф}} = \overline{U}\left(1 + \frac{\overline{u_2^2}}{2\overline{U}^2} - \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{2\overline{U}^3} + \ldots\right).$$

Однако термоанемометром измеряется не это значение скорости. Чтобы найти его, следует воспользоваться выражением для $\sqrt{\overline{U}_{\text{эфф}}}$

согласно уравнению (2.7):

$$\sqrt{U_{\text{эфф}}} = \sqrt[4]{(\overline{U}+u_1)^2+u_2^2} = \sqrt{\overline{U}}\left(1+\frac{u_1}{2\overline{U}}-\frac{1}{8}\frac{u_1^2}{\overline{U}^2}+\frac{1}{4}\frac{u_2^2}{\overline{U}^2}+\frac{1}{16}\frac{u_1^3}{\overline{U}^3}-\frac{3}{8}\frac{u_1u_2^2}{\overline{U}^3}+\ldots\right). \tag{2.39}$$

Осредняя это выражение по времени, получаем

$$\overline{\sqrt{U_{\text{эфф}}}} = \sqrt{\overline{U}}\left(1-\frac{1}{8}\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2}+\frac{1}{4}\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}^2}+\frac{1}{16}\frac{\overline{u_1^3}}{\overline{U}^3}-\frac{3}{8}\frac{\overline{u_1u_2^2}}{\overline{U}^3}+\ldots\right).$$

Отсюда видно, что фактор, влияющий на охлаждение нити, представляет собой комбинацию из двух компонент турбулентных пульсаций $u_1$ и $u_2$. Приравняем это выражение величине $\sqrt{\overline{U}_{\text{изм}}}$. Тогда для $\overline{U}_{\text{изм}}$ получим формулу

$$\overline{U}_{\text{изм}} = \overline{U}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2}+\frac{1}{2}\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}^2}+\frac{1}{8}\frac{\overline{u_1^3}}{\overline{U}^3}-\frac{3}{4}\frac{\overline{u_1u_2^2}}{\overline{U}^3}+\ldots\right)\approx \approx \overline{U}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2}+\frac{1}{2}\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}^2}\right). \tag{2.40}$$

Это — формула, выведенная Корсином [13], который, пользуясь ею, внес поправки в измеренные значения, чтобы получить действительную осредненную скорость в свободной струе. Поправка может быть либо отрицательной, либо положительной, будучи зависимой, главным образом, от отношения $\overline{u_1^2}/\overline{u_2^2}$. Если отклонение от изотропии мало́, т. е. $\overline{u_1^2}\approx\overline{u_2^2}$, то величина поправки является отрицательной; иначе говоря, действительная скорость в этом случае меньше измеренной величины.

Чтобы проанализировать характеристику термоанемометра по отношению к пульсациям, подставим выражение (2.39) для $\sqrt{U}$ в соотношение (2.7):

$$\frac{I^2R_w}{R_w-R_g} = A+B\sqrt{\overline{U}}\left(1+\frac{u_1}{2\overline{U}}-\frac{1}{8}\frac{u_1^2}{\overline{U}^2}+\frac{1}{4}\frac{u_2^2}{\overline{U}^2}+\ldots\right).$$

Полагая $R_w=\overline{R}_w+r_w$, где величина $r_w$ уже не считается малой по сравнению с $\overline{R}_w$, получаем

$$I^2(\overline{R}_w+r_w) = \left[A+B\sqrt{\overline{U}}\left(1+\frac{u_1}{2\overline{U}}-\frac{1}{8}\frac{u_1^2}{\overline{U}^2}+\frac{1}{4}\frac{u_2^2}{\overline{U}^2}-\ldots\right)\right](\overline{R}_w-R_g+r_w),$$

или

$$I^2(\bar{R}_w + r_w) = \\ = (A + B\sqrt{\bar{U}})(\bar{R}_w - R_g + r_w) + B\sqrt{\bar{U}}(\bar{R}_w - R_g)u^* + B\sqrt{\bar{U}}u^* r_w, \tag{2.41}$$

где

$$u^* = \frac{u_1}{2\bar{U}} - \frac{1}{8}\frac{u_1^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4}\frac{u_2^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{16}\frac{u_1^3}{\bar{U}^3} - \frac{3}{8}\frac{u_1 u_2^2}{\bar{U}^3} + \ldots$$

Осреднение выражения (2.41) дает

$$I^2\bar{R}_w = (A + B\sqrt{\bar{U}})(\bar{R}_w - R_g) + B\sqrt{\bar{U}}(\bar{R}_w - R_g)\bar{u}^* + B\sqrt{\bar{U}}\,\overline{u^* r_w}. \tag{2.42}$$

Этот результат показывает, что действительное осредненное электрическое сопротивление $\bar{R}_w$ отличается от средней величины $\bar{R}_{w_1}$, которая получилась бы по линеаризованной теории при использовании соотношения (2.7), т. е.

$$I^2\bar{R}_{w_1} = (A + B\sqrt{\bar{U}})(\bar{R}_{w_1} - R_g).$$

Решая три уравнения (2.41), (2.42) и (2.7) совместно, найдем соотношение между $\overline{e^2} = I^2\overline{r_w^2}$ и интенсивностью турбулентности. После ряда алгебраических преобразований получим

$$\overline{e^2} = I^2\overline{r_w^2} = (\bar{R}_w - R_g)^2 \frac{(\bar{R}_{w_1} - R_g)^2}{I^2 R_g^2} B^2\bar{U}\frac{\overline{u_1^2}}{4\bar{U}^2}[1 - \varphi(u_1, u_2)], \tag{2.43}$$

где

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{1+2\alpha}{2}\frac{\overline{u_1^3}}{\bar{U}\overline{u_1^2}} - \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{\bar{U}\overline{u_1^2}} - \frac{5+12\alpha+12\alpha^2}{16}\frac{\overline{u_1^4}}{\bar{U}^2\overline{u_1^2}} - \\ - \frac{1}{4}\frac{\overline{u_2^4}}{\bar{U}^2\overline{u_1^2}} + \frac{7+6\alpha}{4}\frac{\overline{u_1^2 u_2^2}}{\bar{U}^2\overline{u_1^2}} + \frac{1+8\alpha+12\alpha^2}{16}\frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4}\frac{(\overline{u_2^2})^2}{\bar{U}^2\overline{u_1^2}} - \\ - \frac{1+4\alpha}{4}\frac{\overline{u_2^2}}{\bar{U}^2} - \ldots \tag{2.44}$$

и

$$\alpha = \frac{B\sqrt{\bar{U}}}{I^2}\frac{\bar{R}_{w_1} - R_g}{R_g}. \tag{2.45}$$

В соответствии с линеаризованной теорией получается следующее соотношение [см. уравнение (2.11)]:

$$\overline{e^2} = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^4}{I^2 R_g^2} B^2 \overline{U} \left( \frac{\overline{u_1^2}}{4\bar{U}^2} \right)_{\text{лин}}.$$

Отсюда

$$\left( \frac{\overline{u_1^2}}{4\bar{U}^2} \right)_{\text{лин}} = \left( \frac{\overline{u_1^2}}{4\bar{U}^2} \right)_{\text{действ}} \left( \frac{\bar{R}_{w_1} - R_g}{R_w - R_g} \right)^2 [1 - \varphi(u_1, u_2)],$$

или, после дальнейших преобразований,

$$\left( \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} \right)_{\text{лин}} = \left( \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} \right)_{\text{действ}} [1 - \psi(u_1, u_2)], \tag{2.46}$$

где

$$\psi(u_1, u_2) = \varphi(u_1, u_2) + \frac{\alpha + 2\alpha^2}{4} \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} - \frac{\alpha}{2} \frac{\overline{u_2^2}}{\bar{U}} + \ldots \tag{2.47}$$

Соотношение (2.43) показывает, что та величина, которая на самом деле измеряется, не является компонентой турбулентной пульсации $u_1$, а представляет собой комбинацию $u_1$ с другой компонентой $u_2$. Следовательно, чтобы правильно измерять компоненту турбулентных пульсаций $u_1$, надо знать не только величину $u_2$, но также еще и значения различных корреляций, например $\overline{u_1 u_2^2}$, $\overline{u_1^2 u_2^2}$, ..., которые для неизотропных турбулентных потоков обычно неизвестны.

Для того чтобы оценить величину ошибки, связанной с использованием линеаризованной теории, в случае, когда интенсивность турбулентности не является малой, вычислим по уравнениям (2.47) и (2.44) величину $\psi(u_1, u_2)$ для одномерной турбулентности ($u_2 = 0$) и для изотропной турбулентности.

Для обычных условий работы термоанемометра величина $\alpha$, определяемая уравнением (2.45), почти не отличается от единицы. Поэтому в последующих расчетах будем полагать, что $\alpha = 1$.

В случае одномерной турбулентности выражение для $\psi(u_1, u_2)$ при $\alpha = 1$ имеет вид

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{29}{16} \frac{\overline{u_1^4}}{\bar{U}^2 \overline{u_1^2}} + \frac{33}{16} \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_1^3}}{\bar{U} \overline{u_1^2}} + \ldots$$

Ввиду того, что скорость турбулентных пульсаций $u_1$ является случайной величиной, для нее можно принять нормальное гауссово распределение, в случае которого получаем

$$\overline{u_1^4} = 3\overline{u_1^2} = 3u_1'^2, \quad \overline{u_1^3} = 0,$$

откуда

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{27}{8}\frac{u_1'^2}{\overline{U}^2} + \ldots$$

В случае изотропной турбулентности при $\alpha = 1$ имеем следующее выражение для $\psi(u_1, u_2)$:

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{29}{16}\frac{\overline{u_1^4}}{\overline{U}^2\overline{u_1^2}} - \frac{1}{4}\frac{\overline{u_2^4}}{\overline{U}^2\overline{u_1^2}} + \frac{13}{4}\frac{\overline{u_1^2u_2^2}}{\overline{U}^2\overline{u_1^2}} + \frac{33}{16}\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2} + \frac{1}{4}\frac{(\overline{u_2^2})^2}{\overline{U}^2\overline{u_1^2}} - \frac{7}{4}\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}^2} + \ldots,$$

поскольку, как будет показано в главе 3, $\overline{u_1^3} = \overline{u_1u_2^2} = 0$.

Если мы не только примем распределение Гаусса для $u_1$ и $u_2$, но предположим еще, что эти компоненты нормально коррелированы, то получим

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = u_1'^2, \quad \overline{u_1^4} = \overline{u_2^4} = 3u_1'^4, \quad \overline{u_1^2u_2^2} = u_1'^2u_2'^2 = u_1'^4,$$

на основании чего величина $\psi(u_1, u_2)$ представится в виде

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{19}{8}\frac{u_1'^2}{\overline{U}^2}.$$

Таким образом, мы видим, что в этих двух особых случаях $\psi(u_1, u_2)$ имеет отрицательную величину. Это означает, что линеаризованная теория приводит к завышенным значениям $u_1'/\overline{U}$. Возникающая при этом ошибка является величиной порядка $u_1'^2/\overline{U}^2$; для $u_1'/\overline{U} = 0{,}2$ эта ошибка в случае одномерной турбулентности составила бы приблизительно 13%, а в случае изотропной турбулентности — 10%.

Иногда влияние высокой интенсивности турбулентности на характеристику термоанемометра исследуют путем приведения нити в колебательное движение в воздушном потоке с низкой интенсивностью турбулентности, намереваясь таким образом создать условия одномерной турбулентности с высокой интенсивностью. Если положить, что пульсационное движение относительно нити носит чисто гармонический характер, т. е. $u_1 = u_1^* \sin \omega t$, то при $\alpha = 1$ и $\overline{u_1^4} = \frac{3}{2}u_1'^4$ получим $\psi(u_1, u_2) = -\frac{21}{32}\frac{u_1'^2}{\overline{U}^2}$. Нетрудно убедиться, что эта величина значительно меньше той, которая получается для одномерного беспорядочно пульсирующего потока. Следовательно, подобные опыты

приводят к слишком оптимистичным выводам. Во всяком случае, сама исходная предпосылка делает сомнительным применение полученных подобным способом поправочных коэффициентов к действительным турбулентным потокам с большой интенсивностью.

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод, что точное измерение характеристик турбулентности, обладающей высокой интенсивностью, почти невозможно.

В принципе можно воспользоваться теорией, по которой учитывается кривизна основной тарировочной кривой. Однако для применения этой теории требуется знать еще структуру турбулентности потока.

Наконец, если при измерении характеристик турбулентности допустима ошибка в 10—20%, то в случае потока с интенсивностью турбулентности 20—25% можно пользоваться линейными соотношениями.

*Влияние сжимаемости.* При большой скорости потока, скажем свыше 100 *м/сек*, на течение около нити может повлиять фактор сжимаемости. Картина сбтекания нити в случае сверхзвуковых скоростей будет особенно отличаться от той, которая наблюдается при малой дозвуковой скорости. Вследствие этого различия картин обтекания, а также из-за непосредственного влияния сжимаемости, распределение температуры в поле течения около нагретой нити тоже будет иметь свои отличия. Так, при преобразовании кинетической энергии в давление над элементом жидкости совершается работа сжатия, которая, превращаясь в тепло, приводит к повышению температуры. Температура в критической точке будет при этом соответственно выше «статической» температуры движущейся жидкости.

Очевидно, что отмеченное проявление сжимаемости оказывает влияние на перенос тепла от нагретой нити к более холодному окружающему воздуху и что соотношение (2.1) уже больше не будет справедливо.

Чтобы учесть влияние сжимаемости, следует воспользоваться более общим соотношением, включающим число Маха **M**, т. е. отношение скорости потока к местной скорости звука:

$$\mathbf{Nu} = f(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, \mathbf{M}).$$

Влияние сжимаемости движущейся жидкости на характеристику термоанемометра исследовалось Коважным [15], Лоувэллом [7], а также Лауфером и Мак-Клелланом [82]. Коважный проводил опыты с нитями в сверхзвуковом потоке в диапазоне чисел Маха от 1,15 до 2,05. Он обнаружил, что при малой разности температур нити и воздуха к сверхзвуковому потоку применимо соотношение, подобное (2.1), если скорость и плотность относить к условиям в невозмущенном потоке, а коэффициенты вязкости и теплопроводности — к условиям в критической точке. Тогда получается универсальное соотношение,

которое не зависит от числа Маха. В случае воздуха это соотношение имеет вид

$$\mathrm{Nu} = 0{,}58\,\mathrm{Re}^{0,5} - 0{,}795.$$

Для вычисления тепловых потерь требуется знать разность температур $\theta_w - \theta_e$, где $\theta_e$ — равновесная температура, которую имела бы ненагретая нить в сверхзвуковом потоке.

При больших величинах температурного напора $(\theta_w - \theta_e)/\theta_e$ проявляется нелинейный эффект, который, однако, отличен от того, который наблюдается при дозвуковой скорости. В отличие от случая несжимаемой жидкости, число Нуссельта с увеличением $(\theta_w - \theta_g)/\theta_{\text{торм}}$ уменьшается. Эмпирическая формула, предложенная для воздуха Коважным [15], имеет вид

$$\mathrm{Nu} = \left(0{,}58\sqrt{\mathrm{Re}} - 0{,}795\right)\left(1 - 0{,}18\,\frac{\theta_w - \theta_e}{\theta_{\text{торм}}}\right).$$

Для оценки величины $\theta_e$ можно воспользоваться эмпирическим соотношением $\dfrac{\theta_e}{\theta_{\text{торм}}} \approx 0{,}93 \div 0{,}98$. Эккерт и Польгаузен [14] рекомендуют формулу

$$\frac{\theta_e}{\theta_{\text{торм}}} \approx \mathrm{Pr}^{0,5}$$

для случая, когда число Прандтля не очень сильно отличается от единицы.

Однако, согласно Лауферу и Мак-Клеллану [82], которые тоже проводили систематическое исследование тонких платинородиевых (90% платины — 10% родия) нитей в сверхзвуковом потоке воздуха, значения, полученные Коважным, на 20—25% выше, чем в действительности. В диапазоне изменения числа Маха от 1,3 до 4,5 Лауфер и Мак-Клеллан нашли также, что число Нуссельта изменяется пропорционально квадратному корню из числа Рейнольдса, если оба эти критерия относить к условиям в потоке за отошедшей ударной волной перед нитью. Для значений таким способом определенного числа Рейнольдса, превышающих 20, равновесная температура $\theta_e$ имела постоянную величину $0{,}95\theta_{\text{торм}}$ независимо от числа Рейнольдса и числа Маха невозмущенного потока. Из результатов Лауфера и Мак-Клеллана можно вывести соотношение

$$\mathrm{Nu} = a\,\mathrm{Re}^{0,5} - b,$$

где величина $a$ в диапазоне температурного напора $(\theta_w - \theta_e)/\theta_e$ от 0 до 1 изменяется в пределах от 0,465 до 0,49, а величина $b$ — от 0,55 до 0,8. При $\mathrm{Re} < 20$ отношение $\theta_e/\theta_{\text{торм}}$ с уменьшением числа Рейнольдса резко возрастает, и приведенная выше зависимость уже больше не выполняется.

## § 2.4. Измерение характеристик турбулентности с помощью термоанемометра; метод постоянного тока

Представим себе равномерный поток с осредненной скоростью $\bar{U}$, направление которой совпадает с компонентой турбулентной пульсации $u_1$, а компоненты $u_2$ и $u_3$ соответствуют поперечному направлению.

Предположим, далее, что турбулентные пульсации малы по сравнению с $\bar{U}$ и что влияние сжимаемости не проявляется; при этих условиях вполне справедливы линейные соотношения для тепловых потерь.

*Измерение интенсивности турбулентности.* Интенсивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости $u_1' = \sqrt{\overline{u_1^2}}$ можно измерить очень просто: путем подачи сигнала напряжения $e = -su_1$ [см. уравнение (2.12)] через усилитель (с компенсацией термического запаздывания или без нее) на термопару, которая непосредственно измеряет среднеквадратичную величину тока, соответствующего напряжению $e$.

Интенсивность поперечных компонент турбулентной пульсации скорости $u_2'$ и $u_3'$ может быть измерена путем применения нагретой нити, чувствительной к направлению.

Скорость охлаждения нити определяется, главным образом, компонентой скорости, перпендикулярной к нити. Влияние компоненты

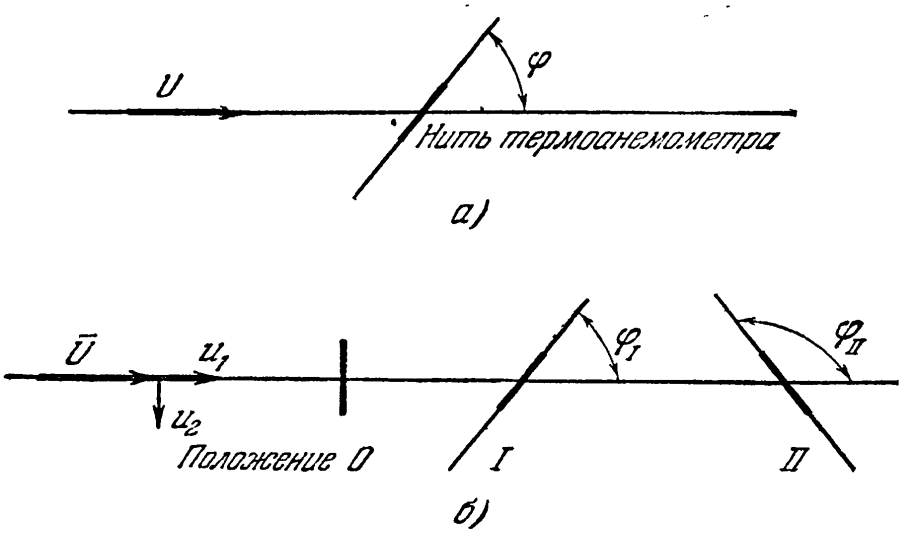



Рис. 2.3. Измерение компонент турбулентных пульсаций скорости $u_1$ и $u_2$ с помощью термоанемометра.

скорости, параллельной нити, становится заметным, лишь когда нормальная компонента скорости очень мала или отсутствует вовсе.

Следовательно, если нить составляет с направлением скорости угол $\varphi$ (см. рис. 2.3, *а*), то охлаждение происходит, в основном, за счет компоненты $U \sin\varphi$; только при очень малых значениях $\varphi$

важную роль начинает играть также компонента $U\cos\varphi$. Эффективную величину $U$ можно приближенно получить из соотношения

$$U^2_{\text{эфф}} = U^2(\sin^2\varphi + A^2\cos^2\varphi),$$

где коэффициент $A$ в зависимости от величины скорости принимает значения между 0,1 и 0,3 (величина $A$ с уменьшением скорости возрастает).

Однако для практически интересного диапазона $20° < \varphi \leqslant 90°$ оказывается возможным учитывать только компоненту $U\sin\varphi$. При этом вместо уравнения (2.7) получим

$$\frac{I^2R_w}{R_w - R_g} = A + B\sqrt{U\sin\varphi}. \tag{2.48}$$

Когда требуется измерить поперечную компоненту турбулентной пульсации скорости $u_2$, то нить надо расположить в плоскости, проходящей через $U$ и $u_2$ под углом $\varphi$ к направлению $U$. Результирующая компонента, перпендикулярная к нити, имеет вид

$$\{[(\bar{U} + u_1)\sin\varphi + u_2\cos\varphi]^2 + u_3^2\}^{1/2}.$$

Подстановка этого выражения в (2.48) и использование предположения о том, что пульсации малы по сравнению с $\bar{U}$, так что квадратичным членом, а также членами более высоких порядков можно пренебречь, приводит к следующим результатам:

$$\frac{I^2\bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} = A + B\sqrt{\bar{U}\sin\varphi}$$

при условии осреднения по времени и

$$-\frac{I^2R_gr_w}{(\bar{R}_w - R_g)^2} = B\sqrt{\bar{U}\sin\varphi}\left(\frac{u_1}{2\bar{U}} + \frac{u_2}{2\bar{U}}\operatorname{ctg}\varphi\right),$$

откуда

$$e = Ir_w = -\frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2IR_g}B\sqrt{\bar{U}\sin\varphi}\left(\frac{u_1}{\bar{U}} + \frac{u_2}{\bar{U}}\operatorname{ctg}\varphi\right) = -s_1u_1 - s_2u_2, \tag{2.49}$$

где $s_1$ и $s_2$ — величины чувствительности нагретой нити к турбулентным пульсациям скорости $u_1$ и $u_2$, определяемой уравнением (2.12).

Следовательно, в указанных условиях результат измерения определяется эффектами от двух компонент $u_1$ и $u_2$. Чтобы разделить эти эффекты, найдем сигналы нагретой нити в положениях 0, I и II, как это показано на рис. 2.3, *б*. Имеем:

в положении 0: $(e)_0 = -(s_1)_0u_1$,

в положении *I*: $(e)_{\text{I}} = -(s_1)_{\text{I}}u_1 - (s_2)_{\text{I}}u_2$,

в положении *II*: $(e)_{\text{II}} = -(s_1)_{\text{II}}u_1 + (s_2)_{\text{II}}u_2$.

Если сигналы, полученные в различных положениях, подать на термопару, то будем иметь

$$\begin{aligned}
\overline{(e^2)}_0 &= (s_1^2)_0\,\overline{u_1^2},\\
\overline{(e^2)}_{\mathrm{I}} &= (s_1)_{\mathrm{I}}^2\,\overline{u_1^2} + (s_2)_{\mathrm{I}}^2\,\overline{u_2^2} + 2(s_1)_{\mathrm{I}}(s_2)_{\mathrm{I}}\,\overline{u_1u_2},\\
\overline{(e^2)}_{\mathrm{II}} &= (s_1)_{\mathrm{II}}^2\,\overline{u_1^2} + (s_2)_{\mathrm{II}}^2\,\overline{u_2^2} - 2(s_1)_{\mathrm{II}}(s_2)_{\mathrm{II}}\,\overline{u_1u_2}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Эти уравнения могут быть решены относительно компонент $u_1'$ и $u_2'$ и, кроме того, относительно величины $\overline{u_1u_2}$. Вместо того, чтобы пользоваться одной нитью, помещаемой в различные положения, можно применить две нити, расположенные в виде буквы X или V. Если нити имеют одинаковые свойства и являются идентичными, то $(s_1)_{\mathrm{I}} = (s_1)_{\mathrm{II}}$ и $(s_2)_{\mathrm{I}} = (s_2)_{\mathrm{II}}$. Тогда интенсивности $u_1'$ и $u_2'$ можно получить более простым способом непосредственно из соотношений

$$\begin{aligned}
\overline{(e_{\mathrm{I}} + e_{\mathrm{II}})^2} &= 4s_1^2\overline{u_1^2},\\
\overline{(e_{\mathrm{I}} - e_{\mathrm{II}})^2} &= 4s_2^2\overline{u_2^2}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Интенсивность поперечной компоненты $u_3'$ турбулентной пульсации скорости может быть определена аналогичным путем.

Однако изготовление двух идентичных нитей является довольно-таки нелегкой задачей, оно едва ли осуществимо и потребует очень квалифицированного труда. Но чтобы измерения скоростей турбулентных пульсаций были надежными, различие между нитями должно быть чрезвычайно мало. Если $s_{\mathrm{I}} = (1+n)\,s_{\mathrm{II}}$, то при измерении величин $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ получается ошибка около $100n$ %.

Метод постоянного тока рассматривался в работах [5] и [20–25]; эта литература характеризует прогресс, достигнутый в применении этого метода. В частности, работа Шубауэра и Клебанова [25] дает довольно полное описание устройства термоанемометра; читателю следует также рекомендовать обзорную статью Купера и Тулина [83].

*Измерение двойных и тройных корреляций скорости.* Выше уже было показано, что двойную корреляцию $\overline{u_1u_2}$ можно получить из решения уравнения (2.50). Это довольно просто, если предположить, что $(s_1)_{\mathrm{I}} = (s_1)_{\mathrm{II}}$ и $(s_2)_{\mathrm{I}} = (s_2)_{\mathrm{II}}$, так как в этом случае

$$\overline{(e^2)}_{\mathrm{I}} - \overline{(e^2)}_{\mathrm{II}} = 4s_1s_2\,\overline{u_1u_2}.$$

Аналогично можно определить корреляцию $\overline{u_1u_3}$.

Для отыскания корреляции $\overline{u_2u_3}$ поместим X-образно расположенные нити так, чтобы одна нить, скажем, совпадала с плоскостью

$(\bar{U}, u_2)$, а другая — с плоскостью $(\bar{U}, u_3)$ и каждая из нитей составляла равные углы $\varphi$ с направлением скорости $\bar{U}$. Если обе нити снова считать идентичными, то

$$e_{\mathrm{I}} = -s_1 u_1 - s_2 u_2, \quad e_{\mathrm{II}} = -s_1 u_1 - s_2 u_3,$$

а величина $\overline{u_2 u_3}$ может быть вычислена из соотношения

$$\overline{(e_{\mathrm{I}} - e_{\mathrm{II}})^2} = s_2^2 (\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} - 2\overline{u_2 u_3}).$$

Пространственные эйлеровы корреляции $g$ и $f$ тоже можно найти с помощью двух нитей.

Для определения коэффициента поперечной корреляции $g(x_2)$ поместим нити в двух точках $A$ и $B$, расположенных друг от друга на расстоянии $x_2$ в одной и той же плоскости, перпендикулярной к направлению $U$. С помощью этих нитей измерим осевые компоненты турбулентных пульсаций в точках $A$ и $B$; это делается путем размещения нитей перпендикулярно к направлению скорости $U$. Сигналы напряжения от нитей $A$ и $B$ запишутся в виде

$$e_A = (s_1)_A (u_1)_A, \quad e_B = (s_1)_B (u_1)_B.$$

Тогда имеем

$$\overline{(e_A + e_B)^2} = (s_1^2 \overline{u_1^2})_A + (s_1^2 \overline{u_1^2})_B + 2(s_1)_A (s_1)_B \overline{(u_1)_A (u_1)_B},$$
$$\overline{(e_A - e_B)^2} = (s_1^2 \overline{u_1^2})_A + (s_1^2 \overline{u_1^2})_B - 2(s_1)_A (s_1)_B \overline{(u_1)_A (u_1)_B}.$$

Корреляция $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ в этом случае может быть вычислена либо по отношению

$$\frac{\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2}}{\overline{(e_A + e_B)^2} + \overline{(e_A - e_B)^2}},$$

если нити достаточно одинаковы, чтобы можно было положить $(s_1)_A = (s_1)_B$, либо по отношению

$$\frac{\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2}}{e'_A e'_B},$$

в случае которого соблюдение равенства $(s_1)_A = (s_1)_B$ не обязательно, поскольку эти величины в данном выражении сокращаются.

Если нити неидентичны, но мы тем не менее хотим воспользоваться первым способом, то это уравнение все же может быть решено в случае, когда поле турбулентности потока однородно и, стало быть, $(u_1')_A = (u_1')_B = u_1'$. Полагая, что $(s_1)_B = (1+n)(s_1)_A$, имеем

$$\frac{\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2}}{\overline{(e_A + e_B)^2} + \overline{(e_A - e_B)^2}} = \frac{2(s_1)_A (s_1)_B}{(s_1^2)_A + (s_1^2)_B} \frac{\overline{(u_1)_A (u_1)_B}}{u_1'^2} \approx \left(1 - \frac{n^2}{2}\right) g(x_2).$$

Даже в том случае, когда $(s_1)_A$ и $(s_1)_B$ отличаются друг от друга на 20%, ошибка при измерении величины $g(x_2)$ составляет всего около 2%. Отсюда можно сделать вывод, что нити вовсе не обязательно должны быть совершенно идентичны, а могут обладать несколько отличными свойствами.

Подобный метод можно применить и для отыскания коэффициента продольной корреляции $f$.

Если одна нить расположена очень близко от другой, то при использовании описанного метода могут возникнуть трудности, обусловленные тем, что в этом случае на нить, находящуюся ниже по течению, будет оказывать влияние аэродинамический след от другой нити. Чтобы избежать этого затруднения, можно расположить нити не точно в плоскости, параллельной скорости осредненного потока $\overline{U}$, а немного сместить вторую нить вбок относительно первой нити. Очевидно, однако, что в этом случае должно как-то проявиться влияние поперечной корреляции $g(x_2)$. Таким образом, вместо одного затруднения так или иначе возникает другое. Следовательно, измерения, осуществляемые тем или иным способом, при малых значениях осевого расстояния $x_1$ будут в какой-то степени ненадежными.

Имеется, однако, еще один метод, который позволяет определить коэффициент продольной корреляции $f(x_1)$. Этим методом можно пользоваться, когда все поле имеет постоянную и равномерную осредненную скорость и когда относительная интенсивность турбулентности $u_1'/\overline{U}$ очень мала. В главе 1 было показано, что в этом случае эйлерова пространственная корреляция $f(x_1)$ почти идентична с эйлеровой временной корреляцией $R_E(t)$, так как в первом приближении $x_1 = \overline{U}t$ [см. уравнения (1.64) и (1.65)]. Следовательно, величина $f(x_1)$ может быть определена по измерению эйлеровой временной корреляции $R_E(t)$.

Метод и аппаратура для измерения временных корреляций в некоторой точке поля течения были разработаны Фавром [16, 17]. В принципе этот метод состоит в записи пульсаций скорости на магнитную ленту. Затем эта лента приводится в движение с известной скоростью $V$ между двумя звукоснимателями, расположенными друг от друга на расстоянии $a$. Изменение электрического напряжения, возникающего на звукоснимателях, соответствует турбулентным пульсациям с интервалом времени $\tau = a/V$. Для определения коэффициента корреляции $R_E(t)$ выходные сигналы обоих контактов можно обработать так же, как выходные сигналы двух нагретых нитей; этот способ описан выше.

С помощью этого метода можно также измерять пространственно-временные корреляции, используя для этой цели две нагретые нити, помещенные в двух точках поля течения, и регистрируя пульсации, воспринимаемые этими нитями, на двух магнитных лентах. Фавр

со своими сотрудниками осуществил подобные измерения при изотропном турбулентном течении вниз по потоку от турбулизирующей решетки и в турбулентном пограничном слое на плоской пластине.

Основной недостаток практического использования этого метода состоит, по-видимому, в том, что при этом требуется довольно сложный лентопротяжный механизм с широким диапазоном скоростей. Функции временной корреляции некоторой случайной величины можно, конечно, получить и другими способами, которые позволяют регистрировать либо непрерывный, либо импульсный сигнал в течение некоторого наперед заданного промежутка времени. Скиннер [81] приводит описание аппаратуры, основанной на принципе последнего из этих методов и искусно примененной для измерения временной корреляции скорости.

Еще один метод получения корреляции по осциллограммам описан Такером [79]. Запись осциллограмм осуществляется фотографическим способом в виде черно-белого изображения на прозрачной пленке. Поперечные корреляции получаются путем «сканирования» двух записей соответствующими световыми лучами и направления этих лучей после того, как они проходят через прозрачную пленку, на один и тот же фотоэлемент. Сумма двух сигналов напряжения на фотоэлементе подается через усилитель в цепь формирования прямоугольных импульсов. Если $e_1(t)$ — функция напряжения одной записи, а $e_2(t+\tau)$ — другой, то

$$\overline{[e_1(t)+e_2(t+\tau)]^2}=\overline{[e_1(t)]^2}+\overline{[e_2(t+\tau)]^2}+\overline{2e_1(t)\,e_2(t+\tau)}.$$

Третий член в правой части этого уравнения пропорционален искомой корреляции. Ясно, что можно «сканировать» и одну запись двумя световыми лучами, отстоящими друг от друга на расстоянии $V\tau$, где $V$ — скорость «сканирования»; этим путем удается получить временные корреляции.

Для определения корреляции можно подавать выходные сигналы от двух нагретых нитей вместо термопары на две пары отклоняющих пластин катодно-лучевой трубки. При этом отклонение светового пятна на экране трубки, соответствующее одной из нагретых нитей, будет перпендикулярно к отклонению светового пятна, соответствующему другой нагретой нити. В результате световое пятно описывает на экране так называемые фигуры Лиссажу. Фотография этого изображения, произведенная с длительной экспозицией, дает некоторый эллипс, который является корреляционным. Пусть $2a$ и $2b$ означают соответственно большую и малую оси этого эллипса; тогда можно показать, что коэффициент корреляции равен $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$.

Когда коэффициент корреляции близок к нулю, то отклонение эллипса от окружности очень мало. В этом случае точное измерение

величин $a$ и $b$, а значит и малых значений коэффициента корреляции, очень затруднительно. Поскольку, однако, точная форма корреляционной кривой при малых значениях коэффициента корреляции не представляет особого интереса, то недостаток, присущий этому методу, не очень существен. Более существенным этот недостаток становится в тех случаях, когда коэффициент корреляции почти равен единице. При этом эллипс вырождается в почти прямую линию переменной толщины. И в связи с тем, что кривые, регистрируемые на экране трубки, уже обладают конечной толщиной, измерить незначительные отклонения от «нормальной» толщины этих линий представляется очень трудной задачей: даже ошибку в 1% при определении коэффициента корреляции следует признать довольно большой, если она относится к разнице по сравнению с единицей. Поскольку форма кривой эйлеровой пространственной корреляции вблизи ее вершины имеет важное значение для определения величины масштаба диссипации, желательно видоизменить этот метод так, чтобы он давал более точное значение коэффициента корреляции в окрестности полной корреляции.

Вероятно, следует еще раз напомнить, что другие методы, описанные выше, также обладают этим недостатком, приводя к относительно неточному определению коэффициента корреляции при значениях его, близких к единице.

Тэйлор [18] предложил метод, с помощью которого коэффициент корреляции $R$ в окрестности $R = 1$ можно определять более точно. В этом методе непосредственно измеряется величина $1 - R^2$.

Как было показано в главе 1, для описания изменения двойной корреляции по времени должна быть известна тройная корреляция $S_{ik,j}$. Кроме того, упоминалось также, что в случае однородной изотропной турбулентности существенными являются только три из 27 компонент тензора тройной корреляции; коэффициенты этих трех корреляций суть $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$ [см. (1.46)]. Как будет показано ниже, в главе 3, между этими тремя корреляциями имеется определенная зависимость; поэтому вполне достаточно измерить только одну из них. Наиболее просто производится измерение коэффициента тройной корреляции $k(r)$. Для этой цели две нагретые нити располагаются параллельно друг другу, будучи при этом перпендикулярными к направлению скорости осредненного потока $U$ и удаленными одна от другой в направлении осредненного потока на расстояние $r = x_1$. Пусть $A$ и $B$ — две интересующие нас точки, а $(\dot{e})_A$ и $(e)_B$ — пульсации напряжения, вызываемые нитями соответственно в точках $A$ и $B$. Тогда

$$k(r) = \frac{\overline{e_A^2 e_B}}{e'^3}.$$

Таким образом, сигнал от нити в точке $A$ должен быть преобразован в прямоугольный. И если это возможно, то величину $\overline{e_A^2 e_B}$ можно получить из соотношения

$$4\overline{e_A^2 e_B} = \overline{(e_A^2 + e_B)^2} - \overline{(e_A^2 - e_B)^2}.$$

Один из методов получения величины $\overline{e_A^2 e_B}$ описан Таунсендом [19]. Этот метод основан на квадратичной анодной характеристике триода при малом анодном токе, когда режим работы триода соответствует точке максимальной кривизны этой характеристики. Таким образом, имеем соотношение

$$i = \alpha e + \beta e^2,$$

где $i$ — анодный ток, а $e$ — потенциал сетки.

Возьмем теперь два идентичных триода и подадим на один из них сигнал $(e)_A$, а на другой — $(e)_A$. Тогда полный анодный ток этих двух триодов будет равен

$$i_1 + i_2 = 2\beta e_A^2.$$

Этот суммарный сигнал вместе с сигналом $+(e)_B$ подается на третий триод, а тот же суммарный сигнал вместе с сигналом $-(e)_B$ на четвертый триод. При этом для третьего триода имеем

$$i_3 = \alpha(\beta e_A^2 + e_B) + \beta(\beta e_A^2 + e_B)^2,$$

а для четвертого триода

$$i_4 = \alpha(\beta e_A^2 - e_B) + \beta(\beta e_A^2 - e_B)^2,$$

откуда

$$\overline{i_3 - i_4} = 4\beta^2 \overline{e_A^2 e_B}.$$

*Измерение спектра и масштаба турбулентности.* Спектральный анализ, например, квадрата интенсивности $\overline{u_1^2}$ может быть произведен при помощи соответствующей схемы с узкополосным фильтром. Основное требование при этом состоит в том, чтобы входной сигнал не имел искажения и не претерпевал значительных изменений по амплитуде. Эту амплитуду, конечно, можно было бы с помощью усилителя вновь повысить до ее первоначальной величины, но в этом случае усилитель не должен вносить какого-либо искажения.

Описание схемы фильтра можно найти в статье Бетхова [26].

Интегральный масштаб, например эйлеров масштаб,

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f\,dx_1$$

может быть получен путем определения площади под кривой $f(x_1)$. При этом могут возникнуть затруднения, когда корреляционная кривая для больших расстояний устойчиво колеблется около нулевого значения. Конечно, эту кривую можно было бы прервать в некоторой точке, но это вносит произвол и является неправомерным.

Для частного случая определения эйлерова интегрального временного масштаба $\mathcal{J}_E = \int_0^\infty R_E\,dt$ Таунсендом [19] был предложен еще один, очень изящный метод. В этом методе используется функция энергетического спектра $E_1(n)$. Из соотношения

$$R_E(t) = \frac{1}{u_1^2}\int_0^\infty E_1(n)\cos 2\pi nt\,dn \tag{1.88}$$

следует, что

$$\int_0^\infty R_E(t)\,\Phi(t)\,dt = \frac{1}{u_1^2}\int_0^\infty E_1(n)\,dn\int_0^\infty \Phi(t)\cos 2\pi nt\,dt, \tag{2.52}$$

где $\Phi(t)$ — произвольная функция, которая, однако, должна удовлетворять следующим условиям:

1. $\int_0^\infty R_E(t)\,\Phi(t)\,dt = \int_0^\infty R_E(t)\,dt = \mathcal{J}_E$.

2. Интеграл $\int_0^\infty \Phi(t)\cos 2\pi nt\,dt$ сходится.

3. Процесс интегрирования функции $\Phi$ может быть осуществлен с помощью электронной схемы.

Эти условия удовлетворяются, когда функция $\Phi(t)$ такова, что для промежутков времени, при которых величина $R_E(t)$ все еще существенна, отклонение ее от единицы мало, но если $t$ велико, она стремится к нулю и при этом второй интеграл сходится.

Подобной функцией, которая к тому же удовлетворяет и третьему условию, является, например,

$$\Phi(t) = \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right).$$

Подстановка этого выражения в соотношение (2.52) дает

$$\mathcal{J}_E = \int_0^\infty R_E(t)\,\Phi(t)\,dt = \frac{1}{u_1^2}\int_0^\infty E_1(n)\,\frac{2t_0}{\left(1+4\pi^2n^2t_0^2\right)^2}\,dn.$$

Величина $t_0$ должна быть выбрана так, чтобы

$$\int_0^\infty R_E(t)\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)dt=\int_0^\infty R_E(t)\,dt.$$

Это условие удовлетворяется, если значение $t_0$ велико по сравнению с $\mathcal{J}_E$. Положим, например, что зависимость $R_E(t)$ представляется экспоненциальной функцией вида $\exp(-t/\mathcal{J}_E)$. Тогда правая часть этого уравнения дает величину $\mathcal{J}_E$, а левая —

$$t_0\frac{2+t_0/\mathcal{J}_E}{(1+t_0/\mathcal{J}_E)^2}.$$

Следовательно, если $\mathcal{J}_E/t_0\ll 1$, то отношение левой части уравнения к правой принимает вид

$$\frac{t_0}{\mathcal{J}_E}\,\frac{2+t_0/\mathcal{J}_E}{(1+t_0/\mathcal{J}_E)^2}=1+\text{член порядка }\frac{\mathcal{J}_E^2}{t_0^2}.$$

Очевидно, что, когда осредненная скорость турбулентного потока $\overline{U}$ велика по сравнению с турбулентными пульсациями, то этот метод позволяет найти эйлеров интегральный масштаб $\Lambda_f=\overline{U}\mathcal{J}_E$.

Микромасштаб $\lambda$ может быть определен с помощью соприкасающейся в вершине корреляционной кривой параболы. Основное требование при этом состоит в том, чтобы была точно известна форма корреляционной кривой вблизи ее вершины. В предыдущем параграфе было показано, что, когда коэффициент корреляции близок к единице, точное измерение корреляции является весьма непростой задачей. Поэтому было бы очень желательно иметь для определения $\lambda$ другой способ.

Таунсенду [19] и на этот раз удалось найти довольно простой метод измерения микромасштаба $\lambda_f$. Для турбулентного поля, осредненная скорость которого $\overline{U}$ постоянна и велика по сравнению с турбулентными пульсациями, этот метод является прямым. При этом Таунсенд воспользовался соотношениями

$$\frac{2}{\lambda_f^2}=-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1=0}=\frac{1}{u'^2}\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}=\frac{1}{\overline{U}^2u'^2}\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2}.$$

Таким образом, величина $\lambda_f$ может быть измерена посредством введения в электронную схему дифференцирующей цепи.

Повторное дифференцирование позволило бы измерить также величину

$$\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4}\right]_{x_1=0} = \frac{1}{\bar{U}^4 u'^2}\overline{\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)^2}$$

и т. д.

Лауфер [27] и Липман [28] предложили метод определения $\lambda_f$ по среднему числу $N_0$ нулей пульсации $u_1$ в единицу времени:

$$\frac{1}{\lambda_f} = \frac{\pi N_0}{\bar{U}\sqrt{2}}. \tag{2.53}$$

Это соотношение может быть доказано весьма простым путем для того случая, когда пульсация $u_1$ представляет собой чистую гармонику

$$u_1 = u_1^* \sin\frac{2\pi t}{T},$$

где $T$ — период. Число $N_0$ нулей пульсации $u_1$ в единицу времени составляет $N_0 = 2/T$. Теперь можно выразить период $T$ через $u_1$ и $du_1/dt$. Однако целесообразнее выразить $T$ через $\overline{(u_1^2)}^{1/2}$ и $\left[\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}\right]^{1/2}$, поскольку в этом случае получается более простое выражение. Кроме того, при реальной турбулентности $u_1$ и $du_1/dt$ являются статистическими величинами, в качестве средних значений которых могут быть взяты, как известно, среднеквадратичные величины. Поскольку

$$\sqrt{\overline{u_1^2}} = \frac{u^*}{\sqrt{2}}$$

и

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}} = \frac{2\pi u^*}{T\sqrt{2}},$$

то отсюда следует, что

$$N_0 = \frac{2}{T} = \frac{\sqrt{\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}}}{\pi\sqrt{\overline{u_1^2}}} = \bar{U}\frac{\sqrt{\overline{\left(\frac{du_1}{dx_1}\right)^2}}}{\pi\sqrt{\overline{u_1^2}}}. \tag{2.54}$$

Лауфер и Липман показали, что точно такое же выражение можно получить и для случая реальной турбулентности при условии, если $u_1$ и $du_1/dx_1$ имеют гауссово распределение плотности вероятности и $\overline{u_1(du_1/dx_1)} = 0$. Последнее условие выполняется в случае однородной турбулентности (см. главу 1). Таунсендом [19] было

обнаружено, что при изотропной турбулентности распределение плотности вероятности $u_1$ практически является гауссовым, но что в отношении $du_1/dx_1$ этого сказать нельзя; распределение этой величины, по опытам Таунсенда, определенно является слабо асимметричным.

Но в главе 1 было показано, что для однородной турбулентности справедливо соотношение

$$\frac{2}{\lambda_f^2} = \frac{\overline{(du_1/dx_1)^2}}{\overline{u_1^2}}.$$

Подстановка его в формулу (2.54) дает

$$\frac{1}{\lambda_f} = \frac{\pi N_0}{\overline{U}\sqrt{2}}.$$

В главе 3 будет показано, что при изотропной турбулентности

$$\lambda_f = \lambda_g \sqrt{2}$$

и, следовательно, соответствующее соотношение для масштаба диссипации $\lambda_g$ запишется так:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{\pi N_0}{\overline{U}}. \qquad (2.53а)$$

Экспериментальная методика определения числа нулей пульсации $u_1$ в принципе очень проста. Осциллограмма $u_1$ изображается на экране катодно-лучевой трубки. Перед этой трубкой устанавливается диск с узкой щелью, которая соответствует нулевой линии осциллограммы. Всякий раз, когда $u_1$ принимает нулевое значение, световой луч катодно-лучевой трубки проходит через щель и падает на фотоэлемент. Генерируемый при этом импульс напряжения подается в электронную счетную цепь.

Липман и Робинзон [59] разработали метод и создали аппаратуру применительно к этому методу, который позволяет определять плотность вероятности какой-либо статистической величины посредством счета импульсов. Подсчет нулей — частный случай этого метода; по плотности вероятности возможно также находить осредненные значения различных степеней этой функции, зная соответствующие моменты функции плотности вероятности. Применение этого метода для измерения плотности вероятности $u_1$ и $du_1/dt$ при изотропной турбулентности показало, что между этими двумя плотностями вероятности может существовать некоторая статистическая зависимость. Однако полученных данных еще недостаточно для объяснения какого бы то ни было различия между значениями $\lambda_f$, измеренными методом подсчета нулей и каким-либо другим способом.

## § 2.5. Измерение пульсаций температуры и концентрации термоанемометром; метод постоянного тока

Возможность измерения пульсаций температуры в газе при помощи термоанемометра обеспечивается тем, что, во-первых, разность температур нити и газа зависит от пульсаций температуры газа и, во-вторых, свойства газа в пленке вокруг нити изменяются в зависимости от температуры газа. В § 2.3 было показано, что из двух коэффициентов — $A$ и $B$ — в формуле (2.7) величина $A$ особенно чувствительна к изменению температуры. Однако, как мы увидим ниже, при нормальных условиях работы термоанемометра чувствительность нити к пульсациям температуры газа определяется, в основном, непосредственным влиянием разности температур нити и газа, а не изменением коэффициента $A$.

Для случая принятой выше линейной зависимости коэффициента теплопроводности газа от температуры было получено (см. § 2.3) следующее выражение для коэффициента $A$:

$$A_f = A_g\left[1 + \frac{a_1}{2(a + a_1\Theta_g)}(\Theta_w - \Theta_g)\right]. \tag{2.36}$$

Поскольку $A_g$ тоже рассматривается здесь как пульсирующая величина, то лучше ввести характерную температуру $\Theta_0$ и величину $A_0$, отнесенную к этой температуре. Тогда выражение для $A_f$ запишется следующим образом:

$$A_f = \frac{A_0}{a + a_1\Theta_0}\left[a + \frac{a_1}{2}(\Theta_w - \Theta_g)\right] + \frac{a_1 A_0}{a + a_1\Theta_0}\Theta_g, \tag{2.55}$$

где

$$A_0 = 0{,}42\,\frac{e\pi l}{bR_0}\,\mathrm{Pr}^{0{,}20}\,(a + a_1\Theta_0).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7), получаем

$$\frac{I^2R_w}{R_w - R_g} = \frac{A_0}{a + a_1\Theta_0}\left[a + \frac{a_1}{2}(\Theta_w - \Theta_g)\right] + \frac{a_1 A_0}{a + a_1\Theta_0}\Theta_g + B\sqrt{U}. \tag{2.56}$$

Положим, как и прежде, что

$$R_w = \bar{R}_w + r_w, \quad R_g = \bar{R}_g + r_g, \quad \Theta_g = \bar{\Theta}_g + \theta_g, \quad U = \bar{U} + u.$$

Тогда из (2.56), пренебрегая членами, нелинейными относительно $r_w$, $r_g$, $\theta_g$ и $u$, находим

$$\frac{I^2 r_w}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} = \left[\frac{\bar{A}_f + B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} + \frac{A_0 a_1}{2b\,(a + a_1\Theta_0)\,R_0}\right] r_w + \\ + \left[\frac{A_0 a_1}{2\,(a + a_1\Theta_0)} - \frac{\bar{A}_f + B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g}\,bR_0\right]\theta_g + B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{2\bar{U}},$$

где $\bar{A}_f$ — осредненная величина выражения (2.55).

Но при нормальных условиях работы термоанемометра и для геометрических размеров нитей, обычно применяемых при измерениях турбулентности, оказывается, что величина

$$\frac{A_0 a_1}{2b\,(a + a_1\Theta_0)\,R_0} \ll \frac{\bar{A}_f + B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g},$$

т. е. составляет около 10% или еще меньше. Пренебрегая малыми членами, упростим предшествующее уравнение следующим образом:

$$\frac{I^2 r_w}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} = \frac{\bar{A}_f + B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} r_w - \frac{\bar{A}_f + B\sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} bR_0\theta_g + B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{2\bar{U}},$$

или

$$\frac{I^2 \bar{R}_g r_w}{(\bar{R}_w - \bar{R}_g)^2} = \frac{bI^2 \bar{R}_w R_0}{(\bar{R}_w - \bar{R}_g)^2}\theta_g - B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{2\bar{U}}.$$

Отсюда

$$e = Ir_w = I\frac{b\bar{R}_w R_0}{\bar{R}_g}\theta_g - \frac{(\bar{R}_w - \bar{R}_g)^2}{2I\bar{R}_g} B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{\bar{U}}. \qquad (2.57)$$

Введем в рассмотрение чувствительность к пульсациям скорости $s$, определенную уравнением (2.12), и чувствительность к пульсациям температуры $s_\theta$, которая определяется формулой

$$\sqrt{\overline{e^2}} = s_\theta \sqrt{\overline{\theta_g^2}}. \qquad (2.58)$$

Тогда соотношение (2.57) примет вид

$$e = -su + s_\theta\theta_g, \qquad (2.59)$$

где

$$s_\theta = I\frac{b\bar{R}_w R_0}{\bar{R}_g}. \qquad (2.60)$$

Хотя величины $s$ и $s_\theta$ можно вычислить, взяв для $B$ выражение (2.9), тем не менее обычно пользуются более надежным способом экспериментального определения этих величин.

Соотношение (2.59) является фундаментальным для измерения турбулентных пульсаций температуры, а также их корреляций с пульсациями скорости.

Запишем прежде всего среднеквадратичное значение выражения (2.59):

$$\overline{e^2} = s^2\overline{u^2} + s_\theta^2\overline{\theta_g^2} - 2ss_\theta\overline{u\theta_g}. \qquad (2.61)$$

Если бы можно было добиться, чтобы $s \ll s_\theta$, то тогда уравнение (2.61) свелось бы к соотношению, которое дает непосредственно

величину $\overline{\theta_g^2}$. Если бы, с другой стороны, представилось возможным сделать $s \gg s_\theta$, то тогда мы смогли бы получить из (2.61) величину $\overline{u^2}$. В первом случае величина $u$ должна быть, самое большее, того же порядка, что и $\theta_g$; во втором случае должно выполняться условие $\theta_g \ll u$. Таким образом, для обеспечения возможности использования обоих методов можно потребовать, чтобы $u$ и $\theta_g$ были одинаковыми по порядку величинами.

Обеспечив $s \ll s_\theta$, имеем $e \approx s_\theta \theta_g$; это позволяет получить осциллограмму пульсаций температуры.

Но добиться того, чтобы $s \ll s_\theta$, можно в том случае, когда разность $\bar{R}_w - \bar{R}_g$ достаточно мала. Этот вывод нельзя получить непосредственно из выражений для $s$ и $s_\theta$, но его не трудно проверить, если определить численные значения величин, содержащихся в этих выражениях, для соответствующих рабочих условий.

Когда величина $\bar{R}_w - \bar{R}_g$ выбирается достаточно малой, то термоанемометр работает, как термометр сопротивления.

Наоборот, величину $s$ можно сделать большой по сравнению с $s_\theta$, выбрав большую величину $\bar{R}_w - \bar{R}_g$. Однако это не всегда представляется возможным, особенно когда $\bar{R}_g$ и $\bar{U}$ велики, потому что величина $\bar{R}_w$ ограничена максимально допустимой температурой нити.

Чтобы обойти это затруднение, мы можем получить все три неизвестные в правой части соотношения (2.61), придавая каждой из величин $s$ и $s_\theta$ три различных значения. Это вполне осуществимо, так как $s$ и $s_\theta$ зависят от $\bar{\Theta}_w/\bar{\Theta}_g$ различным образом, благодаря чему термоанемометр может работать при трех уровнях температуры. Другой, правда, менее практичный способ состоит в использовании трех нитей с различными диаметрами, поскольку $s$ и $s_\theta$ зависят от диаметра нити. Очевидно, что при этом должна быть известна зависимость $s$ и $s_\theta$ от $\bar{\Theta}_w/\bar{\Theta}_g$ или от диаметра нити. По трем значениям $\overline{e^2}$, полученным при работе либо с одной нитью при трех различных уровнях температуры, либо с тремя нитями, имеющими различные диаметры, можно определить величины $\overline{u^2}$, $\overline{\theta_g^2}$ и $\overline{u\,\theta_g}$.

Помещая нить под некоторым углом к направлению скорости осредненного потока $\bar{U}$, можно измерить величины $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_2\theta_g}$ или $\overline{u_3^2}$ и $\overline{u_3\theta_g}$. На практике это можно осуществить, например, при помощи двух идентичных нитей, расположенных в форме буквы X.

Выходной сигнал одной нити запишется как

$$e_1 = -(s_1)_1 u_1 - (s_2)_1 u_2 + s_\theta \theta_g,$$

а выходной сигнал второй нити — как

$$e_{II} = -(s_1)_{II} u_1 + (s_2)_{II} u_2 + s_\theta \theta_g.$$

Из этих соотношений непосредственно получаем величины $\overline{u_1^2}$ и $\overline{u_2^2}$ [см. уравнение (2.51)], так как для идентичных нитей $(s_1)_I = (s_1)_{II}$ и $(s_2)_I = (s_2)_{II}$, а средняя разность квадратов выходных сигналов дает

$$\overline{e_I^2 - e_{II}^2} = -4 s_2 s_\theta \overline{u_2 \theta_g} + 4 s_1 s_2 \overline{u_1 u_2}.$$

Опять-таки, обеспечивая $s_\theta \gg s$ (разность $\bar{R}_w - \bar{R}_g$ мала; термоанемометр работает в режиме термометра сопротивления), можно получить величину $\overline{u_2 \theta_g}$; корреляция $\overline{u_1 u_2}$ может быть найдена посредством удовлетворения неравенству $s_\theta \ll s$.

При работе нитей на двух различных уровнях температуры, когда можно составить два независимых уравнения для $\overline{u_2 \theta_g}$ и $\overline{u_1 u_2}$, оказывается также возможным вычислить и корреляции $\overline{u_2 \theta_g}$ и $\overline{u_1 u_2}$.

Если величина $\overline{\theta_g^2}$ может быть получена как прямой выходной сигнал термоанемометра, то при помощи подходящего фильтра можно определить и ее спектральное распределение.

Для измерения пространственных корреляций между пульсациями скорости и температуры в двух точках поля течения можно воспользоваться либо двумя отдельными нагретыми нитями (при измерении осевой компоненты $u_1$ и $\theta_g$), либо двумя парами нитей, расположенных в форме буквы X (при измерении поперечных компонент $u_2$ и $u_3$ и $\theta_g$). Однако при этом должно быть сделано предположение, что средние величины скорости и температуры однородны.

Так, для измерения корреляций между компонентами $u_1$ в двух точках $A$ и $B$ и корреляций между пульсациями $\theta_g$ в качестве исходных соотношений следует воспользоваться равенствами

$$e_A = -s_A (u_1)_A + (s_\theta)_A (\theta_g)_A, \quad e_B = -s_B (u_1)_B + (s_\theta)_B (\theta_g)_B.$$

Вследствие предположения об однородности поля течения и идентичности обеих нитей, $s_A = s_B$ и $(s_\theta)_A = (s_\theta)_B$.

Отсюда имеем

$$\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2} = 4 s_\theta^2 \overline{(\theta_g)_A (\theta_g)_B} + 4 s^2 \overline{(u_1)_A (u_1)_B} - \\ - 4 s s_\theta \left[\overline{(\theta_g)_A (u_1)_B} + \overline{(\theta_g)_B (u_1)_A}\right].$$

Производя измерения при трех различных температурах нити, можно определить $\overline{(\theta_g)_A (\theta_g)_B}$ и $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$. Перекрестные корреляции между пульсациями температуры и скорости в двух точках, хотя

они и получаются автоматически при использовании этого метода, лишены физического смысла и поэтому не имеют практического значения.

Ясно, что для получения $\overline{(\theta_g)_A(\theta_g)_B}$ или $\overline{(u_1)_A(u_1)_B}$ мы вновь можем сделать так, чтобы соответственно $s_\theta \gg s$ или $s_\theta \ll s$.

Когда корреляция $\overline{(\theta_g)_A(\theta_g)_B}$ получена для различных расстояний между двумя точками, то можно определить и пространственный масштаб пульсаций температуры.

Измерение пульсаций температуры в турбулентном потоке впервые было проведено Корсином [29]. В основу своего теоретического анализа Корсин положил уравнение переноса тепла от нити к движущемуся газу, предложенное Кингом; поэтому в качестве температуры газа он взял температуру окружающего газа снаружи пограничного слоя, а не пленочную температуру. В соответствии с этим Корсин получил выражение для $s_\theta$, отличное от того, которое определяется уравнением (2.60). Но поскольку в этом методе величина $s_\theta$ определяется экспериментально, то это отличие не приводит к практически важным последствиям.

*Измерение пульсаций концентрации.* Принципиальная возможность измерения пульсаций концентрации посредством термоанемометра обусловлена главным образом зависимостью $k_g$ и $\rho_g$ от рода газа. В этом случае из уравнения (2.7) снова можно вывести соотношение вида

$$e = -su - s_\gamma \gamma,$$

где $s_\gamma$ — чувствительность нити к пульсациям концентрации $\gamma$ одного газа в другом.

На первый взгляд может показаться, что в этом случае должна была бы применяться точно такая же методика, как и для измерения пульсаций температуры. Однако между двумя этими случаями имеется существенное различие. Чувствительности $s$ и $s_\theta$ зависят от температуры неодинаково; поэтому при работе с различными температурами нити получаются различные и независимые соотношения. Но при измерении концентрации как $s$, так и $s_\gamma$ изменяются пропорционально температуре нити; поэтому при работе на различных уровнях температуры нити нельзя получить независимые уравнения. Такие независимые уравнения могут быть получены только при использовании нитей с различными диаметрами. К счастью, зависимость обоих коэффициентов $A$ и $B$ от диаметра нити оказывается очень сильной, поэтому, чтобы подходить для этой цели, диаметры нитей должны отличаться совсем незначительно. Однако очевидно, что измерения с помощью двух различных нитей, расположенных одна за другой, являются довольно сложными.

В работе [29] Корсин описывает методы измерения статистических величин в турбулентном поле концентрации.

## § 2.6. Метод постоянной температуры

В этом методе электрическое сопротивление нити и соответственно ее температура поддерживаются, насколько это возможно, постоянными. Любое незначительное изменение температуры и, следовательно, электрического сопротивления, связанное с охлаждающим воздействием пульсаций турбулентного потока, немедленно компенсируется при помощи электрической цепи обратной связи, которая изменяет электрический ток через нить, как только происходит изменение электрического сопротивления. При этом цепь обратной связи срабатывает почти мгновенно.

Обозначим через $r_w$ слабое изменение электрического сопротивления, а через $g_{кр}$ крутизну характеристики электрического контура. Тогда связь между компенсирующим электрическим током $i$ и сопротивлением $r_w$ определится формулой

$$i = -g_{кр} I r_w. \tag{2.62}$$

Чувствительность термоанемометра, работающего при постоянном электрическом сопротивлении, к пульсациям скорости может быть определена, как и соответствующая чувствительность в методе постоянного тока, из соотношения (2.7).

Пусть при электрическом сопротивлении, существенно постоянном и равном $\overline{R}_w$,

$$I = \overline{I} + i, \quad U = \overline{U} + u. \tag{2.63}$$

Положим, далее, что мы имеем дело только с малыми пульсациями; тогда из уравнения (2.7) получим

$$\overline{I^2}\overline{R}_w + 2i\overline{I}\overline{R}_w = (\overline{R}_w - R_g)\left(A + B\sqrt{\overline{U}}\right) + (\overline{R}_w - R_g) B \sqrt{\overline{U}} \frac{u}{2\overline{U}},$$

откуда

$$i = \frac{\overline{R}_w - R_g}{4\overline{I}\overline{R}_w} B \sqrt{\overline{U}} \frac{u}{\overline{U}}$$

и

$$e = \overline{R}_w i = \frac{\overline{R}_w - R_g}{4\overline{I}} B \sqrt{\overline{U}} \frac{u}{\overline{U}} = s_{п.т.}\, u, \tag{2.64}$$

где величина

$$s_{п.т.} = \frac{\overline{R}_w - R_g}{4\overline{I}} \frac{B\sqrt{\overline{U}}}{\overline{U}}$$

представляет собой чувствительность при работе на режиме постоянной температуры.

Из сравнения этого выражения с аналогичным уравнением (2.13) для случая метода постоянного тока следует, что

$$s_{\text{п. т.}} = \frac{1}{2}\frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g}\, s, \tag{2.65}$$

т. е. при $\bar{R}_w/R_g > {}^3/_2$ чувствительность метода постоянной температуры ниже чувствительности метода постоянного тока.

Мы предположили, что электрическое сопротивление остается постоянным. Однако в действительности наблюдаются изменения электрического сопротивления, хотя они и чрезвычайно малы. Эти изменения связаны с изменениями электрического тока в соответствии с уравнением (2.62).

Чтобы исследовать динамическую характеристику термоанемометра, необходимо рассмотреть эти малые изменения электрического сопротивления. Таким образом, запишем

$$R_w = \bar{R}_w + r_w. \tag{2.66}$$

Подставляя уравнения (2.63) и (2.66) в уравнение теплового равновесия (2.14), после несложных алгебраических преобразований, опуская квадратичные члены с малыми пульсациями $i$, $r_w$ и $u$, получаем

$$\bar{I}^2 r_w + 2\bar{I}\bar{R}_w i = \left(A + B\sqrt{\bar{U}}\right) r_w + (\bar{R}_w - R_g)\, B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{\bar{U}} + eC_w\frac{d\theta_w}{dt}.$$

Пользуясь равенством $\theta_w = r_w/R_0 b$ и соотношением (2.62), далее находим

$$\frac{di}{dt} + \frac{bR_0}{eC_w}\left(A + B\sqrt{\bar{U}} - \bar{I}^2 + 2\bar{I}^2\bar{R}_w g_{\text{кр}}\right) i = \frac{bg_{\text{кр}}\bar{I}R_0\,(\bar{R}_w - R_g)}{eC_w}\, B\sqrt{\bar{U}}\,\frac{u}{2\bar{U}}.$$

Из этого выражения получаем следующую формулу для постоянной времени при работе по методу постоянной температуры:

$$M_{\text{п. т.}} = \frac{eC_w}{bR_0\left(A + B\sqrt{\bar{U}} - \bar{I}^2 + 2\bar{I}^2\bar{R}_w g_{\text{кр}}\right)},$$

или, поскольку $A + B\sqrt{\bar{U}} - \bar{I}^2 = \dfrac{R_g\bar{I}^2}{\bar{R}_w - R_g}$,

$$M_{\text{п. т.}} = \frac{eC_w}{bR_0\dfrac{R_g}{\bar{R}_w - R_g}\bar{I}^2\left(1 + 2\dfrac{\bar{R}_w - R_g}{R_g}\bar{R}_w g_{\text{кр}}\right)}.$$

Сравнение с (2.18) показывает, что

$$M_{\text{п. т.}} = \frac{M}{1 + 2\dfrac{\bar{R}_w - R_g}{R_g}\bar{R}_w g_{\text{кр}}}. \qquad (2.67)$$

Постоянная времени при работе по методу постоянной температуры значительно меньше, чем для метода постоянного тока. Полагая, к примеру, что $R_w/R_g = 2$ и $R_w = 10$ *ом*, при достаточно малой крутизне характеристики контура $g_{\text{кр}} = 10$ *мо* имеем $M_{\text{п. т}} = M/200$. Это относительно низкое значение постоянной времени делает метод постоянной температуры пригодным для измерения в большинстве представляющих практический интерес турбулентных потоков, не прибегая к компенсации термического запаздывания.

Благодаря постоянной температуре нити, константы $A$ и $B$, содержащиеся в уравнении (2.7), и в самом деле являются постоянными, т. е. не зависят от турбулентных пульсаций. Это обеспечивает методу постоянной температуры значительные преимущества, когда приходится производить измерения в турбулентных потоках с большой относительной интенсивностью турбулентности.

Этот метод был предложен Циглером [30] еще в 1934 году. Однако он не выдержал конкуренции с методом постоянного тока из-за возможности возникновения неустойчивых колебаний, на проблему которых Циглер указал ранее.

К методу постоянной температуры возвратились снова лишь в период второй мировой войны и после нее. Оссовскому [31] и Веске [32] в США и Турнье, Лорансо, Обэ и Сеньерэну [33] во Франции удалось создать достаточно устойчивую систему обратной связи. В частности, применение контура с несущей частотой явилось особенно ценным вкладом в обеспечение устойчивой и надежной работы по сравнению с более ранними методами, при которых несбалансированное напряжение от моста с нагретой нитью усиливалось при помощи усилителей с непосредственной связью и подавалось на мост, так что увеличение температуры нити приводило к падению тока, нагревающего нить.

С другой стороны, необходимая при использовании этого метода электронная аппаратура является значительно более сложной, нежели применяемая в методе постоянного тока. Поэтому в настоящее время методом постоянной температуры пользуются только в тех случаях, когда требуется измерить большие пульсации [34], а метод постоянного тока по причинам, рассмотренным в предыдущих параграфах, оказывается непригодным.

Однако надо ясно представлять себе, что в случае сильных пульсаций скорости возникает еще одно затруднение, связанное с нелинейностью характеристики термоанемометра, определяемой

уравнением (2.7), относительно скорости $U$. Правда, можно показать, что метод постоянной температуры дает намного меньшее искажение. В случае метода постоянной температуры ошибка в 10%, указанная в § 2.3 для изотропной турбулентности при $u'/U = 0{,}2$, уменьшается примерно в три раза. Более того, при использовании метода постоянной температуры представляется возможным применить линеаризующую цепь, амплитудная характеристика которой имеет обратную кривизну по сравнению с характеристикой термоанемометра; благодаря этому можно добиться практически линейной связи между выходным напряжением и скоростью $U$. Тогда указанное выше почти троекратное уменьшение ошибки можно сократить еще в три раза. Применение подобной линеаризующей цепи было предложено Циглером [30], а пример практического использования ее был дан Веске [32].

Различные авторы, например Коважный [36] и Оссовский [31], указывали, что метод постоянной температуры приводит к сильному уменьшению отношения сигнал/шум. Этот вывод справедлив для собственно управляющего контура, но вне этого контура можно использовать фильтр низких частот, который пропускает только частоты ниже наивысшей частоты турбулентности, благодаря чему удается добиться заметного улучшения работы аппаратуры в этом отношении [85].

## § 2.7. Ограничения термоанемометра

Хотя термоанемометр и является в настоящее время пока еще наиболее распространенным прибором для измерения турбулентности, он все же имеет определенные ограничения. Некоторые из этих ограничений уже ясно вырисовывались в предыдущих параграфах. Сюда относится и нелинейный характер зависимости переноса тепла от скорости и температуры. Как нелинейный температурный эффект, так и влияние кривизны характеристики по скорости могут быть значительно ослаблены при использовании метода постоянной температуры, особенно при добавлении линеаризующей цепи, хотя при этом возникают трудности в создании надежной электронной схемы.

Другое ограничение, уже упоминавшееся выше, накладывается «разрешающей способностью» в направлении нити, обусловленной ее конечной длиной. Разрешающая способность в направлении течения ограничивается постоянной времени нагретой нити. Следуя Коважному [36], можно ввести разрешающую длину нити $l_{\text{раз}} = U/2n_{\max}$, где $n_{\max}$ — максимальная частота усилителя, при которой еще не наблюдается заметного ухудшения характеристики нити. Эта разрешающая длина должна быть мала по сравнению с размером микровихрей. Поскольку величина $n_{\max}$ обратно пропорциональна постоянной времени термоанемометра, длина $l_{\text{раз}}$ оказывается прямо пропорциональной ей.

При очень высокой скорости потока (скажем, $U > 100$ *м/сек*) могут наблюдаться крайне мелкие вихри. Значит, чтобы разрешающая длина по сравнению с размером этих вихрей оставалась малой, следует обеспечивать малые значения постоянной времени; поэтому желательно применять тонкие нити. В то же время для обеспечения прочности нити в таком высокоскоростном потоке ее нельзя делать слишком тонкой. Кроме того, детали крепления и их аэродинамическое взаимодействие с нитью могут вызвать возмущения картины течения, сравнимые по своим размерам с наиболее мелкими вихрями.

Другая трудность, которая наиболее ощутима в случае тонких нитей, состоит в том, что нагретая нить чувствительна к отложению и ударному воздействию мелких частиц (пыли); в связи с этим может произойти изменение значений тарировочных параметров нити. В таком случае нити должны быть зачищены и заново протарированы. Эта зачистка и повторная тарировка могут представлять значительное неудобство, когда интервалы времени, через которые они становятся необходимыми, очень коротки. Когда измерения турбулентности проводятся в аэродинамической трубе замкнутого типа, можно обеспечить очистку воздуха в этой трубе. Коллис [37] описывает один простой способ очистки воздуха посредством установки металлической сетки, сплетенной из очень тонких проволочек, в подходящем сечении трубы. Поскольку воздух рециркулирует, эффективность улавливания частиц не обязана быть очень высокой, но тем не менее из воздуха в конечном счете должны быть обязательно удалены частицы, размеры которых намного меньше 1 *мк*. Даже когда воздух очищается этим способом, после нескольких часов работы все-таки необходимо зачищать нити, ибо в систему всегда просачивается неочищенный воздух и к тому же эффективность этого метода очистки воздуха никогда не достигает 100%.

Общепринятый метод удаления пыли с нити состоит в очень тщательной очистке ее с помощью щеточки. Чтобы при этом избежать разрушения нити, требуется некоторый опыт. Однако этот метод оказывается непригодным, когда отложение на нити носит смолистый характер. Виатту [38] удалось успешно применить новый метод, отмывая нить термоанемометра в течение получаса в жидкости, обладающей свойствами растворителя (например, в метиловом спирте), и слегка взбалтывая эту жидкость акустическими колебаниями с частотой от 15 до 60 *гц* при помощи громкоговорителя. Этим способом можно удалить от 80 до 90% пыли. Чувствительность нагретой нити, периодически подвергаемой подобной обработке, по имеющимся данным, остается постоянной с точностью до 2%.

До сих пор мы рассматривали применение термоанемометра для измерения турбулентности только в воздухе или в других газах. К сожалению, его применение ограничивается газами, так как для измерений в капельных жидкостях термоанемометр оказывается зна-

чительно менее подходящим. Дело в том, что рабочая температура нити из-за возможности испарения и образования окалины должна быть при этом очень низкой.

Согласно Мидлбруку и Пире [39], при этих условиях может также происходить электролиз, а это явление повлечет за собой много неприятностей. Конечно, возможно также образование осадков даже в довольно чистых жидкостях. Кроме того, чтобы нить, применяемая в условиях капельной жидкости, обладала достаточной прочностью, требуются значительно более массивные конструкции, с более толстыми и более длинными нитями; а это отрицательно скажется на чувствительности термоанемометра и постоянной времени. Тем не менее термоанемометр находит применение для измерений в капельных жидкостях, правда, в большинстве случаев применение термоанемометра ограничивается только измерениями осредненной скорости (например, в пограничном слое), характеристик явления перехода или турбулентности, обладающей довольно низкой частотой [40].

Вернотт [41] выдвинул дополнительные критические возражения, которые носят принципиальный характер. Применение термоанемометра основано на законе теплообмена, происходящего при стационарных условиях течения жидкости, в то время как при измерении турбулентности нить подвергается воздействию потока, являющегося по своей природе нестационарным. Но перенос тепла от нити к движущейся жидкости зависит от картины течения, включая и турбулентные движения; однако о них пока еще ничего не известно. Вернотт предлагает более полно проанализировать влияние этих условий. В этой связи следует указать на два важных фактора: 1) влияние пульсаций общей картины течения около нити и 2) влияние пульсаций потока в пограничном слое нити. Когда турбулентные пульсации малы по сравнению с осредненной скоростью, первый из этих факторов становится несущественным, так как картина течения будет определяться главным образом именно этим осредненным течением и поэтому любое проявление нестационарности потока около нити не представляет само по себе первостепенного интереса, коль скоро речь идет о картине течения. Однако влияние второго фактора может оказаться более серьезным. Исследование его влияния на теплообмен в ламинарном пограничном слое пульсирующего потока было проведено Лайтхиллом [84]. В применении к термоанемометру полученные результаты показывают, что период запаздывания, обусловленный тепловой инерцией нити, особенно в случае метода постоянного тока, возрастает под действием теплоинерционных эффектов в пограничном слое. Однако для обычных условий, при которых используется термоанемометр, это возрастание пренебрежимо мало.

В последнее время Лингом и Хаббардом [86] был предложен новый анемометр, который имеет большое сходство с термоанемометром. В качестве чувствительного элемента здесь используется

нагретая очень тонкая платиновая пленка. Эта пленка, длиной в 1 *мм* и шириной в 0,2 *мм*, наплавляется на стеклянную или керамическую державку, имеющую форму клина. По принципу работы этот анемометр аналогичен термоанемометру. Благодаря тому, что анемометр с нагретой пленкой обладает более высокими механическими свойствами, он значительно более пригоден для измерений в капельных жидкостях и в сверхзвуковом или в высокотемпературном потоке газа. По данным Линга и Хаббарда, этот анемометр менее чувствителен к загрязнению поверхности (например, пылью) и имеет, при одинаковых условиях работы, более высокое отношение сигнал/шум, нежели термоанемометр, особенно когда применяется метод постоянной температуры.

## § 2.8. Анемометр с электрическим разрядом

Другой метод, который дает возможность измерять турбулентность в газах, основан на свойствах вольтамперной характеристики электрического разряда между двумя электродами. Для электродов заданной формы при постоянном искровом промежутке эта характеристика зависит от природы газа, давления, температуры, влажности и скорости. Именно зависимость от скорости, которая при этом оказывается наиболее сильной, делает электрический разряд применимым для измерения скорости.

В этом методе обычно используются два тонких электрода с разрядным промежутком около 0,1 *мм*. В зависимости от приложенного напряжения и возникающего электрического тока различают несколько типов электрического разряда. При чрезвычайно слабом электрическом токе, менее $10^{-9}$ *а*, происходит так называемый «темновой», или таунсендовский, разряд; напряжение составляет при этом около 10 000 *в*. При повышении напряжения и возрастании тока до нескольких *мка* наблюдается переход к разряду со светящейся короной. Дальнейшее возрастание тока связано с повышением светимости. При токе порядка нескольких миллиампер светимость становится намного сильнее и разряд превращается в тлеющий. Переход от коронного разряда к тлеющему сопровождается довольно резким и существенным падением напряжения до нескольких сотен вольт. Кроме того, в области тлеющего разряда вольтамперная характеристика имеет отрицательный градиент.

Электрический разряд для технических целей впервые был применен, по-видимому, Томасом [42], который использовал разряд при создании безмембранного микрофона для радиовещания.

В 1934 году Линдвалл [43] воспользовался чувствительностью напряжения при тлеющем разряде к скорости газа для измерения турбулентности. По данным Линдвалла, наилучшими материалами для этой цели оказываются платина и сплав платины и иридия, для ко-

торых наблюдается относительно устойчивый разряд и хорошая воспроизводимость результатов; удовлетворительными качествами обладает также вольфрам.

Тлеющий разряд характеризуется светящейся зоной вблизи катода протяженностью в несколько десятых долей микрона с разностью потенциалов в 300 *в* и положительной зоной (столбом) с градиентом в 1500 *в/см*. Разрядный ток составляет от 10 до 30 *ма*.

Для измерения турбулентности Линдвалл использовал платиновые электроды диаметром 1,5 *мм*, разделенные искровым промежутком от 0,1 до 0,2 *мм*. Полная разность потенциалов между этими электродами составляла от 300 до 400 *в*. Как уже упоминалось, вольтамперная характеристика имеет при этом отрицательный градиент.

Выше указывалось, что разряд чувствителен к скорости газа. При изменении скорости на 1 *м/сек* оказывается возможным получить разность потенциалов в 1 *в*. Это значительно больше, чем можно получить при использовании термоанемометра, в случае которого разность потенциалов порядка 0,01 *в*. Линдвалл считает это обстоятельство очень важным преимуществом, так как в этом случае требуется меньшее усиление. Другим важным преимуществом является то, что влияние факторов, соответствующих теплоинерционным эффектам термоанемометра, здесь весьма незначительно. Новый разряд устанавливается менее чем за $10^{-5}$ *сек*; следовательно, анемометр с тлеющим разрядом может реагировать на пульсации скорости с частотой вплоть до $10^5$ *сек*$^{-1}$.

Линдвалл применил этот метод для измерения турбулентности в следе за круглым цилиндром и обнаружил удовлетворительное согласие с результатами измерений при помощи термоанемометра с компенсацией. В течение и после окончания второй мировой войны Фукс [44–46] в Германии проводил широкое исследование применения анемометра с коронным разрядом для измерения турбулентности; аналогичные опыты проводились во Франции Агостини [47].

В работе Агостини применялись конструкции с двумя небольшими сферическими электродами, а также со сферическим анодом, расположенным в центре кольцевого катода. Фуксом использовались сферические платиновые электроды. Миниатюрные сферические электроды могут быть весьма просто изготовлены посредством оплавления концов платиновых проволочек в электрическом разряде.

Фукс [44, 45] и Вернер [48] провели также экспериментальное исследование чувствительности разряда к изменениям давления, температуры и влажности, а Фуксом [44], кроме того, с помощью радиоактивных веществ было исследовано благоприятное влияние предварительной ионизации.

В опытах Фукса, Агостини и Вернера применялось большее расстояние между электродами; при этом вольтамперная характеристика имела положительный градиент.

В работе [46] Фуксом было показано, что этим методом можно измерять не только суммарную интенсивность турбулентности, но также и интенсивность турбулентности, соответствующую компонентам пульсаций. Эта возможность обусловлена чувствительностью анемометра

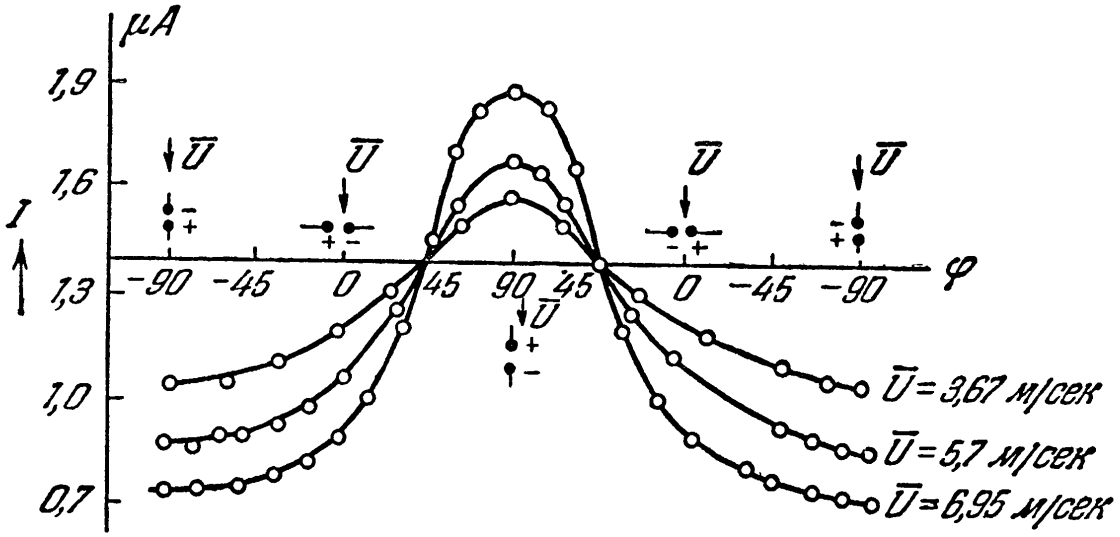



Рис. 2.4. Зависимость катодного тока коронного разряда от направления течения [46].

с коронным разрядом к направлению скорости потока газа. На рис. 2.4 изображена зависимость катодного тока в коронном разряде от направления потока при различных значениях скорости. В этом случае использовались сферические электроды диаметром 0,5 *мм*, расстояние между которыми составляло 6 *мм*.

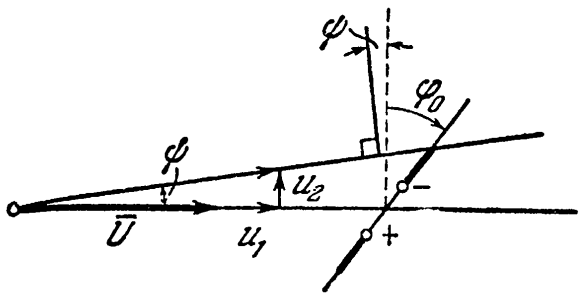



Рис. 2.5. Измерение компонент турбулентных пульсаций скорости.

Связь между электрическим током $I$, скоростью газа $U$ и направлением потока $\varphi$ может быть записана в виде

$$I = \frac{\partial I}{\partial U} U + \frac{\partial I}{\partial \varphi} \varphi, \qquad (2.68)$$

здесь $\frac{\partial I}{\partial U}$ и $\frac{1}{U}\frac{\partial I}{\partial \varphi}$ являются функциями только $\varphi$.

Из анализа рис. 2.4 можно сделать вывод, что $\frac{1}{U}\frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0$ при $\varphi = \pm 90°$ и что $\frac{\partial I}{\partial U} = 0$ при $\varphi \approx 45°$. Точная величина этого критического угла зависит от размеров электродов, а также от напряжения и должна определяться экспериментально.

Пусть $\varphi_0$ определяет положение анемометра относительно направления скорости осредненного потока $\bar{U}$ (см. рис. 2.5) в плоскости, проходящей через компоненты $u_1$ и $u_2$. Если пульсации считать

малыми, то эффективная скорость представится формулой

$$U_{\text{эфф}} = \sqrt{(\bar{U}+u)^2 + u_2^2 + u_3^2} \approx \bar{U}\left(1 + \frac{u_1}{\bar{U}}\right). \tag{2.69}$$

Изменение направления потока $\psi$ в случае малых пульсаций приближенно может быть записано как

$$\psi \approx \frac{u_2}{\bar{U}}. \tag{2.70}$$

Подставляя выражения (2.69) и (2.70) в (2.68), получаем

$$I = \bar{I} + i = \frac{\partial I}{\partial \bar{U}}\bar{U}\left(1 + \frac{u_1}{\bar{U}}\right) + \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi}\right)_0\left(\varphi_0 + \frac{u_2}{\bar{U}}\right),$$

откуда

$$i = \frac{\partial I}{\partial \bar{U}}u_1 + \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi}\right)_0 \frac{u_2}{\bar{U}}. \tag{2.71}$$

Если установить сначала $\varphi_0 \approx 45°$ и, стало быть, $\frac{\partial I}{\partial \bar{U}} = 0$, то величина $i$ будет прямо пропорциональна $u_2$. Если затем сделать $\varphi_0 = 90°$, то величина $i$ будет прямо пропорциональна $u_1$, так как при этом $\left(\frac{\partial I}{\partial \varphi}\right)_0 = 0$.

Измерение третьей компоненты турбулентных пульсаций $u_3$ может быть осуществлено аналогичным способом, если расположить электроды в плоскости, проходящей через направления $u_1$ и $u_2$.

## § 2.9. Метод электромагнитной индукции

Один из методов, целесообразность применения которых при измерении турбулентности в капельных жидкостях уже доказана, основан на принципе электромагнитной индукции. Как упоминалось выше, при измерении турбулентности в жидкостях термоанемометр имеет серьезные ограничения; поэтому метод электромагнитной индукции применительно к подобным измерениям является весьма привлекательной альтернативой.

Если жидкость слабо ионизована (такая жидкость должна быть электролитическим проводником, но проводимостью обладает даже такой слабый электролит, как водопроводная вода) и движется относительно электромагнитного поля с некоторой скоростью, то в ней будет индуцироваться электрическое поле. Напряженность этого индуцированного поля однозначно определяется компонентой скорости, перпендикулярной к электромагнитному полю, и оказывается прямо пропорциональной этой компоненте и напряженности электромагнитного поля.

Пусть $U$ — компонента скорости, перпендикулярная к электромагнитному полю с напряженностью $H$; тогда напряженность индуцированного электрического поля $V$, согласно закону Максвелла — Фарадея, определяется формулой

$$V = \frac{\mu}{c} HU,$$

где $\mu$ — относительная магнитная проницаемость жидкости, а $c$ — скорость света.

Направление индуцированного поля перпендикулярно как к компоненте скорости $U$, так и к магнитному полю. Оно может быть определено по хорошо известному правилу левой руки.

Если в движущуюся жидкость на линии, параллельной направлению индуцированного электрического поля, ввести два электрода, зазор между которыми равен $s$, то возникающая при этом разность потенциалов на электродах $E$ определится как

$$E = Vs = \frac{\mu}{c} HUs.$$

Колин [49] в 1936 году применил этот метод для измерения средней скорости потока жидкости в трубе при биологических исследованиях (течение крови в сосудах).

Большое значение имеет тот факт, что напряжение $E$ является линейной функцией скорости $U$, а величина его чувствительна к направлению, ибо при этом напряжение $E$ зависит только от компоненты скорости, перпендикулярной к воображаемой линии, проходящей через электроды, и к направлению электромагнитного поля.

Кроме того, связь между $E$ и $U$ не зависит от плотности, вязкости, температуры и электропроводности жидкости, а также от ее состава.

Электроды рекомендуется изготовлять из материалов, которые не подвержены воздействию кислоты и не поляризуются. В случае поляризуемых материалов должно применяться переменное электромагнитное поле; при этом для нейтрализации индуцированного переменного потенциала требуется компенсационный контур.

Представляется возможным либо подвергать воздействию электромагнитного поля все поле течения, либо вводить в поток относительно малый электромагнит, соединенный с парой электродов, по направлению, перпендикулярному к линии, проходящей через его полюсы.

В первом случае конструкция прибора значительно проще, но при этом, если поток не является равномерным во всем поле течения, следует учитывать влияние локально индуцированных токов. Распределение напряженности подобного локального электрического поля течения в круглой трубе было вычислено Тюрлеманом [50] как в слу-

чае ламинарного, так и турбулентного течения. Колин и Райхе [51] теоретически показали, что эти индуцированные токи могут быть учтены внесением определенной поправки.

Второй метод был также применен Колином [52] для измерения локальной скорости потока в глубоком канале. Хотя чувствительный элемент, состоящий из электромагнита и электродов, и был сделан весьма миниатюрным (полная длина магнита 23 *мм*, расстояние между полюсами магнита 1 *мм*, и диаметр полюсов тоже 1 *мм*), этот прибор все же является довольно крупным, чтобы им можно было измерять турбулентность, масштаб которой не очень велик.

В таком случае для большинства измерений турбулентности этот второй метод оказывается непригодным. Поэтому для измерения турбулентности Гроссман [53, 54] обратился к первому методу и разработал его вплоть до создания вполне надежной аппаратуры. Им были проведены измерения в потоке в прямой круглой трубе, которая была изготовлена из люцита *) и имела внутренний диаметр 43 *мм*; в качестве жидкости использовалась вода. Стационарное магнитное поле создавалось при помощи электромагнита постоянного тока с круглыми полюсами диаметром 150 *мм* и с зазором между ними в 50 *мм*. Так как в турбулентном потоке градиент скорости, благодаря которому возникают индуцированные локальные электрические токи, значителен лишь около стенки, то и возмущающее влияние этих токов на результаты измерения турбулентности будет иметь значение только в непосредственной близости от стенки.

Гроссман провел исследование с целью выяснения оптимального расстояния между электродами (в его опытах оно оказалось равным примерно 2,5 *мм*) и разработал систему коррекции для учета фона. Поскольку разность потенциалов между электродами чрезвычайно мала, будучи величиной порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$ *в*, то необходимость коррекции фона вполне очевидна.

Результаты измерений Гроссмана, касающиеся интенсивности турбулентности и турбулентных напряжений сдвига, в достаточной мере согласуются с результатами, полученными другими авторами при помощи термоанемометра для воздушных потоков в трубах.

## § 2.10. Методы, основанные на визуализации течения

В этом параграфе мы дадим краткий обзор многочисленных методов, которые принадлежат к первой из групп, указанных во вводном § 2.1, т. е. методов, основанных на визуализации картины течения или на восприятии этой картины чувствительным элементом, расположенным вне области течения.

---

*) Разновидность органического стекла. (*Прим. перев.*)

Если в движущуюся жидкость вводить очень мелкие частицы, которые нерастворимы в сплошной среде, то траектории этих частиц можно наблюдать при помощи киносъемки или фотографирования с кратковременной вспышкой. Если плотности этих частиц и частиц жидкости одинаковы, то эти траектории будут идентичны с траекториями движения жидких частиц. Производя фотографирование со вспышкой при известных экспозициях либо последовательно фотографируя поток через два или три известных интервала времени, можно вычислить смещение этих частиц по величине и направлению, а следовательно, и компоненты скорости потока, параллельные плоскости фотографирования. Чтобы получить полный вектор скорости, необходимо сделать две одновременные фотографии, соответствующие двум взаимно-перпендикулярным направлениям. Для того чтобы взвешенные частицы выглядели как яркие точки, можно воспользоваться специальной осветительной аппаратурой [55].

Для исследования турбулентного течения в прямой трубе по следам, оставляемым мелкими частицами, увлеченными жидкостью, Фейдж и Тауненд [61] воспользовались «ультрамикроскопом».

Частицы, которые применяются для этой цели, должны быть малы по сравнению с микромасштабом турбулентности; только при этом условии можно получить надежные результаты. Кроме того, аппаратура, с помощью которой осуществляется подача частиц в поток, тоже должна иметь очень малые размеры, чтобы возмущения течения, вызванные ею, оставались пренебрежимо малыми.

При измерениях в капельных жидкостях могут применяться различного рода эмульсии. Для измерений в воде [55—57] успешно использовались эмульсии, которые представляют собой смеси бензола с четыреххлористым углеродом и оливкового масла с двухбромистым этиленом. Эти смеси можно приготовить так, чтобы они имели ту же плотность, что и вода. Вполне очевидно, что качество фотографий будет лучше, если капли эмульсии одинаковы. Поэтому для проведения измерений в случае турбулентности, обладающей высокой интенсивностью, в поток должна вводиться достаточно тонкая эмульсия, с тем чтобы не происходило расщепления капель турбулентными напряжениями, ибо при этом обычно образуются вторичные капли переменного размера.

Для измерений в воздухе можно или применять мелкие мыльные пузыри [58], или с помощью электрической искры создавать локальные зоны высокой температуры, как это делал Тауненд [60]. При использовании метода мыльных пузырей в случае турбулентности с высокой интенсивностью возникают затруднения, аналогичные тем, которые упоминались в отношении эмульсии применительно к капельным жидкостям. В случае метода Тауненда существование нагретых микрозон ограничено довольно коротким периодом, что связано с влиянием тепловых потерь, деформации и диффузии, обусловлен-

ной микротурбулентностью. Весьма вероятно также и то, что, по крайней мере в начальный момент, разность плотностей, возникающая благодаря более холодной окружающей жидкости, может привести к ошибкам в количественном анализе картины течения.

С целью визуализации течения в аэродинамической трубе Буро [74] провел широкое исследование возможности применения мелких алюминиевых чешуек (размером в несколько микрон) в качестве трассирующих частиц.

Выше уже упоминалось, что эти частицы должны иметь такую же плотность, как и движущаяся жидкость; однако это не всегда возможно. Поэтому возникает вопрос, какова допустимая разность плотностей, если требуется обеспечить определенную степень точности измерений. Эта допустимая разность плотностей зависит от природы и интенсивности турбулентности потока, а также от размера взвешенных частиц.

Если разность плотностей велика, то возникающая благодаря этому ошибка может стать весьма ощутимой. Это можно проиллюстрировать на примере предельного случая. Предположим, что частицы песка подвергаются воздействию турбулентных движений воды и что движение этих частиц используется для изучения турбулентного движения воды. Какова будет при этом ошибка?

Допустим для простоты, что вода совершает чисто периодическое движение. В этом случае оказывается, что амплитуда отклонения песчинки диаметром 100 *мк* составит лишь половину амплитуды движения воды, если частота этого движения равна 100 $сек^{-1}$.

Мы не будем здесь углубляться в этот вопрос, так как аналогичная задача будет рассмотрена ниже применительно к диффузии дискретных частиц в турбулентном потоке. Однако читателю следует обратить на это внимание, поскольку при использовании метода взвешенных частиц совершенно необходимо прежде всего проанализировать влияние разности плотностей, с тем чтобы знать, каким образом интерпретировать результаты измерений. По этому вопросу читатель может почерпнуть полезную информацию из исследования Буро, на которое мы ссылались выше.

Вместо использования дискретных частиц можно также непрерывно подавать подходящее вещество, смешиваемое с движущейся жидкостью. Например, в случае газа могут применяться дым, полученный при сжигании древесины, гексит, пары аммиака, соляной кислоты, йода и т. п. либо даже относительно низкосортные материалы типа мелких опилок бальзового дерева [62]. В случае капельных жидкостей можно использовать красящие вещества, например чернила или, особенно, голубой лак (сульфокислота фенилрозанилина), который является очень стойким и имеет различные оттенки. Благодаря их стойкости при исследовании, например, процессов смешения можно применять даже несколько красок.

Коллинз и Ньюбай [63] успешно применили инфракрасный газоанализатор для изучения процессов смешения в газах.

Вводя в поток либо дискретные частицы, либо дым, либо краски и т. п., можно измерять различные характеристики турбулентности.

Когда осредненное течение параллельно плоскости фотографирования, то осредненная скорость может быть определена по следам, оставляемым многочисленными частицами; точно так же могут быть найдены поперечная и осевая турбулентные пульсации скорости, хотя их точное определение является значительно более трудным. Само собой разумеется, что этот путь определения скоростей потока очень продолжителен и утомителен.

Рассмотрим однородную турбулентность, наложенную на постоянную скорость $\bar{U}$, направленную вдоль оси $x_1$. Далее, введем в рассмотрение большое число пар точек, характеризуемых координатой $\xi$, удаленных друг от друга на расстояние $x_2$ и распределенных по всей области течения. Если в этих точках в поток одновременно ввести частицы, то по следам этих частиц на фотографическом изображении (предполагается, что частицы имеют одинаковую с жидкостью скорость) можно измерить поперечную компоненту турбулентной пульсации скорости $u_2(\xi)$ и $u_2(\xi + x_2)$ во всех парах точек. Отсюда можно вычислить произведение $u_2(\xi)\,u_2(\xi + x_2)$ для всех пар точек и взять среднюю величину по всем $\xi$, а именно $\overline{u_2(\xi)\,u_2(\xi + x_2)}$. Если турбулентность полагать квазистационарной, то можно также рассмотреть только одну пару точек, взять различные картины движения частиц, введенных последовательно через интервалы времени $t$, и определить среднюю по отношению ко всем $t$ величину: $\overline{u_2(t)\,u_2(t + x_2)}$. Придавая величине $x_2$ различные значения, получаем продольную эйлерову корреляцию $f(x_2)$.

По пространственной дисперсии частиц в направлении оси $x_2$ вниз по потоку от точек ввода можно, пользуясь соотношениями (1.76) или (1.77), получить лагранжеву корреляцию $R_L(t)$ [см. (1.75)], а именно:

$$R_L(t) = \frac{1}{2v'^2}\frac{d^2}{dt^2}\overline{[y_2(t)]^2};$$

при этом можно воспользоваться соотношением $x_1 = \bar{U}t$.

Лагранжев масштаб времени $\mathcal{J}_L$ получается по формуле

$$\mathcal{J}_L = \int_0^\infty R_L(t)\,dt = \frac{1}{2v'^2}\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}\overline{[y_2(t)]^2},$$

откуда пространственный масштаб $\Lambda_L = v'\mathcal{J}_L$ [см. (1.83)].

По диффузии тепла, дыма или краски вниз по потоку от источника можно определить интенсивность турбулентности и коэффициент вихревой диффузии $\epsilon_\gamma$.

Если турбулентность однородна и изотропна, распределение субстанции $\Gamma$ в плоскости, перпендикулярной к направлению скорости потока $\bar{U}$, на расстоянии $x_1$ от источника дается гауссовой кривой ошибок (см. § 5.5)

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{max} \exp\left(-\frac{\bar{U}x_2^2}{4x_1\epsilon_\gamma}\right), \tag{2.72}$$

где $\bar{\Gamma}_{max}$ — максимальное значение $\bar{\Gamma}$ в этой плоскости на расстоянии $x_1$ от источника.

Обозначая через $(x_2)_{1/2}$ координату, при которой $\bar{\Gamma} = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{max}$, из уравнения (2.72) получаем

$$\epsilon_\gamma = \frac{\bar{U}}{4x_1 \ln 2}(x_2)_{1/2}^2. \tag{2.73}$$

Интенсивность $u'$ может быть найдена по измерениям на очень небольших расстояниях от источника; в этом случае между скоростями существует почти идеальная корреляция. Как будет показано ниже (глава 5), в некоторой плоскости на расстоянии $x_1$ от источника снова получается распределение $\bar{\Gamma}$ типа кривой Гаусса:

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{max} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2x_1}\frac{\bar{U}^2}{u'^2}\right),$$

откуда

$$\frac{u'}{\bar{U}} = \frac{(x_2)_{1/2}}{x_1\sqrt{2\ln 2}}.$$

Подобный метод описан Френкилем в работе [64]. В качестве трассирующего вещества он использовал аммиак в сочетании с азотнокислой ртутью или дибромкрезолсульфофталеином, которыми была пропитана решетка, изготовленная из хлопковых волокон. По степени обесцвечивания волокон решетки трассирующим газом, выходящим из источника, расположенного вверх по потоку от решетки, Френкиль произвел оценку коэффициента вихревой диффузии в турбулентном потоке.

Хинце и Ван дер Хегге Цийнен [65] показали, что диффузионный метод может, кроме того, успешно применяться для определения интенсивности турбулентности и вихревого напряжения сдвига в потоке с поперечным градиентом скорости (см. § 5.6). В зависимости от степени анизотропности, т. е. от величины вихревого напряжения сдвига, распределение субстанции $\bar{\Gamma}$ в непосредственной близости вниз по потоку от источника является более или менее скошенным.

Применение диффузионных методов наталкивается иногда на существенные препятствия; это обусловлено тем, что некоторые факторы, присущие характеру турбулентного течения, при этом не принимаются

или — из-за определенных трудностей — не могут быть приняты во внимание. Анализ этих факторов увел бы нас в сторону от рассматриваемых здесь вопросов; они будут рассмотрены в §§ 5.4, 5.5 и 5.7, к которым мы и отсылаем читателя.

Когда требуется найти распределение напряжений сдвига в потоке, то можно воспользоваться ориентацией частиц, взвешенных в капельной жидкости и визуализированных с помощью двойного лучепреломления поляризованного света [66—69]. Пригодными для этой цели веществами являются коллоидные глиноземные суспензии (магния, бентонита или гекторита), вирус табачной мозаики, мыльные растворы и прошедшие старение золи пятиокиси ванадия. Степень ориентации зависит от величины поперечного градиента скорости и от отношения длины частицы к ее диаметру. При этом частицы не должны быть слишком мелкими; во всяком случае, они должны быть достаточно большими, чтобы на их перемещение не оказывало влияния броуновское движение.

Этот метод успешно применялся для измерений в двумерных ламинарных потоках, а также в довольно медленных двумерных турбулентных потоках с ярко выраженными зонами повышенных средних напряжений сдвига. Этот метод, по всей вероятности, будет непригоден для измерений в сильно турбулизированных потоках, особенно в трехмерных, из-за неясности влияния турбулентных пульсаций.

Визуальное наблюдение или кинематографическая съемка обычно дают более удовлетворительные результаты, чем фотографирование со вспышкой.

*Преломление света под действием изменения плотности.* Используя явление преломления света под воздействием изменения плотности, можно получить ценные сведения о пульсациях плотности, которые могут наблюдаться в турбулентном потоке. Эти изменения плотности могут быть обусловлены разностью температур, различием концентраций, когда при турбулентном движении перемешиваются два газа с существенно неодинаковыми плотностями, или разностью давлений; последний из этих факторов проявляется обычно лишь в таких потоках, в которых число Маха уже не является малой величиной.

Обычно используются следующие оптические методы: теневой метод, «шлирен»-метод Теплера и метод интерферометра Маха. Мы не будем рассматривать здесь эти методы и их достоинства, но заметим, что экспериментальные исследования, проведенные в последние годы, продемонстрировали растущее предпочтение методу интерферометра по сравнению со «шлирен»-методом благодаря относительной простоте соответствующего количественного анализа.

Изменение плотности является непосредственной мерой разницы температур или концентраций. Уравнение состояния газа дает прямую связь между температурой, давлением и плотностью.

Когда начинает влиять сжимаемость, то между скоростью и температурой или плотностью существует следующая связь:

$$U^2 = 2c_p(\Theta_{\text{торм}} - \Theta) = 2c_p\Theta_{\text{торм}}\left(1 - \frac{\rho_{\text{торм}}}{\rho}\right), \qquad (2.74)$$

где $U$, $\Theta$ и $\rho$ — соответственно местная скорость, температура и плотность, а $\Theta_{\text{торм}}$ и $\rho_{\text{торм}}$ — температура и плотность заторможенного потока.

Если применить соотношение (2.74) к турбулентному потоку, для которого мы можем записать

$$U = \overline{U} + u, \quad \rho = \overline{\rho} + \tilde{\rho},$$

то получим

$$\overline{U}^2 = 2c_p\Theta_{\text{торм}}\left(1 - \frac{\overline{\Theta}}{\Theta_{\text{торм}}}\right)$$

и

$$u = \frac{1}{\overline{U}}\, c_p\Theta_{\text{торм}}\left(\frac{\overline{\Theta}}{\Theta_{\text{торм}}}\right)^2 \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\text{торм}}}. \qquad (2.75)$$

В свободных турбулентных потоках, например в свободных турбулентных струях и в следе за препятствием, температура и плотность торможения могут быть приняты равными соответствующим параметрам в окружающей жидкости.

Поскольку турбулентность представляет собой пространственное явление, картина распределения плотности также будет трехмерной. В таком случае возникает вопрос, как интерпретировать результирующее преломление светового луча, который проходит через турбулентную зону определенной глубины. Коважный [70] разработал метод получения данных о структуре турбулентности по изображению картины преломления. При этом он пользовался теневым методом. Коважный показал, что если турбулентность однородна во всей рассматриваемой турбулентной зоне и если, помимо этого, масштаб турбулентности очень мал по сравнению с размером поперечного сечения этой турбулентной зоны, то теневая картина должна быть идентична с картиной турбулентного течения в продольном сечении этой зоны. Кроме того, Коважный предложил метод определения (с помощью этих теневых изображений) корреляций скорости, а значит, и микро- и интегрального масштаба турбулентности. Это можно осуществить следующим образом. Изготовляются два прозрачных изображения теневой картины. Если одно прозрачное изображение накладывается на другое так, что имеется полное совпадение этих изображений, то для параллельного светового пучка обеспечивается максимум прозрачности. Если теперь одно изображение немного сместить относительно другого, то произойдет уменьшение прозрачности. Но результирующая прозрачность двух изображений равна произведению

прозрачностей каждого изображения в отдельности. На этом факте основана возможность определения корреляции между плотностями в двух соседних точках поля течения. Поскольку, согласно соотношению (2.75), корреляция между изменениями плотности должна быть идентична с корреляцией между соответствующими турбулентными пульсациями скорости в двух точках, то этот метод дает также возможность измерения корреляций скорости.

Юберой и Коважный [71] применили этот метод для измерений в турбулентном следе за снарядом, летящим со сверхзвуковой скоростью, а также для измерения турбулентности в свободной струе нагретого воздуха. В последнем случае газ был несжимаемым и изменения плотности были обусловлены изменениями температуры; с целью сравнения производились также измерения с помощью термоанемометра. Результаты этих измерений показали, что теневой метод более надежен в области высоких волновых чисел, т. е. в диапазоне мелких вихрей. Следовательно, в этом случае микромасштаб определяется более точно, нежели интегральный масштаб. Сравнение величин, полученных при помощи двух указанных методов, дало вполне удовлетворительные результаты для микромасштаба и плохое соответствие для интегрального масштаба.

Хаббард с сотрудниками [72] использовали теневой метод для получения данных о структуре турбулентности в свободной струе углекислого газа. Они сняли спектр Дебая — Шеррера по теневым фотографиям со вспышкой. Этот метод обладает некоторым сходством с анализом Фурье; значит, при этом можно, по-видимому, получить некоторые сведения об энергетическом спектре турбулентного потока. По всей вероятности, для успешного применения этого метода необходимо, чтобы турбулентность была однородной. Однако, что касается турбулентности в свободной струе, это предположение является весьма сомнительным.

## § 2.11. Измерение осредненных величин статического давления и скорости

Точное измерение осредненного статического давления в турбулентном потоке является далеко не простой задачей. Если турбулентные пульсации скорости относительно малы по сравнению с осредненной скоростью в направлении потока, то обычно принято считать, что в плоскости, перпендикулярной к направлению осредненной скорости, осредненное статическое давление постоянно. В таком случае достаточно измерить осредненное статическое давление только в одной точке этой плоскости. Это статическое давление будет проще определить, когда в этой плоскости могут быть обнаружены зоны с низкой или вообще с нулевой турбулентностью. Например, в случае свободных струй, согласно высказанному выше

предположению, статическое давление в турбулентных областях равно давлению в окружающей неподвижной жидкости снаружи струи. В случае турбулентного течения в прямой трубе осредненное статическое давление принимается постоянным в любом поперечном сечении трубы и равным статическому давлению на ее стенке. В первом из этих случаев турбулентность в окружающей жидкости отсутствует и статическое давление может быть измерено с такой же точностью, которая обеспечивается вообще при измерениях давления. Поэтому любая возможная ошибка при определении статического давления внутри струи может быть обусловлена лишь несправедливостью высказанного выше предположения. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что использование этого предположения для определения характеристик свободных струй приводит к удовлетворительным результатам.

Измерение статического давления на стенке трубы осуществляется обычно с помощью нескольких дренажных отверстий в диаметральной плоскости трубы, равномерно расположенных по ее периферии. При этом статическое давление берется как среднее из показаний давления во всех дренажных отверстиях. Осредненное давление в дренажном отверстии зависит от турбулентных пульсаций скорости, направленных как перпендикулярно, так и параллельно стенке. Дать какое-либо общее правило для определения необходимых поправок к экспериментальным значениям давления не представляется возможным, поскольку отмеченное влияние пульсаций скорости зависит от того, каков закон стремления к нулю турбулентных пульсаций вблизи стенки, а также от размера дренажных отверстий и шероховатости стенки. Однако можно полагать, что ошибки, возникающие при измерении давления на стенке, весьма невелики, если только диаметр дренажного отверстия достаточно мал, а стенка является гладкой.

Для измерения осредненного статического давления в области турбулентного течения Глэзер [73] рекомендует использовать насадок Пито, который представляет собой длинный цилиндр, расположенный перпендикулярно к направлению осредненного течения. Он имеет два небольших, просверленных вдоль радиуса отверстия в своей диаметральной плоскости. Оси отверстий смещены одна относительно другой на угол $2\varphi$ и симметричны относительно направления осредненной скорости. Если взять среднее из показаний давления в обоих отверстиях, то его можно с удовлетворительной точностью рассматривать как статическое давление в турбулентном потоке. Если $\varphi_0$ — угловое положение той точки на цилиндре, давление в которой в точности равно статическому давлению, то правильное угловое смещение отверстий должно составлять $2\varphi = 2\varphi_0 + 180\,\frac{d}{\pi D}$, где $d$ и $D$ — диаметры соответственно отверстия и цилиндра (см. рис. 2.6). Это объясняется тем, что давление в отверстии, просверленном

в цилиндре, равно давлению в некоторой точке на цилиндре, находящейся посередине радиуса отверстия в направлении к передней критической точке цилиндра. По тарировкам в стационарном потоке Глэзер нашел, что $\varphi_0 = 34{,}8°$; однако другими экспериментаторами были получены иные значения, вплоть до 34,3°. Вообще говоря, величина $\varphi_0$ является функцией числа Рейнольдса потока около цилиндра, но при больших значениях числа Рейнольдса она становится практически независимой от него. Чтобы избежать систематической ошибки, превышающей 1% от $^1/_2\rho\overline{U}^2$, необходимо определить величину $2\varphi$ с точностью до 0,4°. Этот метод нельзя применять в потоках с высокой относительной интенсивностью турбулентности, так как, помимо прочих факторов, переменное распределение статического давления на цилиндре уже больше не соответствует распределению, полученному по измерениям в статических условиях. Кроме того, диаметр цилиндра должен быть малым, по крайней мере не намного больше микромасштаба турбулентности в рассматриваемом потоке.

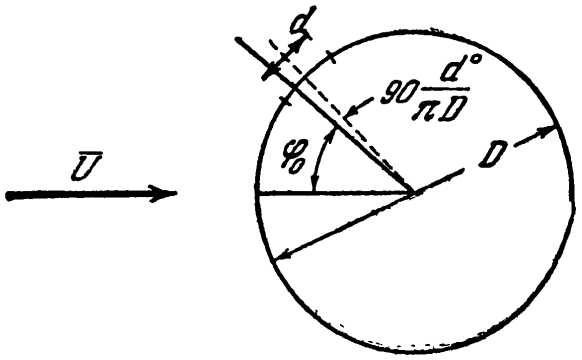



Рис. 2.6. Расположение отверстий статического давления на насадке Пито.

Часто делались попытки измерить статическое давление в турбулентном потоке при помощи трубки Пито с отверстиями статического давления. Однако этот метод является неверным, потому что в этом случае на давление в отверстиях очень сильное влияние оказывают турбулентные пульсации скорости. Измеренная величина статического давления будет при этом заниженной главным образом благодаря влиянию перпендикулярных к трубке турбулентных пульсаций скорости в поперечном направлении. Это станет очевидным, если представить себе, что поперечная скорость приведет к такому распределению давления по периферии цилиндрической трубки, которое соответствует поперечному обтеканию цилиндра, в результате чего возникнет отрицательное давление (соответствующее сопротивлению формы этого цилиндра).

К сожалению, до сих пор не проводилось систематического исследования влияния турбулентности на показания, получаемые с помощью трубок с отверстиями статического давления. Смысл этого влияния можно понять, если воспользоваться характеристикой чувствительности трубки Пито к отклонениям от направления течения. Эмпирическую зависимость для этой характеристики можно в первом приближении для не слишком больших значений $\varphi$ представить формулой

$$(P_{\text{стат}})_{\text{изм}} - P_{\text{стат}} = A(\cos\varphi - 1)\frac{1}{2}\rho U^2. \qquad (2.76)$$

По измерениям в статических условиях обнаружено, что $A \approx 1$, однако динамические измерения (проведенные, например, при вынужденных колебаниях самой трубки в поперечном направлении относительно потока) показывают, что величина $A$ может, по-видимому, стать значительно больше единицы.

Рассмотрим теперь турбулентный поток с осредненной скоростью, параллельной трубке Пито, и с компонентами турбулентных пульсаций скорости $u_1$, $u_2$ и $u_3$; тогда

$$U_{\text{эфф}} = \sqrt{(\overline{U} + u_1)^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{2.77}$$

В уравнении (2.76) мы должны вместо $U$ подставить величину $U_{\text{эфф}}$; для $\cos\varphi$ имеем (см. рис. 2.7):

$$\cos\varphi = \frac{\overline{U} + u_1}{U_{\text{эфф}}}. \tag{2.78}$$

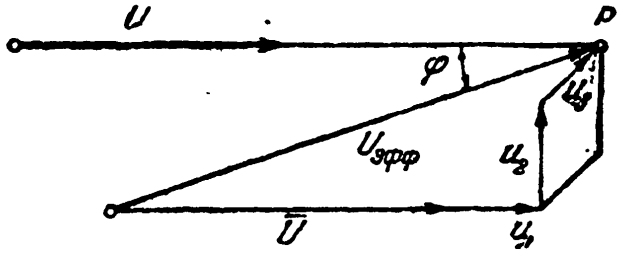



Рис. 2.7. Мгновенное направление $U_{\text{эфф}}$ относительно $U$.

Подстановка уравнений (2.77) и (2.78) в (2.76) приводит после некоторых преобразований, в которых применяется разложение в ряд по степеням $u_1/\overline{U}$, $u_2/\overline{U}$ и $u_3/\overline{U}$, к следующему соотношению:

$$(\overline{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} - P_{\text{стат}} = -A\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2\left(\frac{\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}{2\overline{U}^2} + \frac{\overline{u_2^4} + \overline{u_3^4} + 2\overline{u_2^2 u_3^2}}{2\overline{U}^4} + \dots\right). \tag{2.79}$$

Отсюда видно, что измеренная величина статического давления действительно является заниженной. В случае почти изотропной турбулентности, когда можно принять, что $\overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = u'^2$, ошибка в определении величины $[(\overline{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} - P_{\text{стат}}]/\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2$, если пренебречь членами четвертого и более высоких порядков, будет равна $-Au'^2/\overline{U}^2$.

*Измерение осредненной скорости.* При использовании методов визуализации течения, например, при помощи дискретных частиц, вводимых в движущуюся жидкость, можно получить величину осредненной скорости, исходя из среднего значения, соответствующего направлению и величине следа, оставленного частицей в течение периода освещения или экспозиции на регистрирующем элементе [74]. Диффузионные методы, в которых используются смешивающиеся с жидкостью трассирующие вещества, оказываются не столь пригодными, так как распространение трассирующего вещества вниз по потоку от источника зависит как от осредненной скорости, так и от турбулентной диффузии, в связи с чем при экспериментальном определении одного из этих факторов другой должен быть известен.

Обычно осредненная скорость определяется непосредственно при помощи чувствительного элемента, вводимого в поток. Возможность применения трубки Пито (или трубки полного напора) для измерения турбулентных пульсаций скорости исключается из-за ее инерционности. Но так как нас интересует здесь только осредненная скорость, то такой прибор, который, благодаря своей инерционности, дает некоторую среднюю величину, оказался бы очень полезным. Однако при этом мы сталкиваемся с той же проблемой, что и при измерении осредненного статического давления, а именно: как влияют на измерение полного напора турбулентные пульсации скорости?

В одном из теоретических исследований Гольдштейн [75] показал, что трубка полного напора фиксирует полный напор, соответствующий вектору полной скорости; это объясняется принятым Гольдштейном предположением о том, что фронтальную часть трубки можно считать «точкой» торможения. В этом случае получаем

$$\bar{P}_{\text{полн}} = \bar{P}_{\text{стат}} + \frac{1}{2}\rho\left[\overline{(\bar{U}+u_1)^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}\right]. \qquad (2.80)$$

Это предположение было бы справедливо, если бы трубка имела бесконечно малый диаметр, т. е. если бы фронтальную часть трубки можно было действительно считать точкой.

Однако, ввиду конечного диаметра отверстия трубки полного напора, могут наблюдаться отклонения от приведенного выше соотношения (2.80). Это обусловлено, прежде всего, тем, что в турбулентном потоке всегда имеется поперечный градиент скорости, который приводит к заметному изменению скорости на расстоянии, равном диаметру отверстия. В этом случае полное давление, измеряемое трубкой, не равно полному давлению, существующему в центре отверстия трубки [76]. Вторая причина возможных отклонений от соотношения (2.80) состоит в том, что поперечные пульсации скорости создают не такой скоростной напор, который соответствует (2.80), а значительно меньший; они могут привести даже к возникновению разрежения.

Весьма странно, что в данном случае, как и в отношении измерений статического давления с помощью отверстий в трубке Пито, тоже не проводилось систематического исследования влияния турбулентности на показания трубки полного напора, хотя трубка полного напора очень часто используется при изучении рассматриваемых вопросов.

Ввиду отсутствия надежных данных о поправках, учитывающих указанный эффект, Хинце и Ван дер Хегге Цийнен [77] пренебрегли влиянием турбулентных пульсаций скорости в поперечном направлении и рассмотрели в уравнении (2.80) только осевую компоненту турбулентных пульсаций скорости. В нескольких опытах Александера, Бэрона и Камингса [78] наблюдалось, что показание трубки полного напора, в противовес ожиданиям, заметно уменьшается

с увеличением относительной интенсивности турбулентности. Поэтому при использовании трубки полного напора эти авторы пренебрегли в дальнейшем влиянием турбулентности и приняли, что $\overline{P}_{\text{полн}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2}\rho\overline{U}^2$. Ни один из этих двух методов не является полностью справедливым, однако, как уже отмечалось выше, в настоящее время нет возможности предложить лучший метод.

Для оценки влияния турбулентности на показания трубки полного напора можно воспользоваться чувствительностью ее к направлению. Вместо (2.80) примем следующее соотношение:

$$(P_{\text{полн}})_{\text{изм}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2}\rho U_{\text{эфф}}^2 + B(\cos\varphi - 1)\frac{1}{2}\rho U_{\text{эфф}}^2,$$

где $\cos\varphi = (\overline{U} + u_1)/U_{\text{эфф}}$.

Третий член в этом выражении представляет аппроксимацию эмпирической характеристики чувствительности к направлению для не слишком больших величин $\varphi$.

По измерениям в статических условиях значение постоянной $B$ составляет приблизительно 3. Однако при динамических измерениях, когда трубка сама приводилась в колебательное движение в поперечном направлении относительно стационарного потока, величина $B$ была, по-видимому, значительно больше 3.

Следуя методу, уже описанному для случая измерений осредненного статического давления, после некоторых преобразований получаем

$$(\overline{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2}\rho\overline{U}^2\left[1 + \frac{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}{\overline{U}^2} - B\left(\frac{\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}{2\overline{U}^2} + \frac{\overline{u_2^4} + \overline{u_3^4} + 2\overline{u_2^2 u_3^2}}{8\overline{U}^4} + \ldots\right)\right]. \quad (2.81)$$

В зависимости от величины $B$ измеренный полный напор может быть значительно выше или ниже действительного значения. Для изотропной турбулентности, снова пренебрегая членами четвертого порядка и выше, получим

$$(\overline{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2}\rho\overline{U}^2\left[1 + \frac{u'^2}{\overline{U}^2}(3 - B)\right].$$

Отсюда при $B = 3$ получается результат, оправдывающий предположение Александера и др.

Объединяя выражения (2.79) и (2.81), приходим к следующей формуле для случая трубки Пито:

$$(\overline{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} - (\overline{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} = \frac{1}{2}\rho\overline{U}^2\left[1 + \frac{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}{\overline{U}^2} - (B - A)\left(\frac{\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}{2\overline{U}^2} + \ldots\right)\right]. \quad (2.82)$$

При изотропной турбулентности эта формула приводит к соотношению

$$(\bar{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} - (\bar{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} = \frac{1}{2}\rho\bar{U}^2\left[1 + \frac{\overline{u'^2}}{\bar{U}^2}(3 - B + A)\right].$$

Последние два выражения справедливы только в том случае, когда скорости в отверстиях для измерения полного напора и статического давления не связаны между собой (некоррелированы). Это, в свою очередь, требует, чтобы расстояние между двумя этими точками было намного больше, чем расстояние корреляции или интегральный масштаб турбулентности.

При использовании термоанемометра для измерения осредненной скорости потока для внесения поправки на влияние турбулентных пульсаций скорости, когда они становятся большими, можно обратиться к выведенному в § 2.3 выражению (2.40).

Чтобы внести поправку, учитывающую влияние больших турбулентных пульсаций скорости, аналогично можно поступить и в случае анемометра с электрическим разрядом, пользуясь его характеристикой чувствительности к направлению [см. уравнение (2.68)].

Поскольку напряжение в случае метода электромагнитной индукции является линейной функцией скорости и зависит лишь от компоненты скорости, перпендикулярной к линии, соединяющей электроды, и к направлению электромагнитного поля, то никакой поправки в измеренное значение осредненной скорости вносить не требуется, даже если турбулентные пульсации скорости станут большими.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

$A$ — коэффициент характеристики термоанемометра; $A_g$ — при температуре газа; $A_f$ — при пленочной температуре.
$B$ — коэффициент характеристики термоанемометра.
$C_w$ — тепловая емкость нити термоанемометра.
$c_w$ — удельная теплоемкость материала нити термоанемометра.
$c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении.
$c$ — скорость света.
$d$ — диаметр нити термоанемометра.
$E$ — разность потенциалов между электродами.
$E$ — спектральная функция кинетической энергии турбулентности.
$e$ — падение напряжения на нити термоанемометра; $\overline{e^2}$ — среднеквадратичная величина.
$f$ — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.
Gr — число Грасгофа.
$g$ — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.

$g$ — ускорение силы тяжести.

$g_{кр}$ — крутизна характеристики.

$H$ — напряженность электромагнитного поля.

$h$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$I$ — сила электрического тока, нагревающего нить термоанемометра; $\overline{I}$ — осредненная по времени величина; $i$ — турбулентная пульсация тока.

$k$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$l$ — длина нити термоанемометра, $l_c$ — «холодная» длина.

$l_{раз}$ — разрешающая длина нити термоанемометра.

$M$ — постоянная времени нити термоанемометра.

$\mathsf{M}$ — число Маха.

$\mathsf{Nu}$ — число Нуссельта.

$P_{ст}$ — статическое давление; $\overline{P}_{ст}$ — осредненная по времени величина.

$P_{полн}$ — полное давление; $\overline{P}_{полн}$ — осредненная по времени величина.

$\mathsf{Pr}$ — число Прандтля.

$q$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$\mathsf{Re}$ — число Рейнольдса.

$R_w$ — электрическое сопротивление нити термоанемометра; $\overline{R}_w$ — осредненная по времени величина; $R_0$ — при характерной температуре; $R_g$ — при температуре газа; $r_w$ — турбулентная пульсация.

$R_E$ — коэффициент эйлеровой временной корреляции.

$R_L$ — коэффициент лагранжевой временной корреляции.

$S_{ik,\,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.

$s$ — чувствительность нити термоанемометра; расстояние между электродами.

$t$ — время.

$U$ — эйлерова скорость; $\overline{U}$ — осредненная по времени величина; $u$ — компонента турбулентной пульсации; $u' = \sqrt{\overline{u^2}}$ — среднеквадратичная величина.

$V$ — напряженность индуцированного электрического поля.

$x_i$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

$y_i$ — лагранжевы координаты в декартовой системе.

$\alpha$ — коэффициент теплоотдачи.

$\beta$ — коэффициент объемного расширения газа; $\beta_f$ — при пленочной температуре.

$b$, $b_1$ — температурные коэффициенты электрического сопротивления.

$C$ — поправочный коэффициент.

$\Delta$ — разность.

$e$ — коэффициент преобразования.

$\epsilon$ — коэффициент вихревой диффузии; $\epsilon_\gamma$ — для скалярной субстанции.

$\Gamma$ — скалярная субстанция; $\overline{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; $\gamma$ — турбулентная пульсация.

$\mathcal{J}_E$ — эйлеров интегральный масштаб времени.

$\mathcal{J}_L$ — лагранжев интегральный масштаб времени.

$i$ — $\sqrt{-1}$.

$K$ — коэффициент теплопроводности; $K_g$ — для газа; $K_f$ — то же при пленочной температуре.

$\Lambda_g$ — пространственный поперечный интегральный масштаб.

$\lambda_g$ — пространственный поперечный микромасштаб.

$\mu_g$ — динамический коэффициент вязкости; $\mu_f$ — при пленочной температуре.

$\mu$ — относительная магнитная проницаемость.

$\pi$ — 3, 14159 ...

$\mathcal{R}_w$ — электрическое сопротивление нити термоанемометра на единицу длины; $\mathcal{R}_0$ — при характерной температуре; $\mathcal{R}_g$ — при температуре газа; $r_w$ — турбулентная пульсация.

$\rho$ — плотность; $\bar{\rho}$ — осредненная по времени величина; $\tilde{\rho}$ — турбулентная пульсация; $\rho_g$ — плотность газа; $\rho_f$ — то же при пленочной температуре; $\rho_{\text{торм}}$ — то же в критической точке; $\rho_w$ — плотность материала нити.

$\tau$ — время.

$\Theta$ — температура; $\overline{\Theta}$ — осредненная по времени величина; $\theta$ — турбулентная пульсация; $\Theta_w$ — температура нити; $\Theta_g$ — температура газа; $\Theta_f = \frac{1}{2}(\Theta_g + \Theta_w)$ — пленочная температура; $\Theta_e$ — равновесная температура нити термоанемометра; $\Theta_{\text{торм}}$ — температура торможения.

$\xi_i$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

# ГЛАВА 3

# ИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

## § 3.1. Введение

Изотропная турбулентность представляет собой простейший тип турбулентности, так как при этом не отдается предпочтения какому-либо особому направлению, а для описания структуры и динамики турбулентности требуется минимальное число величин и соотношений. Однако изотропная турбулентность является также и гипотетическим типом турбулентности, поскольку любое реальное турбулентное течение не обладает действительной изотропностью, хотя можно создать такие условия, при которых изотропность будет в большей или меньшей степени приближения обеспечена.

В этой главе мы рассмотрим изотропную турбулентность в значительно более широкой постановке, нежели в главе 1.

Читатель, который знаком главным образом с практическими и прикладными аспектами гидродинамики, возможно, склонен спросить, почему этот гипотетический тип турбулентности рассматривается столь широко. Ответ состоит в том, что, несмотря на гипотетический характер изотропной турбулентности, знание ее характеристик может послужить основой для изучения реальных, неизотропных турбулентных потоков. Благодаря своей относительной простоте, изотропная турбулентность более, чем какой-либо иной тип турбулентности, поддается общему теоретическому анализу. Полученные при этом теоретические соотношения довольно легко можно проверить с помощью соответствующих опытов по исследованию турбулентности, которая с достаточной степенью приближения является изотропной.

Более того, теоретические и экспериментальные результаты подобных исследований имеют больше практического значения, чем можно себе представить. Из теоретического анализа и экспериментальных наблюдений известно, что микроструктура подавляющего большинства реальных, неизотропных турбулентных потоков является приблизительно изотропной (локальная изотропность). Отсюда следует, что многие свойства изотропной турбулентности приложимы и к явлениям

реальной турбулентности, определяемым главным образом микроструктурой, в которой преобладает локальная изотропность.

Но даже если мы имеем дело с неизотропной макроструктурой реальной турбулентности или если эта турбулентность неизотропна в большей части своего спектра, то для отыскания первого приближения зачастую оказывается возможным рассматривать подобную турбулентность так, как если бы она являлась изотропной. Расхождение между результатами, полученными в предположении об изотропности, и результатами измерений зачастую настолько мало, что им в первом приближении вполне можно пренебречь, причем оно иногда оказывается даже меньше разброса экспериментальных точек.

Благодаря своей относительной простоте изотропная турбулентность изучена наиболее полно как теоретически, так и экспериментально. Геометрические и кинематические соотношения, присущие турбулентности, исследовались с помощью корреляционных и спектральных функций, а также путем анализа динамики корреляций и спектральных функций (вырождение турбулентности).

К настоящему времени удовлетворительную и довольно полную картину формальных геометрических соотношений удалось получить лишь в случае выполнения условия изотропности, т. е. при инвариантности относительно поворота системы координат и отражения от координатных плоскостей, и условия несжимаемости, т. е. для несжимаемой жидкости. Однако получить общее и полное решение соответствующих дифференциальных уравнений до сих пор не представилось возможным. За исключением единственного предельного случая, остаются неизвестными полные решения для различных корреляционных и спектральных функций, а также для их изменения во времени. Между тем введение некоторых дополнительных предположений или постулатов, выполняющихся с той или иной степенью приближения, позволило получить решения, справедливость которых, правда, ограничена.

Одно из распространенных предположений состоит в том, что структура турбулентности и кинематические соотношения остаются в течение периода вырождения подобными или, лучше сказать, автомодельными. Подобие и автомодельность — не идентичные понятия. Чтобы избежать каких-либо недоразумений, мы будем различать эти понятия между собой, следуя при этом Стюарту и Таунсенду [17].

Термин «подобие» используется в том случае, когда для определения структуры произвольного поля турбулентности считается достаточным задание только масштаба длины и масштаба скорости.

Термин «автомодельность» используется в том случае, когда предполагается, что структура турбулентности сохраняет свое подобие на протяжении всего периода вырождения; но, будучи выраженной через специальные масштабы длины и скорости, эта структура для других вырождающихся турбулентных течений не обязательно одинакова,

В последующем изложении мы, как и большинство исследователей, будем полагать жидкость несжимаемой. Само собой разумеется, что это предположение приводит к существенному упрощению задачи. Однако в конце этой главы будет сделано несколько замечаний о влиянии сжимаемости.

## § 3. 2. Корреляционные тензоры

В главе 1 было показано, что в современных теориях статистическое поведение турбулентности удобно описывается с помощью корреляций между пульсациями давления и пульсациями скорости в двух точках потока. Там же были введены корреляционные тензоры первого, второго и третьего рангов, а именно:

$$(K_{i,\,p})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A p_B},$$

$$(Q_{i,\,j})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B},$$

$$(S_{ij,\,k})_{A,\,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_A (u_k)_B}.$$

В отличие от индексов $i$, $j$, $k$ и т. д. индекс $p$ является фиксированным и указывает просто на принадлежность к скалярной величине $p$.

Рассмотрим теперь эти корреляционные тензоры более подробно, особенно в отношении тех свойств, которые вытекают из условия изотропности, и выведем общие выражения для изотропных тензоров. При этом мы воспользуемся теорией инвариантов в том виде, как она изложена Робертсоном [1]. Эта теория является полностью формальной и не обеспечивает возможности наглядно интерпретировать смысл полученных геометрических соотношений между различного рода корреляциями, расстоянием между двумя точками $A$ и $B$, а также их положением.

Карман и Хауэрт [5] получили подобные соотношения, применив геометрический подход, физический смысл которого более прозрачен. С целью иллюстрации приведем один пример, в котором используется метод этих авторов, а именно вывод тензора двойных корреляций $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$.

В общем случае корреляционные тензоры представляют собой функции от пространственных координат, от расстояния между точками $A$ и $B$ и времени. Ввиду того, что нас интересуют лишь геометрические соотношения, то для простоты мы не будем отыскивать в явном виде зависимость выражений для этих тензоров от времени.

*Корреляционный тензор первого ранга* $(K_{p,\,i})_{A,\,B}$. Этот тензор имеет три компоненты, соответствующие тем трем компонентам, на которые может быть разложена скорость в точке $B$. Не

ограничивая общности, можно выбрать систему координат таким образом, чтобы ось $x_1$ совпадала с линией $AB$.

В этой системе координат три указанные компоненты тензора записываются в следующем виде (см. рис. 3.1):

$$\overline{p_A(u_1)_B}, \quad \overline{p_A(u_2)_B}, \quad \overline{p_A(u_3)_B}.$$

Условие изотропности требует, чтобы эти выражения были инвариантны относительно отражения от координатных плоскостей. Из трех компонент тензора два последних могут быть инвариантны только в том случае, если они равны нулю:

$$\overline{p_A(u_2)_B} = 0, \quad \overline{p_A(u_3)_B} = 0.$$

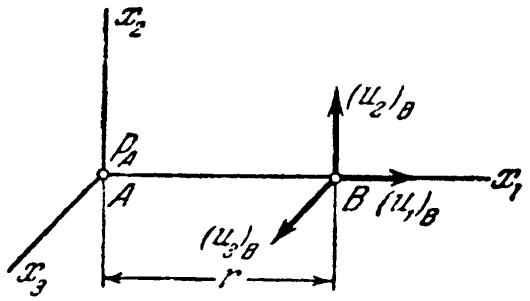



Рис. 3.1. Корреляция между давлением в точке $A$ и компонентами скорости в точке $B$.

Остающуюся компоненту $\overline{p_A(u_1)_B}$ или $\overline{p_A(u_r)_B}$ обозначим через $K_1(r)$ и покажем, что эта корреляция, для того чтобы быть инвариантной, должна быть нечетной функцией от $r$. С этой целью разложим $K_1(r)$ в ряд по степеням $r$:

$$K_1(r) = [K_1]_{r=0} + \frac{r}{1!}\left[\frac{\partial K_1}{\partial r}\right]_{r=0} + \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial r^2}\right]_{r=0} + \ldots,$$

где

$$[K_1]_{r=0} = [\overline{p_A(u_r)_B}]_{r=0},$$

$$\left[\frac{\partial K_1}{\partial r}\right]_{r=0} = \left[\overline{p_A\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_B}\right]_{r=0},$$

$$\left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial r^2}\right]_{r=0} = \left[\overline{p_A\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right)_B}\right]_{r=0},$$

. . . . . .

Коэффициенты этого разложения $[K_1]_{r=0}$, $\left[\frac{\partial K_1}{\partial r}\right]_{r=0}$ и т. д. являются скалярными величинами и поэтому должны быть инвариантными.

Далее, величины $u_r$, $\partial^2 u_r/\partial r^2$, $\partial^4 u_r/\partial r^4$ и т. д. при отражении изменяют свой знак и поэтому, чтобы быть инвариантными, должны равняться нулю; величины $\partial u_r/\partial r$, $\partial^3 u_r/\partial r^3$ и т. д. при отражении своего знака не изменяют.

Стало быть, разложение $K_1(r)$ в степенной ряд должно иметь следующий вид:

$$K_1(r) = r\left[\frac{\partial K_1}{\partial r}\right]_{r=0} + \frac{r^3}{3!}\left[\frac{\partial^3 K_1}{\partial r^3}\right]_{r=0} + \ldots \qquad (3.1)$$

Каким должно быть выражение для тензора $(K_{p,i})_{A,B}$, записанное через корреляцию $K_1(r)$ и координаты $\xi_j$ точки $B$ относительно

точки $A$, когда точки $A$ и $B$ расположены по отношению к системе координат произвольно?

Рассмотрим скалярную корреляцию $K_{A,B}$ между давлением в точке $A$ и компонентой скорости в точке $B$, соответствующей заданному направлению $b$:

$$K_{A,B} = (K_{p,i})_{A,B}\, e_{bi}, \tag{3.2}$$

где $e_{bi}$ — направляющий косинус направления $b$ относительно направления оси $x_i$ (см. § 1.4). Как видим, $K_{A,B}$ представляет собой однородную линейную функцию от $e_{bi}$, а $(K_{p,i})_{A,B}$ есть функция $\xi_j$. Поскольку $K_{A,B}$ — скаляр, то величина $(K_{p,i})_{A,B}$ должна быть такой функцией от $\xi_j$, чтобы те члены в выражении для $K_{A,B}$, которые содержат $\xi_j$ и $e_{bi}$, были скалярами.

Единственной системой скалярных комбинаций, которые могут быть образованы из величин $\xi_j$ и $e_{bi}$, является следующая:

$$\xi_i\xi_i, \quad e_{bi}e_{bi} \quad \text{и} \quad \xi_i e_{bi}.$$

Но так как $e_{bi}e_{bi} = 1$, то из этих комбинаций существенными являются только первая и третья. Следовательно, величина $K_{A,B}$ должна быть функцией от $\xi_i\xi_i = r^2$ и $\xi_i e_{bi}$. Тогда единственная комбинация, являющаяся линейной и однородной относительно $e_{bi}$, запишется так:

$$K_{A,B} = K_1^*(r^2)\,\xi_i e_{bi}. \tag{3.3}$$

Из соотношений (3.2) и (3.3) следует, что

$$(K_{p,i})_{A,B} = K_1^*(r^2)\,\xi_i. \tag{3.4}$$

Это — общее выражение для изотропного тензора первого ранга.

Если в качестве начала координат выбрать точку $A$, а ось $x_1$ провести через точки $A$ и $B$, то, так как $\xi_1 = r$, из уравнения (3.4) вытекает, что

$$K_1(r) = K_1^*(r^2)\,r.$$

Следовательно,

$$(K_{p,i})_{A,B} = \frac{K_1(r)}{r}\,\xi_i. \tag{3.5}$$

Предыдущее выражение тоже показывает, что величина $K_1(r)$ должна быть нечетной функцией от $r$.

Посмотрим теперь, что получается, когда жидкость является несжимаемой. Имеем

$$\left(\frac{\partial K_{p,i}}{\partial x_i}\right)_B = \overline{p_A\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_B} = 0,$$

так что дивергенция от $(K_{p,i})_{A,B}$ стремится к нулю. Поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

то из соотношения (3.5) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{K_1(r)}{r}\,\xi_i\right) = 3\frac{K_1}{r} - \frac{K_1}{r^2}\frac{\xi_i\xi_i}{r} + \frac{\xi_i\xi_i}{r^2}\frac{\partial K_1}{\partial r} = \frac{2K_1}{r} + \frac{\partial K_1}{\partial r} = 0,$$

откуда $K_1(r) = c/r^2$. Ввиду того, что $K_1(r)$ при $r = 0$ не может обращаться в бесконечность, постоянная должна равняться нулю; следовательно, $K_1(r) = 0$. Отсюда следует, что при изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости

$$(K_{p,\,i})_{A,\,B} = \overline{p_A (u_i)_B} = 0. \tag{3.6}$$

Заметим, что из одного лишь условия изотропности вытекает $\overline{p_A (u_n)_B} = 0$ (условие инвариантности относительно отражения), $[p_A (u_r)_B]_{r=0} = 0$ (условие инвариантности относительно отражения), но

$$\overline{p_A (u_r)_B} \neq 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0,$$

а условие несжимаемости требует, чтобы последняя корреляция и, стало быть, тензор $(K_{p,\,i})_{A,\,B}$ были равны нулю.

*Корреляционный тензор второго ранга* $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$. В главе 1 мы рассмотрели корреляции $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$ и некоторые особенности двух конкретных корреляций, а именно продольной корреляции $u'^2 f(r)$ и поперечной корреляции $u'^2 g(r)$. Мы также показали, что корреляции типа $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$ могут быть выражены через продольную и поперечную корреляции лишь для случая особого расположения точек $A$ и $B$ относительно рассматриваемой системы координат.

Выведем теперь общее выражение для изотропного тензора второго ранга и, основываясь на нем, выразим $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$ через $f(r)$ и $g(r)$.

Рассмотрим скалярную корреляцию $Q_{A,\,B}$ между компонентой скорости в точке $A$ в направлении $a$ и компонентой скорости в точке $B$ в направлении $b$:

$$Q_{A,\,B} = (Q_{i,\,j})_{A,\,B}\, e_{ai} e_{bi}.$$

Корреляция $Q_{A,\,B}$ зависит от величин $\xi_k$, $e_{ai}$ и $e_{bj}$, причем составляющие этой функции являются скалярными комбинациями из $\xi_k$, $e_{ai}$ и $e_{bj}$; более того, эта функция должна быть однородной и билинейной по $e_{ai}$ и $e_{bi}$.

Скалярные комбинации из величин $\xi_k$, $e_{ai}$ и $e_{bj}$ вплоть до членов, билинейных по $e_{ai}$ и $e_{bj}$, выражаются следующим образом:

$$\xi_k\xi_k = r^2, \quad e_{ai}e_{ai} = 1, \quad e_{bj}e_{bj} = 1,$$
$$\xi_i e_{ai}, \quad \xi_j e_{bj}, \quad \delta_{ij} e_{ai} e_{bj}, \quad \varepsilon_{ijk}\xi_k e_{ai} e_{bj}.$$

Однородная билинейная функция от $e_{ai}$ и $e_{bj}$ записывается так:

$$Q_{A,\,B} = Q_1 \xi_i \xi_j e_{ai} e_{bj} + Q_2 \delta_{ij} e_{ai} e_{bj} + Q_3 \varepsilon_{ijk}\xi_k e_{ai} e_{bj},$$

откуда

$$(Q_{i,j})_{A,B} = Q_1 \xi_i \xi_j + Q_2 \delta_{ij} + Q_3 \varepsilon_{ijk} \xi_k,$$

где $Q_1$, $Q_2$ и $Q_3$ — функции от $\xi_i \xi_i = r^2$.

Вследствие изотропности должна иметь место инвариантность относительно отражения от произвольной точки; следовательно,

$$(Q_{i,j})_{A,B} = (Q_{j,i})_{A,B}.$$

Но поскольку $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$, то $Q_3 = 0$; стало быть,

$$(Q_{i,j})_{A,B} = Q_1(r^2)\,\xi_i \xi_j + Q_2(r^2)\,\delta_{ij}. \tag{3.7}$$

Это уравнение и является общим выражением для изотропного тензора второго ранга.

Каков смысл величин $Q_1(r^2)$ и $Q_2(r^2)$? Рассмотрим особый случай, когда точки $A$ и $B$ лежат на оси $x_1$, причем начало координат совпадает с точкой $A$. Тогда $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $Q_{1,1} = u'^2 f(r)$ и $Q_{2,2} = u'^2 g(r)$; следовательно, из формулы (3.7) получаем

$$Q_{1,1} = u'^2 f(r) = Q_1(r^2)\,r^2 + Q_2(r^2)$$

и

$$Q_{2,2} = u'^2 g(r) = Q_2(r^2).$$

Отсюда

$$Q_1(r^2) = u'^2 \frac{f(r) - g(r)}{r^2}, \qquad Q_2(r^2) = u'^2 g(r).$$

Тогда уравнение (3.7) принимает вид

$$(Q_{i,j})_{A,B} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2}\,\xi_i \xi_j + g(r)\,\delta_{ij}\right]. \tag{3.8}$$

*Геометрический вывод уравнения* (3.8). Рассмотрим каждый член $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ в отдельности. Это достаточно проделать только в отношении корреляций двух типов, а именно при $i = j$ и $i \neq j$.

Пусть начало координат находится в точке $A$, а $r$ — расстояние $AB$ — имеет компоненты $\xi_i$. Рассмотрим $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$. Через отрезок $AB$ и ось $x_1$ проведем плоскость, как показано на рис. 3.2. В этой плоскости скорость в точках $A$ и $B$ может быть разложена соответственно на компоненты $(u_{1*})_A$ и $(u_{1*})_B$, направленные вдоль $AB$, и компоненты $(u_{2*})_A$ и $(u_{2*})_B$, перпендикулярные к $AB$; третьи компоненты, $(u_{3*})_A$ и $(u_{3*})_B$ перпендикулярны к проведенной плоскости. Последние компоненты не дают какого-либо добавк соответственно к $(u_1)_A$ и $(u_1)_B$. Из рис. 3.2 следует, что

$$(u_1)_A = (u_{1*})_A \cos\varphi_1 - (u_{2*})_A \sin\varphi_1 = (u_{1*})_A \frac{\xi_1}{r} - (u_{2*})_A \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}},$$

$$(u_1)_B = (u_{1*})_B \frac{\xi_1}{r} - (u_{2*})_B \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}}.$$

Если $(u_1)_A$ умножить на $(u_1)_B$, то получатся следующие произведения:

$$\overline{(u_{1*})_A (u_{1*})_B} = u'^2 f(r), \quad \overline{(u_{2*})_A (u_{2*})_B} = u'^2 g(r)$$

и, вследствие условий инвариантности,

$$\overline{(u_{1*})_A (u_{2*})_B} = \overline{(u_{2*})_A (u_{1*})_B} = 0.$$

Отсюда

$$Q_{1,1} = \overline{(u_1)_A (u_1)_B} = u'^2 f(r) \frac{\xi_1^2}{r} + u'^2 g(r) \left(1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}\right) =$$

$$= u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_1 \xi_1 + g(r)\right].$$

Аналогичным путем получим

$$Q_{2,2} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_2 \xi_2 + g(r)\right]$$

или, в более общей форме,

$$Q_{i,j} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + g(r)\right] \quad \text{при} \quad i = j. \qquad \text{(a)}$$

Рассмотрим теперь $\overline{(u_1)_A (u_2)_B}$. Снова проведем плоскость через $AB$ и

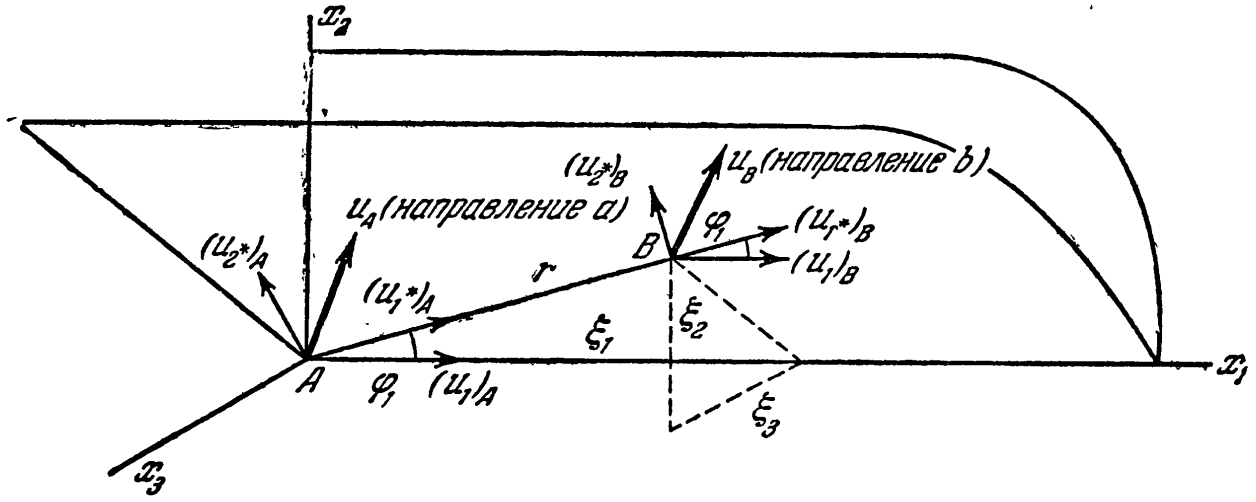



Рис. 3.2. Связь между $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ и $f(r)$ и $g(r)$.

ссь $x_1$ (см. рис. 3.3). Как и в предыдущем случае, из рассмотрения этого рисунка следует, что

$$(u_1)_A = (u_{1*})_A \frac{\xi_1}{r} - (u_{2*})_A \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}},$$

$$(u_2)_B = (u_{1*})_B \cos\varphi_2 + (u_{2*})_B \frac{\cos\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1} + \text{компонента } (u_{3*})_B =$$

$$= (u_{1*})_B \frac{\xi_2}{r} + (u_{2*})_B \frac{\xi_1 \xi_2}{r^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/r^2}} + \text{компонента } (u_{3*})_B.$$

На основании условия изотропности

$$\overline{(u_{1*})_A (u_{2*})_B} = 0, \quad \overline{(u_{1*})_A (u_{3*})_B} = 0, \quad \overline{(u_{2*})_A (u_{1*})_B} = 0, \quad \overline{(u_{2*})_A (u_{3*})_B} = 0,$$

так что

$$\overline{(u_1)_A (u_2)_B} = \overline{(u_{1*})_A (u_{1*})_B} \frac{\xi_1 \xi_2}{r^2} - \overline{(u_{2*})_A (u_{2*})_B} \frac{\xi_1 \xi_2}{r^2},$$

или

$$Q_{1,2} = u'^2 \frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_1 \xi_2.$$

И наконец, в общей форме

$$Q_{i,j} = u'^2 \frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j, \qquad i \neq j. \tag{б}$$

Следовательно, соотношения (а) и (б) можно объединить следующим образом:

$$Q_{i,j} = u'^2 \left[ \frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + g(r) \delta_{ij} \right].$$

Теперь для вывода соотношения между $Q_1$ и $Q_2$ или между $f$ и $g$ воспользуемся условием несжимаемости жидкости.

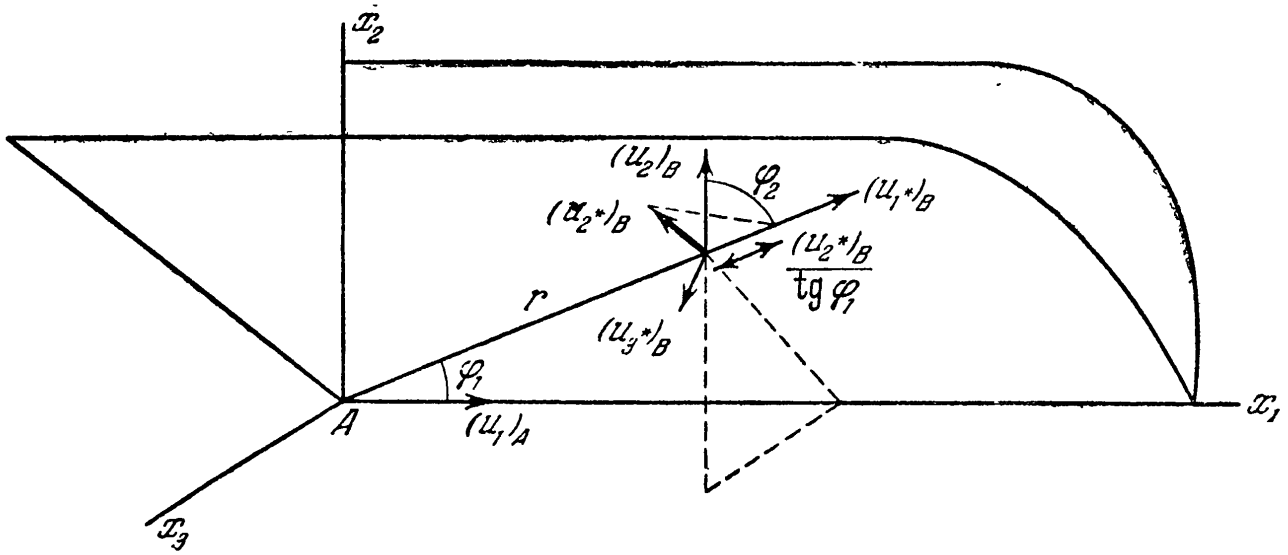



Рис. 3.3. Связь между $\overline{(u_1)_A (u_2)_B}$ и $f(r)$ и $g(r)$.

Для несжимаемой жидкости получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_B (Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)_B} = 0.$$

Если $(x_j)_B - (x_j)_A = \xi_j$, то

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (Q_{i,j})_{A,B} = 0.$$

Подстановка по уравнению (3.7) дает

$$\frac{1}{u'^2}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(Q_{i,j})_{A,B} = 3\frac{f-g}{r^2}\xi_i + \frac{f-g}{r^2}\xi_j\delta_{ij} - 2\frac{f-g}{r^3}\frac{\xi_j\xi_j}{r}\xi_i + \\ + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial r}\right)\xi_j\xi_j\xi_i + \delta_{ij}\frac{\xi_j}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = 0,$$

откуда

$$f(r) + \frac{r}{2}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = g(r). \tag{3.9}$$

Эквивалентное интегральное соотношение имеет вид

$$f(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r r g(r)\,dr. \tag{3.10}$$

На рис. 3.4 дается экспериментальная проверка соотношения (3.9) по данным Кармана и Хауэрта [2].

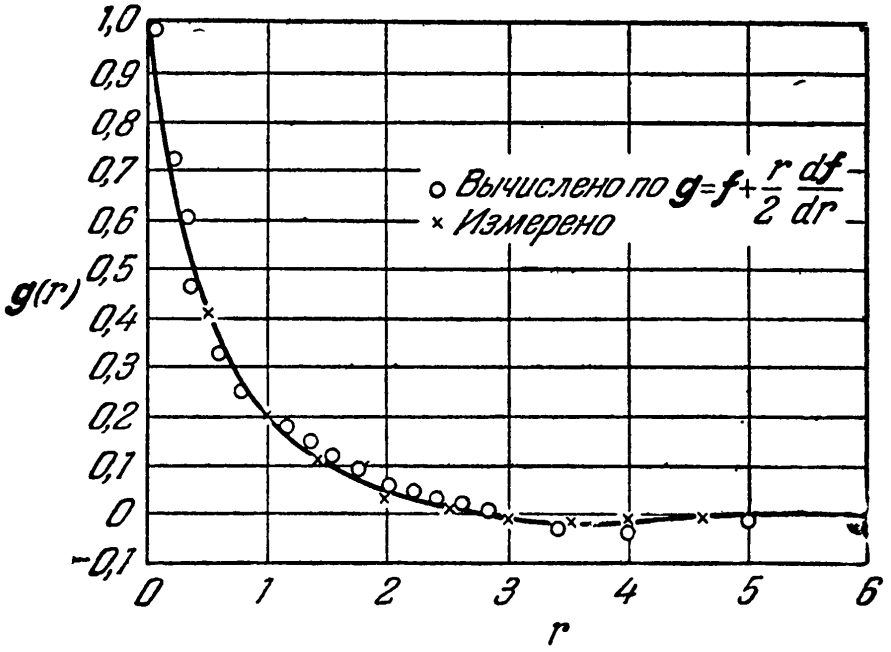



Рис. 3.4. К доказательству связи $f(r)$ с $g(r)$.

Карман [2] отмечает, что соотношение (3.9) идентично выражению для тензора напряжений в случае сферической симметрии. Тогда коэффициент корреляции $f(r)$ соответствует радиальной компоненте напряжения $\sigma_r$, а коэффициент корреляции $g(r)$ — тангенциальной компоненте напряжения $\sigma_t$. Условие неразрывности, на основании которого получено соотношение (3.9), соответствует условию равновесия. Чтобы показать это, рассмотрим условие равновесия в радиальном направлении элементарного объема $r^2\,d\varphi\,d\psi\,dr$ (см. рис. 3.5):

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,d\varphi\,d\psi\,\sigma_r)\,dr - \sigma_t(r\,d\varphi\,dr)\,d\psi - \sigma_t(r\,d\psi\,dr)\,d\varphi = 0,$$

или

$$2r\sigma_r + r^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 2\sigma_t r,$$

или

$$\sigma_r + \frac{r}{2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \sigma_t.$$

Из соотношения (3.9) между $f(r)$ и $g(r)$, которое получено на основании условия неразрывности для несжимаемой жидкости, следует, таким образом, что тензор двойных корреляций скорости $(Q_{i,j})_{A,B}$ может быть выражен всего лишь через одну скалярную величину, либо $f(r)$, либо $g(r)$, например:

$$(Q_{i,j})_{A,B} = u'^2 \left\{ -\frac{1}{2r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \xi_i \xi_j + \left[ f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] \delta_{ij} \right\}. \quad (3.11)$$

На рис. 3.6 показаны кривые для $Q_{1,1}$ как функции параметра $\xi_1/M$ при различных значениях $\xi_2/M$, полученные по измерениям Фавра, Гавильо и Дюма [3]. Эти авторы производили измерения на расстоянии $40M$ вниз по потоку от решетки с размером ячейки $M = 2{,}5$ *см* при скорости воздушного потока 12,27 *м/сек* ($\mathrm{Re}_M = 21\,500$).

Для кривых, соответствующих $\xi_2/M = 0{,}157$ и $\xi_2/M = 0{,}315$, приведены также точки, вычисленные согласно уравнению (3.11) по формуле

$$\frac{1}{u'^2} Q_{1,1} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \xi_1^2 + f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} =$$

$$= f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{r^2} \right),$$

где $r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

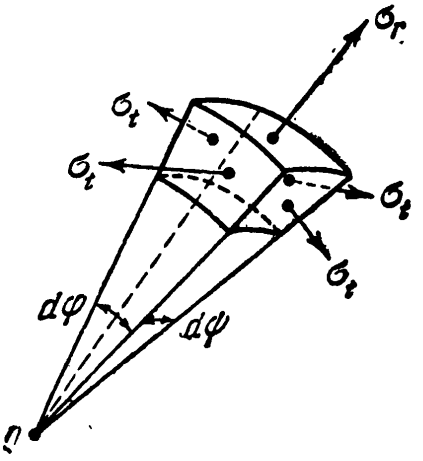



Рис. 3.5. Напряжения в случае сферической симметрии относительно точки $O$.

Нетрудно убедиться, что сооответствие между экспериментальными и расчетными значениями, особенно в случае $\xi_2/M = 0{,}157$, вполне удовлетворительно.

Из уравнения (3.8) или (3.11) легко вывести выражение для

$$(Q_{i,i})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_i)_B}.$$

Впоследствии мы воспользуемся этим частным значением $(Q_{i,j})_{A,B}$. Из соотношения (3.8) имеем

$$(Q_{i,i})_{A,B} = u'^2 [f(r) + 2g(r)],$$

а из (3.11)

$$(Q_{i,i})_{A,B} = u'^2 \left[ 3f(r) + r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] = \frac{u'^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 f(r)]. \quad (3.12)$$

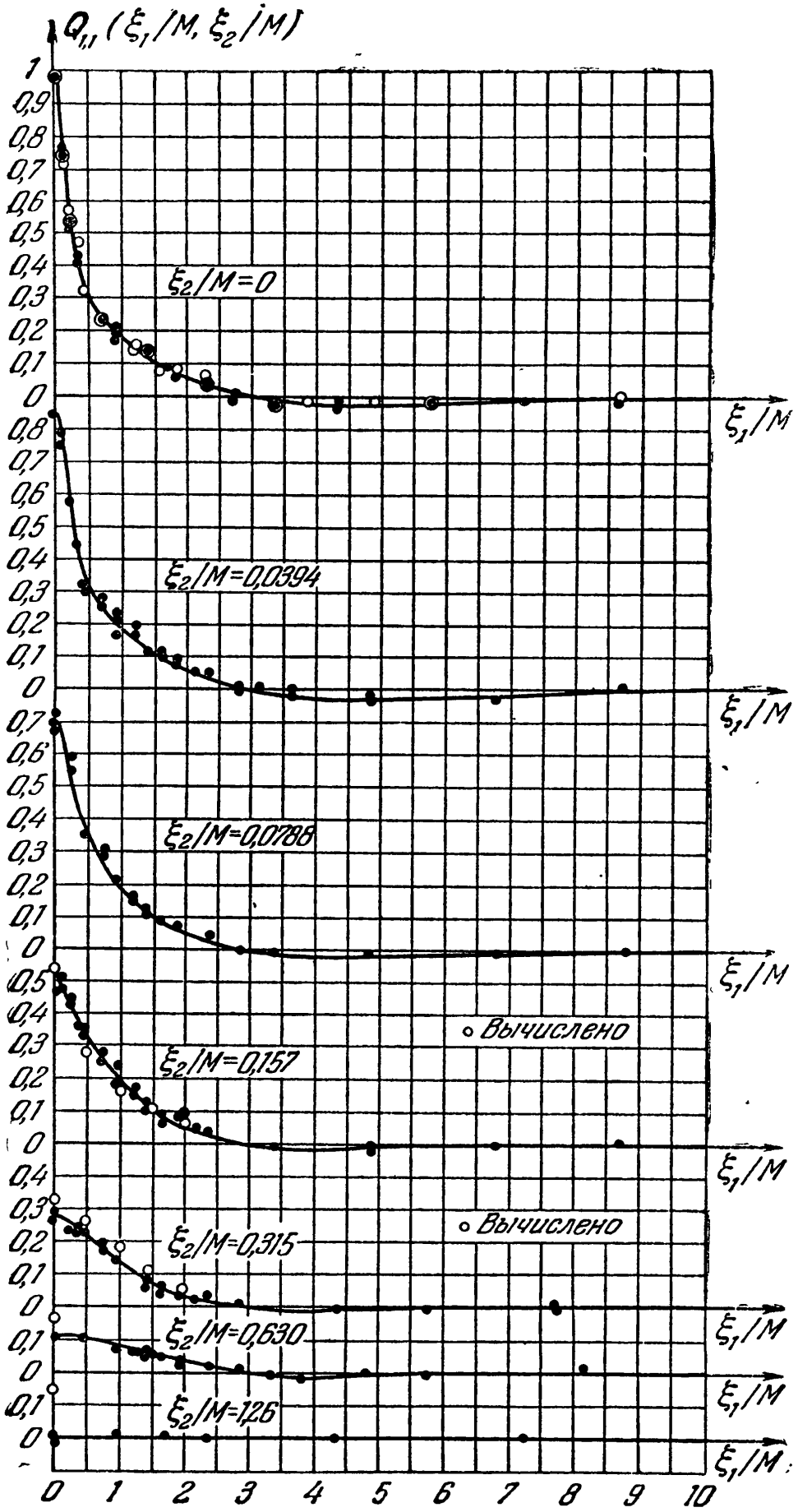



Рис. 3.6. Зависимость пространственной корреляции $Q_{11} = \overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ от $\xi_1$ и $\xi_2$ [3].

Когда $A \equiv B$ и, значит, $r = 0$, эти соотношения дают: $Q_{i,i}(0) = 3u'^2 = 2 \times$ (кинетическая энергия на единицу массы).

В § 1.6 было показано, что $f(r)$ и $g(r)$ являются четными функциями $r$ (это непосредственно следует также из приведенных выше соотношений между $Q_1$ и $Q_2$). Их разложения в ряд имеют вид

$$g(r) = 1 + \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right]_{r=0} + \frac{r^4}{4!}\left[\frac{\partial^4 g}{\partial r^4}\right]_{r=0} + \ldots \tag{3.13}$$

и

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0} + \frac{r^4}{4!}\left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0} + \ldots \tag{3.14}$$

Подстановка формул (3.13) и (3.14) в (3.9) дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right]_{r=0} &= 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0}, \\
\left[\frac{\partial^4 g}{\partial r^4}\right]_{r=0} &= 3\left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left[\frac{\partial^{2n} g}{\partial r^{2n}}\right]_{r=0} &= (n+1)\left[\frac{\partial^{2n} f}{\partial r^{2n}}\right]_{r=0}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из первого соотношения получаем связь между микромасштабами $\lambda_g$ и $\lambda_f$:

$$\lambda_f = \lambda_g \sqrt{2}. \tag{3.16}$$

Теперь необходимо найти корреляции между производными от скоростей, а именно:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)_A \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_e}\right)_B.$$

Поскольку дифференцирование в точке $B$ не распространяется на $(u_i)_A$, как и дифференцирование в точке $A$ — на $(u_j)_B$, то можно написать

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_e}\right)_B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_e}\right)_B \overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_e}\right)_B (Q_{i,j})_{A,B} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \, \partial \xi_e}(Q_{i,j})_{A,B},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A$, так что $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_e}\right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_e}$. Когда $A \equiv B$, имеем

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_e}\right)} = -\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \, \partial \xi_e}(Q_{i,j})\right]_{r=0}. \tag{3.18}$$

Путем двукратного дифференцирования $(Q_{i,j})_{A,B}$ с учетом соотношения (3.17) и использования разложения функции $f(r)$ в ряд (3.14) после некоторых преобразований получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_e}(Q_{i,j})_{A,B} = u'^2\left(2\delta_{ke}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ie}\delta_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{je}\delta_{ik}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0} - u'^2\left(\frac{\delta_{ie}\delta_{jk}+\delta_{je}\delta_{ik}-6\delta_{ke}\delta_{ij}}{12} + \frac{\xi_i\xi_j\delta_{ke}+\xi_j\xi_k\delta_{ei}-6\xi_k\xi_e\delta_{ij}+\xi_e\xi_i\delta_{jk}+\xi_e\xi_j\delta_{ik}+\xi_i\xi_k\delta_{je}}{6r^2}\right)\left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0} r^2 + \ldots \tag{3.19}$$

Отсюда

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_e}} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{i,j}}{\partial\xi_k\,\partial\xi_e}\right)_{r=0} = -u'^2\left(2\delta_{ke}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ie}\delta_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{je}\delta_{ik}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0}. \tag{3.20}$$

Из этого общего соотношения для частных значений $i$, $j$, $k$ и $e$ получим

$$\frac{1}{u'^2}\left[\frac{\partial^2 Q_{i,j}}{\partial\xi_k\,\partial\xi_e}\right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0}, \quad \text{если } i=j=k=e, \tag{3.21а}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0}, \quad \text{если } j=e \text{ и } i=k \text{ или } i=e \text{ и } j=k \text{ и } i\neq j, \tag{3.21б}$$

$$= 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0}, \quad \text{если } k=e \text{ и } i=j \text{ и } i\neq k, \tag{3.21в}$$

$$= 0 \quad \text{для всех других сочетаний.} \tag{3.21г}$$

***Корреляционный тензор $(S_{ik,j})_{A,B}$ третьего ранга.*** Тензор тройных корреляций $\overline{(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B}$ имеет 27 компонент. Из произведения $(u_{iA})(u_k)_B$ можно образовать шесть различных комбинаций, соответствующих различным значениям $i$ и $k$. Следовательно, из произведения $(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B$ может быть образовано 18 различных комбинаций, так что только 18 из 27 компонент тензора тройных корреляций различны.

Рассмотрим систему координат, ось $x_1$ которой проходит через точки $A$ и $B$. Хотя в этом случае координатная система и имеет особое расположение относительно указанных точек, тем не менее последующее изложение носит общий характер.

Посредством отражения от одной из координатных плоскостей можно показать, что 13 компонент нашего тензора вследствие условия

инвариантности должны обратиться в нуль:

$$\overline{(u_1)_A^2(u_2)_B} = \overline{(u_1)_A^2(u_3)_B} = 0,$$
$$\overline{(u_2)_A^2(u_2)_B} = \overline{(u_3)_A^2(u_2)_B} = \overline{(u_3)_A^2(u_3)_B} = \overline{(u_2)_A^2(u_3)_B} = 0,$$
$$\overline{(u_1)_A(u_2)_A(u_1)_B} = \overline{(u_1)_A(u_3)_A(u_1)_B} = 0,$$
$$\overline{(u_1)_A(u_2)_A(u_3)_B} = \overline{(u_1)_A(u_3)_A(u_2)_B} = 0,$$
$$\overline{(u_2)_A(u_3)_A(u_1)_B} = 0,$$
$$\overline{(u_2)_A(u_3)_A(u_2)_B} = \overline{(u_2)_A(u_3)_A(u_3)_B} = 0.$$

Таким образом, отличными от нуля остаются только следующие пять компонент: $\overline{(u_1)_A^2(u_1)_B}$, $\overline{(u_1)_A(u_2)_A(u_2)_B}$, $\overline{(u_1)_A(u_3)_A(u_3)_B}$, $\overline{(u_2)_A^2(u_1)_B}$ и $\overline{(u_3)_A^2(u_1)_B}$. Из этих пяти компонент вторая и третья имеют одинаковую структуру, точно так же, как и четвертая с пятой. В § 1.5 для остающихся трех, различных и инвариантных, компонент тензора были уже введены следующие обозначения: $u'^3 k(r) = S_{11,1}$, $u'^3 h(r) = S_{22,1}$ и $u'^3 q(r) = S_{21,2}$.

Эти корреляции являются нечетными функциями $r$. Это можно легко показать, анализируя разложения этих функций в ряды. Поскольку коэффициенты при различных степенях $r$ этих рядов представляют собой скалярные величины, они должны быть инвариантны.

Рассмотрим, к примеру, корреляцию $k(r)$:

$$k(r) = k(0) + r\left[\frac{\partial k}{\partial r}\right]_{r=0} + \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 k}{\partial r^2}\right]_{r=0} + \frac{r^3}{3!}\left[\frac{\partial^3 k}{\partial r^3}\right]_{r=0} + \ldots,$$

где $k(0) = \frac{1}{u'^3}\overline{(u_1)_A^3}$,

$$\left[\frac{\partial k}{\partial r}\right]_{r=0} = \frac{1}{u'^3}\left[\overline{(u_1)_A^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_B}\right]_{r=0} = \frac{1}{u'^3}\overline{(u_1)_A^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_A},$$
$$\left[\frac{\partial^2 k}{\partial r^2}\right]_{r=0} = \frac{1}{u'^3}\overline{(u_1)_A^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\right)_A},$$
. . . . . .

Ввиду того, что величины $\overline{(u_1)_A^3}$, $\overline{(u_1)_A^2(\partial^2 u_1/\partial r^2)_A}$, $\overline{(u_1)_A^2(\partial^4 u_1/\partial r^4)_A}$ и т. д. при отражении изменяют свой знак, они должны быть нулями.

Инвариантными при отражении остаются: $\overline{(u_1)_A^2(\partial u_1/\partial r)_A}$, $\overline{(u_1)_A^2(\partial^3 u_1/\partial r^3)_A}$ и т. д. Но поскольку $(u_1)_A^3 = 0$, то и $\overline{(u_1)_A^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_A} = 0$, а значит, и $\left[\frac{\partial k}{\partial r}\right]_{r=0} = 0$. Отсюда

$$k(0) = \left[\frac{\partial k}{\partial r}\right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^2 k}{\partial r^2}\right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^4 k}{\partial r^4}\right]_{r=0} = \ldots = \left[\frac{\partial^{2n} k}{\partial r^{2n}}\right]_{r=0} = 0,$$

но

$$\left[\frac{\partial^3 k}{\partial r^3}\right]_{r=0} \neq 0 \ldots \left[\frac{\partial^{2n+1} k}{\partial r^{2n+1}}\right]_{r=0} \neq 0.$$

Поэтому корреляция $k(r)$ является нечетной функцией $r$ и ее разложение в ряд начинается с члена $r^3$:

$$k(r) = \frac{r^3}{3!}\left[\frac{\partial^3 k}{\partial r^3}\right]_{r=0} + \frac{r^5}{5!}\left[\frac{\partial^5 k}{\partial r^5}\right]_{r=0} + \ldots \qquad (3.22)$$

Подобные результаты получаются также для $h(r)$ и $q(r)$.

На рис. 3.7 приводятся результаты измерений для корреляции $k(r)$, полученные Стюартом [4] в турбулентном потоке на расстоянии $30M$ вниз по течению от решетки. В опытах были использованы

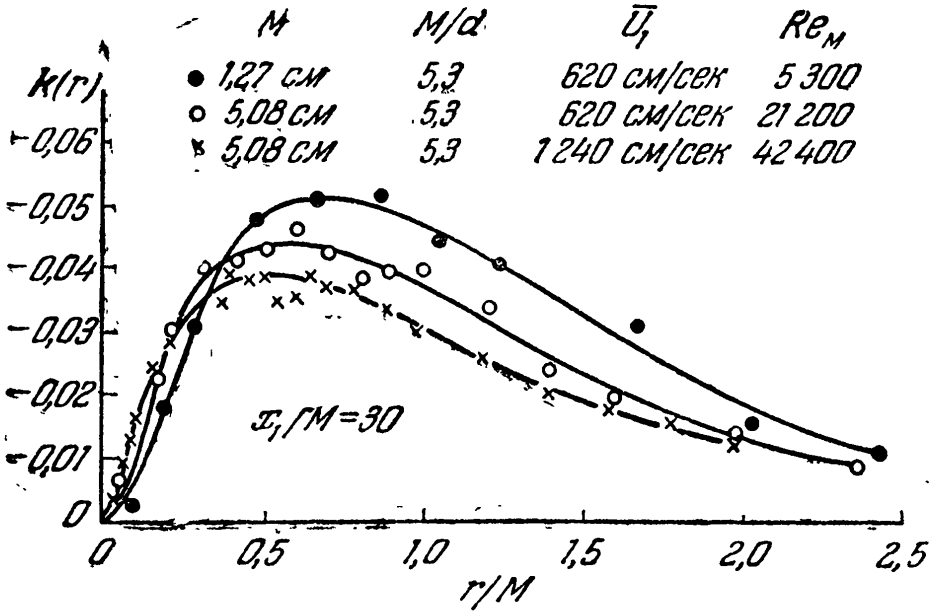



Рис. 3.7. Тройная корреляция $k(r)$ [4].

две решетки (с размером ячейки $M = 1{,}27$ и $5{,}08$ *см*), а измерения производились при двух значениях скорости потока (6,2 и 12,4 *м/сек*).

Естественно, полученный выше вывод о том, что тензор тройных корреляций имеет только три различные ненулевые компоненты, справедлив лишь при особом расположении точек $A$ и $B$ относительно системы координат. Однако при произвольном расположении этих точек любая компонента тензора тройных корреляций $(S_{ik,\,j})_{A,\,B}$ может быть выражена через корреляции $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$. Сейчас мы покажем это.

Рассмотрим скалярную величину (см. рис. 3.8)

$$S_{A,\,B} = \overline{u_A u_A^{\circ} u_B} = (S_{ik,\,j})_{A,\,B}\, e_{ai} e_{ak}^{\circ} e_{bj}. \qquad (3.23)$$

Здесь $S_{A,\,B}$ — однородная функция от $\xi_l$, $e_{ai}$, $e_{ak}^{\circ}$, $e_{bj}$, которая является трилинейной относительно величин $e_{ai}$, $e_{ak}^{\circ}$, $e_{bj}$. Члены,

входящие в $S_{A,B}$, являются скалярными комбинациями величин $\xi_l$, $e_{ai}$, $e_{\mathring{a}k}$ и $e_{bj}$. Всевозможные скалярные комбинации вплоть до членов, трилинейных относительно величин $e_{ai}$, $e_{\mathring{a}k}$ и $e_{bj}$, имеют вид

$$\xi_l\xi_l,\quad \xi_l e_{ai},\quad \xi_k e_{\mathring{a}k},\quad \xi_j e_{bj},$$

$$\delta_{ik}e_{ai}e_{\mathring{a}k},\quad \delta_{ij}e_{ai}e_{bj},\quad \delta_{kj}e_{\mathring{a}k}e_{bj},$$

$$\varepsilon_{ikj}e_{ai}e_{\mathring{a}k}e_{bj},\quad \varepsilon_{lik}\xi_l e_{ai}e_{\mathring{a}k},\quad \varepsilon_{lij}\xi_l e_{ai}e_{bj},\quad \varepsilon_{lkj}\xi_l e_{\mathring{a}k}e_{bj},$$

$$\varepsilon_{lim}\varepsilon_{kjm}\xi_l e_{ai}e_{\mathring{a}k}e_{bj}.$$

Поскольку

$$\varepsilon_{lim}\varepsilon_{kjm}\xi_l = (\delta_{lk}\delta_{ij} - \delta_{lj}\delta_{ik})\,\xi_l = \delta_{ij}\xi_k - \delta_{ik}\xi_j,$$

получаем

$$\varepsilon_{lim}\varepsilon_{kjm}\xi_l e_{ai}e_{\mathring{a}k}e_{bj} = (\delta_{ij}\xi_k - \delta_{lk}\xi_j)\,e_{ai}e_{\mathring{a}k}e_{bj}.$$

Следовательно, однородный трилинейный относительно $e_{ai}$, $e_{\mathring{a}k}$ и $e_{bj}$ многочлен записывается в виде

$$S_{A,B} = (S_1\xi_i\xi_k\xi_j + S_2\xi_j\delta_{ik} + S_3\xi_k\delta_{ij} + S_4\xi_i\delta_{kj} + S_5\varepsilon_{ikj} + S_6\varepsilon_{lik}\xi_l\xi_j + S_7\varepsilon_{lij}\xi_l\xi_k + S_8\varepsilon_{lkj}\xi_l\xi_i)\,e_{ai}e_{\mathring{a}k}e_{bj}.$$

Здесь величины $S_1$ и т. д. до $S_8$ — функции от $r^2$.

Для рассмотренного выше случая особого расположения точек $A$ и $B$ относительно системы координат было показано, что тензор

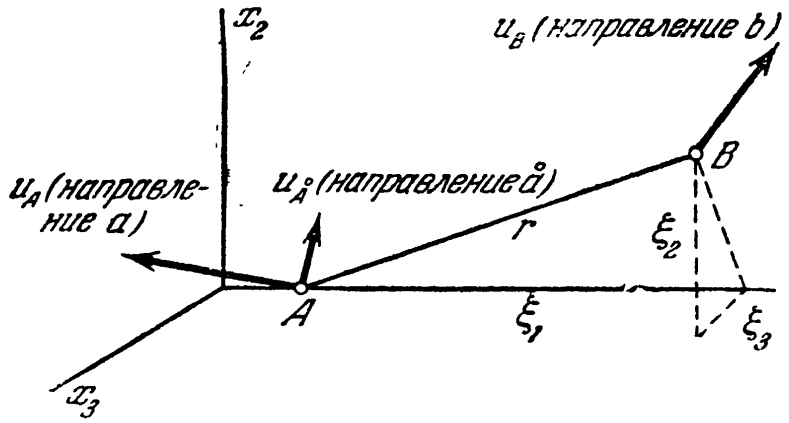



Рис. 3.8. Тройная корреляция $S_{A,B} = \overline{u_A u_{\mathring{A}} u_B}$.

$(S_{ik,j})_{A,B}$ составляется всего лишь из трех различных корреляций $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$, которые являются нечетными функциями $r$. Но вследствие того, что свойства тензора не зависят от использованной системы координат, тензор $(S_{ik,j})_{A,B}$ должен быть нечетной функцией $r$ в любой системе координат.

Следовательно, в записанном выше многочлене слагаемые, которые являются четными относительно $r$, должны обращаться в нуль, т. е.

$$S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0;$$

более того, так как $(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = (S_{kl,\,j})_{A,\,B}$, имеем $S_3 = S_4$. Отсюда

$$(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = S_1\xi_i\xi_k\xi_j + S_2\xi_j\delta_{ik} + S_3(\xi_k\delta_{ij} + \xi_i\delta_{kj}). \qquad (3.24)$$

Это — общее выражение для изотропного тензора третьего ранга.

Если систему координат снова выбрать так, чтобы ось $x_1$ проходила через точки $A$ и $B$ и, значит, $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, то легко убедиться в том, что из соотношения (3.24) следует

$$u'^3 k(r) = S_{11,\,1} = S_1 r^3 + r(S_2 + 2S_3),$$
$$u'^3 h(r) = S_{22,\,1} = S_2 r,$$
$$u'^3 q(r) = S_{21,\,2} = S_3 r,$$

или

$$S_1 = u'^3\left[\frac{k(r)}{r^3} - \frac{h(r)}{r^3} - \frac{2q(r)}{r^3}\right],$$
$$S_2 = u'^3\,\frac{h(r)}{r},$$
$$S_3 = u'^3\,\frac{q(r)}{r}.$$

Следовательно,

$$(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = u'^3\left[(k - h - 2q)\,\frac{\xi_i\xi_k\xi_j}{r^3} + \delta_{ik}h\,\frac{\xi_j}{r} + q\left(\delta_{ij}\,\frac{\xi_k}{r} + \delta_{kj}\,\frac{\xi_i}{r}\right)\right]. \qquad (3.25)$$

В случае несжимаемой жидкости дивергенция тензора $(S_{ik,\,j})_{A,\,B}$ тоже должна обращаться в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = 0. \qquad (3.26)$$

Подстановка выражения (3.25) в формулу (3.26) после дифференцирования дает

$$\frac{1}{u'^3}\,\frac{\partial}{\partial\xi_j}(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = \frac{\xi_i\xi_k}{r^2}\left(\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r} + 2\,\frac{k - h - 3q}{r}\right) +$$
$$+ \delta_{ik}\left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{2h}{r} + \frac{2q}{r}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{2h}{r} + \frac{2q}{r} = 0,$$

и

$$\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r} + 2\,\frac{k - h - 3q}{r} = 0,$$

или, после несложных преобразований,

$$q = -\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(hr^2), \tag{3.27а}$$

$$q = \frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}(kr^2), \tag{3.27б}$$

$$h = -\frac{1}{2}k. \tag{3.27в}$$

Отсюда следует, что в случае несжимаемой жидкости изотропный тензор тройных корреляций можно выразить через единственную скалярную величину, скажем, $k(r)$:

$$(S_{ik,\,j})_{A,\,B} = u'^3\left[\left(k - r\frac{\partial k}{\partial r}\right)\frac{\xi_i\xi_k\xi_j}{2r^3} - \frac{k}{2}\delta_{ik}\frac{\xi_j}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2k)\left(\delta_{ij}\frac{\xi_k}{r} + \delta_{kj}\frac{\xi_i}{r}\right)\right]. \tag{3.28}$$

## § 3.3. Дифференциальное уравнение динамики изотропной турбулентности

В § 1.5 для тензора $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$ было выведено дифференциальное уравнение (1.43), которое содержит также члены с пространственными производными от корреляционных тензоров $(K_{i,\,p})_{A,\,B}$, $(K_{p,\,j})_{A,\,B}$, $(S_{ik,\,j})_{A,\,B}$ и $(S_{i,\,kj})_{A,\,B}$.

В предыдущем параграфе было показано, что при изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости двойные корреляции между давлением и скоростью обращаются в нуль, а каждый из корреляционных тензоров $(Q_{i,\,j})_{A,\,B}$ и $(S_{ik,\,j})_{A,\,B}$ может быть выражен через один определяющий скаляр, например соответственно $f(r,\,t)$ и $k(r,\,t)$.

Далее, в случае изотропной турбулентности из условия инвариантности относительно отражения от точки $A$ следует, что

$$\overline{(u_i)_A(u_k)_B(u_j)_B} = -\overline{(u_k)_A(u_j)_A(u_i)_B},$$

или

$$(S_{i,\,kj})_{A,\,B} = -(S_{kj,\,i})_{A,\,B}. \tag{3.29}$$

Для изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости дифференциальное уравнение (1.43) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q_{i,\,j})_{A,\,B} - \frac{\partial}{\partial\xi_k}[(S_{ik,\,j})_{A,\,B} + (S_{kj,\,i})_{A,\,B}] = 2\nu\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\partial\xi_l}(Q_{i,\,j})_{A,\,B}. \tag{3.30}$$

Второй член в левой части этого уравнения представляет собой тензор второго ранга, который мы обозначим через $S_{i,\,j}$:

$$(S_{i,\,j})_{A,\,B} = \frac{\partial}{\partial\xi_k}[(S_{ik,\,j})_{A,\,B} + (S_{kj,\,i})_{A,\,B}], \tag{3.31}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} - S_{i,j} = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}. \tag{3.32}$$

Поскольку, согласно соотношению (3.28), величина $S_{ik,j}$ определяется единственным скаляром $k(r, t)$, тензор $S_{i,j}$ также определяется этим скаляром. Из уравнения (3.28) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{ik,j} = u'^3 \left[\left(-\frac{1}{4r}\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r^3}\right)\xi_i\xi_j + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r}{4}\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{3}{2}\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r}\right)\delta_{ij}\right];$$

из уравнения относительно $S_{kj,i}$, которое соответствует уравнению (3.28), имеем такой же результат и для величины $\frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{kj,i}$. Отсюда

$$S_{i,j} = u'^3 \left[\left(-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2k}{r^3}\right)\xi_i\xi_j + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + 3\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2k}{r}\right)\delta_{ij}\right]. \tag{3.33}$$

Если произвести свертывание индексов, то это выражение можно свести к следующему:

$$S_{i,i} = u'^3 \left(r\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + 7\frac{\partial k}{\partial r} + 8\frac{k}{r}\right) = u'^3 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial k}{\partial r} + 4r^2 k\right). \tag{3.34}$$

В этом случае дифференциальное уравнение для $Q_{i,i}$ и $S_{i,i}$, соответствующее уравнению (3.32), запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,i}(r, t) - S_{i,i}(r, t) = 2\nu \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r} Q_{i,i}(r, t)\right]. \tag{3.35}$$

Интересно отметить, что это соотношение, если его рассматривать как уравнение распространения тепла, описывает теплопередачу в трехмерном пространстве. При этом член $S_{i,i}$ должен представлять конвективный перенос тепла (или может интерпретироваться как некоторая обменная функция); его происхождение можно считать связанным с взаимодействием вихрей.

Из уравнения (3.35) нетрудно вывести дифференциальное уравнение для $f(r, t)$ и $k(r, t)$; для этого введем в уравнение (3.35) выражения (3.12) для $Q_{i,i}$ и (3.34) для $S_{i,i}$, имея при этом в виду, что $u'$ зависит только от времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u'^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 f)\right] - \frac{u'^3}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial k}{\partial r} + 4r^2 k\right) =$$
$$= 2\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{u'^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 f)\right]\right\}.$$

Интегрирование по $r$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) - u'^3\left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{4}{r}k\right) = 2\nu u'^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 f)\right]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) - u'^3 \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^4 k) = 2\nu u'^2 \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r}\right). \qquad (3.36)$$

Постоянная интегрирования должна быть равна нулю, потому что функции $f(r, t)$ и $k(r, t)$, а также их производные при $r = 0$ должны оставаться конечными.

Дифференциальное уравнение (3.36) впервые было получено Карманом и Хауэртом [2], и поэтому его обычно называют уравнением Кармана — Хауэрта.

Если соотношение (3.36) опять-таки рассматривать как уравнение распространения тепла или вещества, то оно, в отличие от соотношения (3.35), описывает процесс в пространстве пяти измерений.

Довольно часто вместо корреляции $k(r, t)$ используется корреляция $h(r, t)$. Ввиду того, что, согласно соотношению (3.27в), $k(r, t) = -2h(r, t)$, уравнение для $h(r, t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) + u'^3 \frac{2}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^4 h) = 2\nu u'^2 \frac{1}{r^4}\frac{1}{\partial r}\left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r}\right). \qquad (3.37)$$

Уравнение (3.35) или (3.36) используется в качестве исходного соотношения при изучении динамики изотропной турбулентности. Если попытаться решить эти уравнения, то сразу же придется столкнуться с тем затруднением, что каждое из них содержит две переменные. Так, соотношение (3.36), рассматриваемое как уравнение относительно $u'^2 f(r, t)$, содержит в дополнение член с тройной корреляцией $u'^3 k(r, t)$, которая пока является неизвестной функцией. Как указывалось в главе 1, эта особенность представляет собой одну из основных трудностей в решении проблемы турбулентности, если подходить к ней с точки зрения современной статистической теории: неизвестных имеется больше, чем уравнений.

Конечно, отправляясь снова от уравнения движения, можно вывести уравнение, описывающее поведение корреляции $k(r, t)$, но такое уравнение будет содержать корреляции скорости четвертого порядка, которые образуют неизвестную функцию в уравнении для $k(r, t)$. Эту процедуру можно продолжить, вводя в рассмотрение динамическое уравнение для корреляции скорости четвертого порядка, которое будет содержать в качестве неизвестной величины новую зависимую переменную — корреляцию скоростей в двух точках, имеющую пятый порядок, и т. д. В конечном счете мы получили бы бесконечное число уравнений, но все же на одно меньше, чем число зависимых переменных.

Дополнительная трудность состоит в том, что для корреляций более высокого порядка будет требоваться все больше определяющих скаляров, так что число членов в рассматриваемых динамических уравнениях будет неограниченно возрастать. Поэтому изложенный выше статистический подход к описанию динамики турбулентности формально приводит к расходящемуся процессу. В то же время можно полагать, что, чем выше порядок корреляций скорости, тем меньше их роль в суммарном описании статистического поведения турбулентности. Например, как показал Бэтчелор [11], представляется возможным сделать это описание с достаточной степенью приближения полным посредством рассмотрения лишь конечного числа корреляций скорости (хотя это число и может быть велико) и равного ему числа динамических уравнений. Это обусловлено тем, что для определения величины следующей по порядку корреляции скорости относительно нее, несомненно, можно принять соответствующее предположение.

Подобный подход был использован Чжоу [55] при исследовании напорного турбулентного течения в плоском канале. Он показал, что дивергенция двойной корреляции скорости, содержащаяся в динамическом уравнении для тройной корреляции скорости, мала по сравнению с тройной корреляцией между пульсацией градиента давления и пульсациями скорости, и поэтому ею можно пренебречь.

Аналогичное исследование было проведено Дайслером [56] в его недавно опубликованной работе о вырождении однородной турбулентности перед конечной стадией.

Обычный метод решения уравнений (3.35) и (3.36) состоит в принятии некоторых предположений относительно корреляций, основанных на принципе подобия и статистических или физических соображениях. Исходя из условий подобия или автомодельности, пока оказалось возможным получить решения лишь для вырождения интенсивности турбулентности. Нам придется иметь дело с этими решениями в следующем параграфе. До сих пор еще не удалось получить полного решения для $Q_{i,i}(r, t)$ или $u'^2 f(r, t)$, за исключением одного предельного случая, когда влияние «конвективного» члена, представленного тройными корреляциями скорости, пренебрежимо мало по сравнению с двумя другими членами. Однако этот случай можно отнести к описанию асимптотического поведения турбулентности при доминирующем влиянии вязкости. Выше уже говорилось, что происхождение «конвективного» члена следует считать связанным с взаимодействием между вихрями.

Поскольку это взаимодействие является существенной особенностью турбулентности, то может возникнуть вопрос, должен ли этот предельный «вязкий» случай считаться еще относящимся к турбулентности.

В этом предельном случае легко можно получить решение для $u'^2 f(r, t)$. Однако, прежде чем дать это решение, нам хотелось бы обсудить одно общее свойство, которое непосредственно вытекает из уравнений (3.35) и (3.36).

Возьмем от каждого из членов уравнения (3.35) вторые моменты

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}\,dr - \int_0^\infty r^2 S_{i,i}\,dr = 2\nu\left(r^2\frac{\partial Q_{i,i}}{\partial r}\right)\Big|_0^\infty.$$

Ниже будет показано, что при определенных предположениях условие неразрывности для несжимаемой жидкости имеет своим следствием соотношения

$$\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}\,dr = 0, \quad \int_0^\infty r^2 S_{i,i}\,dr = 0.$$

Таким образом, из преобразованного уравнения вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty} r^2\frac{\partial Q_{i,i}}{\partial r} = 0. \tag{3.38}$$

Это соотношение показывает по крайней мере, насколько быстро должна уменьшаться величина $Q_{i,i}$ с возрастанием $r$.

Аналогичный подход можно применить теперь к уравнению (3.36), с той лишь разницей, что вместо вторых моментов на этот раз следует взять четвертые:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u'^2\int_0^\infty r^4 f\,dr\right) - \left(u'^3 r^4 k\right)\Big|_0^\infty = 2\nu u'^2\left(r^4\frac{\partial f}{\partial r}\right)\Big|_0^\infty.$$

Впоследствии будет показано, что по крайней мере

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^4\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0.$$

Что касается члена $r^4 k$, то его обычно тоже полагают стремящимся к нулю, когда $r$ неограниченно возрастает. Вообще говоря, принято считать, что все корреляции скорости при однородной турбулентности на больших расстояниях между двумя точками убывают по экспоненциальному закону. Это предположение было высказано также Лойцянским [5]; отсюда им был получен вывод о том, что величина

$$u'^2\int_0^\infty r^4 f(r, t)\,dr \tag{3.39}$$

должна быть инвариантна. Поэтому обычно этот интеграл называют «инвариантом Лойцянского».

Если соотношение (3.36) рассматривать как уравнение распространения тепла в пятимерном пространстве, то инвариантность величины (3.39) можно интерпретировать как условие сохранения полного количества тепла в пятимерном пространстве. Интерпретация, предложенная Лойцянским, состоит в том, что интеграл (3.39) дает полную величину возмущения, вносимого турбулизирующей системой, и, стало быть, величина подобного возмущения должна оставаться постоянной во времени.

Бэтчелор и Праудмен [50] недавно показали, что предположение относительно интенсивности убывания корреляций скорости с увеличением расстояния между двумя точками не всегда оказывается справедливым и что, в частности, предел $\lim_{r\to\infty}(r^4 k)$ отличен от нуля. Следовательно, если пользоваться уравнением (3.36) в полном виде, включая инерционный член $r^4 k$, то интеграл Лойцянского (3.39) становится неинвариантным. К этому вопросу мы еще вернемся ниже.

Рассмотрим теперь решение уравнения (3.35) или (3.36) в предельном случае, когда влияние вязкости становится преобладающим и поэтому вторым членом в левой части уравнения можно пренебречь. При этом достаточно проанализировать только одно из этих уравнений, поскольку соответствующие решения сходны друг с другом.

Мы рассмотрим здесь уравнение (3.35), которое в интересующем нас предельном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,i}(r, t) = 2\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial Q_{i,i}(r, t)}{\partial r}\right]. \tag{3.40}$$

Это — хорошо известное уравнение теплопроводности или диффузии вещества в пространстве при наличии сферической симметрии. Обычный метод решения этого дифференциального уравнения состоит в предположении о том, что $Q_{i,i}(r, t)$ — функция только от $\chi = r/\sqrt{\nu t}$. И в самом деле, при этом получаются фундаментальные решения, выражаемые через $\exp(-r^2/8\nu t)$. Однако легко убедиться, что если по уравнению (3.12), зная $Q_{i,i}(r, t)$, вычислить $u'^2 f(r, t)$, то эти решения дают такие значения $u'^2 f(r, t)$, которые при $r = 0$ не являются конечными.

Поскольку в соотношении (3.12) величина $u'^2$ зависит только от $t$, то предположение о том, что $Q_{i,i}(r, t)$ является функцией только $\chi$, представляется неоправданным. Подобное предположение более пригодно для коэффициента корреляции $f(r, t)$.

Поэтому целесообразнее, по-видимому, следовать Агостини и Бэссу [6], которые воспользовались предположением о том, что

$$Q_{i,i}(r, t) = \varphi(t)\psi(\chi), \tag{3.41}$$

где $\chi = r/\sqrt{8\nu t}$. Подстановка выражения (3.41) в соотношение (3.40) после разделения переменных приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha}{t},$$

решением которого является $\varphi = \text{const}\, t^{-\alpha}$, и

$$\chi\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 2(\chi^2+1)\frac{d\psi}{d\chi} + 4\alpha\chi\psi = 0.$$

Приняв $\alpha = (2p+1)/2$, где $p$ — целое число, Агостини и Бэсс получили следующее решение:

$$\psi_p = \frac{1}{\chi}\exp(-\chi^2)H_{2p-1}(\chi),$$

где $H_n(\chi)$ — полином Эрмита:

$$H_n(\chi) = (-1)^n \exp(\chi)^2 \frac{d^n}{d\chi^n}\exp(-\chi^2).$$

Следовательно,

$$H_0(\chi) = 1; \quad H_1(\chi) = 2\chi; \quad H_2(\chi) = 4\chi^2 - 2; \quad H_3(\chi) = 8\chi^3 - 12\chi.$$

Тогда общее решение уравнения (3.40), подчиненное перечисленным выше условиям, имеет вид

$$Q_{i,i}(r, t) = \frac{\sqrt{8\nu}}{r}\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right)\sum_1^\infty \frac{A_p}{t_p}H_{2p-1}\left(\frac{r}{\sqrt{8\nu t}}\right). \tag{3.42}$$

Постоянные $A_p$ должны быть выбраны так, чтобы этот ряд был сходящимся и $Q_{i,i}(0, t) = 3u'^2$.

Если наложить условие

$$\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}(r, t)\, dr = 0,$$

то нетрудно убедиться, что ему удовлетворяют все члены уравнения (3.42), за исключением члена, соответствующего $p = 1$; следовательно, коэффициент $A_1$ должен быть равен нулю.

Кроме того, из соответствующего решения для $f(r, t)$ следует, что:

1. Если $p = 1$, то решение при $r = 0$ не сходится к конечной величине; для его сходимости также требуется, чтобы $A_1 = 0$.

2. В интеграл Лойцянского (3.39) входит только член, соответствующий $p = 2$; все остальные члены в этот интеграл не входят.

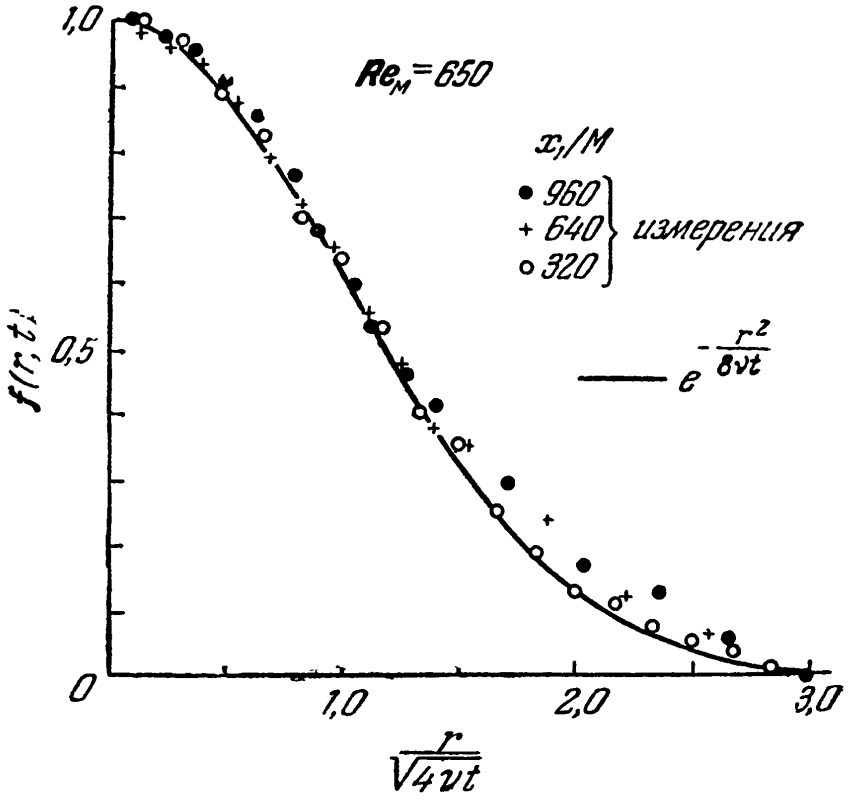



Рис. 3.9. Коэффициент продольной корреляции скорости $f(r, t)$ на конечной стадии вырождения [7].

Следовательно, если рассматривать в дальнейшем только частное решение уравнения (3.40), соответствующее $p = 2$, то выражение (3.42) сводится к формуле

$$Q_{i,i}(r, t) = -\frac{4A_2}{t^{5/2}}\left(3 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right).$$

Условие $Q_{i,i}(0, t) = 3u'^2$ дает

$$u'^2 = -4A_2 t^{5/2} = \text{const}\, t^{-5/2} \tag{3.43}$$

и, следовательно,

$$Q_{i,i}(r, t) = \text{const}\, t^{-5/2}\left(3 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) =$$

$$= u'^2\left(3 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right). \tag{3.44}$$

Из уравнений (3.12) и (3.44) получаем следующее выражение для функции $f(r, t)$:

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right). \tag{3.45}$$

Таким образом, соотношение (3.43) дает закон вырождения турбулентности для случая доминирующего влияния вязкости; при этом коэффициент двойной корреляции $f(r, t)$ описывается гауссовой кривой ошибок и при вырождении остается автомодельным. Измерения, произведенные Бэтчелором и Таунсендом [7], показали, что на конечной стадии вырождения, когда турбулентные движения по своей природе являются целиком вязкими, соответствие опытных данных гауссовой кривой ошибок в самом деле оказывается очень близким (см. рис. 3.9).

Если по уравнениям (3.43) и (3.45) вычислить величину интеграла Лойцянского (3.39), то можно сделать вывод, что в случае доминирующего влияния вязкости этот интеграл является точным инвариантом относительно времени.

## § 3.4. Пространственный энергетический спектр

В § 1.12 мы рассмотрели одномерный энергетический спектр $E_1(n)$ пульсаций скорости $u_1$ в том виде, как он регистрируется соответствующей измерительной аппаратурой, например, термоанемометром: Эта спектральная функция $E_1(n)$ была определена уравнением (1.86).

$$\int_0^\infty E_1(n)\,dn = \overline{u_1^2}. \tag{1.86}$$

Тэйлор показал, что функции $E_1(n)$ и $u'^2 f(x_1)$ представляют собой четные преобразования Фурье, которые в случае, когда поле турбулентного течения имеет постоянную скорость $\bar{U}_1$, значительно превышающую $u'$, записываются следующим образом [см. уравнения (1.90) и (1.91)]:

$$f(x_1) = \frac{1}{u'^2}\int_0^\infty E_1(n)\cos\frac{2\pi n x_1}{\bar{U}_1}\,dn \tag{3.46}$$

и

$$E_1(n) = \frac{4u'^2}{\bar{U}_1}\int_0^\infty f(x_1)\cos\frac{2\pi n x_1}{\bar{U}_1}\,dx_1. \tag{3.46a}$$

Если принять во внимание трехмерный характер турбулентности, то станет очевидным, что и энергетический спектр тоже должен быть трехмерным. То, что в действительности измеряется с помощью термоанемометра, представляет собой, строго говоря, лишь одномерное сечение пространственного спектра.

Поэтому для более тщательного анализа пространственной структуры необходимо проанализировать пространственный спектр более подробно.

С этой целью рассмотрим пространственную структуру в данный момент времени, какой она представляется наблюдателю, неподвижному относительно этого поля. В этом случае вместо частоты $n$ удобнее пользоваться волновым числом $k_1 = 2\pi n/\overline{U}_1$, а вместо $E_1(n)$ ввести спектральную функцию $E_1(k_1)$. Представляется целесообразным определить эту функцию следующим выражением:

$$E_1(k_1) = \frac{\overline{U}_1}{2\pi} E_1(n), \tag{3.47}$$

откуда

$$\int_0^\infty E_1(k_1)\, dk_1 = \overline{u_1^2}, \tag{3.48}$$

что аналогично соотношению (1.86). Связь между спектральной функцией $E_1(k_1)$ для продольных пульсаций скорости и продольной корреляцией скорости $f(x_1)$ дается следующим выражением:

$$u'^2 f(x_1) = \int_0^\infty E_1(k_1) \cos k_1 x_1\, dk_1, \tag{3.49}$$

откуда после применения четного преобразования Фурье имеем

$$E_1(k_1) = \frac{2}{\pi} u'^2 \int_0^\infty f(x_1) \cos k_1 x_1\, dx_1. \tag{3.50}$$

Поскольку функции $f(x_1)$ и $E_1(k_1)$ симметричны, то можем также записать

$$u'^2 f(x_1) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(k_1) [\exp(ik_1 x_1) + \exp(-ik_1 x_1)]\, dk_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 \tag{3.51}$$

и

$$E_1(k_1) = \frac{1}{\pi} u'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \exp(-ik_1 x_1)\, dx_1, \tag{3.51a}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Аналогично можно ввести спектральную функцию $E_2(k_1)$ для поперечных пульсаций скорости, которая связана с поперечной корреляцией скорости $g(x_1)$ соотношением

$$u'^2 g(x_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1, \tag{3.52}$$

для которого четное преобразование Фурье имеет вид

$$E_2(k_1) = \frac{1}{\pi} u'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1) \exp(-ik_1 x_1)\, dx_1. \qquad (3.52a)$$

Ввиду того, что корреляции $f(x_1)$ и $g(x_1)$ различны, соответствующие одномерные спектральные функции $E_1(k_1)$ и $E_2(k_1)$ также отличаются друг от друга, хотя

$$\int_0^{\infty} E_2(k_1)\, dk_1 = \int_0^{\infty} E_1(k_1)\, dk_1 = \overline{u^2}.$$

Связь между функциями $E_2(k_1)$ и $E_1(k_1)$ легко можно получить из соотношения (3.9) между $f(x_1)$ и $g(x_1)$. Подстановка уравнений (3.51) и (3.52) в формулу (3.9) дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_2(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 + \frac{x_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 i E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 + \frac{1}{2} \exp(ik_1 x_1)\, k_1 E_1(k_1)\Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1} + E_1(k_1)\right] \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1} \exp(ik_1 x_1)\, dk_1\right].$$

Здесь мы воспользовались следующим свойством функции $E_1(k_1)$:

$$\lim_{k_1 \to \infty} k_1 E_1(k_1) = 0,$$

которое является следствием условия существования интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E_1(k_1)|\, dk_1.$$

Отсюда

$$E_2(k_1) = \frac{1}{2}\left[E_1(k_1) - k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1}\right]. \qquad (3.53)$$

Обобщим теперь наш анализ на случай трехмерной спектральной функции. Вместо скалярных корреляций $f(x_1)$ и $g(x_1)$ рассмотрим корреляционный тензор $Q_{i,j}$ и определим его преобразование Фурье, тензор энергетического спектра $E_{i,j}$, так, чтобы

$$Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)\exp[i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)]\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \tag{3.54}$$

причем здесь

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = E_{i,j}(-k_1, -k_2, -k_3, t).$$

После обращения имеем

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)\exp[-i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{3.55}$$

Поскольку турбулентность является изотропной и однородной, то целесообразно ввести в рассмотрение волновое число $k$ и расстояние $r$, а вместо $Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)$ и $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ удобнее рассмотреть величины $Q_{l,l}(r, t)$ и $E_{i,i}(k, t)$.

Воспользуемся в выражении (3.54) полярными координатами $k$, $\varphi$ и $\theta$ и при этом совместим полярную ось с направлением $r$. Тогда $k$ будет являться радиусом-вектором в пространстве волновых чисел, $\theta$ — широтой, а $\varphi$ — долготой. Следовательно,

$$dk_1\,dk_2\,dk_3 = k\sin\theta\,d\varphi k\,d\theta\,dk$$

и

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = kr\cos\theta.$$

Тогда выражение (3.54) принимает вид

$$Q_{i,i}(r, t) = \int_0^\infty dk\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi E_{i,i}(k, t)\,k^2\sin\theta\exp(ikr\cos\theta)\,d\theta,$$

откуда

$$Q_{i,i}(r, t) = 4\pi\int_0^\infty k^2\frac{\sin kr}{kr}E_{i,i}(k, t)\,dk. \tag{3.56}$$

Аналогично из соотношения (3.55) получаем

$$E_{i,i}(k, t) = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi Q_{i,i}(r, t)\,r^2\sin\theta\exp(-ikr\cos\theta)\,d\theta,$$

откуда

$$E_{i,i}(k, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin kr}{kr} Q_{i,i}(r, t)\, dr. \tag{3.56a}$$

Теперь определим $E(k, t)$ как функцию трехмерного энергетического спектра, так чтобы

$$E(k, t) = 2\pi k^2 E_{i,i}(k, t). \tag{3.57}$$

Ввиду того, что $Q_{i,i}(0, t) = 3\overline{u^2} = 4\pi \int_0^\infty k^2 E_{i,i}(k, t)\, dk$, имеем

$$\int_0^\infty E(k, t)\, dk = \frac{3}{2} \overline{u^2}. \tag{3.58}$$

Следовательно, из соотношения (3.56а) вытекает, что

$$E(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty kr \sin kr Q_{i,i}(r, t)\, dr, \tag{3.59}$$

и после обращения

$$Q_{i,i}(r, t) = 2 \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} E(k, t)\, dk. \tag{3.60}$$

По уравнению (3.59) можно установить вид функции $E(k, t)$ при малых значениях $k$. Разложение $\sin kr$ в ряд дает

$$E(k, t) = \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 Q_{l,i}(r, t)\, dr - \frac{k^4}{3!\pi} \int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t)\, dr + \ldots \tag{3.61}$$

Покажем теперь, что если функция $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ при $k = 0$ остается ограниченной и аналитической, то интеграл в первом члене правой части этого выражения в случае несжимаемой жидкости обращается в нуль.

Дифференцируя выражение (3.54) по $x_j$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int ik_j E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l x_l)\, dk_1\, dk_2\, dk_3 = 0,$$

откуда

$$k_j E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = 0. \tag{3.62}$$

Таким образом, функция $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ является изотропным тензором второго ранга, общее выражение которого [см. уравнение (3.7)] записывается в виде

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1(k^2, t)\, k_i k_j + C_2(k^2, t)\, \delta_{ij} k^2.$$

Подстановка в (3.62) приводит к соотношению

$$k_j E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1(k^2, t)\, k_i k^2 + C_2(k^2, t)\, k^2 k_i = 0,$$

или

$$C_2(k^2, t) = -C_1(k^2, t),$$

так что

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1(k^2, t)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}).$$

Следовательно, для функции $E(k, t)$, согласно уравнению (3.57), имеем

$$E(k, t) = 2\pi k^2 C_1(k^2, t)(k^2 - 3k^2) = -4\pi k^4 C_1(k^2, t). \quad (3.63)$$

Таким образом,

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -\frac{E(k, t)}{4\pi k^2}\left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij}\right). \quad (3.64)$$

Например, для $E_{1,1}(k_1, k_2, k_3, t)$ получаем

$$E_{1,1}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{E(k, t)}{4\pi k^2}\left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right),$$

а для $E_{1,2}(k_1, k_2, k_3, t)$ —

$$E_{1,2}(k_1, k_2, k_3, t) = -\frac{E(k, t)}{4\pi k^2}\frac{k_1 k_2}{k^2}.$$

Результат, выраженный формулой (3.63), показывает, что если $C_1(k^2, t)$ достигает при $k = 0$ постоянного значения, то разложение в ряд функции $E(k, t)$ начинается с члена $k^4$. Это, по-видимому, действительно так, если функция $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ предполагается [11] ограниченной и аналитической относительно $k_1$, $k_2$ и $k_3$ при $k = 0$. Пусть разложение функции $C_1(k^2, t)$ в ряд имеет вид

$$C_1(k^2, t) = C_1^{(-1)}(t)\, k^{-2} + C_1^{(0)}(t) + C_1^{(1)}(t)\, k^2 + \ldots;$$

тогда нам остается показать лишь, что $C_1^{(-1)} = 0$.

Подстановка этого ряда для $C_1(k^2, t)$ в полученное выше выражение для $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ дает

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1^{(-1)}(t)\left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij}\right) + C_1^{(0)}(t)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \ldots$$

Поскольку выражение $k_i k_j / k^2$ при $k = 0$ не является аналитическим, так как его величина зависит от пути, по которому $k$ стремится к нулю, то предположение об аналитичности $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ отно-

сительно $k_1$, $k_2$ и $k_3$ при $k=0$ требует, чтобы $C_1^{(-1)}(t)=0$. Следовательно, при $k=0$ имеем $E(k, t)\sim k^4$.

Сравнение этого результата для $E(k, t)$ с соотношением (3.61) показывает, что в случае несжимаемой жидкости, действительно, справедливо равенство

$$\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}(r, t)\,dr=0. \tag{3.65}$$

Из этого результата следует также, что, по крайней мере,

$$\lim_{r\to\infty} r^3 f(r, t)=0, \tag{3.66}$$

потому что, согласно уравнениям (3.12) и (3.65),

$$\lim_{r\to\infty} u'^2\,[r^3 f(r, t)]=\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}(r, t)\,dr=0.$$

Если при $r\to\infty$ корреляция $f(r, t)$ монотонно стремится к нулю, то из соотношения (3.66) следует, что и

$$\lim_{r\to\infty} r^4\frac{\partial f(r, t)}{\partial r}=0.$$

Это соотношение было одним из необходимых условий, использованных для получения инварианта Лойцянского (3.39). С учетом (3.65) запишем разложение $E(k, t)$ в ряд следующим образом:

$$E(k, t)=-\frac{k^4}{3!\,\pi}\int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t)\,dr+\frac{k^6}{5!\,\pi}\int_0^\infty r^6 Q_{i,i}(r, t)\,dr-\ldots \tag{3.67}$$

*Соотношения между $f(r, t)$, $g(r, t)$, $E_1(k_1, t)$, $E_2(k_1, t)$ и $E(k, t)$.* В предыдущем параграфе были выведены соотношения между $f(r, t)$, $g(r, t)$ и $Q_{i,i}(r, t)$. Но так как функции $\frac{1}{k}E(k, t)$ и $rQ_{i,i}(r, t)$ представляют собой нечетные преобразования Фурье, то между функцией $f(r, t)$ или ее преобразованием $E_1(k, t)$ и функцией $E(k, t)$ также должна существовать связь; по аналогичным причинам между функцией $g(r, t)$ или ее преобразованием $E_2(k, t)$ и $E(k, t)$ тоже должна иметься связь. Все эти связи могут быть получены на основании предыдущих формул. Так как эти связи могут понадобиться при вычислении одной неизвестной функции, когда другая известна, то мы приведем их здесь.

Из выражений (3.12) и (3.60) получаем

$$u'^2 f(r, t)=\frac{1}{r^3}\int_0^r r^2 Q_{i,i}(r, t)\,dr=\frac{2}{r^3}\int_0^r r^2\,dr\int_0^\infty E(k, t)\frac{\sin kr}{kr}\,dk,$$

или

$$u'^2 f(r, t) = 2 \int_0^\infty E(k, t) \left( \frac{\sin kr}{k^3 r^3} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right) dk. \tag{3.68}$$

Аналогично, с помощью формулы (3.9) имеем

$$u'^2 g(r, t) = \int_0^\infty E(k, t) \left( \frac{\sin kr}{kr} - \frac{\sin kr}{k^3 r^3} + \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right) dk. \tag{3.69}$$

Обращая соотношения (3.12) и (3.59), получаем

$$E(k, t) = u'^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\infty kr (\sin kr - kr \cos kr) f(r, t)\, dr. \tag{3.70}$$

Чтобы найти связь между $E_1(k_1, t)$ или $E_2(k_1, t)$ и $E(k, t)$, выберем в качестве исходного соотношения уравнение (3.12) и воспользуемся формулами (3.51) и (3.52).

Таким образом,

$$Q_{i,i}(x_1, t) = u'^2 [f(x_1, t) + 2g(x_1, t)] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_1 x_1) [E_1(k_1, t) + 2E_2(k_1, t)]\, dk_1,$$

откуда

$$E_1(k_1, t) + 2E_2(k_1, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_1 x_1)\, Q_{i,i}(x_1, t)\, dx_1.$$

Дифференцируя по $k_1$, получаем

$$\frac{\partial E_1(k_1, t)}{\partial k} + 2 \frac{\partial E_2(k_1, t)}{\partial k_1} =$$

$$= \frac{-i^*}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \exp(-ik_1 x_1)\, Q_{i,i}(x_1, t)\, dx_1 = -\frac{2}{k_1} E(k_1, t).$$

Здесь мы использовали соотношение (3.59).

С помощью выражения (3.53) находим формулу

$$E(k_1, t) = \frac{1}{2} k_1^2 \frac{\partial^2 E_1(k_1, t)}{\partial k_1^2} - \frac{1}{2} k_1 \frac{\partial E_1(k_1, t)}{\partial k_1}, \tag{3.71}$$

которая дает связь между $E(k_1, t)$ и $E_1(k_1, t)$.

Обратное соотношение может быть получено путем решения дифференциального уравнения (3.71).

Применяя метод вариации постоянных, имеем

$$E_1(k_1, t) = k_1^2\left[\int_0^{k_1} \frac{E(k, t)}{k^3}\,dk + C\right] - \int_0^{k_1} \frac{E(k, t)}{k}\,dk + D.$$

Поскольку $\lim\limits_{k_1\to\infty} E_1(k_1, t) = 0$, то отсюда следует, что

$$E_1(k_1, t) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k, t)}{k}\left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right)dk. \tag{3.72}$$

С помощью выражения (3.53) получаем

$$E_2(k_1, t) = \frac{1}{2}\int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k, t)}{k}\left(1 + \frac{k_1^2}{k^2}\right)dk. \tag{3.73}$$

Физический смысл нижнего предела интегрирования в этой формуле состоит в том, что в значение длины волны $2\pi/k_1$ одномерного спектра [9] входят только те длины волн $2\pi/k$ трехмерного спектра, для которых $2\pi/k \leqslant 2\pi/k_1$, т. е. $k \geqslant k_1$ (см. рис. 3.10).

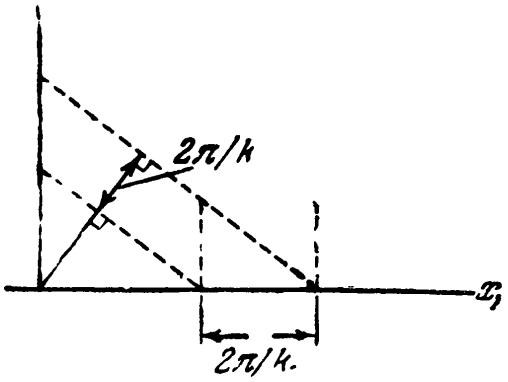



Рис. 3.10. Длины волн $2\pi/k$, содержащиеся в длине волны $2\pi/k_1$ одномерного спектра.

*Замечания. а*) На основании соотношений (3.71), (3.72) и (3.73) можно заключить, что если в диапазоне $k_1 \leqslant k < \infty$ функция $E_1(k_1, t)$ выражается степенным законом, то в этом случае функция $E(k_1, t)$ подчиняется тому же степенному закону, и наоборот. Для того чтобы спектральные функции могли обращаться в нуль при $k \to \infty$, показатель степени в этом степенном законе должен быть отрицательным.

*б*) Из формул (3.72) и (3.73) легко получить следующие соотношения между интегральными масштабами $\Lambda_f(t)$ и $\Lambda_g(t)$ и функцией $E(k, t)$:

$$\Lambda_f(t) = \frac{\pi}{2u'^2} E_1(0, t) = \frac{\pi}{2u'^2}\int_0^{\infty} \frac{E(k, t)}{k}\,dk, \tag{3.74}$$

$$\Lambda_g(t) = \frac{\pi}{2u'^2} E_2(0, t) = \frac{\pi}{4u'^2}\int_0^{\infty} \frac{E(k, t)}{k}\,dk = \frac{1}{2}\Lambda_f(t). \tag{3.75}$$

*в*) Интегрирование выражения (3.71) с учетом $\lim\limits_{k_1 \to \infty} k_1 E(k_1, t) = 0$ приводит к формуле

$$\int_0^\infty E(k, t)\,dk = \frac{3}{2}\int_0^\infty E_1(k,t)\,dk,$$

которая находится в соответствии с определениями (3.48) и (3.58).

Рассмотрим форму спектральных функций при использовании для корреляционных функций выражений, полученных в предыдущих параграфах. Остановимся на следующих примерах.

1. Предположим, что коэффициент продольной корреляции скорости $f(x_1, t)$ описывается гауссовой кривой ошибок, определяемой уравнением (3.45):

$$f(x_1, t) = \exp\left(-\frac{x_1^2}{8\nu t}\right).$$

С помощью формулы (3.9) получаем выражение для коэффициента поперечной корреляции скорости:

$$g(x_1, t) = \left(1 - \frac{x_1^2}{8\nu t}\right)\exp\left(-\frac{x_1^2}{8\nu t}\right). \tag{3.76}$$

Это выражение показывает, что коэффициент корреляции $g(x_1, t)$ при больших значениях $x_1$, в отличие от $f(x_1, t)$, становится отрицательным. Из соотношения (3.50) можно вычислить $E_1(k_1, t)$:

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\pi}u'^2\int_0^\infty \cos k_1 x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{8\nu t}\right)dx_1 =$$

$$= u'^2\sqrt{\frac{8\nu t}{\pi}}\exp\left(-2k_1^2\nu t\right),$$

откуда $\Lambda_f(t) = (\pi/2u'^2)E_1(0, t) = \sqrt{2\pi\nu t}$. Следовательно, $\Lambda_f(t)$ растет пропорционально $\sqrt{t}$.

Для микромасштаба турбулентности $\lambda_f(t)$ имеем

$$\lambda_f(t) = \sqrt{8\nu t}.$$

Таким образом, отношение $\lambda_f(t)/\Lambda_f(t)$ сохраняет постоянное значение.

Для функции $E_2(k_1, t)$ из (3.53) получаем

$$E_2(k_1, t) = \frac{1}{2}u'^2\sqrt{\frac{8\nu t}{\pi}}\left(1 + 4k_1^2\nu t\right)\exp\left(-2k_1^2\nu t\right).$$

С помощью равенства (3.71) определяем трехмерный спектр $E(k, t)$:

$$E(k, t) = 8u'^2\nu^2t^2\sqrt{\frac{8\nu t}{\pi}}\,k^4\exp(-k^2\nu t) = \text{const}\,k^4\exp(-2k^2\nu t). \tag{3.77}$$

Здесь было использовано уравнение $u'^2 = \text{const}\,t^{-5/2}$.

Этот результат показывает, что, подобно (3.63), зависимость $E(k, t)$ при $k \to 0$ пропорциональна $k^4$, но, кроме того, он указывает на то, что функция $E(k, t)$ перестает зависеть от $t$. Легко проверить, что в разложении (3.61) член

$$\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}(r, t)\,dr = 0,$$

тогда как следующий член $\int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t)\,dr \neq 0$.

Какой вид принимает при этом корреляционный тензор $Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)$ и соответствующий ему спектральный тензор $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$? Из соотношения (3.8) получаем для $Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)$

$$Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) = u'^2\left[\frac{r^2}{8\nu t}\frac{x_ix_j}{r^2} + \left(1 - \frac{r^2}{8\nu t}\right)\delta_{ij}\right]\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right),$$

а из (3.64) определяем $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$:

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -\text{const}\,\frac{k^2}{4\pi}\left(\frac{k_ik_j}{k^2} - \delta_{ij}\right)\exp(-2k^2\nu t).$$

2. В § 1.11 упоминалось о том, что при больших числах Рейнольдса форма кривой корреляции скорости во многих случаях может быть приближенно аппроксимирована экспоненциальной функцией. Предположим здесь, что коэффициент продольной корреляции поддается подобной аппроксимации:

$$f(x_1, t) = \exp\left[-\frac{x_1}{\Lambda_f(t)}\right].$$

Применяя тот же метод, что и в предыдущем примере, получаем

$$g(x_1, t) = \left(1 - \frac{x_1}{2\Lambda_f}\right)\exp\left(-\frac{x_1}{\Lambda_f}\right),$$

$$Q_{i,i}(x_1, t) = u'^2\left(3 - \frac{x_1}{\Lambda_f}\right)\exp\left(-\frac{x_1}{\Lambda_f}\right),$$

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\pi}u'^2\int_0^\infty \cos k_1x_1\exp\left(-\frac{x_1}{\Lambda_f}\right)dx_1 = \frac{2}{\pi}u'^2\frac{\Lambda_f}{1 + k_1^2\Lambda_f^2}$$

[ср. с уравнением (1.95)],

$$E_2(k_1, t) = \frac{1}{\pi} u'^2 \Lambda_f \frac{1 + 3k_1^2\Lambda_f^2}{(1 + k_1^2\Lambda_f^2)^2},$$

$$E(k, t) = \frac{8}{\pi} u'^2 \Lambda_f \frac{k^4\Lambda_f^4}{(1 + k^2\Lambda_f^2)^3}.$$

Этот результат также находится в соответствии с требованием, чтобы при малых значениях $k$ функция $E(k, t)$ была пропорциональна $k^4$.

## § 3.5. Динамическое уравнение энергетического спектра

Уравнение, которое описывает зависимость энергетического спектра от времени и пространственных координат, может быть выведено на основании динамического уравнения (3.32):

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) - S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t). \quad (3.78)$$

В предыдущем параграфе было введено преобразование Фурье $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ от корреляционного тензора $Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$:

$$Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l\xi_l)\, dk_1\, dk_2\, dk_3. \quad (3.79)$$

Аналогично можем также ввести преобразование Фурье

$$F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \quad \text{от} \quad S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t):$$

$$S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l\xi_l)\, dk_1\, dk_2\, dk_3. \quad (3.80)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int k^2 E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l\xi_l)\, dk_1\, dk_2\, dk_3,$$

то после подстановки уравнений (3.79) и (3.80) в (3.78) получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \exp(ik_l\xi_l) \left(\frac{\partial}{\partial t} E_{i,j} - F_{i,j} + 2\nu k^2 E_{i,j}\right) dk_1\, dk_2\, dk_3 = 0,$$

которое удовлетворяется, если

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) - 2\nu k^2 E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t). \quad (3.81)$$

Спектральная функция $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ точно так же, как $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$, является симметричной функцией от $k_1$, $k_2$, $k_3$. Вследствие того, что для несжимаемой жидкости выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 0,$$

которое легко получить дифференцированием по $\xi_j$ выражения (3.33) для $S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, функция $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ также должна удовлетворять условию

$$k_j F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = 0.$$

Тогда, как и в случае $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$, отсюда следует, что

$$F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = D(k^2, t)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}). \quad (3.82)$$

Сведений о функции $D(k^2, t)$ можно получить гораздо больше, если при малых значениях $k$ рассмотреть свойства тензора $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$, представляющего собой преобразование Фурье от $S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$:

$$S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l)\, dk_1\, dk_2\, dk_3.$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости дает

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 0,$$

или

$$k_j F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = 0. \quad (3.83)$$

Общее выражение для изотропного тензора третьего ранга [см. уравнение (3.24)] записывается следующим образом:

$$F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = \varphi_1(k^2, t) k_i k_k k_j + \\ + \varphi_2(k^2, t) k^2 k_j \delta_{ik} + \varphi_3(k^2, t)(k_k \delta_{ij} + k_i \delta_{kj}) k^2.$$

Подстановка этого выражения в формулу (3.83) приводит к соотношению

$$\varphi_2(k^2, t)\delta_{ik} = -\frac{k_i k_k}{k^2}[\varphi_1(k^2, t) + 2\varphi_3(k^2, t)],$$

так что

$$F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -\varphi_3(k^2, t)(2k_i k_k k_j - k^2 k_k \delta_{ij} - k^2 k_i \delta_{kj}), \quad (3.84)$$

причем $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ является преобразованием Фурье от $S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Поскольку

$$S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{ik,j} + S_{kj,i}),$$

то отсюда следует, что

$$F_{i,j} = ik_k(F_{ik,j} + F_{jk,i}).$$

Тогда при помощи соотношения (3.84) для $F_{ik,j}$ и $F_{jk,i}$ получим

$$F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -2i\varphi_3(k^2, t)(k_ik_j - k^2\delta_{ij})k^2 =$$
$$= \varphi(k^2, t)(k_ik_j - k^2\delta_{ij})k^2,$$

а это есть не что иное, как соотношение (3.82). Выражение (3.84) для $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ теперь можно записать так:

$$F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = \varphi_3(k^2, t)k^2\left(\delta_{jl} - \frac{k_jk_l}{k^2}\right)(k_i\delta_{lk} + k_k\delta_{li}).$$

Член $\delta_{jl} - k_jk_l/k^2$ при $k = 0$ не является аналитическим. Отсюда, если предположить, что $F_{ik,j}$ — аналитическая функция при $k = 0$, то, когда $k \to 0$, величины $\varphi_3(k^2, t)$ и $\varphi(k^2, t)$ должны быть по меньшей мере порядка $k^0$, а $D(k^2, t)$, следовательно, — порядка $k^2$.

В ранних теориях функция $F_{ik,j}$ принималась аналитической при $k = 0$; соответственно функция $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ при малых значениях $k$ должна была быть пропорциональна $k^2(k_ik_j - k^2\delta_{ij})$.

Однако, исходя из предположения о том, что распределение совместной вероятности компонент скорости, взятое одновременно в произвольном числе точек поля турбулентности, является нормальным, Праудмен и Райд [29] показали, что допущение об аналитичности $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ неверно, хотя в то же время может выполняться предположение об аналитичности спектрального тензора $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$. Некоторым обоснованием предположения о нормально распределенном поле скорости, по-видимому, могут служить экспериментальные результаты, полученные Юбероем для изотропной турбулентности за решеткой.

В своей недавней работе [50] Бэтчелор и Праудмен вновь пересмотрели эту проблему, начиная с самых ее основ. Из рассмотрения всех производных по времени в начальный момент они показали, что корреляция скорости $Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, вообще говоря, становится в области больших значений $r$ величиной, не превышающей по порядку $r^{-6}$, и что спектральный тензор $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ является аналитической функцией и при малых значениях $k$ имеет порядок $k^2$, в то время как тензор $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ изменяется пропорционально $(\delta_{jl} - k_jk_l/k^2)(k_i\delta_{lk} + k_k\delta_{li})$ и при $k = 0$ не является анали-

тической функцией. Следовательно, величина $D(k^2, t)$ в формуле (3.82) при $k \to 0$ имеет порядок $k^0$.

После свертывания индексов уравнение (3.81) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,i}(k, t) = F_{i,i}(k, t) - 2\nu k^2 E_{i,i}(k, t).$$

Введем теперь спектральную функцию $F(k, t)$, которая определяется по аналогии с $E(k, t)$ [см. уравнение (3.57)], т. е.

$$F(k, t) = 2\pi k^2 F_{i,i}(k, t). \tag{3.85}$$

Стало быть, вместо предыдущего уравнения получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = F(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t). \tag{3.86}$$

Поскольку $F_{i,i}(k, t) = -2k^2 D(k^2, t)$, функция $F(k, t)$ при $k \to 0$ должна изменяться пропорционально $k^4$.

Функция $F(k, t)/k$ представляет собой преобразование Фурье от $rS_{i,i}(r, t)$:

$$S_{i,i}(r, t) = 2\int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} F(k, t)\, dr \tag{3.87}$$

и

$$F(k, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty kr \sin kr\, S_{i,i}(r, t)\, dr. \tag{3.88}$$

Разложение в ряд функции $\sin kr$ дает

$$F(k, t) = \frac{k^2}{\pi}\int_0^\infty r^2 S_{i,i}\, dr - \frac{k^4}{3!\pi}\int_0^\infty r^4 S_{i,i}\, dr + \frac{k^6}{5!\pi}\int_0^\infty r^6 S_{i,i}\, dr - \ldots$$

Но ввиду того, что, согласно вышеизложенному, ряд для $F(k, t)$ должен начинаться с $k^4$, это разложение запишется следующим образом:

$$F(k, t) = \frac{k^4}{3!\pi}\int_0^\infty r^4 S_{i,i}(r, t)\, dr - \ldots, \tag{3.89}$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty r^2 S_{i,i}(r, t)\, dr = 0, \tag{3.90}$$

но

$$\int_0^\infty r^4 S_{i,i}(r, t)\, dr \neq 0. \tag{3.91}$$

Теперь умножим обе части уравнения (3.34) на $r^m$ и проинтегрируем по $r$ от 0 до $\infty$. Тогда получим

$$\frac{1}{u'^3}\int_0^\infty r^m S_{i,\,i}\,dr =$$

$$= \left[r^{m+1}\frac{\partial k}{\partial r} - (m-6)\,r^m k\right]\Big|_0^\infty + (m-2)(m-4)\int_0^\infty r^{m-1}k\,dr.$$

Исходя из этого уравнения и соотношений (3.90) и (3.91), можно показать, что

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^3\frac{\partial k}{\partial r} + r^2 k\right) = 0,$$

но

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^5\frac{\partial k}{\partial r} + r^4 k\right) \neq 0.$$

Если предположить, что при больших значениях $r$ тройная корреляция $k(r, t)$ в случае $r\to\infty$ монотонно стремится к нулю, то отсюда следует

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^3\frac{\partial k}{\partial r}\right) = \lim_{r\to\infty}(r^2 k) = 0,$$

но

$$\lim_{r\to\infty}(r^4 k) \neq 0.$$

Вспомним, что необходимым условием существования инварианта Лойцянского (3.39) является

$$\lim_{r\to\infty}(r^4 k) = 0.$$

Но так как Бэтчелор и Праудмен показали, что $\lim\limits_{r\to\infty}(r^4 k) \neq 0$, то «инвариант» Лойцянского (3.39) в общем случае не является инвариантом. Однако в конечной стадии вырождения турбулентности, когда в динамическом уравнении преобладает вязкий член, интеграл Лойцянского действительно инвариантен. Это, казалось бы, противоречит полученному выше результату. Но при этом следует иметь в виду, что несуществование «инварианта» Лойцянского в общем случае вытекает из того факта, что второе условие $\lim\limits_{r\to\infty}(r^4 k) = 0$ не выполняется из-за влияния инерционного члена в динамическом уравнении. Ввиду того, что влияние инерционных сил в конечной стадии вырождения пренебрежимо мало, для существования инварианта Лойцянского выполнения второго условия не требуется. В самом деле,

Праудмен и Райд [29] показали, что

$$\frac{d}{dt}\left[u'^3 \lim_{r\to\infty}(r^4 k)\right] > 0$$

и что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[u'^2 \int_0^\infty r^4 f(r,\ t)\,dr\right] > 0;$$

следовательно, величина интеграла Лойцянского (3.39) уменьшается с убывающей скоростью и в той стадии, когда влияние инерции пренебрежимо мало, а влияние вязкости становится доминирующим, оказывается постоянной.

Из уравнения (3.86) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k \boldsymbol{E}(k,\ t)\,dk = \int_0^k \boldsymbol{F}(k,\ t)\,dk - 2\nu\int_0^k k^2 \boldsymbol{E}(k,\ t)\,dk. \quad (3.92)$$

Покажем теперь, что если верхний предел этого интеграла простирается до $k=\infty$, то первый член в правой части обращается в нуль:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{F}(k,\ t)\,dk = 0. \quad (3.93)$$

Из соотношения (3.87) следует, что

$$\int_0^\infty \boldsymbol{F}(k,\ t)\,dk = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{i,\,i}(0,\ t).$$

В § 3.2 было показано, что при малых значениях $r$ функция $\boldsymbol{k}(r,\ t)$ изменяется пропорционально $r^3$ [см. уравнение (3.22)] и, значит, согласно (3.34), функция $\boldsymbol{S}_{i,\,i}(r,\ t)$ при малых значениях $r$ пропорциональна $r^2$. Следовательно, $\boldsymbol{S}_{i,\,i}(0,\ t)=0$ и уравнение (3.93) должно выполняться.

Поэтому при $k=\infty$ уравнение (3.92) запишется в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \boldsymbol{E}(k,\ t)\,dk = -2\nu\int_0^\infty k^2 \boldsymbol{E}(k,\ t)\,dk. \quad (3.94)$$

Левая часть уравнения (3.58) для $\boldsymbol{E}(k,\ t)$ представляет собой изменение полной кинетической энергии турбулентности. Ввиду отсутствия внешних источников энергии это изменение кинетической энергии должно быть равно диссипации, обусловленной влиянием вязкости.

Покажем, что правая часть уравнения (3.94) действительно представляет собой диссипацию энергии в тепло.

Для этого обратимся к выражению для диссипации в том виде, как оно представлено 5-м членом в уравнении энергии (1.98) главы 1:

$$\text{диссипация} = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}.$$

Так как при изотропной турбулентности

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2},$$

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2} = \ldots,$$

$$\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}} = \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}} = \overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}} = \ldots,$$

то получим

$$\text{диссипация } \varepsilon = 6\nu\left[\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} + \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}\right]. \tag{3.95}$$

С помощью соотношений (3.20) и (3.21) диссипацию можно выразить через величину $[\partial^2 f/\partial r^2]_{r=0}$, а именно:

$$\varepsilon = -15\nu u'^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0} = 30\nu\frac{u'^2}{\lambda_f^2} = 15\nu\frac{u'^2}{\lambda_g^2}. \tag{3.96}$$

Из выражения (3.68) для $f(r, t)$ получаем

$$u'^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0} = -\frac{2}{15}\int_0^\infty k^2 E(k, t)\,dk,$$

так что

$$\varepsilon = -15\nu u'^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0} = 2\nu\int_0^\infty k^2 E(k, t)\,dk. \tag{3.97}$$

Уравнение (3.92) можно обобщить на тот случай, когда к потоку непрерывно подводится энергия. Пусть $H_k(k, t)$ обозначает энергию, подводимую к турбулентному потоку в интервале волновых чисел спектра от 0 до $k$; тогда уравнение (3.92) в обобщенном виде запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k E(k, t)\,dk = \int_0^k F(k, t)\,dk - 2\nu\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk + H_k(k, t). \tag{3.98}$$

Левая часть этого уравнения определяет изменение кинетической энергии и диссипацию в вихрях с волновыми числами от 0 до $k$. В таком случае член $\int_0^k F(k, t)\,dk$ можно интерпретировать как перенос энергии к (или от) турбулентности в этом интервале волновых чисел. Но $F(k, t)$ — спектральная функция величины $S_{l,l}(r, t)$, которая связана с тройной корреляцией $k(r, t)$ [см. уравнение (3.34)]. При рассмотрении динамического уравнения Кармана — Хауэрта (3.36) член с тройной корреляцией интерпретировался как «конвективное» воздействие на распространение двойной корреляции $f(r, t)$. Это конвективное воздействие может быть обусловлено взаимодействием вихрей различных размеров. Аналогично функцию $\int_0^\infty F(k, t)\,dk$, входящую в уравнение (3.98), можно интерпретировать как взаимодействие вихрей, соответствующих различным волновым числам, посредством которого, вследствие инерционных эффектов, осуществляется перенос энергии к вихрям (или от вихрей) в интервале волновых чисел от 0 до $k$. Поэтому величину $F(k, t)$ часто называют спектральной функцией переноса, с помощью которой в динамическом уравнении (3.86) учитывается результат инерционного переноса энергии. [Ср. с названием функции энергетического спектра для $E(k, t)$.]

Чтобы получить решение для $E(k, t)$, можно исходить либо из уравнения (3.86), либо из его интегральной формы (3.92). Конечно, при этом мы сразу же сталкиваемся с той же основной трудностью, с которой нам пришлось встретиться при решении динамического уравнения Кармана — Хауэрта. Здесь речь идет о спектральной функции переноса $F(k, t)$, которая в уравнениях (3.86) и (3.92) тоже является неизвестной величиной. Однако, в отличие от упомянутого случая, постулировать какую-либо соответствующую форму для функции $F(k, t)$, по-видимому, менее затруднительно. И в самом деле, было предложено несколько различных формул, которые использовались при решении динамического уравнения для спектральной функции $E(k, t)$.

Прежде чем рассматривать эти решения, обратимся к простейшему случаю, в котором взаимодействие между вихрями с различными волновыми числами пренебрежимо мало и, стало быть, обмена энергией между вихрями, обусловленного этим взаимодействием, не происходит. Другими словами, в этом случае предполагается, что членом, содержащим спектральную функцию переноса $F(k, t)$, по сравнению с другими членами уравнения, можно пренебречь. Тогда уравнение (3.86) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = -2\nu k^2 E(k, t).$$

Выполняя интегрирование, находим решение этого уравнения:

$$E(k, t) = E(k, t_0) \exp[-2\nu k^2 (t - t_0)]. \quad (3.99)$$

Этот результат интересно сравнить с решением (3.77), полученным с помощью формулы для корреляции $f(r, t)$, в аналогичном случае пренебрежимо слабого взаимодействия между вихрями.

Из анализа решения (3.99) вытекают следующие интересные выводы. Уменьшение кинетической энергии по времени для вихрей с большими волновыми числами происходит с более высокой скоростью, т. е. мелкие вихри вырождаются быстрее, чем крупные. Другими словами, с увеличением волнового числа влияние времени возрастает. Наоборот, при уменьшении волнового числа функция энергетического спектра все слабее и слабее зависит от времени, а при $k = 0$ эта зависимость исчезает совсем; в этом случае $E(k, t) \sim k^4$.

Таким образом, согласно формуле (3.77), функция энергетического спектра возрастает очень быстро (в начальной стадии пропорционально $k^4$), достигает максимальной величины и монотонно стремится к нулю при увеличении $k$. При этом влияние времени на скорость вырождения тоже возрастает.

В более общем случае, когда влияние вязкости уже не является доминирующим, т. е. когда в динамическом уравнении для $E(k, t)$ приходится учитывать также и инерционный член, функция энергетического спектра приобретает приблизительно подобную форму.

Как и во всех гидродинамических процессах, характер этого течения определяется соотношением инерционных и вязких сил, т. е. числом Рейнольдса. В зависимости от свойств турбулентности, а также от того, какая область спектра турбулентности подлежит рассмотрению, для определения числа Рейнольдса турбулентности могут применяться различные характерные длины и скорости. К рассмотрению этого вопроса мы вскоре вернемся снова. Поскольку решение (3.99) получено для такого случая, в котором влияние вязкости является доминирующим, то оно, очевидно, соответствует малым значениям числа Рейнольдса.

Энергетический спектр в более общем случае больших чисел Рейнольдса являлся предметом многих теоретических и экспериментальных исследований. Вслед за работой Колмогорова [10] важный вклад в понимание механизма турбулентности *) внесли Карман, Линь, Бэтчелор, Таунсенд и другие.

Рассмотрим теперь энергетический спектр турбулентности, генерированной с помощью решетки, в том случае, когда число Рей-

*) Эти современные теории проанализированы Бэтчелором в его книге об однородной турбулентности [11]. При подготовке следующих разделов использовалось много материалов из этой книги и из работ упомянутых выше исследователей.

нольдса достаточно велико и, стало быть, инерционным членом в динамическом уравнении пренебречь нельзя.

Вследствие того, что турбулентность может образоваться только при наличии в потоке больших градиентов скорости, а также потому, что в самой зоне образования турбулентности поток является анизотропным, турбулентность на малых расстояниях вниз по течению от решетки неизотропна. Для того чтобы поток становился все более и более изотропным, требуется некоторое время, т. е. некоторое расстояние от решетки.

По мере роста турбулентности до ее полного развития крупные вихри, вследствие инерционного взаимодействия, будут порождать все более и более мелкие вихри, благодаря чему будет происходить перенос энергии к меньшим вихрям. В то же время для мелких вихрей влияние вязкости, а наряду с этим и диссипация приобретают все более и более важное значение.

В полностью развитом состоянии максимальной кинетической энергией будут обладать не наиболее крупные вихри, а вихри в интервале более высоких волновых чисел. Тот диапазон энергетического спектра, в котором эти вихри вносят наибольший вклад в кинетическую энергию турбулентности, будем называть областью энергосодержащих вихрей. В этой области энергетический спектр имеет максимум. Чтобы выделить область энергосодержащих вихрей, этому максимуму можно сопоставить некоторое волновое число $k_e$. Хотя наименее поддающиеся изменению самые крупные вихри и обладают значительно меньшей энергией, чем энергосодержащие вихри, их энергию ни в коем случае нельзя считать пренебрежимо малой, так как она может составлять до 20% от полной кинетической энергии.

Как упоминалось, диссипация под воздействием вязкости возрастает при уменьшении размера вихря вплоть до своего максимального значения, соответствующего определенному размеру наиболее мелких вихрей. Размеру вихрей, которыми обусловлена основная часть полной диссипации, здесь тоже можно сопоставить некоторое волновое число $k_d$. Это значение $k_d$ будет приблизительно соответствовать максимуму кривой в координатах $[k^2\boldsymbol{E}(k, t), k]$. Диссипация будет проявляться в непрерывном убывании полной кинетической энергии турбулентности, точнее, вырождающейся турбулентности, если отсутствуют какие-либо источники энергии. Процесс вырождения происходит с определенной скоростью. Попытаемся сравнить скорость процесса вырождения со скоростями турбулентных пульсаций, соответствующих рассматриваемым волновым числам энергетического спектра.

На нижнем пределе области волновых чисел, соответствующем наиболее крупным вихрям, «частота» $u'_k k$ этих вихрей очень мала по сравнению со скоростью вырождения полной кинетической энергии турбулентности, выраженной через относительную скорость ее

изменения

$$\frac{du'^2/dt}{u'^2}.$$

На другом пределе области волновых чисел наиболее мелкие вихри по сравнению с относительной скоростью изменения полной турбулентности будут иметь очень высокую частоту $u'_k k_d$.

В промежутке между этими пределами находится область волновых чисел, для которой «частоты» вихрей $u'_k k$ имеют тот же порядок, что и относительная скорость изменения полной турбулентности. Логично ожидать, что это будет наблюдаться в области энергосодержащих вихрей, так как именно эти вихри обеспечивают основной вклад в полную энергию турбулентности, а относительная скорость изменения этой полной энергии поэтому тесно связана с «частотой» этих вихрей:

$$\frac{1}{u'^2}\frac{du'^2}{dt} \sim -u' k_e. \tag{3.100}$$

Следовательно, вне этой области в направлении возрастания волновых чисел процесс вырождения можно считать относительно медленным по сравнению с движением вихрей. Иначе говоря, в области более высоких значений волновых чисел турбулентность может приближенно считаться статистически стационарной, а скоростью изменения осредненных величин можно пренебречь.

Вихри, соответствующие этим более высоким волновым числам, возбуждаются благодаря переносу энергии инерционными силами от более крупных вихрей. Можно предполагать, что в отличие от наиболее крупных вихрей эти, намного меньшие вихри не подвержены влиянию внешних условий, порождающих силы, под воздействием которых образуются исходные крупные вихри. Это предположение подкрепляется тем экспериментальным фактом, что даже в анизотропном турбулентном потоке область турбулентности, соответствующая высоким значениям волновых чисел, обладает почти полной изотропностью.

Таким образом, турбулентность в области больших волновых чисел можно считать не только статистически стационарной по ее осредненным параметрам, но также и независимой от внешних условий. Поэтому характер турбулентности в этой области может определяться только параметрами, связанными с внутренними условиями. Оказывается, что таких параметров существует только два.

Рассмотрим настолько большое число Рейнольдса, чтобы область энергосодержащих вихрей и область максимальной диссипации находились достаточно далеко друг от друга и, следовательно,

$$k_e \ll k_d.$$

В области $k \gg k_e$ вихри получают энергию благодаря инерционному переносу ее от более крупных вихрей, а крупные вихри, в свою очередь, переносят энергию к более мелким вихрям. В то же время происходит диссипация некоторой части энергии в вихрях. Таким образом, во всей области волновых чисел имеется непрерывный поток энергии и непрерывная диссипация, причем последняя нарастает с увеличением значения волнового числа.

В этой области количество энергии, переданной через вихри, велико по сравнению со скоростью изменения их энергии; следовательно, эти вихри можно рассматривать как находящиеся в статистическом равновесии друг с другом.

Очевидно, что характер турбулентности в этой области полностью определяется потоком энергии через эту область и скоростью диссипации. Сумма потока энергии и диссипации должна равняться полному притоку энергии к этой области. Если пренебречь диссипацией энергии в области низких значений волновых чисел $k < k_e$, то полный приток энергии в области равновесия практически равен величине

$$\varepsilon(t) = -\frac{3}{2}\frac{du'^2}{dt} = 2\nu\int_0^\infty k^2 E(k, t)\,dk. \qquad (3.101)$$

Отсюда следует, что характер турбулентности в этой области определяется величиной $\varepsilon(t)$, которая является одним из двух упомянутых выше параметров, и коэффициентом вязкости $\nu$ — вторым из этих параметров, поскольку он тоже определяет скорость диссипации.

Этот анализ привел Колмогорова к следующей гипотезе:

«При достаточно больших числах Рейнольдса существует область высоких значений волновых чисел, в которой турбулентность находится в статистическом равновесии и однозначно определяется величинами $\varepsilon$ и $\nu$. Это состояние равновесия является универсальным».

Эта равновесная область называется «универсальной» потому, что турбулентность в этой области не зависит от внешних условий, а любое изменение эффективных масштабов длины и времени для этой турбулентности может быть только результатом влияния параметров $\varepsilon$ и $\nu$.

Следуя Колмогорову, вместо масштаба времени выберем масштаб скорости, так как это представляется более удобным. Из соображений размерности получаем:

$$\text{масштаб длины: } \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \qquad (3.102а)$$

$$\text{масштаб скорости: } v = (\nu\varepsilon)^{1/4}. \qquad (3.102б)$$

Следовательно, масштабы длины $\eta$ и скорости $v$ таковы, что отнесенное к ним число Рейнольдса

$$\frac{v\eta}{\nu} = 1.$$

Волновое число $k_d$, при котором влияние вязкости становится очень сильным, будет иметь порядок $1/\eta$. Величину $k_d$ принято определять так, чтобы она удовлетворяла точному равенству

$$k_d = \frac{1}{\eta}. \tag{3.103}$$

Однако тогда величина $k_d$ уже больше не соответствует максимуму кривой диссипации. Таунсенд [52] показал, что основная доля вязкой диссипации приходится на область $k_\eta < 0{,}5$, причем максимум ее достигается при $k_\eta \approx 0{,}2$.

С другой стороны области равновесия имеем волновое число $k_e$, фиксирующее область энергосодержащих вихрей. Определим длину $l_e$ равенством

$$k_e = \frac{1}{l_e},$$

так что $l_e$ можно интерпретировать как средний размер энергосодержащих вихрей.

Выше уже были введены следующие важные параметры, характеризующие турбулентность: интенсивность $u'$, масштаб диссипации $\lambda_f$ и интегральный масштаб $\Lambda_f$. Поскольку, вслед за Дж. Тэйлором, вместо $\lambda_f$ принято пользоваться величиной $\lambda_g$, то в дальнейшем изложении мы не будем отступать от этой традиции.

Возникает вопрос: как все эти величины связаны с только что введенными параметрами $v$, $\eta$ и $l_e$?

Есть основания полагать, что величина $\Lambda_f$, которая определяется главным образом размером крупных энергосодержащих вихрей, имеет такой же порядок, как и средний размер $l_e$ этих вихрей. Кроме того, можно ожидать, что соотношения между $u'$ и $v$, а также между $l_e$ и $\eta$ будут зависеть от числа Рейнольдса турбулентности.

Мы уже упоминали о числе Рейнольдса $v_\eta/\nu$, которое, будучи в точности равным единице, фиксирует только область сильного влияния вязкости, где инерционные силы имеют ту же величину, что и сдвигающие усилия. Стало быть, для характеристики турбулентности в других частях области волновых чисел одного только этого числа Рейнольдса недостаточно. Для этой цели, по-видимому, подходят два других числа Рейнольдса, которые могут быть составлены из перечисленных выше параметров, а именно:

$$\mathrm{Re}_\lambda = \frac{u'\lambda_g}{\nu}, \quad \mathrm{Re}_l = \frac{u'l_e}{\nu}. \tag{3.104}$$

Чтобы получить соотношения между $\mathrm{Re}_\lambda$, $\mathrm{Re}_l$, $u'$, $v$, $l_e$, $\lambda_g$ и $\eta$, следует вспомнить, что эти параметры частично относятся к области волновых чисел с максимальной диссипацией, а частично — к области волновых чисел, соответствующей энергосодержащим вихрям. Для этих двух областей параметр $\varepsilon$ является определяющим, так как величина $\varepsilon$, с одной стороны, практически равна диссипации в области наибольших волновых чисел, а с другой стороны, практически равна работе, производимой энергосодержащими вихрями, которые осуществляют подвод энергии к более мелким вихрям.

Уже было показано, что полную диссипацию можно выразить через $u'$ и $\lambda_g$:

$$\varepsilon = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2}; \tag{3.96}$$

но, с другой стороны, работа на единицу массы в единицу времени может быть записана в следующей форме:

$$\varepsilon = A \frac{u'^3}{l_e}, \tag{3.105}$$

где $A$ — численный коэффициент порядка единицы [ср. с соотношениями (3.100) и (3.101), из которых вытекает (3.105)].

Легко убедиться в том, что, согласно уравнениям (3.96) и (3.105), соотношения между $\mathrm{Re}_\lambda$, $\mathrm{Re}_l$, $u'$, $v$, $l_e$, $\lambda_g$ и $\eta$ имеют вид

$$\mathrm{Re}_l = \frac{A}{15}\mathrm{Re}_\lambda^2, \tag{3.106}$$

$$\frac{u'}{v} = 15^{-1/4}\mathrm{Re}_\lambda^{1/2}, \tag{3.107}$$

$$\frac{\lambda_g}{\eta} = 15^{1/4}\mathrm{Re}_\lambda^{1/2}, \tag{3.108}$$

$$\frac{l_e}{\lambda_g} = \frac{A}{15}\mathrm{Re}_\lambda, \tag{3.109}$$

$$\frac{l_e}{\eta} = 15^{-3/4}A\,\mathrm{Re}_\lambda^{3/2}. \tag{3.110}$$

Теперь с помощью соотношения (3.110) можно более точно определить условие существования области равновесия. Для волновых чисел, принадлежащих к этой области, имеем $k \gg k_e$ и, тем более,

$$k \ll k_d.$$

Это условие можно выразить через $l_e$ и $\eta$ следующим образом:

$$l_e \gg \eta,$$

откуда, согласно (3.110),

$$\mathrm{Re}_\lambda^{3/2} \gg 1. \tag{3.111}$$

Если ввести сюда число Рейнольдса $\mathrm{Re}_l$, то это условие запишется так [см. формулу (3.106)]:

$$\mathrm{Re}_l^{3/4} \gg 1. \tag{3.112}$$

Ниже мы рассмотрим, в какой мере это необходимое условие выполняется в опытах по изучению турбулентности.

При описании области равновесия уже говорилось, что в этой области диссипация не только наблюдается при всех волновых числах, но еще и сильно возрастает с увеличением волнового числа. Поэтому можно ожидать, что при очень большом числе Рейнольдса турбулентности диссипация в интервале волновых чисел, значительно смещенном от области максимальной диссипации в сторону меньших значений, будет пренебрежимо мала по сравнению с потоком энергии, переносимым под действием инерционных сил. В этой подобласти влияние параметра $\nu$ должно было бы исчезнуть, а турбулентность можно было бы определять всего лишь одним параметром $\varepsilon$. Однако это можно сделать только в том случае, когда отсутствует непосредственное воздействие энергосодержащих вихрей, т. е. любого отличного от $\varepsilon$ параметра, который мог бы влиять на турбулентность в области энергосодержащих вихрей. Следовательно, условие принадлежности волнового числа к этой подобласти запишется так:

$$k_e \ll k \ll k_d, \tag{3.113}$$

причем турбулентность в этой подобласти статистически независима от области энергосодержащих вихрей и области сильной диссипации.

Колмогоров рассмотрел эту подобласть в своей второй гипотезе:

«Если число Рейнольдса бесконечно велико, то энергетический спектр в подобласти, удовлетворяющей условию (3.113), однозначно определяется единственной величиной $\varepsilon$ и не зависит от $\nu$».

Поскольку в этой подобласти перенос энергии за счет инерционных сил является доминирующим фактором, мы будем называть ее инерционной подобластью.

Условие (3.113) существования такой инерционной подобласти по сравнению с условием $k_e \ll k_d$ существования области равновесия показывает, что число Рейнольдса в данном случае должно быть по своей величине по крайней мере на порядок выше. Условия (3.111) и (3.112), не будучи здесь достаточно точными, должны быть соответственно заменены следующими:

$$\mathrm{Re}_\lambda^{3/4} \gg 1 \tag{3.114}$$

и

$$\mathrm{Re}_l^{3/8} \gg 1. \tag{3.115}$$

Обратимся теперь к области, лежащей вне области равновесия, а именно к области более низких волновых чисел. Смежной с областью равновесия, но удаленной от нее настолько, чтобы имелась статистическая независимость, является область энергосодержащих вихрей. В этой области «частота» $u'k_e$ — величина того же порядка, что и относительная скорость изменения кинетической энергии всего поля турбулентности. Стало быть, имеются основания полагать, что в этой области следует принять в рассмотрение время $t$ как еще один параметр, определяющий, наряду с параметрами $\varepsilon$ и $\nu$, область равновесия.

Мы не будем пока касаться крайне высоких значений числа Рейнольдса, так что диссипацией и связанным с ней влиянием вязкости в этой области можно пренебречь. Однако поскольку любых двух из трех параметров $\varepsilon$, $\nu$ и $t$, как это следует из соображений размерности, уже достаточно, чтобы представить величины $E$ и $k$ в безразмерном виде, то эти три параметра не могут быть независимыми друг от друга. Они образуют безразмерный комплекс, который должен оставаться постоянным:

$$\frac{\varepsilon t^2}{\nu} = \text{const}. \tag{3.116}$$

В следующем параграфе будет показано, что этот безразмерный комплекс можно интерпретировать как число Рейнольдса турбулентности. Таким образом, согласно соотношению (3.116) число Рейнольдса в процессе вырождения турбулентности должно оставаться постоянным. Эта область более подробно будет рассмотрена в следующем параграфе, посвященном вырождению турбулентности.

Если снова предположить, что число Рейнольдса бесконечно велико и, следовательно, в области равновесия существует инерционная подобласть, где энергетический спектр определяется только параметром $\varepsilon$ и не зависит от $\nu$, то логично ожидать, что в области энергосодержащих вихрей, соответствующей более низким волновым числам, влияние вязкости тоже будет пренебрежимо мало; тогда в этой области с меньшими волновыми числами энергетический спектр будет зависеть только от двух параметров $\varepsilon$ и $t$.

Наконец, в диапазоне еще более низких волновых чисел имеются наиболее крупные вихри, которые отличаются высокой степенью устойчивости, причем изменение их по времени ослабевает с уменьшением волнового числа. Это можно заключить на основании соотношения (3.86), если в нем для функций $E(k, t)$ и $F(k, t)$ принять их асимптотические формы при $k \to 0$. Нам уже известно, что в диапазоне самых низких волновых чисел энергетический спектр описывается соотношением

$$\lim_{k \to 0} E(k, t) = I(t)\, k^4.$$

Из формул (3.67) и (3.12) следует, что величина $I$ составляет

$$I = -\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t)\,dr = \frac{u'^2}{3\pi}\int_0^\infty r^4 f(r, t)\,dr. \quad (3.117)$$

Интеграл в правой части является интегралом Лойцянского (3.39). [Тот же результат легко получить путем использования в формуле (3.70) разложения в ряд по $\sin kr$ и $\cos kr$.]

Отсюда следует, что интеграл Лойцянского или $I$ можно рассматривать как параметр, определяющий диапазон самых низких волновых чисел.

Кроме того, существует и другая особенность, которая характерна для крупных вихрей в области более низких волновых чисел, а именно диффузионные свойства турбулентности, обусловленные, как указывалось в главе 1, главным образом наличием крупных вихрей. Поэтому Карман и Линь [12] высказали предположение о том, что коэффициент вихревой диффузии $\epsilon$ можно рассматривать как параметр, определяющий характер турбулентности в области низких волновых чисел.

Итак, мы рассмотрели, по-видимому, весь диапазон волновых чисел, который, начиная с области малых волновых чисел, можно представить следующим образом [12]:

1. Область малых волновых чисел, определяемая величинами $I$ и $\epsilon$, в которой турбулентность является существенно постоянной (перманентной).

а) Подобласть наиболее низких волновых чисел, определяемая единственной величиной $I$.

2. Область средних волновых чисел, определяемая $\epsilon$ и $\varepsilon$.

а) Подобласть более низких волновых чисел, определяемая только величиной $\epsilon$, в которой турбулентность может все еще обладать некоторой перманентностью.

3. Область более высоких волновых чисел, определяемая величинами $\varepsilon$, $\nu$ и $t$.

а) В этой области находятся главным образом энергосодержащие вихри.

б) Определяется только величинами $\varepsilon$ и $t$ при условии $\mathrm{Re}_\lambda^{3/4} \gg 1$.

4. Область наиболее высоких волновых чисел, определяемая величинами $\varepsilon$ и $\nu$. Это — универсальная равновесная область.

а) Инерционная подобласть более низких волновых чисел, определяемая единственной величиной $\varepsilon$ при условии $\mathrm{Re}_\lambda^{3/4} \gg 1$.

Исходя из соображений размерности, довольно просто можно указать форму энергетического спектра в различных областях, а для подобластей, в которых турбулентность определяется только одним параметром, это можно сделать совершенно точно.

Величина $E(k, t)$ и параметры, рассмотренные выше, имеют следующие размерности:

$$[E] = [L^3T^{-2}],$$
$$[k] = [L^{-1}],$$
$$[\nu] = [L^2T^{-1}],$$
$$[\epsilon] = [L^2T^{-1}],$$
$$[\varepsilon] = [L^2T^{-3}],$$
$$[I] = [L^7T^{-2}].$$

Результаты, касающиеся формы функции $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел, представлены в таблице и изображены на рис. 3.11.

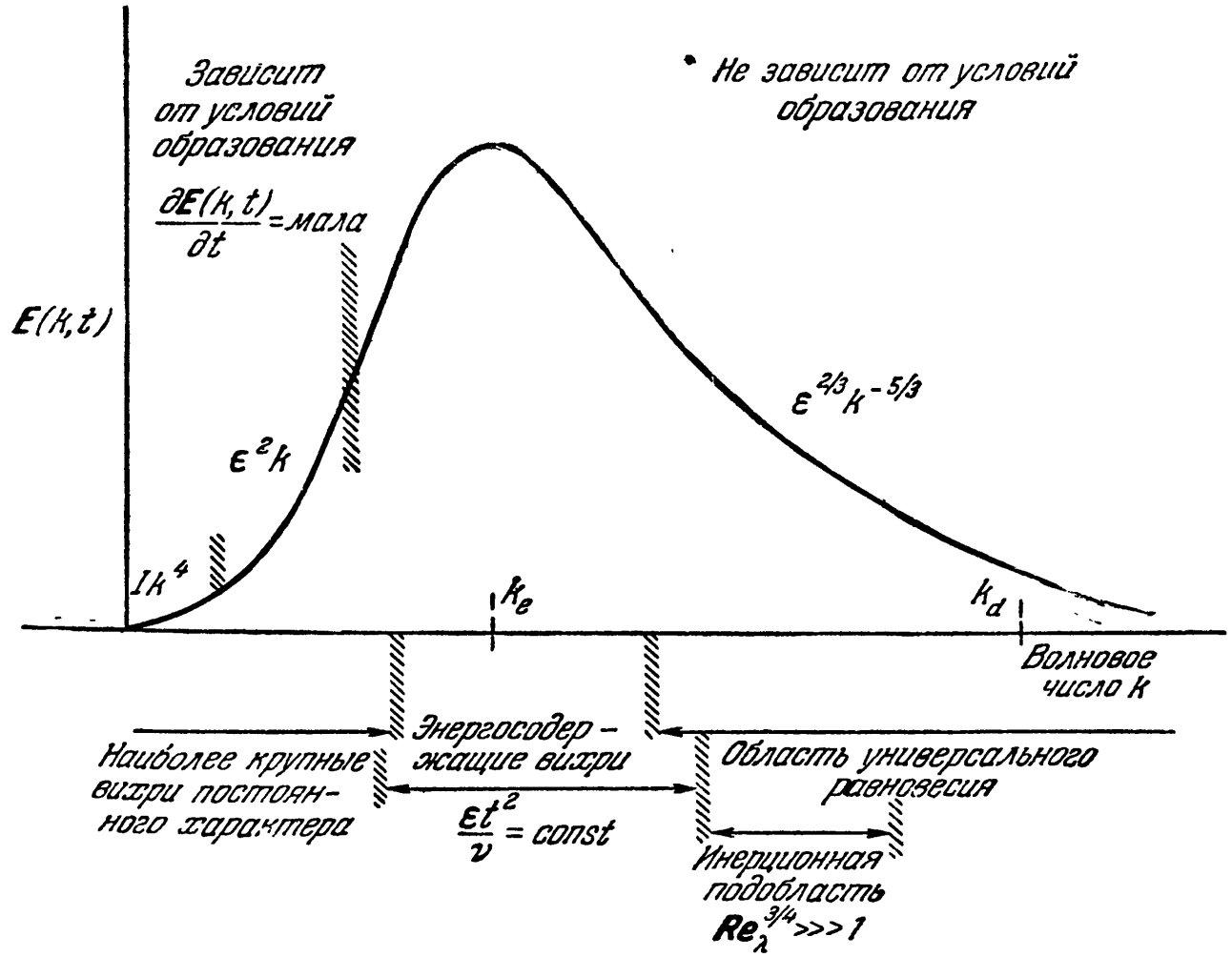



Рис. 3.11. Форма распределения $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел.

Особого внимания заслуживает форма функции $E(k, t)$ в инерционной подобласти:

$$E(k, t) = \text{const}\ \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \qquad (3.118)$$

Таблица

**Форма распределения $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел**

| | Области по возрастающим значениям $k \rightarrow$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (1) | (2) | (3) | (4) |
| Величины . . | $E$, $k$, $I$, $\epsilon$ | $E$, $k$, $\epsilon$, $\varepsilon$ | $E$, $k$, $\varepsilon$, $\nu$, $t$ | $E$, $k$, $\varepsilon$, $\nu$ |
| Фундаментальные параметры . . . | $I$, $\epsilon$ | $\epsilon$, $\varepsilon$ | $\varepsilon$, $\nu$, или $\varepsilon$, $t$, или $\nu$, $t$ | $\varepsilon$, $\nu$ |
| Характерная длина . . . | $(I/\epsilon^2)^{1/3}$ | $(\epsilon^3/\varepsilon)^{1/4}$ | $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ | $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ |
| Характерное время . . . | $(I^2/\epsilon^7)^{1/3}$ | $(\epsilon/\varepsilon)^{1/2}$ | $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ | $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ |
| Характерная скорость . | $(\epsilon^5/I)^{1/3}$ | $(\epsilon\varepsilon)^{1/4}$ | $(\nu\varepsilon)^{1/4}$ | $(\nu\varepsilon)^{1/4}$ |
| $E(k, t)$ . . . | $\epsilon^{8/3} I^{-1/3} E^*\left[k(I/\epsilon^2)^{1/3}\right]$ | $\epsilon^{5/4}\varepsilon^{1/4} E^*\left[k(\epsilon^3/\varepsilon)^{1/4}\right]$ | $\nu^{5/4}\varepsilon^{1/4} E^*\left[k(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \varepsilon t^2/\nu\right]$ $\varepsilon^{3/2} t^{5/2} E^*(k\varepsilon^{1/2} t^{3/2})$, если $\mathrm{Re}_\lambda^{3/4} \ggg 1$ | $\nu^{5/4}\varepsilon^{1/4} E^*\left[k(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}\right]$ |

| | Подобласти | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Фундаментальный параметр. | $I$ | | $\epsilon$ | | | $\mathrm{Re}_\lambda^{3/4} \ggg 1$ | | |
| | | | | | | $\varepsilon$ | | |
| $E(k, t)$ . . . | $Ik^{-4}$ | | const $\epsilon^2 k$ | | | const $\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ | | |

Эту формулу для $E(k, t)$, которая находит применение при больших числах Рейнольдса, часто называют спектральным законом Колмогорова, так как он первым обнаружил этот результат (см. его вторую гипотезу). Однако независимо от Колмогорова тот же результат был получен также Онзагером [47] и Вейцзэкером [48].

Распределение интенсивности турбулентности в инерционной подобласти можно определить по волновым числам или по размерам вихрей. Пусть $u'_k$ — среднеквадратичная величина скорости всех вихрей с волновыми числами большими, чем $k$; тогда

$$\frac{3}{2} u_k'^2 = \int_k^\infty E(k, t)\, dk. \qquad \text{(а)}$$

Если пренебречь добавкой к кинетической энергии от вихрей, соответствующих области волновых чисел вне инерционной подобласти, и для функции $E(k, t)$ принять указанный выше закон Колмогорова, то получим

$$u'_k \sim k^{-1/3} \sim l_k^{1/3}.$$

Отсюда следует, что интенсивность турбулентного движения пропорциональна кубичному корню из размера рассматриваемой области (в этом случае — из размера вихря).

Вейцзэкер [48] из простых соображений получил аналогичный результат и затем, принимая во внимание уравнение (а), пришел к заключению, что при больших числах Рейнольдса должен выполняться закон (3.118).

За исключением трех подобластей, указанных в таблице 3.1, теория размерностей не дает возможности найти точное описание энергетического спектра $E(k, t)$. Из-за этого мы вынуждены обратиться к динамическому уравнению для спектральной функции, записанному либо в дифференциальной форме (3.86), либо в интегральной форме (3.92), и попытаться решить эти уравнения. До настоящего времени единственным способом решения этих уравнений было принятие предположения о существовании некоторой связи между функцией переноса $F(k, t)$, энергетическим спектром $E(k, t)$ и волновым числом $k$.

При этом делались различные предположения. Все они основаны на более или менее интуитивной физической картине механизма переноса энергии по диапазону волновых чисел. Первое из рассматриваемых нами предположений было сделано Обуховым [13], который принял, что перенос энергии по диапазону волновых чисел аналогичен передаче энергии от основного движения к турбулентному благодаря турбулентным напряжениям сдвига или притоку турбулентной энергии [см. главу 1, уравнение (1.98)]. Здесь нам придется обратиться к той части рейнольдсовых напряжений, которая связана

с волновыми числами большими, чем $k$, а также к тем средним скоростям сдвига, которые связаны с волновыми числами, меньшими $k$. Обухов предположил, что для волновых чисел меньших, чем $k$, рейнольдсовы напряжения пропорциональны кинетической энергии $\int_k^\infty E(k, t)\,dk$ и средней скорости деформации. Срендеквадратичное значение скорости деформации при турбулентном движении [см. уравнение (3.20)] запишется так:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\left[\frac{\partial^2 Q_{i,i}}{\partial \xi_j\,\partial \xi_j}\right]_{r=0}.$$

Используя соотношение (3.54), получаем

$$-\frac{\partial^2 Q_{i,i}}{\partial \xi_j\,\partial \xi_j} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int k^2 E_{i,i}\exp(ik_l\xi_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3 = 4\pi\int_0^\infty k^4\frac{\sin kr}{kr}E_{i,i}\,dk.$$

Отсюда

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 4\pi\int_0^\infty k^4 E_{i,i}\,dk = 2\int_0^\infty k^2 E(k, t)\,dk,$$

и, стало быть, среднеквадратичное значение скорости деформации при турбулентном движении в диапазоне волновых чисел меньших, чем $k$, составляет

$$\left[2\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk\right]^{1/2}.$$

Таким образом, предположение Обухова запишется в следующем виде:

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -\alpha\left[2\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk\right]^{1/2}\int_k^\infty E(k, t)\,dk, \quad (3.119)$$

где $\alpha$ — универсальная постоянная.

Коважный [14] принял допущение о том, что интеграл $\int_0^k F(k, t)\,dk$ является функцией только $E(k, t)$ и $k$:

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -\alpha\,[E(k)]^{3/2}k^{5/2}. \quad (3.120)$$

Наиболее приемлемое предположение было, по всей вероятности, высказано Гейзенбергом [15]. Оно состоит в том, что влияние вихрей

с волновыми числами большими, чем $k$, посредством которых осуществляется отвод энергии от вихрей с волновыми числами меньшими, чем $k$, таково, как будто бы имеется некоторая турбулентная вязкость Тогда формально можно записать

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -2\epsilon(k, t)\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk,$$

где величина $\epsilon(k, t)$ обозначает кинематический коэффициент турбулентной вязкости, обусловленной вихрями с волновыми числами, лежащими в диапазоне от $k$ до бесконечности.

Далее можем положить, что $\epsilon(k, t) \sim u'_k/k$, где

$$u'_k = \left[\frac{2}{3}\int_k^\infty E(k, t)\,dk\right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\epsilon(k, t) \sim \frac{1}{k}\left[\int_k^\infty E(k, t)\,dk\right]^{1/2}.$$

Поскольку речь идет о размерностях рассматриваемых величин, это соотношение можно заменить эквивалентным выражением

$$\epsilon(k, t) \sim \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk,$$

которое соответствует форме, предложенной Гейзенбергом. Следовательно,

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -2\alpha\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk. \quad (3.121)$$

Физическая модель, на которой основано предположение Гейзенберга, представляется вполне приемлемой. Однако, как показал Бэтчелор [11], в этой связи можно высказать одно принципиальное возражение. С физической точки зрения введение турбулентной вязкости, характеризующей перенос энергии от более крупных вихрей к более мелким, справедливо лишь в том случае, когда мелкие вихри, благодаря которым и существует эта турбулентная вязкость, являются статистически независимыми от крупных вихрей. Но форма выражения Гейзенберга (3.121) такова, что значения обоих интегралов в правой части определяются, в основном, вихрями с волновыми числами $k$, близкими к нижнему пределу первого интеграла и к верхнему

пределу второго интеграла. На самом деле перенос энергии под действием инерционных сил, характеризуемый функцией переноса $F(k, t)$, обусловлен главным образом взаимодействием между вихрями с мало отличающимися волновыми числами.

Более общее выражение для интеграла $\int_0^k F(k, t)\,dk$ было дано Карманом [9]. Функцию $F(k, t)$ можно интерпретировать как разность между энергией, подведенной к вихрям с волновыми числами меньшими, чем $k$, и энергией, переданной более мелким вихрям с волновыми числами большими, чем $k$. Далее, Карман полагает, что

$$F(k, t) = 2\alpha\left\{E^{\varphi}k^{\psi}\int_0^k E^{\varphi'}k^{\psi'}\,dk - E^{\varphi'}k^{\psi'}\int_k^{\infty} E^{\varphi}k^{\psi}\,dk\right\}.$$

Из соображений размерности следует, что

$$\varphi+\varphi'=\frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \psi+\psi'=\frac{1}{2},$$

$$F(k, t) = 2\alpha\left[E_{\varphi}k^{\psi}\int_0^k E^{\frac{3}{2}-\varphi}k^{\frac{1}{2}-\psi}\,dk - E^{\frac{3}{2}-\varphi}k^{\frac{1}{2}-\psi}\int_k^{\infty} E^{\varphi}k^{\psi}\,dk\right],$$

откуда

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -2\alpha\left[\int_0^k E(k, t)^{\frac{3}{2}-\varphi}k^{\frac{1}{2}-\psi}\,dk\right]\left[\int_k^{\infty} E(k, t)^{\varphi}k^{\psi}\,dk\right]. \tag{3.122}$$

При $\varphi=1$, $\psi=0$ получаем видоизмененную формулу Обухова:

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -2\alpha\left\{\int_0^k [E(k, t)\,k]^{1/2}\,dk\right\}\left[\int_k^{\infty} E(k, t)\,dk\right].$$

При $\varphi=3/2$, $\psi=0$ получаем видоизмененную формулу Коважного:

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -2\alpha\left\{\int_k^{\infty} [E(k, t)]^{3/2}\,dk\right\}\frac{2}{3}k^{3/2}.$$

При $\varphi=1/2$, $\psi=-3/2$ получаем формулу Гейзенберга:

$$\int_0^k F(k, t)\,dk = -2\alpha\left\{\int_k^{\infty}\sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk\right\}\left[\int_0^k k^2E(k, t)\,dk\right].$$

При различных предположениях относительно вида функции $F(k, t)$ были получены решения динамического уравнения (3.92) для

равновесной области. В этой области, где $k \gg k_e$, член $\partial E(k, t)/\partial t$ очень мал и, стало быть, величиной $\frac{\partial}{\partial t}\int_k^\infty E(k, t)\,dk$ можно пренебречь по сравнению с $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty E(k, t)\,dk$. Отсюда в уравнении (3.92) можем положить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k E(k, t)\,dk \approx \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty E(k, t)\,dk = -\varepsilon = -2\nu\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk.$$

В этом случае уравнение (3.92) запишется либо в форме

$$-\varepsilon = \int_0^k F(k, t)\,dk - 2\nu\int_0^k k^2 E(k, t)\,dk, \tag{3.123}$$

либо как

$$\int_0^k F(k, t)\,dk + 2\nu\int_k^\infty k^2 E(k, t)\,dk = 0. \tag{3.124}$$

С помощью формулы (3.119) Обухову удалось получить решение уравнения (3.124), правда, не в замкнутом виде. Для инерционной подобласти решение для $E(k, t)$, как это и должно быть, определяется выражением const $k^{-5/3}$. Но для более высоких значений $k$ это решение затухает значительно медленнее, нежели продолжение кривой $k^{-5/3}$, пока, наконец, при определенном предельном значении $k$, когда $E(k, t)$ все еще является конечной величиной, полная диссипация не становится уже равной $\varepsilon$, хотя это должно быть при $E(k, t) = 0$. Отсюда, как указал Бэтчелор [11], следует, что предположение Обухова (3.119) страдает определенным изъяном.

Используя свою формулу для $\int_0^k F(k, t)\,dk$, Коважный получил решение

$$E(k, t) = \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha^{10}}\right)^{1/3} k^{-5/3}\left[1 - \frac{\alpha^{2/3}}{2}\left(\frac{k}{k_d}\right)^{4/3}\right]^2,$$

где $k_d(t) = [\varepsilon(t)/\nu^3]^{1/4}$. Это решение также справедливо при $k \ll k_d$; оно тоже имеет предельное значение $k$, но при этом значении $E\ k\ t) = 0$.

Посмотрим теперь, к какому результату приводит предположение Гейзенберга (3.121). Подстановка (3.121) в (3.123) дает

$$\varepsilon = 2\alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\, dk \int_0^k k^2 E(k, t)\, dk + 2\nu \int_0^k k^2 E(k, t)\, dk. \quad (3.125)$$

При не слишком больших значениях $k$, которые не выходят за пределы инерционной подобласти, вязким членом можно пренебречь. Тогда решением этого уравнения будет

$$E(k, t) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha}\right)^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.126)$$

что находится в соответствии с решением (3.118). Для очень больших значений $k$, при которых вязкость играет существенную роль, Гейзенберг получил

$$E(k, t) = \text{const}\, k^{-7}. \quad (3.127)$$

Для промежуточного диапазона Гейзенберг дает интерполяционную формулу, которая в инерционной и в вязкой подобластях переходит соответственно в указанные выше решения. Мы не приводим здесь эту интерполяционную формулу, так как Бэссом [6] и независимо от него Чандрасекаром [16] было показано, что можно получить и точное решение уравнения (3.125).

Чтобы показать это, положим

$$\theta(k) = \int_0^k k^2 E(k)\, dk,$$

так что

$$E = \frac{1}{k^2}\frac{d\theta}{dk}.$$

Тогда уравнение (3.125) примет вид

$$\nu + \alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{1}{k^5}\frac{d\theta}{dk}}\, dk = \frac{\varepsilon}{2\theta}.$$

Дифференцирование по $k$ дает

$$-\alpha \sqrt{\frac{1}{k^5}\frac{d\theta}{dk}} = -\frac{\varepsilon}{2\theta^2}\frac{d\theta}{dk},$$

или

$$\frac{1}{k^5}\frac{d\theta}{dk} = \left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)^2 \frac{1}{\theta^4}\left(\frac{d\theta}{dk}\right)^2.$$

Решение этого уравнения выражается формулой

$$\theta^3 = \frac{1}{\text{const} + \frac{3}{4}\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)^2 k^{-4}}.$$

Так как при $k \to \infty$ имеем $\theta = \varepsilon/2\nu$, то постоянная в этом выражении должна быть равна $8\nu^3/\varepsilon^3$. Если ввести величину $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$, то будем иметь

$$\theta^3 = \frac{\varepsilon^3}{3\alpha^2\nu^3} \frac{\frac{k^4}{k_d^4}}{1 + \frac{8}{3\alpha^2}\left(\frac{k}{k_d}\right)^4}.$$

Отсюда

$$E(k, t) = \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\varepsilon\nu^5)^{1/4} \frac{\left(\frac{k}{k_d}\right)^{-5/3}}{\left[1 + \frac{8}{3\alpha^2}\left(\frac{k}{k_d}\right)^4\right]^{4/3}}. \qquad (3.128)$$

Нетрудно убедиться, что при $k/k_d \ll 1$ выражение (3.128) приводится к (3.126), а при $k/k_d \gg 1$ получается формула (3.127). В этом случае постоянная в формуле (3.127) оказывается равной $\frac{1}{4}\alpha^2\varepsilon^2\nu^{-4}$. Переход к области с сильным влиянием вязкости, в соответствии с приведенной выше интерпретацией величины $k_d = \frac{1}{\eta}$, сосредоточен, по-видимому, вблизи $k \approx k_d$.

Если проанализировать различные предположения, сделанные относительно функции переноса $\int_0^k F(k, t)\,dk$, то можно заметить, что все они представляют собой произведение двух членов, один из которых является интегралом по интервалу волновых чисел от 0 до $k$, а другой — интегралом по интервалу волновых чисел от $k$ до $\infty$. Стюарт и Таунсенд [17] показали, что подобные предположения при очень больших волновых числах обязательно должны приводить к степенному спектральному закону, безотносительно к точной форме этих сомножителей.

Несколько выше, в этом параграфе, было высказано возражение против гипотезы Гейзенберга о турбулентной вязкости, обусловленной мелкими вихрями, а именно, что она находится в противоречии с требованием статистической независимости между этими и крупными вихрями. Это возражение становится очень существенным, если рассматривать вязкую область $k > 0{,}5k_d$, ниже которой наблюдается наибольшая вязкая диссипация. В этой области гипотеза Гейзенберга теряет силу, а формула энергетического спектра $E(k) \sim k^{-7}$ оказы-

вается здесь неприемлемой. Это было четко показано Таунсендом [52]. Наиболее мелкие вихри образуются в процессе искривления и растяжения крупных вихрей при волновых числах, вероятно, порядка $k_d$. Далее, каждый жидкий элемент в турбулентном потоке деформируется в длинную тонкую ленту; этот процесс более подробно будет рассмотрен в § 5.4. При этом наиболее мелкие вихри образуют, вероятно, концентрированную вихревую пелену. Попытка обоснования этой идеи также была сделана Бюргерсом [57]. В этом случае довольно очевидно, что наиболее мелкие вихри не являются статистически независимыми от вихрей с волновыми числами порядка $k_d$. Но имеется еще и другое возражение. Экспериментальные данные показали, что завихренность этих наиболее мелких вихрей пренебрежимо мала по сравнению с завихренностью вихрей, от которых они получают свою энергию, в то время как гипотеза Гейзенберга подразумевает совершенно противоположное. На самом деле в основной области $k < 0{,}5k_d$ вихри, подводящие энергию, имеют, в общем случае, большую энергию, но меньшую завихренность, нежели вихри, получающие энергию.

Если верно, что вихри при волновых числах $k \gg k_d$ образуют концентрированную, но слабую вихревую пелену, накладывающуюся в виде возмущений на основное поле завихренности более крупных вихрей и находящуюся в энергетическом равновесии (по причине баланса между эффектами растяжения и вязкости), то подобную модель можно использовать для вывода более правильного выражения для энергетического спектра, нежели это возможно исходя из гипотезы Гейзенберга. Таунсенду удалось получить выражение для одномерного спектра компоненты $u_1$ турбулентных пульсаций скорости из относительно простой модели, в которой вихри образуют вихревую пелену. Это выражение записывается следующим образом:

$$E_1(k_1) = A\left(\frac{k_1}{k_d}\right)^{-2} \int_0^1 (1 - s^2) \exp\left[-\frac{2}{s^2}\left(\frac{k_1}{k_d}\right)^2\right] ds. \qquad (3.129)$$

Сравнение расчетов с экспериментальными значениями величины $(k_1/k_d)^6 E_1(k_1)$, которая рельефно выделяет характерные особенности спектральной функции в области больших волновых чисел, указывает на весьма удовлетворительное согласие.

Мы пока еще не получили такого решения для $E(k, t)$, которое было бы справедливо в диапазоне волновых чисел энергосодержащих вихрей и для еще меньших волновых чисел, за исключением области самых низких значений волновых чисел, где величина $E(k, t)$ пропорциональна $k^4$. Чтобы получить это решение, надо обратиться к полному уравнению (3.86) или (3.92), поскольку скорость вырождения турбулентности имеет тот же порядок, что и «частота» $u'_k k_e$ вихрей в указанных выше диапазонах.

Ввиду того, что процесс вырождения будет рассматриваться в отдельном параграфе, с решениями для $E(k, t)$ в диапазоне волновых чисел энергосодержащих вихрей мы будем иметь дело там, а не здесь. Однако здесь следует упомянуть о формуле Кармана [9], предложенной им в качестве интерполяционного соотношения для диапазона, заключенного между областью «перманентных», самых крупных вихрей (закон «$k^4$») и инерционной подобластью (закон «$-5/3$»):

$$E(k, t) = E(k_e, t)\, 2^{17/6} \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right]^{17/6}}. \tag{3.130}$$

Здесь величина $k_e$ зависит от времени.

Функцию $E(k_e, t)$ можно связать с интегралом Лойцянского $I$, так как при $k/k_e \to 0$ должно выполняться условие

$$Ik^4 = E(k_e, t)\, 2^{17/6}\left(\frac{k}{k_e}\right)^4$$

или

$$E(k_e, t) = 2^{-17/6} I k_e^4. \tag{3.130а}$$

Формула (3.130) для очень больших значений $k/k_e$ сводится к закону «$k^{-5/3}$». Преимущество этой формулы состоит в том, что она весьма удобна для дальнейшего использования в различных вычислениях, так как обычно приводит к легко интегрируемым функциям.

Формула Кармана (3.130) применима только для столь больших чисел Рейнольдса, при которых существует инерционная подобласть (закон «$k^{-5/3}$»), а влияние вязкости пренебрежимо мало. Но в § 1.11 уже упоминалось о том, что при больших числах Рейнольдса коэффициенты корреляции вполне удовлетворительно могут быть аппроксимированы экспоненциальным законом. В § 3.4 было показано, что если этот экспоненциальный закон применить к функции продольной корреляции $f(r, t)$, то соответствующая ей функция пространственного энергетического спектра будет иметь вид

$$E(k, t) = \frac{8}{\pi} u'^2 \Lambda_f \frac{\Lambda_f^4 k^4}{(1+\Lambda_f^2 k^2)^3}. \tag{3.131}$$

Для больших значений $k$ это выражение упрощается:

$$E(k, t) \approx \frac{8}{\pi} \frac{u'^2}{\Lambda_f} k^{-2},$$

что не слишком сильно отличается от закона «$k^{-5/3}$».

Представляет интерес определить одномерный энергетический спектр и корреляционные функции, соответствующие решениям и формулам, данным выше для $E(k, t)$. Рассмотрим сначала решение

Гейзенберга (3.128). С помощью соотношения (3.72) можно было бы вычислить одномерный энергетический спектр $E_1(k_1, t)$, а затем, используя формулу (3.49), найти коэффициент продольной корреляции $f(x_1, t)$. Однако интегрирование появляющихся при этом выражений приводит к очень сложным формулам; кроме того, решение, полученное для $f(x_1, t)$, было бы справедливо лишь в ограниченном диапазоне $x_1 \ll l_e$, потому что решение Гейзенберга (3.128) выполняется только в диапазоне волновых чисел $k \gg k_e$. По этим причинам мы не будем приводить здесь эти решения.

Напротив, одномерный спектр и коэффициент корреляции для инерционной подобласти можно получить без всяких затруднений. Нам уже известно, что в этой подобласти выполняется простой степенной закон:

$$E(k_1, t) = \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\varepsilon\nu^5)^{1/4} \left(\frac{k}{k_d}\right)^{-5/3}, \quad \text{когда} \quad \frac{k}{k_d} \ll 1. \qquad (3.132)$$

Подстановка в формулу (3.72) показывает, что функция $E_1(k_1, t)$ подчиняется тому же степенному закону:

$$E_1(k_1, t) = \frac{18}{55} \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\varepsilon\nu^5)^{1/4} \left(\frac{k_1}{k_d}\right)^{-5/3}, \quad \text{когда} \quad \frac{k}{k_d} \ll 1. \qquad (3.132а)$$

В вязкой подобласти, где $k/k_d \gg 1$, степенной закон Гейзенберга $E(k) \sim k^{-7}$ тоже привел бы к аналогичному результату для одномерного спектра $E_1(k_1)$. Но опять-таки, вследствие несправедливости гипотезы Гейзенберга в этой подобласти, представляется более целесообразным рассмотреть спектральную функцию типа (3.129), предложенную Таунсендом.

Если требуется вычислить коэффициент продольной корреляции $f(x_1, t)$, то следует вспомнить, что спектр Колмогорова справедлив в диапазоне $k_e \ll k \ll k_d$ и, следовательно, соответствующее решение для $f(x_1, t)$ справедливо лишь в диапазоне $\eta \ll x_1 \ll l_e$.

Таким образом, из соотношения (3.49) имеем

$$u'^2 f(x, t) = C \int_{k_e}^{k_d} k_1^{-5/3} \cos k_1 x_1 \, dk_1 + \int_0^{k_e} E_1(k_1, t) \cos k_1 x_1 \, dk_1 + \int_{k_d}^{\infty} E_1(k_1, t) \cos k_1 x_1 \, dk_1,$$

где

$$C = \frac{18}{55} \left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3} (\varepsilon\nu^5)^{1/4} k_d^{5/3} = \frac{18}{55} \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha}\right)^{2/3}.$$

Теперь следовало бы вычислить известные определенные интегралы для случая, когда пределами первого интеграла являются 0 и $\infty$.

Однако при нулевом нижнем пределе этот интеграл не сходится. Поэтому вместо величины $u'^2 f(x_1, t)$ лучше рассматривать

$$u'^2[1-f(x_1, t)] = C\int_{k_e}^{k_d} k_1^{-5/3}(1-\cos k_1x_1)\,dk_1 + \\ + \int_0^{k_e} E_1(k_1, t)(1-\cos k_1x_1)\,dk_1 + \int_{k_d}^{\infty} E_1(k_1, t)(1-\cos k_1x_1)\,dk_1.$$

При малых значениях $k_1$ подынтегральное выражение обращается в нуль, так как разность $1-\cos k_1x_1$ убывает быстрее, чем возрастает величина $k_1^{-5/3}$, но при больших значениях $k_1$ подынтегральное выражение также обращается в нуль вместе с функцией $k_1^{-5/3}$. Отсюда следует, что пределы $k_e$ и $k_d$ можно с уверенностью заменить на 0 и $\infty$; тогда получим

$$u'^2[1-f(x_1, t)] = C\int_0^{\infty} k_1^{-5/3}(1-\cos k_1x_1)\,dk_1 = \\ = Cx_1^{2/3}\int_0^{\infty} y^{-5/3}(1-\cos y)\,dy.$$

Этот интеграл посредством интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$\frac{3}{2}\int_0^{\infty} y^{-2/3}\sin y\,dy = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

так что

$$f(x_1, t) = 1 - \frac{3}{4}\frac{C}{u'^2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)x_1^{2/3},$$

или

$$f(x_1, t) = 1 - \frac{A}{u'^2}(\varepsilon x_1)^{2/3}, \qquad (3.133)$$

где $A = \frac{18}{55}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{2/3}$ — универсальная постоянная.

Для энергетического спектра $E(k, t)$ в диапазоне волновых чисел от $k = 0$ вплоть до области энергосодержащих вихрей имеются интерполяционная формула Кармана (3.130) и эмпирическая формула (3.131). Что касается последней, то соответствующий одномерный энергетический спектр и коэффициенты корреляции были уже определены нами выше.

Используя интерполяционную формулу Кармана, из соотношения (3.72) получаем

$$E_1(k_1, t) = E(k_e, t)\, 2^{17/6} \frac{18}{55}\left[1 + \left(\frac{k_1}{k_e}\right)^2\right]^{-5/6}.$$

Подстановка в (3.49) после интегрирования дает

$$u'^2 f(x_1, t) = 2^{7/2} \frac{9}{55} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} k_e E(k_e, t) (x_1 k_e)^{1/3} K_{1/3}(x_1 k_e),$$

где $K_{1/3}(y)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя порядка $1/3$.

В этих выражениях величина $E(k_e, t)$ остается пока еще неизвестной. Однако эта величина может быть определена из условия, что соответствующие корреляционные функции при $x_1 = 0$ должны обращаться в единицу. Таким образом, из последнего выражения для $f(x_1, t)$ при $x_1 = 0$ имеем

$$E(k_e, t) = \frac{u'^2}{k_e} \frac{55}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2^{17/6}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0{,}2 \frac{u'^2}{k_e}.$$

Тогда для $E(k, t)$, $E_1(k_1, t)$ и $f(x_1, t)$ получим следующие соотношения:

$$E(k, t) = \frac{55}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{u'^2}{k_e} \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right]^{17/3}}, \tag{3.134}$$

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{u'^2}{k_e}\left[1 + \left(\frac{k_1}{k_e}\right)^2\right]^{-5/6} \tag{3.135}$$

и

$$f(x_1, t) = \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (k_e x_1)^{1/3} K_{1/3}(k_e x_1). \tag{3.136}$$

Для коэффициента поперечной корреляции имеем

$$g(x_1, t) = \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (k_e x_1)^{1/3}\left[K_{1/3}(k_e x_1) - \frac{k_e x_1}{2} K_{-2/3}(k_e x_1)\right]. \tag{3.137}$$

При малых значениях $k_e x_1$ соотношение (3.136) упрощается:

$$f(x_1, t) \approx 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{k_e x_1}{2}\right)^{2/3},$$

а формула (3.137) принимает вид

$$g(x_1, t) \approx 1 - \frac{4}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{k_e x_1}{2}\right)^{2/3}.$$

Из сравнения соотношения для $f(x_1, t)$ с выражением (3.133) следует, что

$$k_e = \frac{1}{l_e} = \text{численный коэффициент} \times \frac{\varepsilon}{u'^3}.$$

Вычисление этого численного коэффициента можно произвести путем сравнения выражения (3.134) для больших значений $k/k_e$ с формулой (3.126). Из соотношения (3.134) для больших $k/k_e$ получаем

$$E(k, t) = \frac{55}{9}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{u'^2}{k_e}\left(\frac{k}{k_e}\right)^{-5/3},$$

так что, согласно (3.126),

$$k_e = \frac{8}{9\alpha}\left[\frac{9}{55}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\right]^{3/2}\frac{\varepsilon}{u'^3} = \frac{0{,}51}{\alpha}\frac{\varepsilon}{u'^3}.$$

Выше упоминалось о том, что $l_e$ — величина такого же порядка, как и интегральный масштаб $\Lambda_f$. Тогда этот масштаб [см. (3.74)] легко можно получить из выражения для $E_1(k_1, t)$, откуда, согласно формуле (3.134), имеем

$$\Lambda_f(t) = \frac{\pi}{2u'^2}E_1(0, t) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{1}{k_e} \approx \frac{0{,}75}{k_e} = 0{,}75 l_e. \quad (3.138)$$

Мы рассмотрели различные предположения, на основании которых удается полностью или частично решить уравнение для динамической функции энергетического спектра. В нескольких случаях к тому же было показано, как можно вычислить соответствующие корреляционные функции. Но полученные таким образом величины полностью зависят от справедливости принятых предположений. Отсюда вытекает необходимость экспериментальной проверки сделанных предположений. Однако непосредственную проверку предположений о связи между функциями спектрального переноса $F(k, t)$ и энергетического спектра $E(k, t)$ осуществить очень трудно. Применяемый до сих пор метод является косвенным и состоит в сравнении либо вычисленного энергетического спектра, либо вычисленных

корреляционных функций с соответствующими экспериментально определенными величинами. В главе 1 уже говорилось, что корреляционные функции поддаются более точному экспериментальному определению в диапазоне высоких значений волновых чисел. Это следует помнить при интерпретации результатов измерений. Но, помимо вопроса о точности измерений, важное значение имеет еще и тот факт, что корреляционные функции, определенные путем интегрирования из соответствующих энергетических спектров, весьма слабо зависят от положенных в основу расчета предположений, особенно из-за наличия традиционной эмпирической постоянной — например, универсальной постоянной $\alpha$, — используемой при различных предположениях относительно $\int_0^k F(k, t)\,dk$. Следовательно, удовлетворительное согласие между расчетными и измеренными значениями корреляционных функций еще не является адекватным доказательством справедливости того или иного предположения, положенного в основу расчета.

Праудмен [18] сделал попытку проверить предположение Гейзенберга путем подобного сравнения вычисленных и экспериментально определенных функций. Он обнаружил, что численный коэффициент $\alpha$, вообще говоря, не является универсальной постоянной, а, по-видимому, зависит от числа Рейнольдса, хотя эта зависимость при достаточно больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}_\lambda > 30$) и носит весьма слабый характер, по крайней мере в диапазоне малых волновых чисел. Поскольку общая форма корреляционной кривой определяется именно этим диапазоном малых волновых чисел, Праудмен и пришел к выводу о том, что она находится в весьма хорошем соответствии с экспериментальными результатами при $\alpha = 0{,}45$. С другой стороны, сам Гейзенберг предложил величину 0,8. Однако если рассматривать только диапазон больших волновых чисел, то $\alpha$ оказывается функцией как $\mathrm{Re}_\lambda$, так и волнового числа $k$. Праудмен упоминает о неопубликованных результатах Ли, согласно которым для больших волновых чисел $\alpha = 0{,}13$. В конечной стадии вырождения, когда влияние вязкости оказывается преобладающим, величина $\alpha$, как известно, может достигать значения 0,0005. Очевидно, что этот случай является слишком дальней экстраполяцией теории Гейзенберга, в которой числа Рейнольдса в области равновесия, включая инерционную подобласть, предполагаются достаточно большими, и поэтому вряд ли эта экстраполяция может быть справедлива. Однако, как показал недавно Райд [49] в дискуссии по статье Праудмена, отношение $S/\alpha$ коэффициента асимметрии $S$ производной $\partial u_1/\partial x$ к величине $\alpha$ при увеличении числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda$ от нуля до бесконечности изменяется в довольно узком интервале, от 0,78 до 1,52. Из сопоставления этого результата с экспериментально

определенными значениями $S$ при различных числах Рейнольдса был сделан вывод о том, что величина $\alpha$ должна изменяться в пределах от 0,62 до 0,20. Таким образом, предложенное Праудменом значение $\alpha = 0{,}45$ является вполне удовлетворительным средним значением между этими двумя крайними величинами. Объяснением, почему Праудмен получил непомерно низкие значения $\alpha$ для области больших

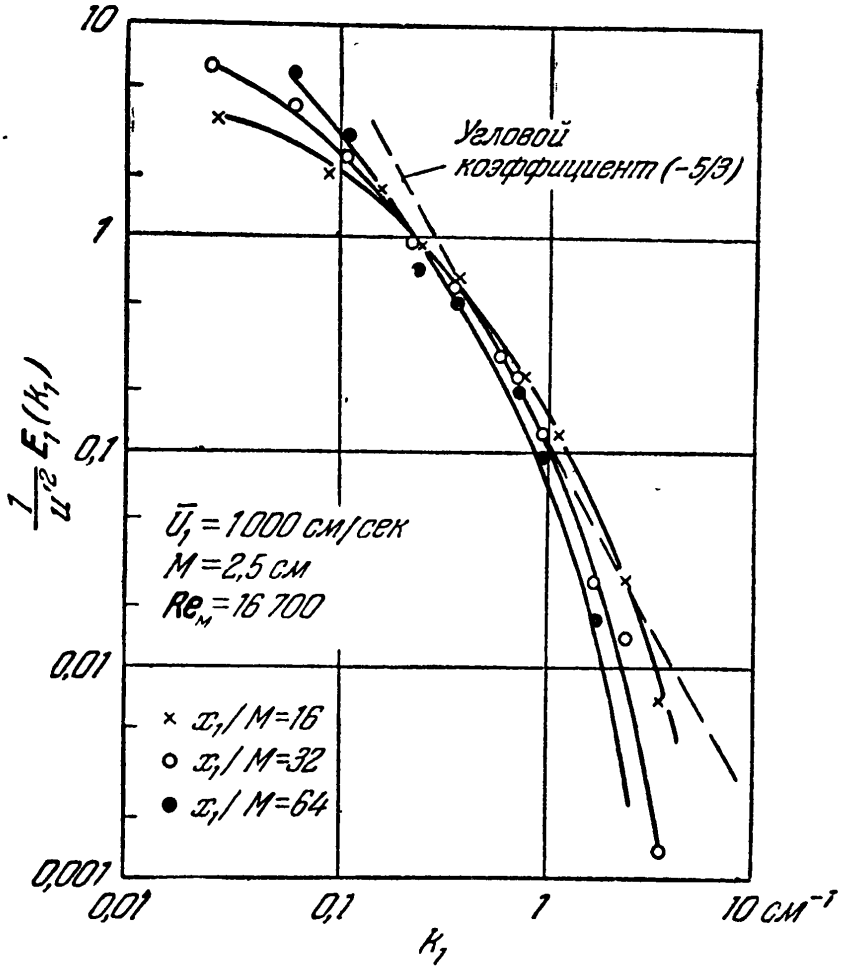



Рис. 3.12. Сравнение одномерного спектра $E_1(k_1)$ со спектральным законом «$-5/3$» Колмогорова [19].

волновых чисел, в которой влияние вязкости является преобладающим, может служить несостоятельность гипотезы Гейзенберга, о чем речь шла выше.

Сато [19] произвел измерения одномерного спектра $E_1(k_1, t)$ на расстояниях 40, 80 и 160 *см* вниз по течению от решетки с квадратными ячейками (размер ячейки $M = 2{,}5$ *см*, диаметр стержней $d = 0{,}5$ *см*) при скорости потока $\bar{U}_1 = 10$ *м/сек*; в этих опытах $\mathrm{Re}_M = \bar{U}_1 M/\nu \approx 17\,000$, а число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda = u'\lambda_g/\nu$ оставалось почти постоянным в процессе вырождения, и его приближенное значение в трех указанных положениях было равно 60. Результаты, полученные Сато, представлены на рис. 3.12. Они показывают, что

спектр Колмогорова $E_1(k_1) \sim k_1^{-5/3}$ справедлив, вообще говоря, лишь в весьма ограниченном диапазоне волновых чисел.

Такой же вывод получается и из аналогичных измерений, выполненных Липманом [20] при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_M$, отнесенном к размеру ячейки решетки, порядка $10^4$. В этом случае аппроксимация экспериментально определенного одномерного спектра спектральным законом Колмогорова тоже оказывается возможной лишь в очень узком диапазоне волновых чисел. Липман, кроме того, показал, что, в отличие от неудовлетворительной аппроксимации с помощью спектрального закона Колмогорова, более высокая степень приближения

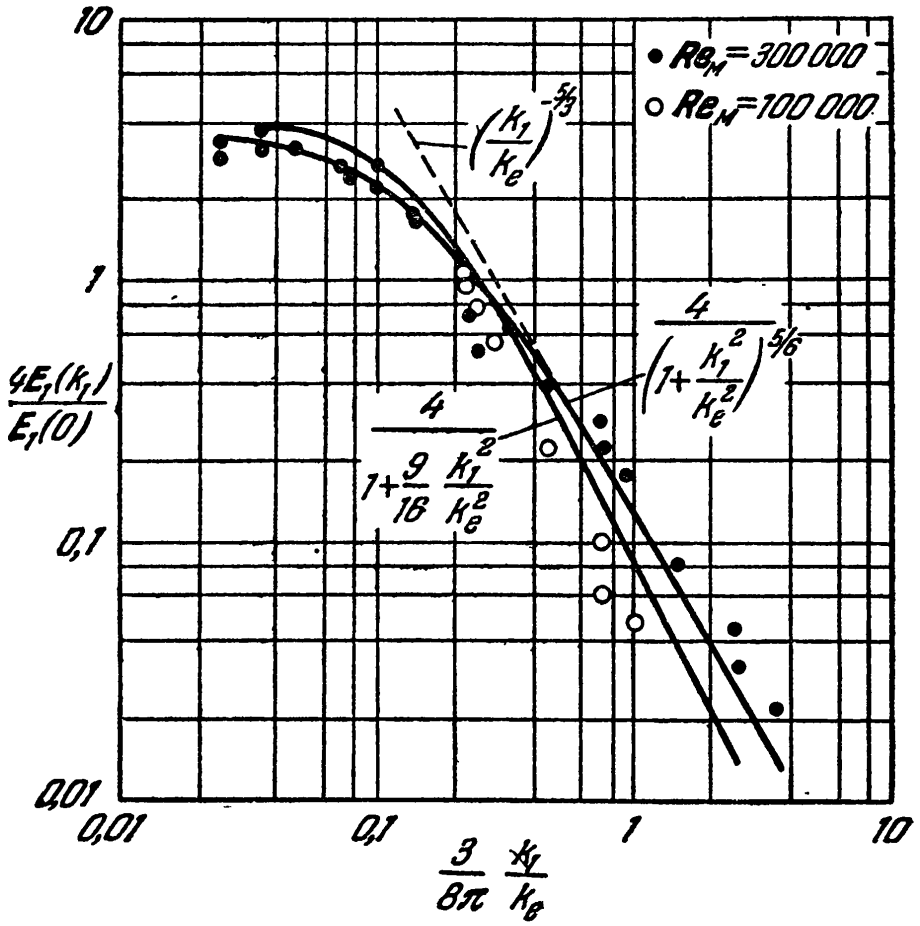



Рис. 3.13. Сравнение измеренного и вычисленного спектра $E_1(k_1)$ [23].

получается почти во всем диапазоне обследованных на опыте волновых чисел при использовании эмпирического соотношения [см. уравнение (1.95) или § 3.4]

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\pi} u'^2 \frac{\Lambda_f}{1 + \Lambda_f^2 k_1^2} = \frac{E_1(0, t)}{1 + \Lambda_f^2 k_1^2}. \qquad (3.139)$$

Однако при бóльших числах Рейнольдса, например $\mathrm{Re}_M = 3 \cdot 10^5$, в области более высоких значений волновых чисел экспериментального диапазона получается намного лучшее согласие со спектром Колмогорова. Это показано на рис. 3.13, где представлена также кривая,

соответствующая интерполяционной формуле Кармана (3.135). На том же рисунке приведены данные и для случая $\mathrm{Re}_M = 10^5$. Для этого, несколько меньшего числа Рейнольдса согласие оказывается менее удовлетворительным; в то же время эмпирическое соотношение (3.139) в этой области несколько лучше согласуется с опытом. Экспериментальные данные о соответствующей корреляционной функции были использованы Карманом [9] для сравнения с теоретическим коэффициентом поперечной корреляции, определяемым формулой (3.137). При этом было получено удовлетворительное соответствие, за исключением, быть может, очень больших значений $k_e x_1$ (см. рис. 3.14). Но, между прочим, то же самое можно сказать и

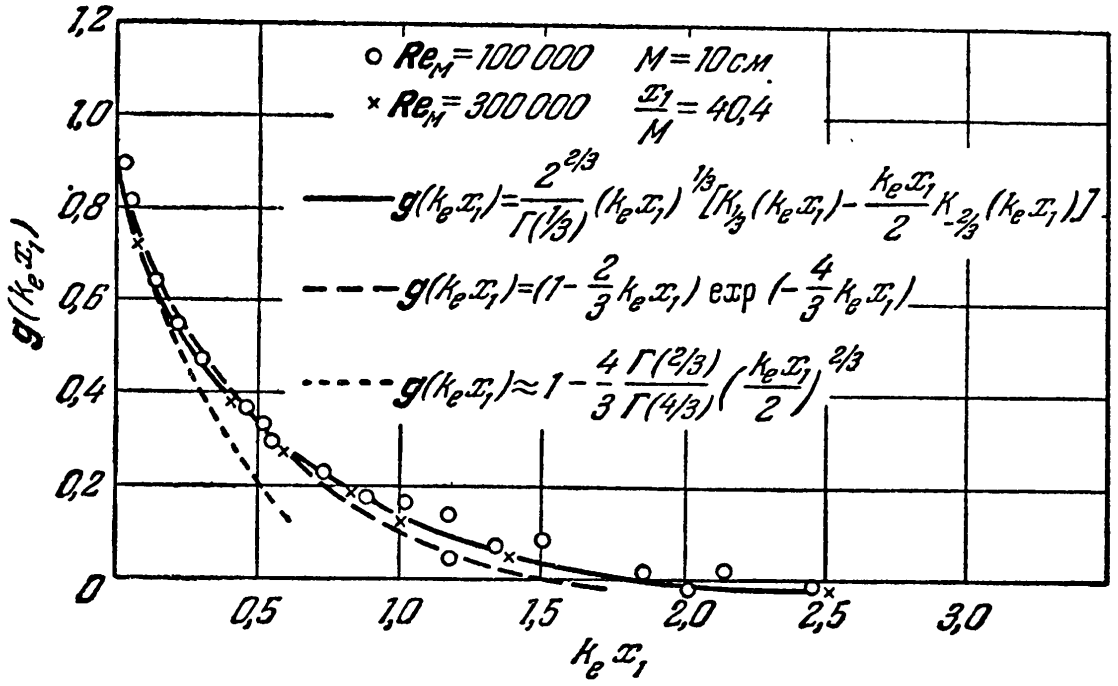



Рис. 3.14. Сравнение измеренной и вычисленной поперечной корреляции скорости $g(k_e x_1)$ [23].

о расчетной корреляционной кривой, соответствующей энергетическому спектру (3.139).

Неудовлетворительное согласие между измерениями энергетического спектра и теоретическим спектром Колмогорова при $\mathrm{Re}_M < 10^5$ может вызвать следующий вопрос: какова минимальная величина $\mathrm{Re}_M$ или, скорее, $\mathrm{Re}_\lambda$, необходимая для существования достаточно протяженной инерционной подобласти? Выше уже упоминалось о том, что условие существования равновесной области определяется неравенством $\mathrm{Re}_\lambda^{3/2} \gg 1$ [см. (3.111)], а условие существования инерционной подобласти записывается в виде $\mathrm{Re}_\lambda^{3/4} \gg 1$ [см. (3.114)]. Но то, чего мы сейчас добиваемся, — это более точное количественное определение порядка величин. Это можно сделать путем беглой оценки величин $\mathrm{Re}_\lambda$, наблюдавшихся в лабораторных опытах. В общем случае они ненамного превышают 100.

Стюарт и Таунсенд [17] обнаружили, что в подобных опытах спектр Колмогорова может существовать, самое большее, в диапазоне $k/k_d > 0{,}6$; этот факт находится в сильном противоречии с требованием, чтобы величина $k/k_d$ была значительно меньше единицы. Стюарт и Таунсенд показали далее, что если для инерционной подобласти по меньшей мере должно быть $k/k_d < 0{,}1$, то по меньшей мере $\mathsf{Re}_\lambda > 1500$, а $\mathsf{Re}_M$ должно иметь порядок $10^6$.

Вывод отсюда состоит в том, что с помощью лабораторных опытов едва ли окажется возможным всесторонне проверить справедливость теорий, основанных на предположении о полном равновесии, так как числа Рейнольдса в подобных экспериментах не могут быть сделаны достаточно большими.

## § 3.6. Вырождение изотропной турбулентности

В предыдущих параграфах при рассмотрении динамических уравнений для корреляций скорости и для энергетического спектра было показано, что эти корреляции и спектры изменяются по времени и что турбулентность вырождается, если для поддержания ее не имеется источника энергии. Как и для любых течений жидкости, одним из важнейших параметров в этом случае является число Рейнольдса. Опять-таки в предыдущих параграфах было показано, что характер турбулентности может существенно изменяться в зависимости от того, велико или мало число Рейнольдса турбулентности.

Известно, что практически изотропную турбулентность обычно создают при помощи решетки, помещенной в равномерном потоке. При достаточно высокой скорости потока и удачном выборе решетки оказывается возможным создать такую турбулентность, которая на определенном небольшом расстоянии вниз по течению от решетки становится почти изотропной и имеет большое число Рейнольдса; но, как уже упоминалось, в лабораторных опытах пока еще не удалось получить такие большие значения этого числа Рейнольдса, которые были бы желательны для проверки некоторых характерных особенностей, связанных с большими числами Рейнольдса турбулентности. Вследствие вырождения турбулентности это число Рейнольдса с увеличением расстояния от решетки будет уменьшаться, и, соответственно этому, будет изменяться и характер турбулентности.

Таунсендом [22, 21, 7] было произведено много опытов по исследованию вырождения изотропной турбулентности, созданной при помощи решеток. Основываясь на результатах этих измерений, Бэтчелор [21] пришел к выводу, что в действительности можно выделить три различные стадии вырождения: начальную стадию, конечную стадию и переходную стадию. Здесь понятие стадии рассматривается в отношении времени, но в случае турбулентности за решетками оно применяется к последовательно расположенным зонам вниз по течению от решетки.

Насколько долго длится начальная стадия, сказать трудно, так как переход к другим стадиям происходит весьма постепенно, а также потому, что этот переход сильно зависит от начальной величины числа Рейнольдса. Упоминавшиеся выше экспериментальные данные Таунсенда указывают, по-видимому, на то, что турбулентность можно считать находящейся в начальной стадии вплоть до $x_1/M = 100 \div 150$; однако результаты, полученные другими экспериментаторами, показали, что существенные отклонения от закона вырождения для начальной стадии наблюдаются даже на более коротких расстояниях. К обсуждению этого вопроса мы снова возвратимся несколько ниже.

Опыты Таунсенда показали, что конечная стадия соответствует, по-видимому, расстояниям больше $500M$. Конечно, эта величина тоже должна зависеть от начального числа Рейнольдса турбулентности. В опытах Таунсенда число Рейнольдса $\mathrm{Re}_M = \overline{U}_1 M/\nu$ составляло около 650.

Процесс вырождения в начальной стадии определяется, главным образом, распадом энергосодержащих вихрей; в конечной стадии влияние вязкости преобладает над инерционными эффектами.

Следовательно, в конечной стадии, когда число Рейнольдса турбулентности очень мало, инерционными членами в динамических уравнениях можно пренебречь; тогда, как уже было показано, можно получить точное решение этих уравнений. Они приводят к функции Гаусса для коэффициента двойной корреляции [уравнение (3.45)]

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right)$$

и к подобному уравнению для спектральной функции [уравнение (3.77)]

$$E(k, t) = \text{const}\, k^4 \exp(-2\nu k^2 t).$$

Закон вырождения интенсивности турбулентности выражается соотношением [уравнение (3.43)]

$$u'^2 = \text{const}\, t^{-5/2}.$$

В § 3.4 было показано, что масштабы длины $\lambda_g$ и $\Lambda_f$ изменяются пропорционально величине $\sqrt{\nu t}$, а их отношение остается при этом постоянным. Число Рейнольдса турбулентности в процессе вырождения не сохраняет постоянного значения, а изменяется пропорционально $t^{-3/4}$.

Решения (3.45) и (3.77) показывают, что форма кривых $f(r, t)$ и $E(k, t)/E(k, 0)$ в процессе вырождения остается подобной, если $r$ и $k$ относить к единице длины $\sqrt{\nu t}$, так как величины

$$f(r, t) \quad \text{и} \quad \frac{E(k, t)}{E(k, 0)}$$

зависят соответственно только от $r/\sqrt{\nu t}$ и $k\sqrt{\nu t}$. Пропорциональность масштабов $\lambda_g$ и $\Lambda_f$ величине $\sqrt{\nu t}$ и вытекающее отсюда постоянство их отношения является следствием подобия этих кривых. Максимальное значение $E(k, t)$ получается при $k^2\nu t = 1$ или $k = 1/\sqrt{\nu t}$. Кроме того, в этом случае точно выполняется условие

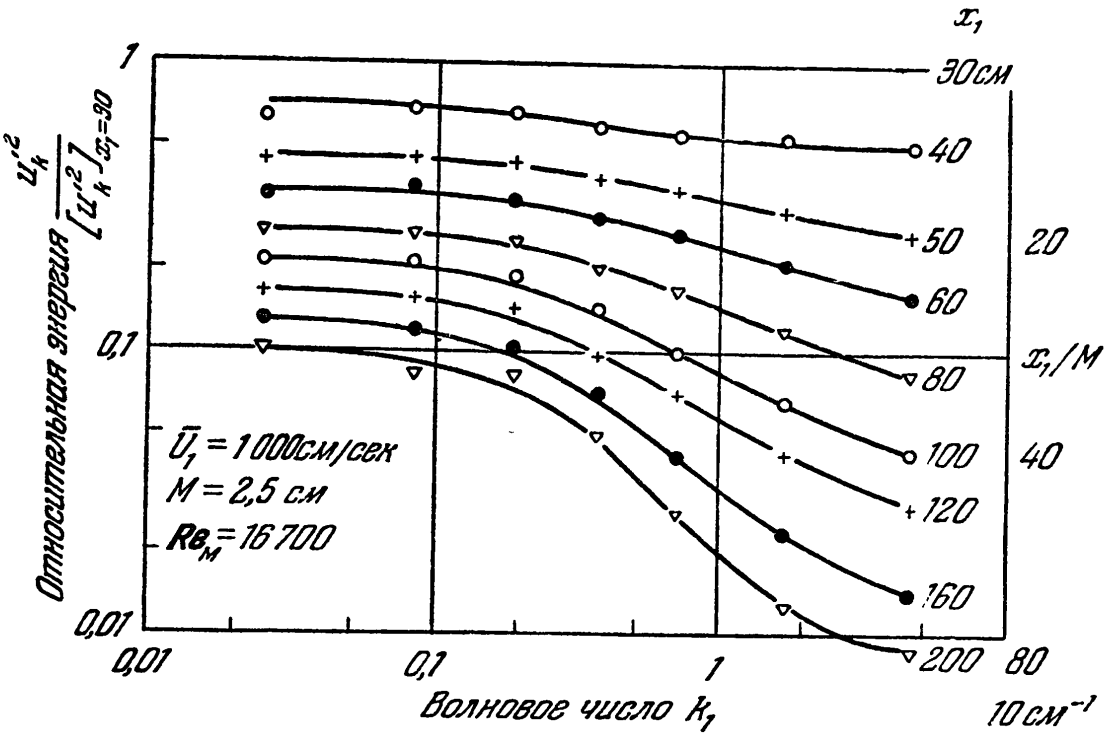



Рис. 3.15. Вырождение энергии компонент спектра [19].

инварианта Лойцянского (3.39), поскольку при использовании в качестве единицы длины величины $\sqrt{\nu t}$ это условие дает

$$u'^2 (\sqrt{\nu t})^5 = \text{const},$$

что в точности совпадает с законом вырождения (3.43).

Естественно, что кривые корреляции и энергетического спектра не будут оставаться подобными, если при их построении не пользоваться единицей длины $\sqrt{\nu t}$. Таким образом, в абсолютных координатах функция $E(k, t)$ по мере возрастания величины волнового числа изменяется быстрее, иными словами, как упоминалось выше, более мелкие вихри вырождаются с большей скоростью.

Это явление возрастания скорости вырождения при увеличении волнового числа не ограничивается только что рассмотренным случаем малых чисел Рейнольдса турбулентности, а является, как это следует из общего динамического уравнения (3.86), общим свойством турбулентности. Это было четко показано Сато [19], который на различных расстояниях от решетки измерил энергию $\overline{u_k^2}$, соответствующую волновому числу $k$ и отнесенную к ее значению в неко-

тором произвольном начальном положении [в данном случае на расстоянии 30 *см* от решетки (см. рис. 3.15)]. Если скорость вырождения выразить в виде степенной зависимости от расстояния до решетки, то в диапазоне больших волновых чисел показатель степени достигает величины $-5/2$, в отличие от степени $-1$ для полной кинетической энергии турбулентности. Следовательно, в диапазоне больших волновых чисел интенсивность «вязкого» вырождения (3.43) достигается значительно раньше. Изменение энергетического спектра во времени происходит таким образом, что в области $k \to 0$ этот спектр с возрастанием времени становится более постоянным, но в области больших волновых чисел интенсивность вырождения с повышением $k$ начинает увеличиваться. Картина изменения энергетического спектра во времени изображена на рис. 3.16.

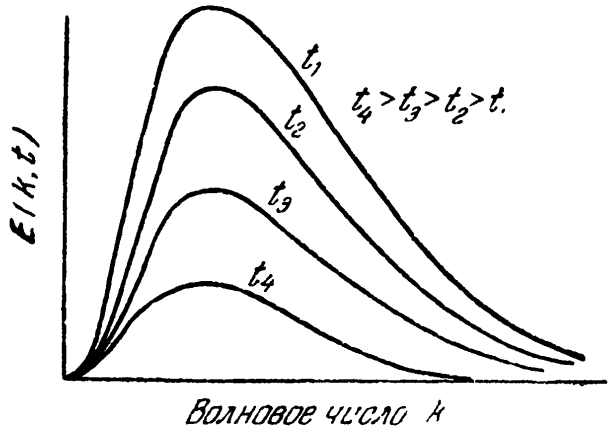



Рис. 3.16. Изменение энергетического спектра во времени.

В случае очень малых чисел Рейнольдса, когда влияние вязкости является преобладающим, изменение энергетического спектра таково, что если в качестве характерной длины выбрать величину $\sqrt{\nu t}$, то энергетический спектр, представленный в зависимости от $k\sqrt{\nu t}$, сохраняет подобие. Логично попытаться выяснить, не останется ли энергетический спектр, если выбрать подходящую характерную длину, подобным или автомодельным также и при более высоких числах Рейнольдса. Однако в предыдущем параграфе было показано, что характерная длина для различных диапазонов волновых чисел неодинакова (см. таблицу 3.1). Для равновесной области имеем $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, причем эта же характерная длина может быть выбрана и для области энергосодержащих вихрей, хотя в этом последнем случае можно использовать также и длину $\sqrt{\nu t}$, поскольку выполняется соотношение $\varepsilon t^2/\nu = \text{const}$. Тогда для областей, соответствующих меньшим волновым числам, имеем следующие характерные длины: $(\epsilon^3/\varepsilon)^{1/4}$ и $(I/\epsilon^2)^{1/3}$. Отсюда следует, что, по-видимому, невозможно выбрать единственную характерную длину для всего диапазона волновых чисел, которая позволила бы сделать энергетический спектр автомодельным в процессе вырождения. Можно лишь предположить, что существует неполная автомодельность, т. е. что автомодельна только некоторая часть энергетического спектра или корреляционной функции. К счастью, эти функции на значительном интервале можно считать автомодельными. Согласно таблице 3.1, это можно сделать для области волновых чисел энергосодержащих

вихрей и области абсолютного равновесия, поскольку они имеют общую характерную длину

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}.$$

Однако известно, что явления в области волновых чисел энергосодержащих вихрей протекают неодинаково с явлениями в области более высоких волновых чисел. Это выражается, помимо всего прочего, еще и тем фактом, что в первой области должно выполняться условие $\varepsilon t^2/\nu = \text{const}$, тогда как для равновесной области это условие вовсе не обязательно. Исходя из этого и желая использовать предположение об автомодельности в диапазоне волновых чисел, включающем в себя основную часть области энергосодержащих вихрей, Гейзенберг [15] ввел дополнительное предположение о том, что эти вихри должны находиться в квазиравновесии и, стало быть, их можно рассматривать, как если бы они пребывали в равновесии, насколько это допустимо с точки зрения их конечной скорости вырождения.

Предположение об автомодельности в зоне, объединяющей равновесную область и основную часть области энергосодержащих

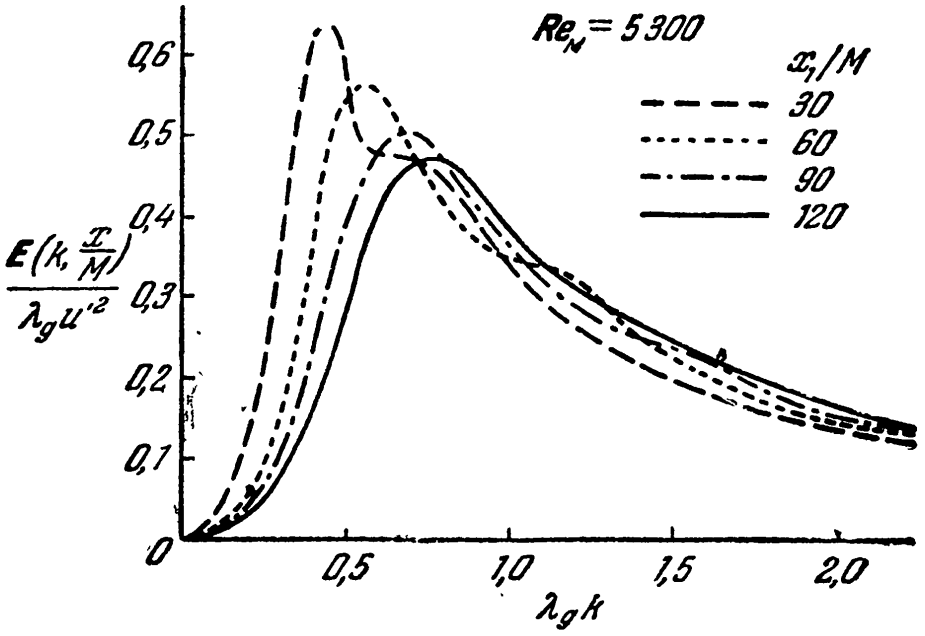



Рис. 3.17. Энергетический спектр в различных стадиях вырождения [17].

вихрей, подтверждается результатами измерений, выполненных Стюартом и Таунсендом [17] при изучении энергетического спектра на различных стадиях вырождения. Эти результаты представлены на рис. 3.17, где в качестве характерной длины вместо $\eta$ взят масштаб диссипации $\lambda_g$; соотношение между $\eta$ и $\lambda_g$ определяется форму-

лой (3.108). Укажем еще, что, согласно таблице 3.1, должно выполняться соотношение

$$E(k, t) = \nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}E^*\left[k\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}\right] = \eta_l v^2 E^*(k\eta).$$

На рис. 3.17 величина $E(k, t)$ нормирована с помощью $\lambda_g u'^2$, а не $\eta_l v^2$, причем связь между $u'$ и $v$ дается формулой (3.107).

На рис. 3.17 наглядно показано, что в диапазоне низких волновых чисел автомодельности не наблюдается. В то же время представляется возможным предположить существование автомодельности в диапазоне низких волновых чисел, выбирая в качестве характерной длины, например, величину $(I/\epsilon^2)^{1/3}$. Но тогда нарушится автомодельность в диапазоне больших волновых чисел.

Первые измерения при изучении процесса вырождения касались интенсивности турбулентности $u'$, которая измерялась на различных расстояниях от решетки.

Из формулы (3.35) или (3.37) при $r = 0$ либо из (3.94) следует, что

$$\frac{d}{dt}u'^2 = -10\nu\frac{u'^2}{\lambda_g^2}. \tag{3.140}$$

Поскольку величина $\lambda_g$ тоже зависит от времени, то одного только этого соотношения недостаточно.

Первое предположение, на котором мы остановимся, состоит в том, что вырождение полной энергии определяется, главным образом, вырождением энергосодержащих вихрей. В этом случае имеем дополнительное соотношение $\varepsilon t^2/\nu = \text{const}$, т. е.

$$\varepsilon = \mathbf{R}\nu t^{-2}. \tag{3.141}$$

Так как $\varepsilon = 15\nu u'^2/\lambda_g^2$, то из формул (3.140) и (3.141) вытекает, что

$$\frac{du'^2}{dt} = -\frac{2}{3}\mathbf{R}\nu t^{-2},$$

откуда после интегрирования имеем

$$u'^2 = \frac{2}{3}\mathbf{R}\nu\frac{1}{t} + B. \tag{3.142}$$

Далее, из соотношений (3.140) и (3.142) получаем формулу для масштаба диссипации $\lambda_g$:

$$\lambda_g^2 = 10\nu t\left(1 + \frac{3}{2}\frac{Bt}{\nu\mathbf{R}}\right) \tag{3.143}$$

и для числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_\lambda$:

$$\mathbf{Re}_\lambda = \left(\frac{20}{3}\mathbf{R} + \frac{20B}{\nu}t + 15\frac{B^2}{\nu^2\mathbf{R}}t^2\right)^{1/2}, \tag{3.144}$$

или, когда $^3/_2 (B/\nu\mathfrak{R})\, t \ll 1$,

$$\mathrm{Re}_\lambda \approx \sqrt{\frac{20}{3}\mathfrak{R}}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{B}{\nu\mathfrak{R}}\, t\right). \tag{3.144a}$$

Очевидно, что если постоянная $B \neq 0$, то решение (3.142) может быть справедливо, в лучшем случае, только для конечного интервала времени, так как в конечном счете вся турбулентность при $t = \infty$ должна выродиться до нуля и, кроме того, соотношение (3.141) для конечной стадии вырождения не выполняется.

Если $B > 0$, то эту постоянную можно было бы интерпретировать как энергию крупных перманентных вихрей. Но тогда из формулы (3.143) следовало бы, что величина $\lambda_g^2$ должна возрастать сильнее, нежели по линейному закону, а число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda$, согласно (3.144), тоже должно увеличиваться по времени. Насколько можно судить по имеющимся экспериментальным данным, дело обстоит как раз наоборот, а именно: если закон возрастания $\lambda_g$ и отличается от линейного, то в противоположную сторону (величина $\lambda_g^2$ в конечной стадии вырождения должна стать равной $4\nu t$), и, далее, если $\mathrm{Re}_\lambda$ и претерпевает изменение по времени, то $\mathrm{Re}_\lambda$ уменьшается ($\mathrm{Re}_\lambda$ в конечной стадии вырождения изменяется пропорционально $t^{-3/4}$). Следовательно, если постоянная $B \neq 0$, то она должна быть отрицательной величиной; в таком случае получается закон вырождения, предложенный Линем [23, 12]. Согласно Карману и Линю [12], отрицательную постоянную можно интерпретировать как отрицательное отклонение энергетического спектра от кривой, соответствующей полной автомодельности, в диапазоне низких волновых чисел. Подобная интерпретация могла бы служить удовлетворительным формальным объяснением, однако с физической точки зрения она является недостаточной. Физический смысл отрицательной постоянной $B$, хотя и очень малой по величине, остается не совсем ясным.

Если положить $B = 0$, то будем иметь

$$u'^2 = \frac{2}{3}\nu\mathfrak{R}t^{-1}, \quad \lambda_g^2 = 10\nu t$$

и

$$\mathrm{Re}_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3}\mathfrak{R}} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon t^2}{\nu} = 0{,}15\,\mathrm{Re}_\lambda^2.$$

Предположение о том, что полное вырождение турбулентности определяется главным образом распадом энергосодержащих вихрей, получило некоторое подтверждение в свете экспериментальных фактов, обнаруженных Бэтчелором [11]. Согласно формуле (3.100), которая согласуется с (3.105), величина $(l_e/u'^2)(du'^2/dt)$ в процессе

вырождения должна оставаться постоянной; в первом приближении это, по-видимому, соответствует данным опытов, которые анализировал Бэтчелор.

Другое предположение состоит в том, что величина $u'^2$ вырождается по некоторому простому степенному закону:

$$u'^2 = Ct^{-n}. \tag{3.145}$$

Тогда из формулы (3.140) следует, что

$$\lambda_g^2 = \frac{10}{n} \nu t \tag{3.146}$$

и

$$\mathrm{Re}_\lambda = \sqrt{\frac{10C}{n\nu}}\, t^{(1-n)/2}. \tag{3.147}$$

Так как $u'^2$ и $\lambda_g^2$ измеряются независимо друг от друга, то мы, следовательно, располагаем двумя независимыми способами определения величины $n$.

До сих пор мы пока не воспользовались предположением о частичной автомодельности корреляционной функции или функции энергетического спектра. Выше уже упоминалось, что можно либо ввести предположение об автомодельности спектральной функции в диапазоне волновых чисел $k \gg k_e$, которое соответствует допущению об автомодельности корреляционной функции при $r < r_1$, либо принять автомодельность спектральной функции в диапазоне волновых чисел $k < k_e$, что соответствует предположению об автомодельности корреляционной функции при $r > r_1$.

Экспериментальное исследование спектра турбулентности за двумя последовательно расположенными решетками с различным шагом, проведенное Цуджи [51], показало, что автомодельность энергетического спектра наблюдается лишь в диапазоне больших волновых чисел, а при малых волновых числах подобие, в силу зависимости характеристик турбулентности от начальных условий, отсутствует. Всякие наложенные возмущения, которые могли бы нарушить автомодельность спектра, в диапазоне больших волновых чисел быстро затухают.

Если в диапазоне волновых чисел $k > k_e$ автомодельность спектральной функции возможна, то число Рейнольдса должно быть большим, и тогда, следовательно, имеется существенный диапазон волновых чисел, где вихри находятся в статистическом равновесии. В этом случае в качестве характерной длины можно было бы взять величину $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. Однако вместо нее мы выберем величину $\lambda_g$, так как это представляется более удобным. Кроме того, в качестве характерной скорости по той же причине возьмем $u'$.

Введем в динамическое уравнение Кармана — Хауэрта (3.36) безразмерную величину $\psi = r/\lambda_g$, помня при этом, что $\lambda_g$ зависит от времени. Предполагая, что $f(r, t)$ и $k(r, t)$ при $r < r_1$, где $r_1$ достаточно велико, являются функциями только $\psi$, получаем

$$f\frac{du'^2}{dt} - u'^2\frac{1}{\lambda_g}\frac{d\lambda_g}{dt}\psi\frac{df}{d\psi} - \frac{u'^3}{\lambda_g}\frac{1}{\psi^4}\frac{d}{d\psi}(\psi^4 k) = 2\nu\frac{u'^2}{\lambda_g^2}\frac{1}{\psi^4}\frac{d}{d\psi}\left(\psi^4\frac{df}{d\psi}\right),$$

или, учитывая формулу (3.140),

$$-10\nu\frac{u'^2}{\lambda_g^2}f - u'^2\frac{1}{\lambda_g}\frac{d\lambda_g}{dt}\psi\frac{df}{d\psi} - \frac{u'^3}{\lambda_g}\frac{1}{\psi^4}\frac{d}{d\psi}(\psi^4 k) = 2\nu\frac{u'^2}{\lambda_g^2}\frac{1}{\psi^4}\frac{d}{d\psi}\left(\psi^4\frac{df}{d\psi}\right),$$

или

$$10f + \frac{\lambda_g}{\nu}\frac{d\lambda_g}{dt}\psi\frac{df}{d\psi} + \frac{u'\lambda_g}{\nu}\frac{1}{\psi^4}\frac{d}{d\psi}(\psi^4 k) + 2\frac{1}{\psi^4}\frac{d}{d\psi}\left(\psi^4\frac{df}{d\psi}\right) = 0.$$

Это соотношение может выполняться для всех значений $\psi$ только в том случае, когда все коэффициенты пропорциональны друг другу. Следовательно,

$$\frac{\lambda_g}{\nu}\frac{d\lambda_g}{dt} = \text{const} \tag{3.148}$$

и

$$\frac{u'\lambda_g}{\nu} = \mathrm{Re}_\lambda = \text{const}. \tag{3.149}$$

Уравнения (3.140) и (3.148) могут быть решены относительно $\lambda_g^2$ и $u'^2$. Эти решения, подчиненные условию (3.149), записываются так:

$$\lambda_g^2 = 10\nu t + C = 10\nu(t - t_0), \tag{3.150}$$

$$u'^2 = \frac{\text{const}}{C + 10\nu t} = \frac{\text{const}}{10\nu(t - t_0)}; \tag{3.151}$$

при этом постоянная $C$ принята равной $-10\nu t_0$.

Эти решения согласуются с уравнениями (3.145) — (3.147) при условии, что $n = 1$, и с уравнениями (3.142) — (3.144) при условии, что $B = 0$.

Гейзенберг [15] сделал попытку получить решение динамического уравнения для энергетического спектра $E(k, t)$ в диапазоне больших волновых чисел, включая область энергосодержащих вихрей. Он принял предположения, во-первых, о «квази»-равновесии этих вихрей и, во-вторых, об автомодельности энергетического спектра. Так как Гейзенберг рассматривал диапазон больших волновых чисел, то использованное им исходное динамическое уравнение записывается

в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_k^\infty E(k, t)\,dk = \int_k^\infty F(k, t)\,dk - 2\nu\int_k^\infty k^2 E(k, t)\,dk.$$

В рассматриваемом диапазоне волновых чисел величины $\varepsilon$, $\nu$ и $t$ являются фундаментальными параметрами, поэтому число Рейнольдса турбулентности должно оставаться постоянным, ибо только два из этих трех параметров могут быть независимыми. Если в качестве независимых фундаментальных параметров выбрать $\nu$ и $t$, то спектральные функции $E(k, t)$ и $F(k, t)$ должны иметь вид (см. таблицу 3.1)

$$E(k, t) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t}}\,E^*\left(k\sqrt{\nu t}\right) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t}}\,E^*(\chi),$$

$$F(k, t) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t^3}}\,F^*\left(k\sqrt{\nu t}\right) = \sqrt{\frac{\nu^3}{t^3}}\,F^*(\chi),$$

где $E^*(\chi)$ и $F^*(\chi)$ — универсальные функции от $\chi = k\sqrt{\nu t}$ и постоянного числа Рейнольдса турбулентности.

Далее, Гейзенберг для $\int_\chi^\infty F^*(\chi)\,d\chi$ принял соотношение (3.121):

$$\int_\chi^\infty F^*(\chi)\,d\chi = -\int_0^\chi F^*(\chi)\,d\chi = 2\alpha\int_\chi^\infty \sqrt{\frac{E^*(\chi)}{\chi^3}}\,d\chi\int_0^\chi \chi^2 E^*(\chi)\,d\chi.$$

Ни Гейзенбергу, ни, например, Чандрасекару [16], Праудмену [18] или Ротта [24] решения в замкнутой форме получить не удалось. Гейзенберг показал, что все решения для $E^*(\chi)$ линейны по $\chi$ при $\chi \to 0$ и что в случае больших значений числа Рейнольдса решение при больших величинах $\chi$ асимптотически стремится к зависимости $\chi^{-5/3}$. Чандрасекар, Праудмен и Ротта дали численные решения уравнения для $E^*(\chi)$ при определенных значениях числа Рейнольдса. Получено семейство кривых, которые при малых величинах $\chi$ удовлетворяют линейным соотношениям

$$E^*(\chi) = 4\chi, \quad \text{когда} \quad \chi \to 0,$$

и

$$E(k, t) = 4\nu^2 k, \quad \text{когда} \quad k \to 0.$$

Для предельного случая бесконечно большого числа Рейнольдса Чандрасекар получил при $\chi \to \infty$

$$E^*(\chi) \sim \left(\frac{8\varepsilon t^2}{9\alpha\nu}\right)^{2/3}\chi^{-5/3} \quad \text{и} \quad E(k, t) \sim \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha}\right)^{2/3} k^{-5/3}.$$

Эти результаты согласуются с выводами, полученными в предыдущем параграфе, за исключением того, что при $k \to 0$ решением является также зависимость $E(k, t) = 4\nu^2 k$, а не $E(k, t) \sim k^4$ и что это решение все же содержит вязкость $\nu$; последнее обстоятельство с физической точки зрения оказывается не очень приемлемым и противоречит концепции Кармана и Линя [12] (см. таблицу 3.1). Более того, весьма проблематично, выполняются ли предположения о квазиравновесии и автомодельности в «линейном» диапазоне малых волновых чисел более крупных вихрей. В этой связи можно рекомендовать ознакомиться, например, с экспериментальными результатами Цуджи [51], на которые мы уже ссылались выше.

На основании численных решений для $E(k, t)$ Праудмен [18] вычислил коэффициент продольной корреляции $f(r, t)$, который сравнил затем с экспериментальными данными Таунсенда и Стюарта, положив при этом $\alpha = 0{,}40$. Согласование оказалось весьма удовлетворительным, но при этом следует иметь в виду, что форма корреляционных кривых, как уже отмечалось, очень нечувствительна к предположениям, принятым при решении уравнений турбулентности.

Предположение об автомодельности энергетического спектра в диапазоне больших волновых чисел, включая область энергосодержащих вихрей, которое подразумевает, что число Рейнольдса турбулентности остается в процессе вырождения постоянным, означает также, что отношения различных масштабов, например $\lambda_g/l_e$ [см. (3.109)], $\lambda_g/\Lambda_f$ или $\lambda_g/\Lambda_g$, должны сохраняться постоянными. Тот же результат получается из уравнения Кармана — Хауэрта в предположении о том, что функции $f(r, t)$ и $k(r, t)$ при $r < r_1$, где $r_1$ — достаточно большая величина, зависят только от $\varphi = r/\Lambda_g$; однако $\Lambda_g$ все же остается функцией времени.

При $\varphi = r/\Lambda_g(t)$ уравнение (3.36) записывается так:

$$\Lambda_g \frac{1}{u'^3}\frac{du'^2}{dt} f - \frac{1}{u'}\frac{d\Lambda_g}{dt}\varphi\frac{df}{d\varphi} - \frac{1}{\varphi^4}\frac{d}{d\varphi}(\varphi^4 k) = \frac{2\nu}{u'\Lambda_g}\frac{1}{\varphi^4}\frac{d}{d\varphi}\left(\varphi^4\frac{df}{d\varphi}\right).$$

Это уравнение может быть удовлетворено при любых значениях $\varphi$ лишь в том случае, если его коэффициенты, которые зависят только от времени, имеют постоянные отношения; а так как один из коэффициентов представляет собой численную постоянную, то все они тоже должны быть численными постоянными:

$$\frac{\Lambda_g}{u'^3}\frac{du'^2}{dt} = -2\Lambda_g\frac{d}{dt}\frac{1}{u'} = -2A,$$

$$\frac{1}{u'}\frac{d\Lambda_g}{dt} = B, \quad \frac{u'\Lambda_g}{\nu} = C,$$

Эти соотношения совместны, если только $B = A$. Решения для $u'$ и $\Lambda_g$ имеют вид

$$\frac{1}{u'^2} = \frac{2A}{C\nu} t + \text{const},$$

$$\Lambda_g^2 = C^2\nu^2 \left(\frac{2A}{C\nu} t + \text{const}\right),$$

что снова указывает на линейную зависимость $1/u'^2$ и $\Lambda_g^2$ от $t$. Кроме того, согласно уравнению (3.140),

$$\frac{\lambda_g^2}{\Lambda_g^2} = \frac{5}{AC} = \text{const}.$$

Различные исследователи, рассматривая случай предельно больших чисел Рейнольдса турбулентности, пользовались предположением о том, что вязким членом в динамическом уравнении можно пренебречь. В этом случае величина $\lambda_g$ крайне мала, и ее больше нельзя использовать в качестве характерной длины; следовательно, в качестве такой длины приходится выбрать $l_e$ или $\Lambda_g$. Далее, можно принять, что в диапазоне $r_0 < r < r_1$, где $r_0$ — крайне малая величина, а $r_1$ — наоборот, очень большая, имеет место автомодельность корреляционных кривых.

Тогда получаются те же условия:

$$\Lambda_g \frac{d}{dt}\frac{1}{u'} = A \quad \text{и} \quad \frac{1}{u'}\frac{d\Lambda_g}{dt} = B,$$

но условие $u'\Lambda_g/\nu = \text{const}$ больше не выполняется. Из указанных выше двух условий следует, что

$$\frac{\Lambda_g}{u'} = (A + B)\, t + \text{const}.$$

Обратимся к экспериментальным данным о вырождении изотропной турбулентности. В тридцатых годах различными исследователями было получено большое количество данных о турбулентности, созданной с помощью решеток. К сожалению, не все эксперименты проводились при одинаковых условиях, что особенно касается формы использовавшихся при этом решеток. Применялись решетки с одним или двумя рядами круглых и квадратных стержней, плоских полос (лент) и т. д., с различными размерами ячеек, диаметром или шириной стержней.

Исходя из соображений размерности, можно полагать, что характеристики турбулентности должны зависеть от относительного расстояния $x_1/M$, от отношения размера ячейки к ширине стержня $M/d$, от формы стержней или отверстий, а также от того, имеют ли ячейки форму щели (один ряд стержней) или форму квадрата (два ряда

стержней). По всей вероятности, влияние формы стержней проявляется слабее, нежели влияние прочих параметров.

Характеристики турбулентности логично сопоставить с характеристиками турбулизирующей решетки. Характеристики решетки включают в себя геометрию решетки и ее коэффициент сопротивления, поскольку энергия турбулентности образуется именно за счет работы, совершаемой жидкостью для преодоления этого сопротивления. Исходя из этого, Бэтчелор и Таунсенд [21] предложили следующее соотношение, основанное на «линейном» законе вырождения:

$$\frac{\overline{U}_1^2}{u_1'^2} = \frac{c}{C_D}\left[\frac{x_1}{M} - \left(\frac{x_1}{M}\right)_0\right], \tag{3.152}$$

где $C_D$ — сопротивление, отнесенное к единице площади решетки, а $c$ — постоянная, зависящая от геометрии решетки. На основании многих измерений величины $C_D$ для решеток с квадратными ячейками из круглых стержней было получено следующее соотношение:

$$C_D = \frac{\frac{d}{M}\left(2 - \frac{d}{M}\right)}{\left(1 - \frac{d}{M}\right)^4}$$

и $c \approx 106$.

Для обычно используемых решеток с квадратными ячейками, т. е. решеток с $M/d \approx 5 \div 6$, имеем $c/C_D \approx 135$.

Можно отметить, что при больших значениях $M/d$ параметром длины вместо $M$ становится $d$.

Измерения трех компонент $u_1'^2$, $u_2'^2$ и $u_3'^2$ показали [22], что турбулентность за решеткой с квадратными ячейками становится практически изотропной при $x_1/M = 10 \div 15$. Эта величина в свою очередь тоже должна зависеть от геометрии решетки, особенно от отношения $M/d$. Можно ожидать, что при уменьшении величины $M/d$ изотропность будет достигаться на все более коротких относительных расстояниях, вплоть до некоторого минимального расстояния, пока размер «струй», вытекающих из отверстий решетки, не станет примерно равным ширине стержня, т. е. $M/d \approx 2$. Для сравнения с теориями изотропной турбулентности в случае обычно применяемых решеток с уверенностью можно рассматривать лишь измерения при $x_1/M > 20$, но иногда приходится брать еще более высокие значения $x_1/M$.

Кроме отклонений от изотропности, наблюдаются также отклонения от однородности в плоскостях, перпендикулярных к осредненному течению, которые обусловлены наличием струй и аэродинамического следа за решеткой. Грант и Нисбет [53] наблюдали значительные отклонения от однородности вплоть до $x_1/M = 80$. По их мнению,

эти отклонения являются причиной расхождения результатов измерений различных экспериментаторов, исследовавших начальную стадию процесса вырождения.

В настоящее время по этому вопросу имеются экспериментальные данные, полученные Драйденом и его сотрудниками [26], Холлом [27], Бэтчелором и Таунсендом [7, 21, 22, 11], Бэйнесом и Петерсоном [28], Сато [19], Цуджи [51] и Ван дер Хегге Цийненом [54]. В этих опытах производились измерения величины $u_1'/\bar{U}_1$ на различных расстояниях от решеток, а некоторые исследователи определяли также микромасштаб $\lambda_f$ или $\lambda_g$ и интегральный масштаб $\Lambda_f$ или $\Lambda_g$.

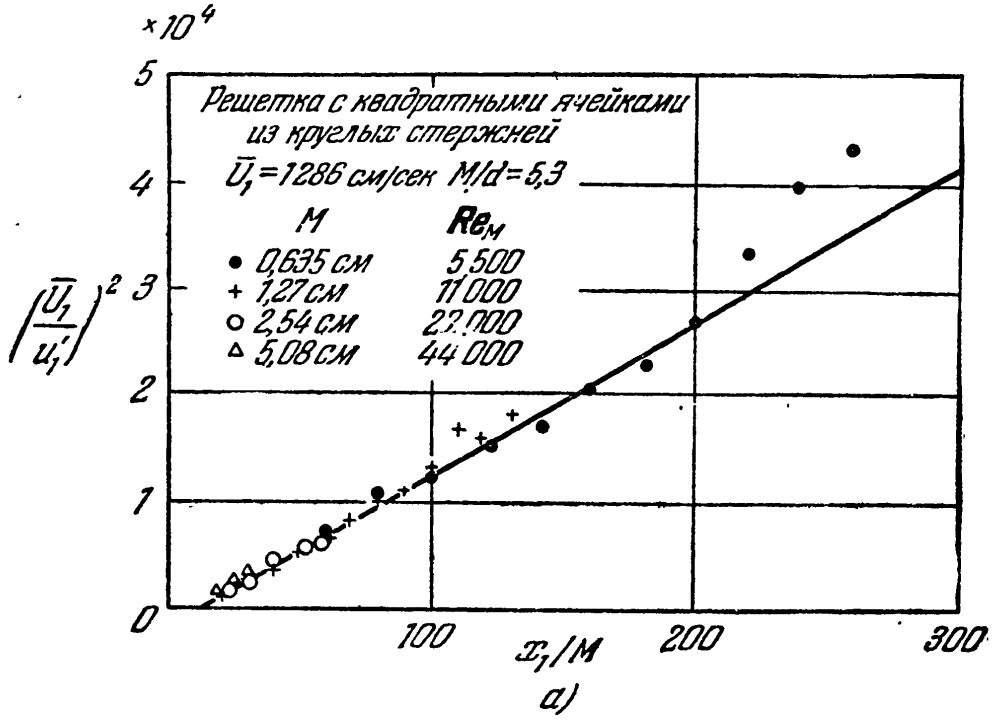
Представляет интерес посмотреть теперь, насколько близко согласуются с действительными кривыми рассмотренные выше законы вырождения. Эти реальные кривые вырождения носят очень монотонный характер, и если для описания процесса вырождения пользоваться простой функцией (3.145), то показатель степени $n$ испытывает постепенное изменение. Кроме того, количество экспериментальных точек для каждой кривой в большинстве случаев слишком мало для надежного и безошибочного построения кривой статистическим методом. Однако все же попытаемся более или менее близко аппроксимировать отдельные участки кривой вырождения одним из теоретических законов вырождения.

Итак, результаты всех этих измерений показывают, что в начальной стадии вырождения величина $(\bar{U}_1/u_1')^2$ почти линейно возрастает с увеличением расстояния от сетки, если число Рейнольдса, отнесенное к размеру ячейки

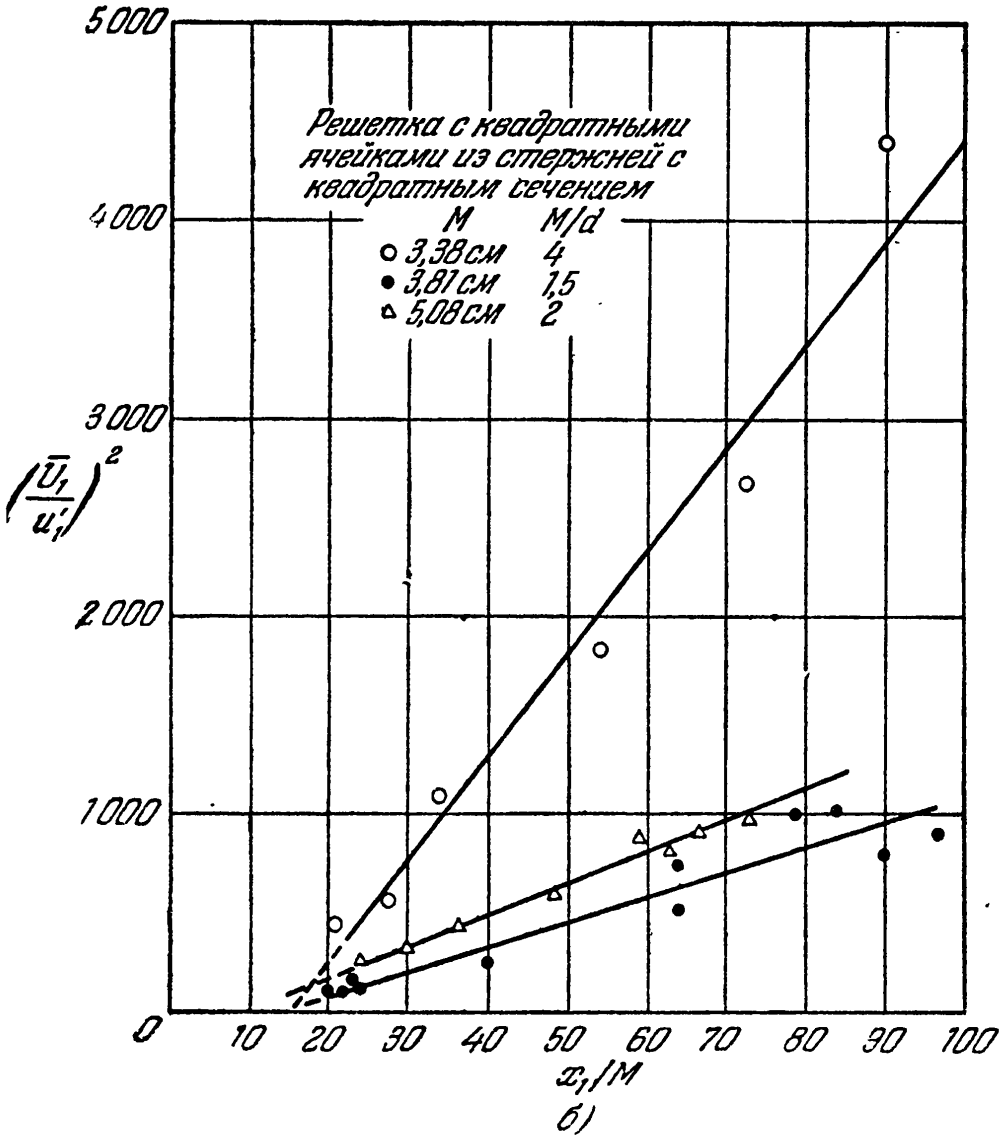
$$\mathrm{Re}_M = \frac{\bar{U}_1 M}{\nu},$$

а следовательно, и начальное число Рейнольдса турбулентности велики и если, по изложенным выше соображениям, исключить из рассмотрения экспериментальные данные для значений $x_1/M$, не превышающих, скажем, 20.

Некоторые из этих экспериментальных данных представлены ниже. На рис. 3.18, *а* и *б* показано вырождение величины $u_1'/\bar{U}_1$ с увеличением $x_1/M$ по опытам, соответственно, Бэтчелора и Таунсенда [21] и Бэйнеса и Петерсона [28]. Результаты, полученные Бэтчелором и Таунсендом, особенно хорошо аппроксимируются линейным законом возрастания величины $(\bar{U}_1/u_1')^2$ в зависимости от $x_1/M$; правда, в одном из исследованных случаев при $x_1/M \approx 200$ наблюдается отклонение от линейной зависимости в сторону большей скорости вырождения. По всей вероятности, на этом расстоянии начиналась переходная стадия вырождения. Ту же линейную зависимость можно обнаружить и по результатам опытов Цуджи и других исследователей, хотя несколько больший разброс экспериментальных точек определенно дает




а)




б)

Рис. 3.18. Вырождение $u_1'/\bar{U}_1$ вниз по потоку от решетки: *а*) по Бэтчелору и Таунсенду [21]; *б*) по Бэйнесу и Петерсону [28].

возможность аппроксимировать опытные данные и кривыми, отличными от линейного закона. Расстояние от решетки до воображаемого начала координат, для которого $\overline{U}_1/u_1' = 0$, по-видимому, возрастает с увеличением $M/d$; для решеток с $M/d = 4 \div 5$ воображаемое начало отсчета находится при $(x_1/M)_0 \approx 10$. Угол наклона прямых линий в координатах $(\overline{U}_1/u_1')^2 - x_1/M$ для различных значений $M/d$ неодинаков, как это и должно быть согласно уравнению (3.152).

Бэтчелор и Таунсенд [7] провели также измерения при малых числах Рейнольдса (отнесенных к размеру ячеек решетки), с тем

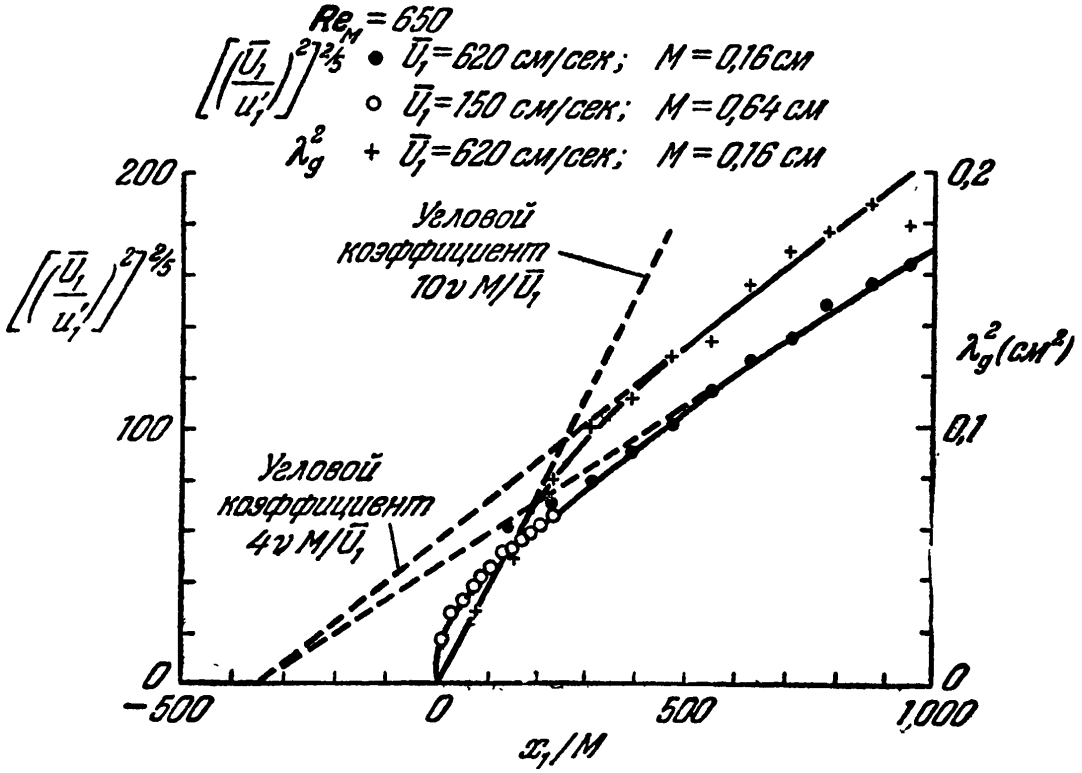



Рис. 3.19. Вырождение $u_1'/\overline{U}_1$ в конечной стадии [7].

чтобы исследовать конечную стадию вырождения, в которой, согласно теории, величина $(\overline{U}_1/u_1')^2$ должна изменяться пропорционально $t^{5/2}$, а $\lambda_g^2 = 4\nu t$. Результаты этих измерений представлены на рис. 3.19. Они показывают, что при малых начальных числах Рейнольдса конечная стадия вырождения наступает лишь на расстояниях, превышающих $x_1/M = 600$.

На рис. 3.20 изображена зависимость $\lambda_g^2 \overline{U}_1/10\nu M$ от $x_1/M$. Согласно соотношению (3.150), проведенные здесь прямые линии должны иметь наклон в 45°. Экспериментальные данные подтверждают это; отсюда можно сделать вывод, что [см. уравнения (3.146) и (3.145)] в начальной стадии действительно наблюдается линейный закон вырождения величины $(\overline{U}_1/u_1')^2$ и что опыт указывает на существование

отличного от нуля значения постоянной $B$ в формуле (3.143), которая должна быть не очень мала и не отрицательна. Кроме того, можно заметить, что и в этом случае действительное начало координат для линий, соответствующих решеткам, для которых величина $M/d$ лежит в пределах от 4 до 5, находится вблизи $x_1/M \approx 10$.

Так как в начальной стадии вырождения величина $(\overline{U}_1/u_1')^2$, как и $\lambda_g^2$, изменяется пропорционально $t$, число Рейнольдса турбулентности $\mathrm{Re}_\lambda$ на протяжении этой стадии остается постоянным.

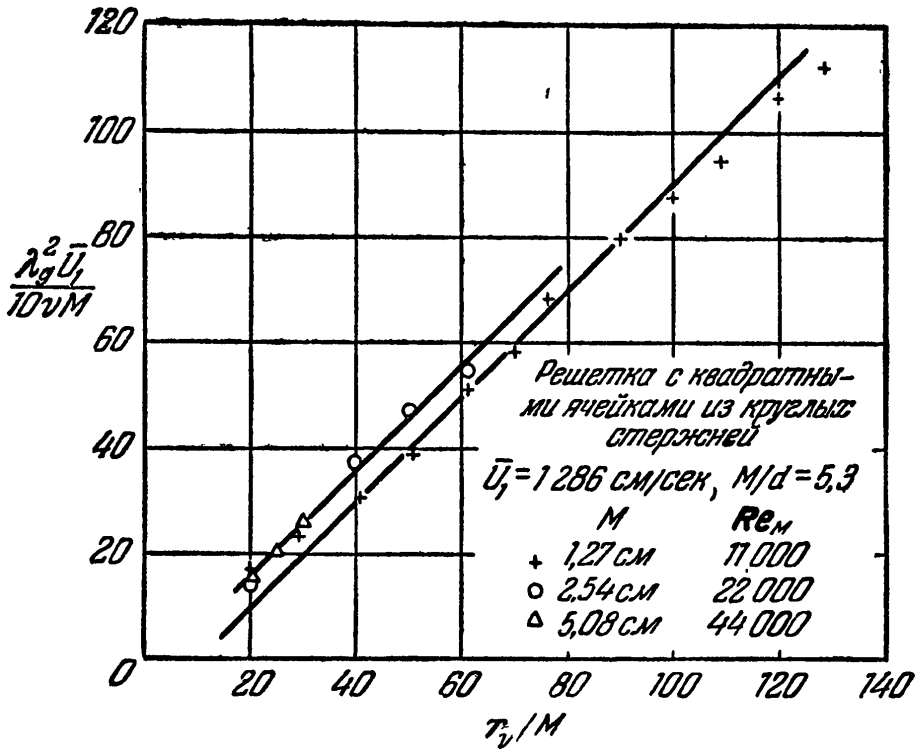



Рис. 3.20. Увеличение $\lambda_g$ с расстоянием вниз по потоку от решетки [21].

Из всех этих результатов можно сделать вывод, что в рассмотренных опытах ход вырождения, описываемый протеканием зависимостей $\overline{U}_1/u_1'$ и $\lambda_g$ от времени, соответствует определенной степени приближения к гипотезе о квазиравновесии и автомодельности в диапазоне больших волновых чисел, включая энергосодержащие вихри. Это противоречит тому факту, что имевшие место во всех этих опытах значения $\mathrm{Re}_\lambda$ были значительно ниже точных значений, необходимых для установления статистического равновесия турбулентности.

Этот вывод, по-видимому, находится в противоречии с результатами, перечисленными в конце предыдущего параграфа. Однако этим подтверждается только то, что ход изменения относительной интенсивности турбулентности и различных ее масштабов является слишком грубой характеристикой действительного развития структуры

турбулентности, которое значительно лучше передается, например, точной формой энергетического спектра или некоторыми безразмерными отношениями различных производных высшего порядка от турбулентной пульсации скорости [30].

## § 3.7. Скалярное поле при изотропной турбулентности

Попытаемся теперь распространить анализ, проведенный в предыдущих параграфах, на тот случай, когда изменяющаяся величина является не вектором (как скорость или импульс), а скаляром, как, например, температура, или энтальпия, либо концентрация смешиваемых жидкостей. Изучение развития такого скалярного поля, наряду с анализом поля скорости, несомненно, представляет интерес, так как оно может дать результаты, которые послужат основой для исследования процессов перемешивания.

В отличие от случая изотропного поля турбулентных пульсаций скорости, изучение соответствующего скалярного поля лишь недавно было предпринято немногими исследователями. Первыми публикациями по этому вопросу являются, видимо, работы советских ученых [31, 32]; вслед за ними появились статьи Корсина [33, 34]. Все эти работы целиком носят теоретический характер; единственные пока экспериментальные данные были опубликованы недавно Кистлером, О'Брайеном и Корсином [35].

Обозначим, как это было принято в главе 1, через величину $\Gamma$ полное мгновенное значение некоторой скалярной величины, а через $\gamma$ — пульсацию $\Gamma$ около среднего значения $\overline{\Gamma}$. Поле скорости и скалярное поле будем считать изотропными и однородными, так что величина $\overline{\Gamma}$ постоянна по всему полю.

Как показали Кистлер, О'Брайен и Корсин, такое изотропное скалярное поле, наложенное на изотропное поле скорости, может быть реализовано посредством введения в поток решетки с нагретыми стержнями. На некотором расстоянии от этой нагретой решетки температурное поле, как и поле скоростей, достигает условий изотропности.

Теоретическое исследование турбулентного скалярного поля можно осуществить таким же путем, как и в случае поля турбулентной скорости; в результате получаются геометрические и динамические соотношения. По этой причине вывод указанных соотношений удается сильно сократить.

Что касается обозначений, то мы будем пользоваться теми же символами, которые были введены для соответствующих величин в случае скоростного поля течения, отмеченными, однако, внизу индексами $\gamma$ с целью указать на принадлежность к скалярной величине. Тогда, в отличие от индексов $i$, $j$, $k$ и т. д., $\gamma$ является фиксированным индексом и повторение индекса $\gamma$ не означает суммирования.

*Корреляции.* Как и в случае поля турбулентной скорости, для описания геометрических соотношений, характеризующих структуру скалярного поля, используем корреляции между изменяющимися величинами в двух точках этого поля.

Рассмотрим двойную корреляцию

$$[Q_{\gamma,\gamma}(r,\ t)]_{A,\ B} = \overline{\gamma_A \gamma_B} \tag{3.153}$$

и ее коэффициент

$$[R_{\gamma,\gamma}(r,\ t)]_{A,\ B} = \frac{\overline{\gamma_A \gamma_B}}{\gamma'^2}, \tag{3.154}$$

где $\gamma_A$ и $\gamma_B$ — значения $\gamma$ соответственно в точках $A$ и $B$, расположенных друг от друга на расстоянии $r$, а $\gamma' = \sqrt{\overline{\gamma_A^2}} = \sqrt{\overline{\gamma_B^2}}$ — среднеквадратичная величина, или интенсивность, пульсаций $\gamma$.

Эта двойная корреляция представляет собой тензор нулевого ранга, т. е. скаляр, и зависит от расстояния $r$ и времени $t$. Чтобы упростить систему обозначений, мы будем опускать в дальнейшем знак зависимости от времени во всех тех случаях, когда время, как таковое, несущественно для рассматриваемых, например чисто геометрических, соотношений.

Поскольку при замене $r$ на $-r$ величина $Q_{\gamma,\gamma}(r)$ не изменяет своего знака, то она, как и соответствующий ей коэффициент корреляции $R_{\gamma,\gamma}(r)$, должна быть четной функцией $r$. Следовательно, разложение коэффициента $R_{\gamma,\gamma}(r)$ в ряд по $r$ должно содержать только члены с четными степенями $r$:

$$R_{\gamma,\gamma}(r) = 1 + \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 R_{\gamma,\gamma}}{\partial r^2}\right]_{r=0} + \frac{r^4}{4!}\left[\frac{\partial^4 R_{\gamma,\gamma}}{\partial r^4}\right]_{r=0} + \ldots, \tag{3.155}$$

где

$$\left[\frac{\partial^2 R_{\gamma,\gamma}}{\partial r^2}\right]_{r=0} = \frac{1}{\gamma'^2}\lim_{r\to 0}\left[\overline{\gamma_A\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}\right)_B}\right],$$

$$\left[\frac{\partial^4 R_{\gamma,\gamma}}{\partial r^4}\right]_{r=0} = \frac{1}{\gamma'^2}\lim_{r\to 0}\left[\overline{\gamma_A\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial r^4}\right)_B}\right].$$

. . . . . .

Вторая производная $[\partial^2 R_{\gamma,\gamma}/\partial r^2]_{r=0}$ является мерой кривизны корреляционной кривой в точке $r = 0$. Обозначим через $\lambda_\gamma$ отрезок оси абсцисс, заключенный между началом координат и точкой пересечения этой оси с параболой, соприкасающейся с корреляционной кривой в ее вершине. Тогда

$$\left[\frac{\partial^2 R_{\gamma,\gamma}}{\partial r^2}\right]_{r=0} = -\frac{2}{\lambda_\gamma^2}. \tag{3.156}$$

Величину $\lambda_\gamma$, подобно $\lambda_g$ или $\lambda_f$, можно интерпретировать как микромасштаб пульсаций $\gamma$.

Кроме того, определим интегральный масштаб пульсаций $\gamma$ как

$$\Lambda_\gamma = \int_0^\infty R_{\gamma,\gamma}(r)\,dr. \tag{3.157}$$

Помимо двойной корреляции между значениями $\gamma$ в двух точках, имеются также двойные корреляции между $\gamma$ в одной точке и компонентой скорости в другой точке. Когда эти две точки совпадают, т. е. когда имеем корреляцию между пульсацией $\gamma$ и пульсацией скорости в одной и той же точке, то эта корреляция обращается в нуль:

$$\overline{(u_i)_A \gamma_A} = 0,$$

ибо эта корреляция должна быть инвариантна при отражении. Физический смысл этого факта состоит в том, что корреляция $\overline{(u_i)_A \gamma_A}$ является мерой переноса субстанции $\Gamma$ под действием турбулентности [см. уравнение (1.29)], но этот перенос отсутствует, так как величина $\Gamma$ постоянна.

Более того, эта корреляция должна обращаться в нуль также и для двух не совпадающих одна с другой точек:

$$\overline{(u_i)_A \gamma_B} = 0; \tag{3.158}$$

это следует из условия, что дивергенция тензора первого ранга в случае несжимаемой жидкости стремится к нулю. Это уже было показано для аналогичной корреляции $\overline{(u_i)_A p_B}$ [см. уравнение (3.6)].

Так как соотношение (3.158) справедливо для любого значения $r$, то отсюда следует, что

$$\overline{(u_i)_A \left(\frac{\partial^n \gamma}{\partial r^n}\right)_B} = 0,$$

так же как и

$$\overline{\left(\frac{\partial^n u_i}{\partial r^n}\right)_A \gamma_B} = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\left(u_i \frac{\partial^n \gamma}{\partial r^n}\right)_A} = \lim_{r\to 0} \overline{(u_i)_A \left(\frac{\partial^n \gamma}{\partial r^n}\right)_B} = 0$$

и

$$\overline{\left(\frac{\partial^n u_i}{\partial r^n}\gamma\right)_B} = \lim_{r\to 0} \overline{\left(\frac{\partial^n u_i}{\partial r^n}\right)\gamma_B} = 0. \tag{3.159}$$

Тройные корреляции между $\gamma$ и компонентами скорости в двух точках записываются в виде

$$\overline{(u_i)_A \gamma_A \gamma_B} \quad \text{и} \quad \overline{(u_i)_A (u_j)_B \gamma_B}.$$

Они образуют тензоры соответственно первого и второго рангов. В дальнейшем для нас будет представлять интерес только первая из этих корреляций, которая, как это будет показано ниже, появляется в динамическом уравнении для $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$.

Если обе точки совпадают, то тройная корреляция обращается в нуль:

$$\overline{(u_i\gamma^2)_A} = 0 \tag{3.160}$$

по той же причине, что и $\overline{(u_i\gamma)_A} = 0$. И кроме того, по аналогии с (3.158) имеем соотношение

$$\overline{(u_i)_A\,\gamma_B^2} = 0. \tag{3.161}$$

Рассмотрим теперь следующую обобщенную тройную корреляцию:

$$[S_\gamma]_{A,B} = \overline{\gamma_B\gamma_A(u_a)_A} = \overline{\gamma_B\gamma_A(u_i)_A}\,e_{ai} = [S_{\gamma i,\gamma}]_{A,B}\,e_{ai}. \tag{3.162}$$

Применяя к тензору первого ранга $[S_{\gamma i,\gamma}]_{A,B}$ теорию инвариантов в том виде, как она изложена в § 3.2, получаем соотношение [см. уравнение (3.5)]

$$[S_{\gamma i,\gamma}]_{A,B} = \gamma'^2 u' \frac{k_\gamma(r)}{r}\xi_i, \tag{3.163}$$

где $k_\gamma(r)$ — коэффициент пространственной корреляции между $\gamma_B$, $\gamma_A$ и компонентой скорости $(u_r)_A$ в точке $A$ в направлении $r$:

$$k_\gamma(r) = \frac{\overline{\gamma_B\gamma_A(u_r)_A}}{\gamma'^2 u'}. \tag{3.164}$$

Этот коэффициент является нечетной функцией $r$; следовательно, его разложение в ряд имеет вид

$$k_\gamma(r) = r\left[\frac{\partial k_\gamma}{\partial r}\right]_{r=0} + \frac{r^3}{3!}\left[\frac{\partial^3 k_\gamma}{\partial r^3}\right]_{r=0} + \ldots, \tag{3.165}$$

где

$$\gamma'^2 u'\left[\frac{\partial k_\gamma}{\partial r}\right]_{r=0} = \lim_{r\to 0}\left[\overline{\gamma_A(u_r)_A\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_B}\right],$$

$$\gamma'^2 u'\left[\frac{\partial^3 k_\gamma}{\partial r^3}\right]_{r=0} = \lim_{r\to 0}\left[\overline{\gamma_A(u_r)_A\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial r^3}\right)_B}\right],$$

. . . . . .

Покажем теперь, что $[\partial k_\gamma/\partial r]_{r=0} = 0$. Так как $\overline{(u_r)_A\,\gamma_B^2} = 0$ [см. соотношение (3.161)], то имеем

$$\overline{(u_r)_A\frac{\partial}{\partial r}\gamma_B^2} = 2\,\overline{(u_r)_A\,\gamma_B\frac{\partial\gamma_B}{\partial r}} = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\left(u_r\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_A}=\lim_{r\to 0}\overline{(u_r)_A\,\gamma_B\frac{\partial\gamma_B}{\partial r}}=0,$$

так что

$$\left[\frac{\partial k_\gamma}{\partial r}\right]_{r=0}=\frac{1}{\gamma'^2u'}\left[\overline{\gamma_A(u_r)_A\frac{\partial\gamma_B}{\partial r}}\right]_{r=0}=\frac{1}{\gamma'^2u'}\overline{\left(\gamma u_r\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_A}=0.$$

Этот результат указывает на то, что разложение функции $k_\gamma(r)$ в ряд начинается с члена $r^3$, точно так же, как в ряде для тройной корреляции скорости [см. формулу (3.22)]:

$$k_\gamma(r)=\frac{r^3}{3!}\left[\frac{\partial^3k_\gamma}{\partial r^3}\right]_{r=0}+\frac{r^5}{5!}\left[\frac{\partial^5k_\gamma}{\partial r^5}\right]_{r=0}+\ldots \qquad (3.166)$$

*Динамическое уравнение для* $Q_{\gamma,\gamma}(r,t)$. В качестве исходного соотношения используем уравнение диффузии и конвекции субстанции $\Gamma$ [см. уравнение (1.27)], предполагая при этом, что коэффициент молекулярного переноса $\mathfrak{f}$ постоянен. Если $\Gamma$ означает количество тепла на единицу массы $c_p\Theta$, то $\mathfrak{f}=\mathcal{K}/\rho c_p$, где $\mathcal{K}$ — коэффициент теплопроводности жидкости. Если $\Gamma$ — концентрация, то величина $\mathfrak{f}$ означает коэффициент молекулярной диффузии. Итак,

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+U_i\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}=\mathfrak{f}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\,\partial x_i}.$$

Будем считать, что $\Gamma=\bar\Gamma+\gamma$ и $U_i=\bar U_1+u_i$, понимая при этом величины $\bar\Gamma$ и $\bar U_1$ как постоянные по всему полю. Тогда

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\bar U_1\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}+u_i\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}=\mathfrak{f}\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\gamma.$$

Рассмотрим это уравнение для двух точек $A$ и $B$. Умножив обе части этого уравнения для точки $A$ на $\gamma_B$, а обе части уравнения для точки $B$ на $\gamma_A$, сложив затем оба уравнения почленно и произведя осреднение по времени, после выполнения тех же операций, что и при выводе уравнения (1.40,) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\gamma_A\gamma_B}+2\frac{\partial}{\partial\xi_i}\overline{\gamma_A\gamma_B(u_i)_B}=2\mathfrak{f}\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\,\partial\xi_l}\overline{\gamma_A\gamma_B}. \qquad (3.167)$$

Последовательность действий в процессе этого вывода такова:

$$\gamma_B\frac{\partial\gamma_A}{\partial t}+\bar U_1\gamma_B\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}\right)_A+\gamma_B\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_i\gamma\right)_A=\mathfrak{f}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_A\gamma_A\gamma_B,$$

$$\gamma_A\frac{\partial\gamma_B}{\partial t}+\bar U_1\gamma_A\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}\right)_B+\gamma_A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_i\gamma\right)_B=\mathfrak{f}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_B\gamma_A\gamma_B.$$

Складывая соответственно левые и правые части этих уравнений и осредняя, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\gamma_A\gamma_B}+\bar{U}_1\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_A+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_B\right]\overline{\gamma_A\gamma_B}+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A\overline{(u_i)_A\gamma_A\gamma_B}+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_B\overline{(u_i)_B\gamma_B\gamma_A}=\mathfrak{f}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_A+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_B\right]\overline{\gamma_A\gamma_B}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A\overline{(u_i)_A\gamma_A\gamma_B}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_B\overline{(u_i)_B\gamma_B\gamma_A},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\gamma_A\gamma_B}+\bar{U}_1\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_A+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_B\right]\overline{\gamma_A\gamma_B}+2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A\overline{(u_i)_A\gamma_A\gamma_B}=$$
$$=\mathfrak{f}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_A+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_B\right]\overline{\gamma_A\gamma_B}.$$

Если ввести обозначения

$$\xi_i=(x_i)_B-(x_i)_A,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_B=-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A=\frac{\partial}{\partial\xi_i},$$

то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\gamma_A\gamma_B}-2\frac{\partial}{\partial\xi_i}\overline{\gamma_B\gamma_A(u_i)_A}=2\mathfrak{f}\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\,\partial\xi_l}\overline{\gamma_A\gamma_B}.$$

Используя соотношения (3.153) и (3.162), можем записать

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{Q}_{\gamma,\gamma}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)-2\frac{\partial}{\partial\xi}\boldsymbol{S}_{\gamma i,\gamma}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)=$$
$$=2\mathfrak{f}\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\,\partial\xi_l}\boldsymbol{Q}_{\gamma,\gamma}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t). \quad (3.168)$$

Введем скаляр $\boldsymbol{S}^*_{\gamma,\gamma}$, определяемый формулой

$$\boldsymbol{S}^*_{\gamma,\gamma}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)=\frac{\partial}{\partial\xi_i}\boldsymbol{S}_{\gamma i,\gamma}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t), \quad (3.169)$$

и воспользуемся уравнением (3.163); тогда

$$\boldsymbol{S}^*_{\gamma,\gamma}=\gamma'^2u'\left[2\frac{\boldsymbol{k}_\gamma}{r}+\frac{\partial\boldsymbol{k}_\gamma}{\partial r}\right]=\gamma'^2u'\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\boldsymbol{k}_\gamma). \quad (3.170)$$

Так как величины $\boldsymbol{S}^*_{\gamma,\gamma}$ и $\boldsymbol{Q}_{\gamma,\gamma}$ зависят только от $r$ и $t$, то уравнение (3.168) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{Q}_{\gamma,\gamma}(r,t)-2\boldsymbol{S}^*_{\gamma,\gamma}(r,t)=2\mathfrak{f}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{Q}_{\gamma,\gamma}(r,t)\right], \quad (3.171)$$

или, если ввести коэффициенты корреляции,

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma'^2\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(r,t)-2\gamma'^2u'\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\boldsymbol{k}_\gamma(r,t)]=$$
$$=2\mathfrak{f}\gamma'^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(r,t)}{\partial r}\right] \quad (3.172)$$

Уравнения (3.171) и (3.172) описывают изменение двойной корреляции при изотропной турбулентности, причем уравнение (3.172) подобно уравнению Кармана — Хауэрта (3.36) для двойной корреляции скорости.

Если уравнение (3.172) рассматривать в то же время как соотношение, описывающее распространение некоторой субстанции в пространстве, то можно заметить, что оно существенно отличается от соответствующего уравнения для корреляции скорости. Согласно уравнениям (3.171) и (3.172) речь идет о распространении в трехмерном пространстве, тогда как уравнение (3.36) описывает распространение в пространстве с пятью измерениями. В этом отношении наблюдается значительно большее сходство с уравнением (3.35) для распространения величины $Q_{i,i}(r, t)$, которая фактически тоже является скаляром. Подобно $S_{i,i}(r, t)$, член $S^*_{\gamma,\gamma}(r, t)$ можно интерпретировать как функцию переноса.

Представляет интерес отыскать предельную форму уравнения (3.172) при $r \to 0$.

Поскольку величина $k_\gamma(r, t)$ при малых значениях $r$ пропорциональна $r^3$, то из соотношения (3.170) следует, что

$$\lim_{r\to 0} S^*_{\gamma,\gamma}(r, t) = 0. \tag{3.173}$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial R_{\gamma,\gamma}(r, t)}{\partial r}\right] = -\frac{6}{\lambda_\gamma^2}.$$

Следовательно, при $r \to 0$ уравнение (3.172) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\gamma'^2 = -12\frac{f}{\lambda_\gamma^2}\gamma'^2. \tag{3.174}$$

Этот результат полностью аналогичен формуле (3.140). Вырождение интенсивности пульсаций $\gamma$ обусловливается в конечном счете только молекулярной диффузией. Из-за различия между численнымк постоянными здесь и в формуле (3.140), а также потому, что величины $f$ и $\lambda_\gamma$ вовсе не обязательно должны иметь такие же значения, как соответственно $\nu$ и $\lambda_g$, между скоростями вырождения величин $\gamma'^2$ и $u'^2$ имеется количественное расхождение.

*Спектральное распределение скалярной субстанции.* В турбулентном скалярном поле пульсирующую субстанцию можно рассматривать как результат наложения пульсаций, соответствующих различным значениям волнового числа в непрерывном диапазоне волновых чисел. Спектральный анализ пульсаций $\gamma$ покажет впоследствии, каким образом отдельные составляющие распределены по этим волновым числам. Как и в случае пульсаций скорости

спектральные функции можно, по-видимому, определить как преобразования Фурье от корреляционных функций. В пространстве эти спектральные функции будут иметь трехмерный характер. Однако то, что обычно измеряется с помощью соответствующей измерительной аппаратуры, представляет собой всего лишь одномерное сечение этого спектра.

Поэтому рассмотрим сначала этот одномерный спектр $E_{\gamma 1}(k_1, t)$. Определим его так, чтобы

$$\int_0^\infty E_{\gamma 1}(k_1, t)\, dk = \gamma'^2, \tag{3.175}$$

где $E_{\gamma 1}(k_1, t)$ — преобразование Фурье от функции $Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t)$. Так как $Q_{\gamma, \gamma}(0, t) = \gamma'^2$, то соотношения, определяющие преобразование Фурье, запишутся в следующей форме:

$$Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\gamma 1}(k_1, t) \exp(ik_1 x_1)\, dk_1 \tag{3.176}$$

и

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{\gamma, \gamma}(x_1, t) \exp(-ik_1 x_1)\, dx_1. \tag{3.177}$$

Читатель легко может убедиться самостоятельно, что соотношение (3.175) вытекает из (3.176) при $x_1 = 0$.

Трехмерный вариант выражения (3.177) запишется в виде

$$E_{\gamma, \gamma}(k_1, k_2, k_3, t) = \\ = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int Q_{\gamma, \gamma}(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-ik_l x_l)\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{3.178}$$

Однако поскольку величина $Q_{\gamma, \gamma}$ является скаляром, который зависит только от $r$ и $t$, то вновь можно воспользоваться сферическими полярными координатами. Тогда получим

$$E_{\gamma, \gamma}(k, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin kr}{kr} Q_{\gamma, \gamma}(r, t)\, dr; \tag{3.179}$$

преобразование Фурье от этого выражения будет таково:

$$Q_{\gamma, \gamma}(r, t) = 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} E_{\gamma, \gamma}(k, t)\, dk. \tag{3.180}$$

Из этого соотношения следует, что

$$\gamma'^2 = 4\pi \int_0^\infty k^2 E_{\gamma,\gamma}(k, t)\, dk. \qquad (3.181)$$

Тогда трехмерную спектральную функцию $E_\gamma(k, t)$ определим так, чтобы

$$E_\gamma(k, t) = 4\pi k^2 E_{\gamma,\gamma}(k, t). \qquad (3.182)$$

По аналогии с (3.175) имеем

$$\int_0^\infty E_\gamma(k, t)\, dk = \gamma'^2. \qquad (3.183)$$

Следовательно, из соотношения (3.179) вытекает, что

$$E_\gamma(k, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty kr \sin kr\, Q_{\gamma,\gamma}(r, t)\, dr \qquad (3.184)$$

и

$$Q_{\gamma,\gamma}(r, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} E_\gamma(k, t)\, dk. \qquad (3.185)$$

Трехмерный спектр $E_\gamma(k, t)$ является четной функцией от $k$ и при малых значениях $k$ пропорционален $k^2$. Это непосредственно следует из разложения (3.184) в ряд:

$$E_\gamma(k, t) = \frac{2}{\pi}\left[k^2 \int_0^\infty r^2 Q_{\gamma,\gamma}(r, t)\, dr - \frac{k^4}{3!} \int_0^\infty r^4 Q_{\gamma,\gamma}(r, t)\, dr + \ldots\right].$$

Это выражение можно сравнить с подобным соотношением (3.61) для трехмерного энергетического спектра $E(k, t)$. Но в отличие от выражения для $E(k, t)$, в котором первый член в правой части обращается в нуль в силу выполнения для случая несжимаемой жидкости условия (3.65), здесь первый член отличен от нуля.

Посмотрим теперь, какая связь существует между одномерным и трехмерным $\gamma$-спектрами. Затем, зная эту связь, можно будет вычислить трехмерный спектр по измеренным значениям для одномерного спектра.

Эта связь легко определяется, если заметить, что выражение (3.184) практически не отличается от производной от (3.177)

по $k$. Таким образом,

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_{\gamma,\gamma}(x_1, t)\cos k_1 x_1\, dx_1,$$

$$\frac{\partial E_{\gamma 1}(k_1, t)}{\partial k_1} = -\frac{1}{k_1}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k_1 x_1 \sin k_1 x_1\, Q_{\gamma,\gamma}(x_1, t)\, dx_1.$$

Отсюда

$$E_\gamma(k_1, t) = -k_1\frac{\partial E_{\gamma 1}(k_1, t)}{\partial k_1}, \tag{3.186}$$

или

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \int_{k_1}^\infty \frac{E_\gamma(k, t)}{k}\, dk, \tag{3.187}$$

так как постоянная интегрирования определяется условием

$$\lim_{k_1\to\infty} E_{\gamma 1}(k_1, t) = 0.$$

Формулы (3.186) и (3.187) показывают, что если трехмерный спектр $E_\gamma(k, t)$ в диапазоне $k_1 \leqslant k < \infty$ описывается степенным законом с отрицательным показателем степени, то тот же закон справедлив и для одномерного спектра $E_{\gamma 1}(k_1, t)$, и наоборот.

Интегральный масштаб $\Lambda_\gamma$, определяемый соотношением (3.157), и микромасштаб $\lambda_\gamma$, определяемый формулой (3.156), легко получаются из спектральных функций для $\gamma$:

$$\Lambda_\gamma = \frac{1}{\gamma'^2}\int_0^\infty Q_{\gamma,\gamma}(r, t)\, dr = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\gamma'^2}E_{\gamma 1}(0, t) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\gamma'^2}\int_0^\infty \frac{E_\gamma(k, t)}{k}\, dk, \tag{3.188}$$

$$\frac{2}{\lambda_\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma'^2}\left[\frac{\partial^2 Q_{\gamma,\gamma}}{\partial r^2}\right]_{r=0} = \frac{1}{\gamma'^2}\int_0^\infty k^2 E_{\gamma 1}(k, t)\, dk =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{\gamma'^2}\int_0^\infty k^2 E_\gamma(k, t)\, dk. \tag{3.189}$$

*Динамическое уравнение для* $E_\gamma(k, t)$. Это уравнение получается из динамического уравнения (3.171) для корреляции $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$ путем взятия от каждого члена соответствующего преобразования Фурье. С этой целью введем спектральную функцию $F_{\gamma,\gamma}(k, t)$ как

преобразование Фурье от $S^*_{\gamma,\gamma}(r, t)$:

$$S^*_{\gamma,\gamma}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int F_{\gamma,\gamma}(k_1, k_2, k_3, t)\exp(ik_l x_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3 \tag{3.190}$$

и

$$F_{\gamma,\gamma}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int S^*_{\gamma,\gamma}(x_1, x_2, x_3, t)\exp(-ik_l x_l)\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{3.191}$$

Так как $S^*_{\gamma,\gamma}$ зависит только от $r$ и $t$, то выражение (3.191) тоже можно записать в сферических полярных координатах; тогда $F_{\gamma,\gamma}$ будет зависеть только от $k$ и $t$. Таким образом,

$$F_{\gamma,\gamma}(k, t) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty r^2\frac{\sin kr}{kr}S^*_{\gamma,\gamma}(r, t)\,dr \tag{3.192}$$

и

$$S^*_{\gamma,\gamma}(r, t) = 4\pi\int_0^\infty k^2\frac{\sin kr}{kr}F_{\gamma,\gamma}(k, t)\,dk. \tag{3.193}$$

Подстановка соотношений (3.193) и (3.180) в уравнение (3.171) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}E_{\gamma,\gamma}(k, t) - 2F_{\gamma,\gamma}(k, t) = -2\nu k^2 E_{\gamma,\gamma}(k, t). \tag{3.194}$$

Теперь положим

$$F_\gamma(k, t) = 8\pi k^2 F_{\gamma,\gamma}(k, t). \tag{3.195}$$

Тогда на основании соотношения (3.182) уравнение (3.194) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\gamma(k, t) - F_\gamma(k, t) = -2\nu k^2 E_\gamma(k, t). \tag{3.196}$$

Мы показали, что спектральные функции $E_{\gamma,\gamma}(k, t)$ и $E_\gamma(k, t)$ при малых значениях $k$ пропорциональны соответственно $k^0$ и $k^2$. А каков будет характер изменения спектральных функций «переноса» $F_{\gamma,\gamma}(k, t)$ и $F_\gamma(k, t)$ при малых значениях $k$?

С этой целью рассмотрим преобразование Фурье $F_{\gamma l,\gamma}(k_1, k_2, k_3, t)$ от $S_{\gamma l,\gamma}(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$S_{\gamma l,\gamma}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int F_{\gamma l,\gamma}(k_1, k_2, k_3, t)\exp(i^* k_l x_l)\,dk_1 dk_2 dk_3.$$

Тогда для $S^*_{\gamma,\,\gamma}(x_1,\,x_2,\,x_3,\,t)$ получим

$$S^*_{\gamma,\,\gamma}(x_1,\,x_2,\,x_3,\,t)=\frac{\partial}{\partial x_i}S_{\gamma i,\,\gamma}=$$

$$=i^*\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\int k_i F_{\gamma i,\,\gamma}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)\exp(ik_l x_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3.$$

Сравнение этого выражения с (3.190) показывает, что $F_{\gamma,\,\gamma}=ik_iF_{\gamma i,\,\gamma}$. Величина $F_{\gamma i,\,\gamma}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)$ представляет собой тензор первого ранга, общее выражение которого имеет вид [см. (3.4)]

$$F_{\gamma i,\,\gamma}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)=\varphi(k^2,\,t)\,k_i.$$

Отсюда получаем

$$F_{\gamma,\,\gamma}(k,\,t)=ik^2\varphi(k^2,\,t). \tag{3.197}$$

Если функция $F_{\gamma l,\,\gamma}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)$ при $k=0$ является аналитической, то разложение функции $\varphi(k^2,\,t)$ в ряд должно начинаться с члена $k^{2n}$, где $n\geqslant 0$. В этом случае ряд для $F_{\gamma,\,\gamma}(k,\,t)$ начинается, по крайней мере, с члена $k^2$, а ряд для $F_\gamma(k,\,t)$ — с члена $k^4$.

Разлагая (3.192) в ряд с учетом формулы (3.197), имеем

$$F_{\gamma,\,\gamma}(k,\,t)=-\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{k^2}{3!}\int\limits_0^\infty r^4S^*_{\gamma,\,\gamma}(r,\,t)\,dr-\frac{k^4}{5!}\int\limits_0^\infty r^6S^*_{\gamma,\,\gamma}(r,t)dr+\ldots\right] \tag{3.198}$$

и

$$\int\limits_0^\infty r^2S^*_{\gamma,\,\gamma}(r,\,t)\,dr=0. \tag{3.199}$$

Эквивалентным результатом является соотношение

$$\lim_{r\to 0}r^2k_\gamma(r,\,t)=0.$$

Из формулы (3.198) или (3.197) вытекает, что

$$F_{\gamma,\,\gamma}(0,\,t)=0.$$

Следствием этого соотношения является то, что, согласно (3.194),

$$\lim_{k\to 0}\frac{\partial}{\partial t}E_{\gamma,\,\gamma}(k,\,t)=0,$$

а отсюда, по (3.179),

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\infty r^2Q_{\gamma,\,\gamma}(r,\,t)\,dr=0 \tag{3.200}$$

или

$$I_\gamma = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty r^2 Q_{\gamma,\gamma}(r, t)\,dr = \text{инвариант}. \qquad (3.201)$$

Это выражение аналогично инварианту Лойцянского (3.39), но в данном случае при $\lim_{r\to\infty} r^2 k_\gamma(r, t) = 0$ существует точный инвариант.

Проинтегрировав по $k$ динамическое уравнение (3.196) для $E_\gamma(k, t)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k E_\gamma(k, t)\,dk - \int_0^k F_\gamma(k, t)\,dk = -2\mathfrak{f}\int_0^k k^2 E_\gamma(k, t)\,dk. \qquad (3.202)$$

Из соотношений (3.195) и (3.193) следует, что

$$\int_0^\infty F_\gamma(k, t)\,dk = 8\pi\int_0^\infty k^2 F_{\gamma,\gamma}(k, t)\,dk = 2S^*_{\gamma,\gamma}(0, t).$$

Это выражение, согласно формуле (3.173), обращается в нуль. Отсюда при $k = \infty$ уравнение (3.202) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty E_\gamma(k, t)\,dk = -2\mathfrak{f}\int_0^\infty k^2 E_\gamma(k, t)\,dk,$$

откуда на основании формул (3.182) и (3.189) получаем

$$\frac{d}{dt}\gamma'^2 = -12\mathfrak{f}\frac{\gamma'^2}{\lambda_\gamma^2}.$$

Это соотношение в точности соответствует уравнению (3.174). Если преобразование турбулентных пульсаций в молекулярное распределение $\gamma$ (когда дальнейшее распределение происходит только под действием молекулярной диффузии) рассматривать как «диссипацию» пульсации $\gamma$, то производная $d\gamma'^2/dt$ как раз представляет собой эту «диссипацию» $\gamma$. Обозначим скорость этой «диссипации» $\gamma$ через величину $\varepsilon_\gamma$, т. е.

$$\frac{d}{dt}\gamma'^2 = -\varepsilon_\gamma = -12\mathfrak{f}\frac{\gamma'^2}{\lambda_\gamma^2}. \qquad (3.203)$$

Решение динамического уравнения (3.202) или его дифференциального эквивалента (3.196) для $E_\gamma(k, t)$ может быть получено только в том случае, если принять какой-либо постулат относительно формы функции переноса $F_\gamma(k, t)$. Поскольку функция $F(k, t)$, как и $F_\gamma(k, t)$, описывает перенос какой-либо субстанции благодаря

взаимодействию вихрей, то логично предположить существование прямой пропорциональности между этими двумя функциями. Следовательно, в отношении функции $F_\gamma(k, t)$ можно воспользоваться постулатами, аналогичными тем предположениям, которые были сделаны относительно $F(k, t)$. При очень малых значениях числа Рейнольдса турбулентности взаимодействие вихрей оказывается весьма слабым и функцию переноса $F(k, t)$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с вязкой диссипацией. Аналогично в нашем случае пренебрежимо малой можно считать величину $F_\gamma(k, t)$, так как функция $F_\gamma(k, t)$ тоже определяется взаимодействием вихрей. Числу Рейнольдса $u'\lambda_g/\nu$ соответствует безразмерный комплекс $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{f}$, который в динамических уравнениях для $E_\gamma(k, t)$ и $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$ играет ту же роль, что и число Рейнольдса $u'\lambda_g/\nu$ в динамических уравнениях для $E(k, t)$ и $Q_{i,i}(r, t)$.

Физический смысл безразмерного комплекса $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{f}$ можно интерпретировать как отношение коэффициентов диффузии, обусловленной мелкими вихрями, и молекулярной диффузии.

Как будет показано ниже [см. формулу (3.229)], отношение $\lambda_g/\lambda_\gamma$ определяется отношением $\nu/\mathfrak{f}$ и если $\nu$ и $\mathfrak{f}$ — одинаковые по порядку величины, то таковыми должны быть также

$$\frac{u'\lambda_g}{\nu} \quad \text{и} \quad \frac{u'\lambda_\gamma}{\mathfrak{f}}.$$

Если в уравнении (3.196) пренебречь членом $F_\gamma(k, t)$, то получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(k, t) = -2\mathfrak{f}k^2 E_\gamma(k, t), \tag{3.204}$$

решение которого записывается так:

$$E_\gamma(k, t) = E_\gamma(k, t_0) \exp[-2\mathfrak{f}k^2(t - t_0)]. \tag{3.205}$$

В связи с тем, что $E_\gamma(k, t) \sim k^2$ при $k \to 0$, величина $E_\gamma(k, t_0)$ должна равняться постоянной, умноженной на $k^2$.

Этот результат можно также получить путем анализа решения для двойной корреляции $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$, если в уравнении (3.171) пренебречь членом $S^*_{\gamma,\gamma}(r, t)$. Это решение идентично с (3.42) и записывается следующим образом:

$$Q_{\gamma,\gamma}(r, t) = \frac{\sqrt{8\mathfrak{f}}}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{8\mathfrak{f}t}\right) \sum_1^\infty \frac{A_p}{t^p} H_{2p-1}\left(\frac{r}{\sqrt{8\mathfrak{f}t}}\right). \tag{3.206}$$

Если теперь в отношении каждого члена выражения (3.206) воспользоваться условием инвариантности (3.201):

$$\int_0^\infty r^2 Q_{\gamma,\gamma}(r,\ t)\,dr = \text{const},$$

то окажется, что при конечном значении этой постоянной указанному условию удовлетворяет только член $p=1$; все остальные члены дают нулевые слагаемые. Если дальше рассматривать только член, соответствующий $p=1$, то решение (3.206) упрощается:

$$Q_{\gamma,\gamma}(r,\ t) = 2A_1 \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{8ft}\right). \tag{3.207}$$

Кроме того, $Q_{\gamma,\gamma}(r,\ t) = \gamma'^2 R_{\gamma,\gamma}(r,\ t)$, где $\gamma'^2$ зависит только от времени. Следовательно, из формулы (3.207) вытекает, что

$$R_{\gamma,\gamma}(r,\ t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8ft}\right) \tag{3.208}$$

и

$$\frac{\gamma'^2}{\gamma_0'^2} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-3/2}. \tag{3.209}$$

При этом следует обратить внимание на отличие этой скорости вырождения от скорости вырождения величины $u'^2$, определяемой соотношением (3.43).

Из формул (3.156) и (3.208) следует, что

$$\lambda_\gamma^2 = 8ft,$$

а на основании формул (3.157) и (3.208) имеем

$$\Lambda_\gamma^2 = 2\pi ft.$$

Сравнение этих результатов с соответствующими выражениями для $\lambda_f$ и $\Lambda_f$, приведенными в § 3.4, показывает, что

$$\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_f} = \frac{\Lambda_\gamma}{\Lambda_f} = \sqrt{\frac{f}{\nu}}.$$

С помощью формулы (3.207) для $Q_{\gamma,\gamma}(r,\ t)$ и уравнения (3.184) можно получить выражение для $E_\gamma(k,\ t)$:

$$E_\gamma(k,\ t) = \frac{4A_1}{\pi} \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^\infty kr \sin kr \exp\left(-\frac{r^2}{8ft}\right) dr =$$

$$= \frac{A_1}{\sqrt{\pi}} (8f)^{3/2} k^2 \exp(-2fk^2 t) = \text{const}\, k^2 \exp(-2fk^2 t). \tag{3.210}$$

Все эти выкладки относятся к малым значениям $\mathrm{Re}_\lambda$ и $u'\lambda_g/\mathfrak{f}$. При больших значениях $\mathrm{Re}_\lambda$ и $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{f}$, когда функциями переноса $F(k, t)$ и $F_\gamma(k, t)$ в соответствующих динамических уравнениях пренебрегать больше нельзя, в отношении этих функций требуется принять некоторые постулаты. Выше уже говорилось о том, что для обеих функций переноса представляется целесообразным принять одинаковые постулаты, ибо эти функции определяются одинаковым механизмом турбулентности.

В дальнейшем рассмотрим только тот случай, для которого применимо предположение Гейзенберга (3.121) относительно $F(k, t)$. Для функции переноса $F_\gamma(k, t)$ примем, что

$$\int_0^k F_\gamma(k, t)\,dk = -2\epsilon_\gamma(k, t)\int_0^k k^2 E_\gamma(k, t)\,dk, \tag{3.211}$$

где $\epsilon_\gamma(k, t)$ — коэффициент турбулентной диффузии, обусловленной вихрями с волновыми числами, лежащими в диапазоне от $k$ до $\infty$; согласно предположению Гейзенберга относительно $F(k, t)$, по аналогии можем записать

$$\epsilon_\gamma(k, t) = \beta\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk. \tag{3.212}$$

Естественно, что и здесь против этого предположения можно высказать возражение, подобно тому как это было сделано в § 3.5 в отношении коэффициента турбулентной вязкости.

Преобразуем уравнение (3.202), воспользовавшись для этого соотношениями (3.211) и (3.212):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k E_\gamma(k, t)\,dk =$$

$$= -2\left[\mathfrak{f} + \beta\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk\right]\int_0^k k^2 E_\gamma(k, t)\,dk. \tag{3.213}$$

Будем считать теперь число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda$ настолько большим, что в спектре энергии турбулентности существует область равновесия. Если $\mathfrak{f}$ такого же порядка, что и $\nu$, то комплекс $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{f}$ тоже будет иметь очень большую величину. Для волновых чисел, лежащих в этой области равновесия, можно, кроме того, положить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_k^\infty E_\gamma(k, t)\,dk \ll \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty E_\gamma(k, t)\,dk$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k \boldsymbol{E}_\gamma(k, t)\,dk \approx \frac{d}{dt}\int_0^\infty \boldsymbol{E}_\gamma(k, t)\,dk = -\varepsilon_\gamma.$$

Тогда вместо уравнения (3.213) можно записать

$$2\left[\mathfrak{f} + \beta\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk\right]\int_0^k k^2 \boldsymbol{E}_\gamma(k, t)\,dk = \varepsilon_\gamma. \qquad (3.214)$$

Решение этого уравнения получается без труда и имеет вид

$$\boldsymbol{E}_\gamma(k, t) = \frac{\beta\varepsilon_\gamma\sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}}{2k^2\left[\mathfrak{f} + \beta\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k, t)}{k^3}}\,dk\right]^2}. \qquad (3.215)$$

Пользуясь этим решением, можно найти величину $\boldsymbol{E}_\gamma(k, t)$, если известна величина $\boldsymbol{E}(k, t)$.

Выше мы получили простые степенные зависимости для $\boldsymbol{E}(k, t)$ в области равновесия, а именно: закон «$-5/3$» Колмогорова для инерционной подобласти и закон «$-7$» для области наибольших волновых чисел, в которой наблюдается сильное влияние вязкости и связанная с ней интенсивная диссипация.

Если рассматривается инерционная подобласть, где

$$\boldsymbol{E}(k, t) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha}\right)^{2/3} k^{-5/3}$$

и $\varepsilon \gg \nu$, то должно выполняться также условие $\epsilon_\gamma \gg \mathfrak{f}$. Следовательно, если в выражении (3.215) пренебречь $\mathfrak{f}$ по сравнению с $\epsilon_\gamma$, то решение для $\boldsymbol{E}_\gamma(k, t)$ в этой инерционной подобласти турбулентности будет иметь вид

$$\boldsymbol{E}_\gamma(k, t) = \left(\frac{8}{9}\right)^{2/3}\frac{\alpha^{1/3}}{\beta}\varepsilon_\gamma(t)\,[\varepsilon(t)]^{-1/3}\,k^{-5/3}. \qquad (3.216)$$

Это точно такой же закон, который был получен и для функции энергетического спектра.

Как показал Корсин [34], к такому же результату приводит и анализ размерностей, если принять, что в рассматриваемой области больших волновых чисел спектр $\boldsymbol{E}_\gamma(k, t)$ зависит только от диссипации энергии $\varepsilon(t)$, а также от диссипации $\varepsilon_\gamma(t)$ в этой области.

Для области наиболее высоких «вязких» волновых чисел можно теперь воспользоваться предположением о том, что не только

$\nu \gg \epsilon(k, t)$, но и $\mathfrak{f} \gg \epsilon_\gamma(k, t)$. Полагая в (3.215), что $E(k, t) = C(t) k^{-7}$, и пренебрегая величиной $\epsilon_\gamma(k, t)$, получаем

$$E_\gamma(k, t) = \frac{\beta \varepsilon_\gamma(t)}{2\mathfrak{f}^2} \sqrt{C(t)}\, k^{-7}.$$

Это опять-таки полностью совпадает с законом, найденным для $E(k, t)$. Но при этом следует сразу же отметить, что, вследствие неприменимости по указанным выше причинам гипотезы Гейзенберга к вязкой области, полученный только что для $E_\gamma(k, t)$ результат нельзя распространить на эту область.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что $\mathfrak{f}$ и $\nu$ — одинаковые по порядку величины. Можно ожидать, что изменение $E_\gamma(k, t)$ при больших волновых числах будет зависеть главным образом от отношения $\mathfrak{f}/\nu$. Так, в случае $\mathfrak{f}/\nu \ll 1$ влияние молекулярной диффузии становится заметным только при волновых числах, значительно превышающих $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$, тогда как в случае $\mathfrak{f}/\nu \gg 1$ это влияние проявляется уже при $k \ll k_d$. Для удобства можно ввести такое волновое число, которое отделяет область, где молекулярная диффузия пренебрежимо мала, от области, где она играет важную роль. По аналогии с величиной $k_d$ определим это волновое число как $k_{\gamma, d} = (\varepsilon/\mathfrak{f}^3)^{1/4}$.

Если $\mathfrak{f}/\nu \ll 1$, то существует диапазон волновых чисел $k_d < k < k_{\gamma, d}$, в котором турбулентное движение происходит в вязкой области, а влияние молекулярной диффузии все еще пренебрежимо мало. В этом диапазоне вязких движений основная доля в конвективном переносе субстанции $\gamma$ принадлежит, по всей вероятности, деформации жидких элементов. Рассмотрим достаточно малый жидкий элемент, размер которого меньше, чем $1/k_d$. Как будет показано в § 5.4, благодаря указанной деформации такого жидкого элемента в длинную и тонкую ленту, изменения величины $\gamma$ происходят в основном в направлении главной оси наименьшей скорости деформации, градиенты $\gamma$ становятся более крутыми, а влияние молекулярной диффузии возрастает. Бэтчелор [58] показал, что конвекция, вызванная деформирующим воздействием, и молекулярная диффузия становятся одинаковыми по порядку величины при $k_{\gamma, c} = (\varepsilon/\nu\mathfrak{f}^2)^{1/4}$. В диапазоне $k_d < k < k_{\gamma, c}$ доминирующая роль принадлежит конвекции и процесс деформации преобразует фурье-компоненты малых волновых чисел в компоненты более высоких волновых чисел. Далее, Бэтчелор получил следующее выражение для стационарного спектра $\gamma$-пульсаций:

$$E_\gamma(k) = A \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon_\gamma}{k} \exp\left(-A \frac{k^2}{k_{\gamma, c}^2}\right),$$

где $A$ — численная постоянная порядка 1. При $k \ll k_{\gamma, c}$ это соотношение упрощается:

$$E_\gamma(k) \approx A\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon_\gamma}{k}. \qquad (3.217а)$$

Эта формула показывает, что в этом диапазоне волновых чисел функция $E_\gamma(k)$ убывает менее быстро, чем $E(k)$. Однако при $k > k_{\gamma, c}$ и особенно при $k > k_{\gamma, d}$ важную роль начинает играть молекулярная диффузия, и тогда функция $E_\gamma(k)$ с возрастанием $k$ будет убывать очень быстро.

В другой работе Бэтчелор, Хауэлс и Таунсенд [59] рассмотрели случай большого коэффициента молекулярной диффузии, $\mathfrak{f}/\nu \gg 1$, в следующем диапазоне волновых чисел:

$$k_{\gamma, d} < k < k_d.$$

Если число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda$ достаточно велико, то для энергетического спектра $E(k)$ в инерционной подобласти справедлив закон Колмогорова (3.118). При $k < k_{\gamma, d}$ спектр $E_\gamma(k)$ также подчиняется подобному закону (3.216).

В инерционной подобласти величина $E(k)$ с ростом $k$ изменяется относительно медленно, в то время как спектр $E_\gamma(k)$ благодаря влиянию молекулярной диффузии затухает, по-видимому, значительно быстрее. Исходя из уравнения баланса между переносом под действием турбулентной конвекции и молекулярной диффузии и используя гипотезу о том, что фурье-компонента $k$ спектра субстанции $\gamma$ определяется, в основном, фурье-компонентой того же порядка в спектре турбулентной скорости, Бэтчелор, Хауэлс и Таунсенд получили следующее соотношение между $E_\gamma(k)$ и $E(k)$:

$$\mathfrak{f}^2 k^4 E_\gamma(k) = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_\gamma}{\mathfrak{f}} E(k),$$

откуда в случае закона Колмогорова (3.118) для $E(k)$ имеем

$$E_\gamma(k) = \mathrm{const}\, \varepsilon_\gamma \varepsilon^{2/3} \mathfrak{f}^{-3} k^{-17/3}. \qquad (3.217б)$$

При волновых числах выше $k = k_d$ спектр $E_\gamma(k)$ с увеличением $k$ снова будет очень быстро затухать.

Формулы (3.216) и (3.217) дают выражения для спектральной функции $E_\gamma(k, t)$, справедливые соответственно в инерционной подобласти больших волновых чисел и в области наивысших волновых чисел. На нижнем пределе этого диапазона волновых чисел величина $E_\gamma(k, t)$ пропорциональна $k^2$. Для области энергосодержащих вихрей, в которой лежит максимум энергетического спектра и, стало быть, логично ожидать максимума спектральной функции $E_\gamma(k, t)$, решение до сих пор еще не получено. Но точно так же, как это

сделал Карман в отношении энергетического спектра $E(k, t)$, можно предложить интерполяционную формулу для $E_\gamma(k, t)$, перекрывающую диапазон от $k=0$ до инерционной подобласти, а именно:

$$E_\gamma(k, t) = E_\gamma[k_0(t)]\, 2^{11/6} \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]^{11/6}}. \tag{3.218}$$

При малых значениях $k/k_0$ эта формула приводит к соотношению

$$E_\gamma(k, t) = E_\gamma(k_0)\, 2^{11/6}\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 = I_\gamma k^2,$$

откуда следует, что $E_\gamma(k_0)\, 2^{11/6} = I_\gamma k_0^2$. С другой стороны, для очень больших значений $k/k_0$ эта формула дает закон «$-5/3$».

Используя (3.187), можно вычислить одномерный спектр $E_{\gamma 1}(k_1, t)$:

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \frac{3}{5}\, 2^{11/6} E_\gamma(k_0)\left[1+\left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2\right]^{-5/6}. \tag{3.219}$$

Функция $E_\gamma(k_0)$, которая, как было показано, соответствует также и $I_\gamma k_0^2$, может быть определена из условия, что корреляционная функция $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$ при $r=0$ становится равной $\gamma'^2$.

Согласно соотношению (3.176), с помощью формулы (3.219) получаем

$$Q_{\gamma,\gamma}(r, t) = \frac{3}{5}\, 2^{11/6} \frac{\sqrt{\pi}\, k_0}{2^{1/3}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} E_\gamma(k_0)\,(k_0 r)^{1/3} K_{1/3}(k_0 r),$$

и, таким образом, условие $Q_{\gamma,\gamma}(0, t) = \gamma'^2$ дает

$$E_\gamma(k_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\frac{3}{5}\, 2^{5/6}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0}\, \gamma'^2.$$

При таком выражении для $E_\gamma(k_0)$ для $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$, $E_\gamma(k, t)$ и $E_{\gamma 1}(k_1, t)$ получаются соответственно следующие формулы:

$$Q_{\gamma,\gamma}(r, t) = \gamma'^2 \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (k_0 r)^{1/3} K_{1/3}(k_0 r), \tag{3.220}$$

$$E_\gamma(k, t) = \gamma'^2 \frac{10}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0} \frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]^{11/}} \tag{3.221}$$

и

$$E_{\gamma 1}(k_1, t) = \gamma'^2 \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0}\left[1 + \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2\right]^{-5/6}. \qquad (3.222)$$

Интегральный масштаб $\Lambda_\gamma$, определяемый по величине $E_{\gamma 1}(0, t)$, на основании соотношений (3.187) и (3.188) запишется так:

$$\Lambda_\gamma(t) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\gamma'^2} E_{\gamma 1}(0, t) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_0} \approx \frac{0{,}75}{k_0}. \qquad (3.223)$$

Сравнение с формулой, полученной для $\Lambda_f$ [см. (3.138)], показывает, что эти величины, выраженные соответственно через $k_0$ и $k_e$, совершенно одинаковы. Точно так же, как $k_e$ оказалось возможным выразить через $u'$ и $\varepsilon$. величину $k_0$ можно выразить через $\gamma'$ и $\varepsilon_\gamma$. Из соотношений (3.216) и (3.221) для больших значений $k/k_0$ получаем

$$k_0(t) = \frac{8}{9}\left[\frac{3}{10}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\right]^{3/2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}\frac{\varepsilon_\gamma^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}\gamma'^3}.$$

Между прочим, можно заметить, что выражения для $Q_{\gamma,\gamma}(r, t)$ и $E_{\gamma 1}(k_1, t)$ идентичны выражениям для $f(r, t)$ и $E_1(k_1, t)$.

*Вырождение изотропного скалярного поля.* Изотропное скалярное поле, присущее изотропно-турбулентному полю скорости или наложенное на него, будет вырождаться вместе с этим полем скорости. Конечно, вполне возможно представить себе изотропное скалярное поле, наложенное на невырождающееся изотропно-турбулентное поле скорости, хотя последнее вряд ли может существовать, пока не будут обеспечены такие условия, при которых энергия, необходимая для поддержания турбулентности, сможет подводиться так, чтобы эта изотропность не нарушалась. Правда, для изучения некоторых основных свойств процесса перемешивания предположение о существовании такого гипотетического случая, видимо, может оказаться весьма полезным. Однако здесь мы пока не будем принимать этого предположения, а сначала рассмотрим оба этих изотропных поля при условии, что они вырождаются одновременно.

Мы уже имели дело с вырождением скалярного поля, в котором как $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{k}$, так и $\mathrm{Re}_\lambda$ были настолько малы, что конвективные члены в динамических уравнениях (3.209) и (3.210) исчезали. В процессе вырождения спектральная функция, так же как и корреляционная

функция, полностью автомодельна, если соответственно $k$ и $r$ выражены через длину $\sqrt{\nu t}$.

Однако нам известно, что если число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda$ уже не очень мало, то в вырождающемся турбулентном поле скорости полная автомодельность функции энергетического спектра или функции корреляции скоростей невозможна.

Здесь может возникнуть вопрос, к каким последствиям приведет предположение о полной автомодельности спектральной и корреляционной функций в процессе вырождения скалярного поля в том случае, когда комплекс $u'\lambda_\gamma/\nu$ не является уже малой величиной. При «вязком» вырождении характерной длиной служила величина $\sqrt{\nu t}$; но вместо нее могла бы быть выбрана любая другая длина, пропорциональная $\sqrt{\nu t}$, например $\lambda_\gamma$ или $\Lambda_\gamma$. Если считать, что полная автомодельность возможна даже при больших значениях $u'\lambda_\gamma/\nu$, то следует пользоваться теми же характерными длинами.

Выберем в качестве характерной длины величину $\lambda_\gamma$ и рассмотрим динамическое уравнение (3.172). В случае полной автомодельности функция $\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(r, t)$ должна зависеть только от $\psi = r/\lambda_\gamma$, где $\lambda_\gamma$ — функция от $t$ (а именно $\lambda_\gamma \sim \sqrt{\nu t}$). Если считать $\psi$ независимой переменной, то уравнение (3.172) преобразуется следующим образом:

$$\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}\frac{d\gamma'^2}{dt} - \gamma'^2\frac{1}{\lambda_\gamma}\frac{d\lambda_\gamma}{dt}\psi\frac{d\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}}{d\psi} - 2\frac{\gamma'^2 u'}{\lambda_\gamma}\frac{1}{\psi^2}\frac{d}{d\psi}(\psi^2\boldsymbol{k}_\gamma) = \\ = 2\nu\frac{\gamma'^2}{\lambda_\gamma^2}\frac{1}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left(\psi^2\frac{d\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}}{d\psi}\right).$$

Пользуясь соотношением (3.174), после некоторых преобразований получаем

$$12\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma} + \frac{\lambda_\gamma}{\nu}\frac{d\lambda_\gamma}{dt}\psi\frac{d\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}}{d\psi} + 2\frac{u'\lambda_\gamma}{\nu}\frac{1}{\psi^2}\frac{d}{d\psi}(\psi^2\boldsymbol{k}_\gamma) + \frac{2}{\psi^2}\frac{d}{d\psi}\left(\psi^2\frac{d\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}}{d\psi}\right) = 0.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\frac{\lambda_\gamma}{\nu}\frac{d\lambda_\gamma}{dt} = \text{const}, \tag{3.224}$$

$$\frac{u'\lambda_\gamma}{\nu} = \text{const}. \tag{3.225}$$

Первый из этих результатов, (3.224), находится в соответствии с тем фактом, что $\lambda_\gamma \sim \sqrt{\nu t}$. Второе соотношение, (3.225), показывает, что величина $\lambda_\gamma$ должна изменяться обратно пропорционально величине $u'$.

Если $u'^2 = Ct^{-n}$, то из (3.225) следует, что величина $\lambda_\gamma$ изменяется согласно зависимости

$$\lambda_\gamma^2 = \text{const}\, t^n. \tag{3.226}$$

Но ввиду того, что $\lambda_\gamma^2 \sim \mathfrak{k}t$, показатель степени $n$ должен быть равен единице. Отсюда следует, что существование полной автомодельности спектральной и корреляционной функций в скалярном поле при больших значениях $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{k}$ возможно лишь в том случае, когда турбулентное поле скорости вырождается по «линейному» закону, т. е. в начальной стадии вырождения.

Постоянная в формуле (3.226) может быть определена из соотношения (3.174) следующим образом. Предположим, что

$$\gamma'^2 = Ct^{-m}. \tag{3.227}$$

Тогда соотношение (3.174) дает

$$\lambda_\gamma^2 = \frac{12\mathfrak{k}}{m}t. \tag{3.228}$$

Сравнение этого выражения с соответствующей формулой (3.146) для $\lambda_g^2$ показывает, что

$$\frac{\lambda_g^2}{\lambda_\gamma^2} = \frac{5}{6}\frac{m}{n}\frac{\nu}{\mathfrak{k}}. \tag{3.229}$$

Это — общее соотношение между $\lambda_g$ и $\lambda_\gamma$, на которое мы ссылались выше.

Величину $m$ в (3.227) можно вычислить, воспользовавшись инвариантным соотношением (3.201). Вследствие полной автомодельности $\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(r, t)$ в процессе вырождения, получаем

$$\frac{2}{\pi}\gamma'^2\lambda_\gamma^3\int_0^\infty \psi^2 \boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(\psi)\, d\psi = I_\gamma,$$

на основании чего можно заключить, что

$$\gamma'^2\lambda_\gamma^3 = \text{const}. \tag{3.230}$$

Тогда, подставляя сюда вместо $\gamma'^2$ выражение (3.227) и заменяя $\lambda_\gamma$ по (3.228), убеждаемся, что условие (3.230) выполняется только в том случае, когда $m = {}^3/_2$.

Отсюда вытекает, что полная автомодельность функций $\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(r, t)$ и $\boldsymbol{E}_\gamma(k, t)$ в процессе вырождения в случае, когда $\mathrm{Re}_\lambda$ и $u'\lambda_\gamma/\mathfrak{k}$ велики, возможна лишь в начальной стадии вырождения поля скорости;

при этом

$$\overline{\gamma'^2} = \text{const}\,(t - t_0)^{-3/2}, \tag{3.231}$$

и

$$\lambda_\gamma^2 = 8\hat{t}\,(t - t_0). \tag{3.232}$$

Эти законы вырождения точно совпадают с соотношениями для «вязкой» области, которая должна соответствовать конечной стадии вырождения поля скорости.

Возможно, что в переходной стадии вырождения, когда интенсивность $\overline{u'^2}$ затухает по степенному закону с показателем степени, изменяющимся от $-1$ до $-5/2$, закон вырождения величины $\overline{\gamma'^2}$ отличается от степенной зависимости с показателем $-3/2$, имеющей место как в начальной, так и в конечной стадии, хотя это и не представляется весьма очевидным. Однако, независимо от характера затухания $\overline{\gamma'^2}$ в переходной стадии, величина $\lambda_\gamma^2$ всегда должна быть пропорциональна $\hat{t}t$; следовательно, комплекс $\overline{u'}\lambda_\gamma/\hat{t}$ не может сохранять постоянного значения. Стало быть, полная автомодельность функций $\boldsymbol{R}_{\gamma,\gamma}(r, t)$ и $\boldsymbol{E}_\gamma(k, t)$ в переходной стадии вырождения невозможна.

*Некоторые экспериментальные данные.* Как уже упоминалось в начале этого параграфа, единственными опубликованными результатами измерений в турбулентном скалярном поле являются данные Кистлера, О'Брайена и Корсина [35] о пульсациях температуры. Эти измерения, которые носят предварительный характер, производились в потоке за решеткой из деревянных стержней с квадратными ячейками ($M = 1$ дюйм, $d = 1/4$ дюйма). Турбулентное поле температуры генерировалось с помощью сетки из нагретых нихромовых проволочек, помещенной на расстоянии 1,5 дюйма вверх по потоку от деревянной решетки, причем проволочки располагались в ряд с деревянными стержнями.

При этом проводились измерения, касающиеся вырождения пульсаций скорости и температуры, продольных и поперечных корреляций скорости и температуры и одномерных спектров пульсаций скорости и температуры. Пульсации измерялись с помощью термоанемометра, который при измерении температуры работал в режиме термометра сопротивления. Спектр пульсаций температуры определялся путем подбора такой температуры нити, при которой ее характеристики по скорости и по температуре имели одинаковый порядок («смешанная» чувствительность). Температурный спектр получался посредством вычитания скоростного спектра, определенного при холодной проволочной сетке, из смешанного спектра. Этот способ правомерен при условии, что все гармоники этих двух спектров не коррелированы друг с другом и, стало быть, происходит суперпозиция этих спектров.

Все измерения производились при средней скорости 420 *см/сек*, которой соответствует число Рейнольдса, отнесенное к размеру ячейки решетки, равное приблизительно $\text{Re}_M = 7000$. В опытах были охвачены расстояния вплоть до $100M$ вниз по потоку от решетки.

Вкратце, результаты этого исследования таковы.

Продольная и поперечная корреляции температуры оказываются одинаковыми, как этого и следовало ожидать, исходя из условия изотропности.

Продольные корреляции скорости и температуры весьма близки друг к другу.

Одномерные спектры $E_1(k_1, t)$ и $E_{\gamma 1}(k_1, t)$ оказались фактически одинаковыми. Однако ни в одном из них не удалось обнаружить более или менее существенного диапазона, для которого был бы справедлив закон «$-5/3$»; этого результата можно было ожидать вследствие довольно низких значений числа Рейнольдса, отнесенного к размеру ячейки решетки.

Сравнения законов вырождения пульсаций $u'$ и $\gamma'$ с теоретическими зависимостями ввиду недостаточности данных не производилось. Однако по данным о вырождении на основании соотношений (3.140) и (3.174) были определены величины $\lambda_\gamma$ и $\lambda_g$. Их отношение $\lambda_\gamma/\lambda_g$ в интервале $20 < x_1/M < 110$ оказалось больше единицы и, слабо возрастая в этом диапазоне, достигало значения 1,6. Кроме того, по имевшимся данным авторы нашли величину $(d\gamma'/du')(u'/\gamma')$, которая, согласно соотношениям (3.140) и (3.174), должна выражаться формулой

$$\frac{d\gamma'}{du'}\frac{u'}{\gamma'} = \frac{6}{5}\frac{t}{\nu}\frac{\lambda_g^2}{\lambda_\gamma^2}$$

или, с учетом (3.146) и (3.228),

$$\frac{d\gamma'}{du'}\frac{u'}{\gamma'} = \frac{m}{n}.$$

Значения, вычисленные по экспериментальным данным о вырождении, при возрастании $x_1/M$ уменьшаются по сравнению с единицей (при $x_1/M = 20$), приближаясь при больших $x_1/M$ к значению 0,6.

Ни величина $\lambda_\gamma/\lambda_g \approx 1{,}6$, ни величина $m/n = 0{,}6$, полученные для больших значений $x_1/M$ (вплоть до $x_1/M = 110$), не согласуются с законами вырождения (3.151) и (3.231) для начальной стадии. Эти величины должны были бы получиться для конечной стадии вырождения, к которой, однако, результаты описанных измерений не относятся. Возможно, что начальной стадии в этих опытах практически и не существовало, а турбулентность уже находилась в переходной стадии или близко к ней. Для проверки теорий, изложенных в этом параграфе, следует, по-видимому, ожидать новых экспериментальных данных.

## § 3.8. Пульсации давления при изотропной турбулентности

Для многих физических явлений важное значение имеют не только пульсации скорости и их корреляции, но также и пульсации статического давления. Так, например, генерирование шума под воздействием турбулентности непосредственно связано с распределением пульсаций давления. Кроме того, наблюдается влияние пульсирующих градиентов давления вблизи твердой стенки на развитие пограничного слоя. Дробление диспергированной фазы при перемешивании несмешивающихся жидкостей, вызванное турбулентностью в непрерывной фазе, — еще один пример влияния распределения пульсаций давления.

Первый вклад в изучение корреляций между пульсирующим давлением в двух соседних точках был сделан Гейзенбергом [15],

Обуховым [36] и Бэтчелором [37]. Позднее Лимбером [38] были опубликованы некоторые численные результаты для корреляций давление — скорость, а Юбероем [39, 40] — более подробные теоретические и экспериментальные данные о квадрупольных корреляциях скорости, связанных с корреляциями пульсирующего давления. Все эти авторы исходили из предположения об однородной турбулентности.

Рассмотрим кратко свойства двойной корреляции между пульсациями давления в двух соседних точках.

Эту двойную корреляцию $(Q_{p,p})_{A,B} = (1/\rho^2)\overline{p_A p_B}$, как непосредственно следует из уравнений движения, можно выразить через корреляцию скорости. В случае несжимаемой жидкости уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} u_i.$$

Взяв от обеих частей этого уравнения дивергенцию, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Перемножая почленно два таких уравнения, записанных отдельно для точек $A$ и $B$, имеем

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}\right)_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B = \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)_A \left(\frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l}\right)_B.$$

Введем $\xi_i = (x_i)_B - (x_i)_A$; тогда вследствие предположения об однородной турбулентности

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 \overline{p_A p_B}}{\partial \xi_i \partial \xi_i \partial \xi_l \partial \xi_l} = \frac{\partial^4 \overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l}.$$

При однородной изотропной турбулентности двойная корреляция $\overline{p_A p_B}$ зависит только от $r^2 = \xi_i \xi_i$. Введем, далее, обозначение

$$\frac{\partial^4 \overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} = M. \tag{3.233}$$

Тогда на основании соотношения

$$\frac{\partial^4 Q_{p,p}}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_l \partial \xi_l} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 Q_{p,p} = \frac{1}{r}\frac{\partial^4 r Q_{p,p}}{\partial r^4}$$

получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^4 r Q_{p,p}}{\partial r^4} = M(r, t). \tag{3.234}$$

Предположим, что функция $Q_{p,p}(r, t)$ при бесконечном возрастании $r$ быстро стремится к нулю и, стало быть, для произвольного значения $n$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{d^n}{dr^n}[rQ_{p,p}(r, t)] = 0.$$

Тогда из выражения (3.234) следует, что

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}[rQ_{p,p}(r, t)] = -\int_r^\infty r' M(r', t)\, dr'.$$

Последовательно получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rQ_{p,p}(r, t)\right] = \int_r^\infty dr' \int_{r'}^\infty r'' M(r'', t)\, dr'' =$$

$$= \left[r' \int_{r'}^\infty r'' M(r'', t)\, dr''\right]_r^\infty + \int_r^\infty r'^2 M(r', t)\, dr' =$$

$$= \int_r^\infty r'(r' - r) M(r', t)\, dr',$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[rQ_{p,p}(r, t)\right] = -\frac{1}{2}\int_r^\infty r'(r' - r)^2 M(r', t)\, dr'$$

и, наконец,

$$Q_{p,p}(r, t) = \frac{1}{3!r}\int_r^\infty r'(r' - r)^3 M(r', t)\, dr'. \qquad (3.235)$$

Следовательно, зная $M(r, t)$, двойную корреляцию $Q_{p,p}(r, t)$ можно вычислить посредством однократного интегрирования.

Примем теперь следующее предположение относительно квадрупольной корреляции $\overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B}$: распределение совместной вероятности этих турбулентных скоростей является нормальным. В этом случае выполняется соотношение

$$\overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B} =$$

$$= \overline{(u_i u_j)_A (u_k u_l)_B} + \overline{(u_i)_A (u_k)_B}\,\overline{(u_j)_A (u_l)_B} + \overline{(u_i)_A (u_l)_B}\,\overline{(u_j)_A (u_k)_B} =$$

$$= Q_{i,j}(0)\, Q_{k,l}(0) + Q_{i,k}(r)\, Q_{j,l}(r) + Q_{i,l}(r)\, Q_{j,k}(r). \qquad (3.236)$$

Экспериментальным подтверждением этого предположения могут, по-видимому, служить опыты Юберoя [39, 40], который одновременно измерял квадрупольную корреляцию скоростей и соответствующие двойные корреляции скорости.

Так как для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_{i,\,l} = 0$$

и т. д., то отсюда следует, что

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j\, \partial \xi_k\, \partial \xi_l} Q_{i,\,k}\, Q_{j,\,l} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k} Q_{j,\,l} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j\, \partial \xi_l} Q_{i,\,k},$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j\, \partial \xi_k\, \partial \xi_l} Q_{i,\,l}\, Q_{j,\,k} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_j\, \partial \xi_l} Q_{i,\,l} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i\, \partial \xi_l} Q_{j,\,k},$$

откуда

$$M(r,\, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k} Q_{j,\,l}(r,\, t) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j\, \partial \xi_l} Q_{i,\,k}(r,\, t). \qquad (3.237)$$

Теперь покажем, что двойные корреляции скорости $Q_{j,\,l}(r,\, t)$ могут быть выражены через $f(r,\, t)$. Если выражение (3.11) подставить в (3.237), то после длительных [37] преобразований (3.237) примет вид

$$M(r,\, t) =$$

$$= 4u'^4 \left[2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right) + \frac{10}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) + \frac{3}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2\right]. \qquad (3.238)$$

Подставляя (3.238) в интеграл равенства (3.235), получаем

$$Q_{p,\,p}(r,\, t) = 2u'^4 \int_r^\infty \left(r' - \frac{r^2}{r'}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)^2 dr'. \qquad (3.239)$$

В частном случае $r = 0$ отсюда имеем

$$\overline{p^2} = \rho^2 Q_{p,\,p}(0,\, t) = 2\rho^2 u'^4 \int_0^\infty r' \left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)^2 dr'.$$

Далее, из (3.239) находим

$$\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)^2} = \lim_{B \to A} \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)_A \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)_B} = -\lim_{B \to A} \frac{\partial^2 \overline{p_A p_B}}{\partial \xi_1\, \partial \xi_1} =$$

$$= -\lim_{r \to 0} \rho^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} Q_{p,\,p}(r,\, t)\right] = 4\rho^2 u'^4 \int_0^\infty \frac{1}{r'} \left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)^2 dr'. \qquad (3.240)$$

В некоторых случаях вместо выражения $Q_{p,\,p}(r,\, t) = (1/\rho^2)\,\overline{p_A p_B}$ представляет интерес рассматривать выражение $(1/\rho^2)\,\overline{(p_A - p_B)^2}$, которое связано с $Q_{p,\,p}(r,\, t)$ следующим образом:

$$\frac{1}{\rho^2}\,\overline{(p_A - p_B)^2} = 2\,[Q_{p,\,p}(0,\, t) - Q_{p,\,p}(r,\, t)]. \qquad (3.241)$$

Интегралы в формулах (3.239) и (3.240) берутся, если известна продольная корреляция $f(r,\, t)$. Вследствие того, что эта корреляция

зависит от числа Рейнольдса турбулентности, для корреляций давления в различных случаях получаются и различные выражения.

Рассмотрим вначале малые числа Рейнольдса. В этом случае выражение для $f(r, t)$ имеет вид [см. (3.45)]

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda_f^2}\right).$$

Подстановка в формулу (3.239) и последующее интегрирование дают

$$Q_{p,p}(r, t) = u'^4 \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda_f^2}\right),$$

или

$$\frac{Q_{p,p}(r, t)}{Q_{p,p}(0, t)} = \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda_f^2}\right).$$

Это выражение показывает, что двойная корреляция давления с увеличением $r$ уменьшается быстрее, чем продольная корреляция скорости.

Для интенсивности пульсаций давления имеем

$$p' = \rho \sqrt{Q_{p,p}(0, t)} = \rho u'^2.$$

Обратимся теперь к области больших чисел Рейнольдса и рассмотрим прежде всего эмпирическое соотношение

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r}{\Lambda_f}\right),$$

которое приводит к следующей формуле для $Q_{p,p}(r, t)$:

$$Q_{p,p}(r, t) = 2u'^4 \left[\left(\frac{r}{2\Lambda_f} + \frac{1}{4}\right)\exp\left(-\frac{2r}{\Lambda_f}\right) - \frac{r^2}{\Lambda_f^2} Ei\left(-\frac{2r}{\Lambda_f}\right)\right],$$

где

$$Ei(-x) = -\int_0^\infty \frac{\exp(-y)}{y}\, dy.$$

Отсюда

$$p' = \rho \sqrt{Q_{p,p}(0, t)} = \frac{\rho u'^2}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7\rho u'^2.$$

Бэтчелор [37] произвел численную оценку интеграла (3.239), исходя из формы зависимости $f(r, t)$, соответствующей измерениям Праудмена [18] в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса. Согласно этим данным, отношение $Q_{p,p}(r, t)/Q_{p,p}(0, t)$ с увеличением $r$ тоже убывает быстрее, чем функция $f(r, t)$. Для интенсивности пульсаций давления Бэтчелор получил формулу

$$p' = \sqrt{0{,}34}\, \rho u'^2 = 0{,}58\rho u'^2.$$

При больших числах Рейнольдса, соответствующих, например, инерционной подобласти энергетического спектра, для функции $f(r, t)$ выше было получено следующее выражение, справедливое при малых значениях $r$:

$$f(r, t) = 1 - \frac{A}{u'^2}(\varepsilon r)^{2/3}.$$

Для этих значений $r$ можно по формуле (3.241) определить величину $\overline{(p_A - p_B)^2}$. Используя (3.239), получаем

$$\overline{(p_A - p_B)^2} = 2\rho^2 [Q_{p,p}(0, t) - Q_{p,p}(r, t)] =$$

$$= 4\rho^2 u'^4 \left[ \int_0^r r' \left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)^2 dr' + r^2 \int_r^\infty \frac{1}{r'} \left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)^2 dr' \right].$$

Ввиду того, что основной вклад в подынтегральное выражение во втором интеграле приходится на долю величины $f(r, t)$ при малых $r$,

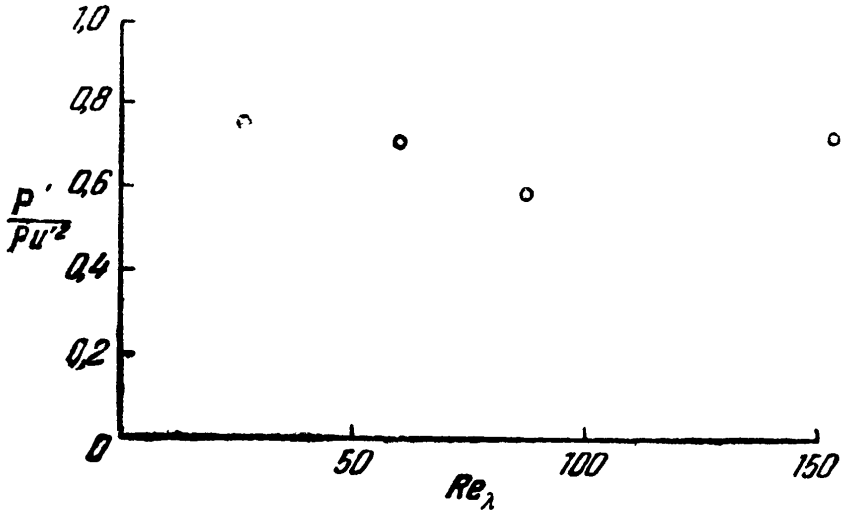



Рис. 3.21. Величина $p'/\rho u'^2$ при различных значениях $\mathrm{Re}_\lambda$ [40].

этот интеграл можно вычислить приближенно путем замены функции $f(r, t)$ приведенным выше выражением, которое является точным только для малых значений $r$. Результат подобного расчета записывается в виде

$$\overline{(p_A - p_B)^2} = 4\rho^2 u'^4 \frac{A^2}{u'^4}(\varepsilon r)^{4/3} = 4\rho^2 u'^4 [1 - f(r, t)]^2 = \rho^2 [\overline{(u_A - u_B)^2}]^2.$$

Юберой [39, 40] определил $p'$ для различных чисел Рейнольдса. Его результаты, приведенные на рис. 3.21, указывают на то, что величина $p'/\rho u'^2$, по-видимому, лежит ближе к 0,7, нежели к 0,58.

## § 3.9. Замечания о влиянии сжимаемости

В гидродинамике обычно принято и допустимо пренебрегать влиянием сжимаемости, если число Маха $\mathsf{M} \ll 1$. Это было показано в § 1.2. При анализе турбулентности можно ввести в рассмотрение среднеквадратичное число Маха $\mathsf{M} = u'/c$, где $c$ — скорость звука.

Однако в некоторых случаях, даже если $\mathsf{M} = u'/c \ll 1$, влиянием сжимаемости пренебрегать нельзя. Это относится, например, к генерированию звука турбулентностью; применительно к этому явлению сжимаемость оказывается существенной особенностью жидкости. Следовательно, влияние сжимаемости жидкости на характерные свойства турбулентности может представлять интерес даже при малых значениях числа Маха.

В главе 1 было показано, что, если учитывать влияние сжимаемости, осредненное движение будет зависеть не только от турбулентных напряжений сдвига, но также и от напряжений, связанных с двойными и тройными корреляциями, в которые входит пульсация плотности $\tilde{\rho}$ [см. уравнение (1.16)].

В случае несжимаемой жидкости мы подробно изучили структуру изотропной турбулентности, основываясь на характерных свойствах двойной корреляции скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$. Как показал Кшивоблоцкий [41, 42], соотношения, подобные формулам для несжимаемой жидкости, оказывается возможным найти также и в рассматриваемом случае для различных корреляций второго, третьего и более высоких порядков: $\overline{(\rho u_i)_A (\rho u_j)_B}$, $\overline{\rho_A (u_i)_A p_B}$, $\overline{(\rho u_i)_A (u_k)_A (\rho u_j)_B}$, ... Эти корреляции получаются из уравнений движения для плотности тока $\rho u_i$ относительно двух точек $A$ и $B$ рассматриваемого поля течения, которые дают в результате динамическое уравнение для корреляции $\overline{(\rho u_i)_A (\rho u_j)_B}$. Однако даже в случае несжимаемой жидкости получить полные решения динамических уравнений для двойной корреляции $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ оказалось невозможным. Излишне доказывать, что в случае сжимаемой жидкости это тем более безнадежно.

Пытаясь проникнуть в сущность влияния сжимаемости на турбулентность, Чандрасекар [43] рассмотрел корреляцию между пульсациями плотности в двух точках $\Omega = \overline{\tilde{\rho}_A \tilde{\rho}_B}$. Он показал, что вследствие условия сохранения массы (уравнение неразрывности) величина $\Omega$ должна удовлетворять следующему условию инвариантности:

$$\int_0^\infty r^2 \Omega (r, t)\, dr = \text{const},$$

если только изотропные тензоры первого ранга $\overline{\tilde{\rho}_A (u_i)_B}$, $\overline{\tilde{\rho}_A \tilde{\rho}_B (u_i)_B}$ с увеличением $r$ уменьшаются достаточно быстро.

Из уравнений движения Чандрасекар вывел динамическое уравнение для $\Omega(r, t)$. Он показал, что при малых среднеквадратичных значениях числа Маха $u'/c \ll 1$ решение для $\Omega(r, t)$ может быть выражено в виде суперпозиции сферических волн, распространяющихся со скоростью $\sqrt{2}c$. Таким образом, любое изменение в распределении давления, а стало быть и в распределении плотности, тоже распространяется с конечной скоростью. Излучаемая при этом энергия под действием вязкости в конечном счете преобразуется в тепло. Следовательно, сжимаемость воздействует как еще один источник диссипации энергии в дополнение к вязким напряжениям сдвига. Это влияние можно заметить также и при непосредственном рассмотрении уравнений движения, так как в них содержится вязкий член, включающий в себя сжимаемость жидкости (или дилатацию $\theta$). Лайтхилл [44] показал, что благодаря влиянию сжимаемости скорость диссипации энергии турбулентности возрастает пропорционально коэффициенту

$$1 + 40\mathbf{M}^5.$$

Это соотношение справедливо для значений $\mathbf{M}$, не превышающих примерно 0,5.

Лайтхилл [45] и Праудмен [46] исследовали генерирование звука под действием турбулентности более подробно. Звук, генерированный при изотропной турбулентности, отличается от звука сирены или колокола и представляет собой непрерывное поле квадруполей, возбужденных пульсациями потока импульса $\overline{\rho u_i u_j}$. Соответствующие пульсации плотности повышают среднеквадратичное значение давления. Это повышение очень невелико, и его можно оценить с помощью соотношения

$$p'^2 = \tilde{\rho}^2 u'^4 \left(A + 40\frac{\mathbf{M}^4}{e\Lambda}\right),$$

где $A$ — численная постоянная порядка 1, $e$ — скорость диссипации акустической энергии на единицу длины [когда энергия звука затухает, как $\exp(-er)$], $\Lambda$ — масштаб длины турбулентности.

Из анализа приведенных выше выражений для учета влияния сжимаемости на диссипацию энергии турбулентности и пульсацию $p'$ можно сделать вывод, что при малых среднеквадратичных значениях числа Маха это влияние действительно очень слабо. Однако при более высоких значениях числа Маха это положение изменяется. Известно, что распространение волн расширения и сжатия при больших числах Маха происходит с повышенной кривизной фронтов, в результате чего образуются ударные волны. Взаимодействие между ударными волнами порождает дополнительную завихренность. Основываясь на этом, Лайтхилл [44] пришел к выводу, что, поскольку система ударных волн способна генерировать дополнительную турбулентность, свойства турбулентности при $\mathbf{M} \approx 1$ или выше должны существенно отличаться от свойств, присущих турбулентности в несжимаемой жидкости.

# УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

$c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

$\boldsymbol{E}_{i,j}$ — спектральный тензор кинетической энергии турбулентности.

$\boldsymbol{E}(k, t)$ — $2\pi k^2 \boldsymbol{E}_{i,i}(k, t)$ — функция трехмерного энергетического спектра.

$e_{i,j}$ — направляющие косинусы.

$\boldsymbol{F}_{ik,j}$ — преобразование Фурье от $\boldsymbol{S}_{ik,j}$.

$\boldsymbol{F}_{i,j}$ — преобразование Фурье от $\boldsymbol{E}_{i,j}$.

$\boldsymbol{F}(k, t)$ — $2\pi k^2 \boldsymbol{F}_{i,i}(k, t)$ — спектральная функция пространственного переноса.

$\boldsymbol{f}$ — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.

$\boldsymbol{g}$ — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.

$H$ — приток энергии к турбулентному движению.

$\boldsymbol{h}$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$I$ — $\dfrac{u'^2}{3\pi}\int\limits_0^\infty r^4 \boldsymbol{f}(r, t)\, dr$ — интеграл Лойцянского.

$\boldsymbol{K}_i$ — корреляционный тензор первого ранга.

$\boldsymbol{k}$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$k$ — $2\pi n/\bar{U}$ — волновое число; $k_i$ — компонента вектора волнового числа; $k_e$ — волновое число из диапазона энергосодержащих вихрей; $k_d$ — волновое число из диапазона основной диссипации.

$l_e$ — средний размер энергосодержащих вихрей.

$M$ — размер ячейки решетки.

$\mathsf{M}$ — число Маха.

$n$ — частота.

$p$ — турбулентная пульсация статического давления.

$\boldsymbol{Q}_{i,j}$ — тензор корреляции скорости второго ранга.

$q$ — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

$\mathsf{Re}$ — число Рейнольдса; $\mathsf{Re}_\lambda = u'\lambda_g/\nu$; $\mathsf{Re}_M = \bar{U}_1 M/\nu$.

$r$ — расстояние между точками.

$S_{i,kj}$ или $S_{ik,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.

$t$ — время.

$U_i$ — эйлерова скорость; $\bar{U}_i$ — осредненная по времени величина; $u_i$ — компонента турбулентной пульсации;

$u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}}$ — среднеквадратичная величина компоненты турбулентной пульсации скорости; $u_r$ — радиальная компонента; $u_n$ — нормальная компонента.

$x_i$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

$\alpha$ — постоянная Гейзенберга применительно к коэффициенту вихревой вязкости $\epsilon$.

$\beta$ — постоянная Гейзенберга применительно к коэффициенту вихревой диффузии $\epsilon_\gamma$.

$\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

$\varepsilon_{ijk}$ — антисимметричный единичный тензор.

$\varepsilon$ — диссипация на единицу массы под действием турбулентности.

$\varepsilon_\gamma$ — «диссипация» пульсаций $\gamma$.

$\epsilon$ — коэффициент вихревой вязкости; $\epsilon_\gamma$ — коэффициент вихревой диффузии.

$\eta$ — $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$.

$\Gamma$ — скалярная субстанция; $\tilde{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; $\gamma$ — турбулентная пульсация.

$\Gamma$ — гамма-функция.

$i$ — $\sqrt{-1}$.

$\kappa$ — коэффициент теплопроводности.

$\mathfrak{k}$ — $\kappa/c_p\rho$.

$\Lambda$ — пространственный интегральный масштаб; $\Lambda_f$ — продольный масштаб; $\Lambda_g$ — поперечный масштаб.

$\lambda$ — пространственный микромасштаб; $\lambda_f$ — продольный масштаб; $\lambda_g$ — поперечный масштаб.

$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

$\pi$ — 3,14159...

$\mathcal{R}$ — $\varepsilon t^2/\nu$.

$\rho$ — плотность; $\bar{\rho}$ — осредненная по времени величина; $\tilde{\rho}$ — турбулентная пульсация.

$\sigma_{ij}$ — тензор напряжений.

$\Theta$ — температура; $\bar{\Theta}$ — осредненная по времени величина; $\theta$ — турбулентная пульсация.

$v$ — $(\nu/\varepsilon)^{1/4}$.

$\xi_i$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

# ГЛАВА 4

# НЕИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

## § 4.1. Введение

Число работ, посвященных созданию теории неизотропной турбулентности, которые по своей завершенности походили бы на изложенные в предыдущей главе теории изотропной турбулентности, невелико. Основной причиной такого положения является чрезвычайное усложнение рассматриваемых проблем, как только речь заходит о неизотропности. Чтобы почувствовать это, читателю следует лишь обратиться к почти непреодолимым трудностям, встречающимся даже в теориях турбулентности наипростейшего типа, а именно изотропной турбулентности.

Осесимметричная турбулентность, второй по простоте после изотропной тип турбулентности, была впервые подвергнута анализу в нескольких работах Бэтчелора [1] и немного позднее рассматривалась Чандрасекаром [2, 3]. В отличие от изотропной турбулентности, в которой имеет место сферическая симметрия, осесимметричная турбулентность обладает симметрией только относительно заданного направления. Предполагается, что основное течение происходит именно в этом направлении и является равномерным, а турбулентность считается однородной. Среднее значение любой функции от скоростей и их производных инвариантно относительно поворота вокруг оси, совпадающей с заданным направлением, и относительно отражения от плоскостей, проходящих через эту ось и перпендикулярных к ней. Бэтчелор и Чандрасекар рассмотрели кинематику турбулентности этого типа почти с такой же исчерпывающей полнотой, как это оказалось возможным в случае изотропной турбулентности, и получили в замкнутом виде выражения для различных корреляционных тензоров чсрез минимальное число определяющих скаляров.

Хотя, если следовать этим авторам, осесимметричная турбулентность, возможно, и ближе к действительности, чем изотропная турбулентность,

тем не менее она все еще далека от действительной турбулентности в силу предположений о равномерности основного течения и об отсутствии осредненных турбулентных напряжений сдвига. В этой главе мы не будем заниматься дальнейшим рассмотрением осесимметричной турбулентности, а ограничимся лишь перечислением того, что было внесено в теорию турбулентного потока со сдвигом, включая корреляции между скоростями и их производными. Хотя результаты, о которых идет речь, и являются пока еще весьма скудными, они наверняка помогут объяснить некоторые из характерных особенностей реальной турбулентности в потоке со сдвигом и, возможно, будут способствовать несколько лучшему пониманию ее.

В дальнейшем мы будем предполагать, что жидкость является несжимаемой, а основное движение — стационарным.

Поскольку турбулентные движения взаимодействуют с основным движением, так что каждое из них оказывает влияние на другое, наличие стационарного основного движения дает основания полагать, что статистические соотношения между турбулентными движениями тоже могут быть независимыми от времени. Однако, несмотря на предположение о стационарности основного движения, мы все же сохраним зависимость этих статистических соотношений от времени, с тем чтобы продемонстрировать некоторые тенденции обоюдного влияния их временны́х зависимостей.

Вначале мы рассмотрим динамику корреляций между компонентами скорости в некоторой точке турбулентного течения, а затем дадим обобщение на корреляции между скоростями в двух точках этого течения. В последнем случае задача значительно упрощается, если принять предположение об однородности. В главе 1 мы уже выяснили многие характеристики корреляций скорости, исходя всего-навсего из предположения об однородности. Однородную турбулентность со сдвигом можно представить себе только в том случае, если в основном потоке имеется постоянный градиент скорости в поперечном направлении по всему течению. Ограничение проблемы течением именно этого типа значительно способствует ее упрощению.

Как показали Бюргерс и Митчнер [4], для этого типа турбулентного течения со сдвигом отсутствие ограничивающих стенок означает отсутствие масштаба длины, который определял бы крупномасштабную структуру турбулентности (в отличие от реального течения). Согласно гипотезе подобия Кармана (см. главу 5), крупномасштабная структура в любом реальном турбулентном течении определяется масштабом, который представляется отношением $(\partial \overline{U}_i/\partial x_j)/(\partial^2 \overline{U}_i/\partial x_j^2)$ при $i \neq j$ (без какого-либо суммирования); при постоянном значении градиента скорости это отношение обращается в бесконечность.

Поскольку такой однородно турбулентный поток со сдвигом неосуществим, его тоже можно рассматривать как некоторый гипотетический случай, правда, менее отдаленный от случая реальной турбулентности, нежели рассмотренные до сих пор течения других типов.

## § 4.2. Динамика одноточечной корреляции скорости $\overline{u_i u_j}$

Динамическое уравнение для корреляции $\overline{u_i u_j}$ получается точно тем же способом, как и в предыдущих главах.

Уравнение движения несжимаемой жидкости для случая стационарного основного течения имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\overline{U}_k + u_k)\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U}_i + u_i) = \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}(\overline{U}_i + u_i)$$

или, если к левой части прибавить $u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U}_k\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} + u_k\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{U}_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}u_i u_k = \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}(\overline{U}_i + u_i).$$

Вычитая отсюда почленно уравнение, полученное после осреднения данного уравнения, получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{U}_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k - \overline{u_i u_k}) = \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}. \quad (4.1)$$

Запишем то же уравнение для компоненты скорости $u_j$. Умножим обе части уравнения (4.1) на $u_j$, а обе части уравнения для $u_j$ на $u_i$ и затем сложим оба этих уравнения. В результате после осреднения имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i u_j} + \overline{u_j u_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{U}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i u_j} = \\ = -\left(\overline{u_j\frac{\partial}{\partial x_k}u_i u_k} + \overline{u_i\frac{\partial}{\partial x_k}u_j u_k}\right) - \\ - \frac{1}{\rho}\left(\overline{u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}}\right) + \nu\left(\overline{u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}} + \overline{u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}}\right). \quad (4.2)$$

Ввиду того, что

$$\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_j} - p\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \quad \text{и} \quad \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{pu_i} - p\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}},$$

$$\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k} + \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k} = \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_j u_k},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\overline{u_i u_j} = \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}} + \overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l}} + 2\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}},$$

уравнение (4.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i u_j} + \overline{u_j u_k}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i u_j} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i u_j u_k} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{pu_i}\right) + \frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} +$$

$$+ \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_l \partial x_l} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}. \quad (4.3)$$

Применяя здесь свертывание индексов, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i u_i} + 2\overline{u_i u_k}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i u_i} =$$

$$= -2\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_i}{2}\right)u_k} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i u_i}}{\partial x_l \partial x_l} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{q^2}}{2} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\overline{q^2}}{2} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}\right)u_k} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\frac{\overline{q^2}}{2} - \nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}},$$

что представляет собой уравнение энергии турбулентности (1.99), которое уже приводилось в главе 1, но вывод его был сделан иным способом. Интерпретация смысла различных членов этих уравнений дана в той же главе 1.

Анализируя уравнение (4.3), можно обнаружить некоторые интересные свойства, связанные с влиянием диффузии, вязкости и взаимодействия между компонентами скорости через их взаимные корреляции и корреляции давление—скорость на изменение отдельных членов корреляционного тензора $\overline{u_i u_j}$. Чтобы упростить выкладки, остановимся на случае плоского основного потока с компонентами осредненной скорости $\bar{U}_1 = f(x_2)$, $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0$ и однородного в направлении осей $x_1$ и $x_3$, но не обязательно в направлении оси $x_2$.

Ввиду симметрии потока относительно плоскостей, перпендикулярных к оси $x_3$, все корреляции, содержащие величину $u_3$ и ее

нечетные производные по $x_3$, обращаются в нуль. Отсюда все члены уравнений (4.3) с корреляциями $\overline{u_1 u_3}$ и $\overline{u_2 u_3}$ также являются нулями.

Остающиеся при этом уравнения системы (4.3), а именно уравнения для $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ и $\overline{u_1 u_2}$, имеют соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_1^2} = -2\overline{u_1 u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1^2 u_2} + \frac{2}{\rho}\overline{p\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} + \nu\frac{\partial^2 u_1^2}{\partial x_2^2} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\frac{\partial u_1}{\partial x_l}}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_2^2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2^3} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{pu_2} + \frac{2}{\rho}\overline{p\frac{\partial u_2}{\partial x_2}} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\overline{u_2^2} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_l}\frac{\partial u_2}{\partial x_l}}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_2^2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_3^2 u_2} + \frac{2}{\rho}\overline{p\frac{\partial u_3}{\partial x_3}} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\overline{u_3^2} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_3}{\partial x_l}\frac{\partial u_3}{\partial x_l}}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_1 u_2} = -\overline{u_2^2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1\left(u_2^2 + \frac{p}{\rho}\right)} + \overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\overline{u_1 u_2} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\frac{\partial u_2}{\partial x_l}}. \tag{4.7}$$

Таким образом, в итоге имеем следующее: изменение величин $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ и $\overline{u_1 u_2}$ по времени определяется конвективной диффузией и влиянием вязкости, обусловленными неоднородностью потока в направлении оси $x_2$, порождением энергии или переносом энергии от основого движения через турбулентные напряжения сдвига, эффектами, связанными с корреляциями между пульсациями давления и производными от пульсаций скорости, а также влиянием вязкости, носящим, в основном, диссипативный характер.

Слагаемые, зависящие от неоднородности поля течения, в зависимости от вида распределения неоднородности могут иметь либо положительный, либо отрицательный знак.

Вязкие члены типа $2\nu\overline{(\partial u_1/\partial x_l)(\partial u_1/\partial x_l)}$ и т. д. входят в соответствующие суммы для компонент интенсивности турбулентности с отрицательным знаком.

Что касается слагаемого, характеризующего порождение энергии $\overline{u_1 u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}$, то можно заметить, что оно появляется только в уравнении для компоненты $\overline{u_1^2}$.

Если рассмотреть, далее, случай $\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} > 0$, то величина $\overline{u_1 u_2}$ б[illegible] отрицательной.

Тогда слагаемое, связанное с порождением энергии, будет входить с положительным знаком в выражение для зависимости $\overline{u_1^2}$ от времени в отличие от уравнений для других компонент турбулентности. Следовательно, результатом порождения турбулентности является неизотропность, связанная с осевой компонентой турбулентной пульсации скорости.

Каково влияние корреляции давление—градиент скорости $\overline{p\,\partial u_1/\partial x_1}$? Для анализа этого влияния следует лишь предположить, что если $\overline{u_1^2}$ намного больше, чем $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$, то в среднем эта корреляция дает отрицательный вклад в величину $\dfrac{\overline{\partial u_1^2}}{\partial t}$. Это, конечно, не является точным аргументом или доказательством.

Возьмем в поле течения, движущемся с местной средней скоростью $\overline{U}_1$, некоторую точку $O$ и рассмотрим турбулентное движение относительно нее. Пусть в заданный момент времени турбулентные скорости направлены так, как это показано на рис. 4.1, *а*. Предположим, что $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}$; это может быть обусловлено, например,

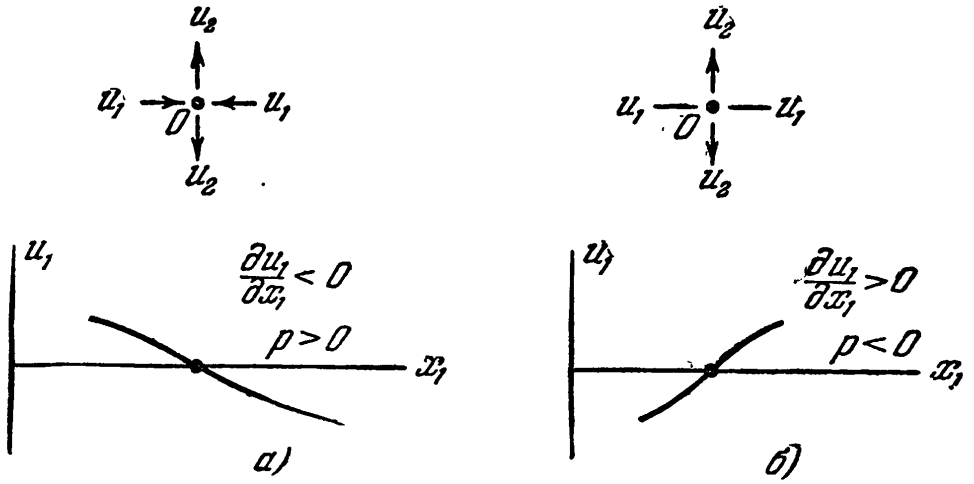



Рис. 4.1. К определению корреляции скорость — давление $\overline{p\,\partial u_1/\partial x_1}$.

влиянием слагаемого, связанного с порождением энергии, которое содержится только в уравнении для $\overline{u_1^2}$. Тогда замедленному пространственному движению со скоростью $u_1$ в направлении к рассматриваемой точке будет соответствовать положительная величина местного давления $p$. Следовательно, имеем $\partial u_1/\partial x_1 < 0$ и $p > 0$, так что $p\,\partial u_1/\partial x_1 < 0$. Но в то же время $\partial u_2/\partial x_2 > 0$ и $\partial u_3/\partial x_3 > 0$, так что $p\,\partial u_2/\partial x_2 > 0$ и $p\,\partial u_3/\partial x_3 > 0$. Это является следствием уравнения неразрывности, ибо $p(\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3) = 0$; из того факта, что $p\,\partial u_1/\partial x_1 < 0$, следует $p(\partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3) > 0$.

Обратный случай (рис. 4.1, *б*) ускоренного пространственного движения со скоростью $u_1$ в направлении от рассматриваемой точки связан с отрицательной величиной $p$. Следовательно, $\partial u_1/\partial x_1 > 0$ и $p < 0$, и опять-таки $p\,\partial u_1/\partial x_1 < 0$, $p\,\partial u_2/\partial x_2 > 0$ и $p\,\partial u_3/\partial x_3 > 0$.

Отсюда следует, что если в среднем $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}$, то также в среднем $\overline{p\,\partial u_1/\partial x_1} < 0$, $\overline{p\,\partial u_2/\partial x_2} > 0$ и $\overline{p\,\partial u_3/\partial x_3} > 0$. Значит, корреляция давление — градиент скорости $\overline{p\,\partial u_1/\partial x_1}$ уменьшает величину $\partial\overline{u_1^2}/\partial t$, а корреляции $\overline{p\,\partial u_2/\partial x_2}$ и $\overline{p\,\partial u_3/\partial x_3}$ увеличивают соответственно величины $\partial\overline{u_2^2}/\partial t$ и $\partial\overline{u_3^2}/\partial t$. Окончательный вывод состоит в том, что поперечные компоненты $u_2$ и $u_3$ возрастают за счет осевой компоненты $u_1$ благодаря переносу энергии через посредство корреляции давление — градиент скорости. Влияние этой корреляции приводит к выравниванию всех трех компонент скорости, т. е. к тому, что турбулентность становится более изотропной.

Логично предположить [5], что перенос энергии от компоненты с большей интенсивностью к компоненте с меньшей интенсивностью через посредство корреляции давление — градиент скорости пропорционален разности интенсивностей, а именно:

$$\overline{p\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \sim -\left[\overline{u_1^2} - \left(\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}\right)\right] = -\left(2\overline{u_1^2} - \overline{q^2}\right). \tag{4.8}$$

Обратимся к уравнению для компоненты турбулентного напряжения сдвига $\overline{u_1 u_2}$ из системы (4.7), ограничиваясь опять-таки рассмотрением членов, связанных с порождением энергии и с корреляцией давление — градиент скорости.

Если снова взять случай $\partial\overline{U}_1/\partial x_2 > 0$, то порождение энергии $\overline{u_2^2}\,\partial\overline{U}_1/\partial x_2$ войдет в выражение для $\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_1 u_2}$ с отрицательным знаком. Но ввиду того, что при $\partial\overline{U}_1/\partial x_2 > 0$ имеем $\overline{u_1 u_2} < 0$, указанный отрицательный знак приведет к увеличению значения $\overline{u_1 u_2}$. Такой же результат получается, если $\partial\overline{U}_1/\partial x_2 < 0$; при этом $\overline{u_1 u_2} > 0$.

Докажем теперь, что величина

$$\frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)}$$

входит в выражение для $\partial\overline{u_1 u_2}/\partial t$ с положительным знаком, если $\overline{u_1 u_2} < 0$, и с отрицательным знаком, если $\overline{u_1 u_2} > 0$. Для этой цели выразим корреляцию $\overline{u_1 u_2}$ через компоненты турбулентной пульсации скорости $u_{1*}$ и $u_{2*}$ соответственно вдоль осей $x_{1*}$ и $x_{2*}$, которые

образуют с осями $x_1$ и $x_2$ угол $\varphi$ (см. рис. 4.2). Пусть точка $O$ находится в жидкости и движется вместе с осредненным потоком со скоростью $\overline{U}_1$. Тогда имеем

$$u_1 = u_{1*}\cos\varphi - u_{2*}\sin\varphi,$$
$$u_2 = u_{1*}\sin\varphi + u_{2*}\cos\varphi,$$

откуда

$$\overline{u_1u_2} = (\overline{u_{1*}^2} - \overline{u_{2*}^2})(\sin 2\varphi)/2 + \overline{u_{1*}u_{2*}}\cos 2\varphi.$$

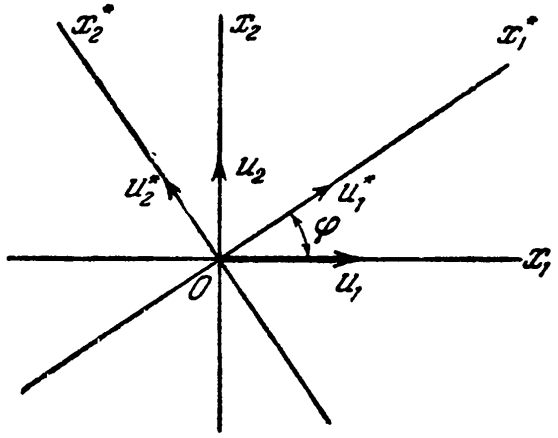



Рис. 4.2. К определению корреляции $\overline{u_1u_2}$.

Положим $\varphi = 45°$, так что оси $x_{1*}$ и $x_{2*}$ становятся главными осями распределения турбулентного напряжения; тогда

$$2\overline{u_1u_2} = \overline{u_{1*}^2} - \overline{u_{2*}^2}. \qquad (4.9)$$

Из формул преобразования осей координат можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} - \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*}\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*}\right)\cos 2\varphi.$$

При $\varphi = 45°$, т. е. при преобразовании к главным осям,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} - \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*},$$

следовательно,

$$\overline{p\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)} = \overline{p\left(\frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{1*}} - \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{2*}}\right)}.$$

Если воспользоваться соотношением (4.8) и принять те же значения коэффициентов пропорциональности, то на основании (4.9) получим

$$\overline{p\left(\frac{\partial u_{1*}}{\partial x_{1*}} - \frac{\partial u_{2*}}{\partial x_{2*}}\right)} \sim -2(\overline{u_{1*}^2} - \overline{u_{2*}^2}) = -4\overline{u_1u_2}$$

и

$$\overline{p\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)} \sim -4\overline{u_1u_2}.$$

Следовательно, величины $\overline{p(\partial u_2/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_2)}$ и $\overline{u_1u_2}$ обязательно должны иметь противоположные знаки, а влияние корреляции давле-

ние — градиент скорости должно проявляться в уменьшении абсолютной величины $\overline{u_1 u_2}$.

Ротта [5] произвел количественную оценку корреляции давление — градиент скорости и пришел к следующему выражению:

$$\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}=-A\rho\frac{\sqrt{\overline{q^2}}}{\Lambda}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{q^2}\right),$$

где $A$ — численная постоянная порядка единицы, а $\Lambda$ — интегральный масштаб турбулентности.

Бюргерс и Митчнер [4] показали, что при малых волновых числах $k$ функция, получаемая в результате преобразования Фурье из корреляции давление — градиент скорости, очень быстро возрастает с увеличением $k$ (при очень малых $k$ — пропорционально $k^4$). Стало быть, влияние этой корреляции с ростом волнового числа усиливается.

Полученный выше результат вкратце можно сформулировать следующим образом: турбулентное напряжение сдвига $\overline{u_1 u_2}$ может возникнуть только в том случае, когда осредненный поток является неравномерным.

Корреляции давление — градиент скорости имеют тенденцию ослабить неизотропность путем выравнивания всех трех компонент турбулентной пульсации скорости и уменьшения турбулентного напряжения сдвига.

Тенденция к изотропности сильнее всего проявляется в зоне мелкомасштабной турбулентности.

В связи с тем, что влияние вязкости через диссипацию с увеличением интенсивности турбулентности возрастает, то, коль скоро речь идет о неизотропной турбулентности, оно должно приводить к более быстрому затуханию компонент с высокой интенсивностью, нежели компонент с меньшей интенсивностью; иначе говоря, этот фактор также имеет тенденцию к выравниванию компонент. В этом случае рассмотренный эффект в диапазоне больших волновых чисел тоже проявляется сильнее.

## § 4.3. Динамика двухточечной корреляции скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$

Выведем сначала динамическое уравнение для этой корреляции для общего случая неоднородной и неизотропной турбулентности. Хотя это уравнение и не поддается полному решению, все же, прежде чем перейти к рассмотрению более простого случая однородной турбулентности, весьма полезно также дать здесь и его вывод.

Возьмем уравнение (4.1), отнесенное к точке $A$, и умножим обе его части на величину $(u_j)_B$, соответствующую точке $B$:

$$(u_j)_B\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_A+(u_j)_B(u_k)_A\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right)_A+(u_j)_B(\overline{U}_k)_A\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)_A=$$
$$=-(u_j)_B\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(u_iu_k-\overline{u_iu_k})\right]_A-\frac{1}{\rho}(u_j)_B\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_A+\nu(u_j)_B\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_A.$$

Аналогично умножим обе части уравнения (4.1), отнесенного к точке $B$, на компоненту скорости, соответствующую точке $A$. Суммируя левые и правые части полученных соотношений, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_i)_A(u_j)_B+(u_j)_B(u_k)_A\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right)_A+(u_i)_A(u_k)_B\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k}\right)_B+$$
$$+(\overline{U}_k)_A\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A(u_i)_A(u_j)_B+(\overline{U}_k)_B\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B(u_i)_A(u_j)_B=$$
$$=-\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A(u_j)_B(u_i)_A(u_k)_A-\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B(u_i)_A(u_j)_B(u_k)_B+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A(u_j)_B\overline{(u_iu_k)}_A+\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B(u_i)_A\overline{(u_ju_k)}_B-$$
$$-\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A p_A(u_j)_B+\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_B p_B(u_i)_A\right]+$$
$$+\nu\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_A+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_B\right](u_i)_A(u_j)_B.$$

Вследствие неоднородности турбулентности, осредненные значения различных произведений скоростей турбулентных пульсаций, встречающихся в этом уравнении, зависят не только от расстояния между выбранными точками $A$ и $B$, но и от местоположения этих точек в поле течения. Чтобы провести различие между влиянием расстояния и влиянием местоположения, введем в качестве новых независимых переменных [4] следующие величины:

$$\xi_k=(x_k)_B-(x_k)_A, \tag{4.10а}$$
$$(x_k)_{AB}=\frac{1}{2}[(x_k)_A+(x_k)_B]. \tag{4.10б}$$

Таким образом, для любой величины, которая зависит от $(x_k)_{AB}$ и $\xi_k$, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A=\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}\frac{\partial(x_k)_{AB}}{(\partial x_k)_A}+\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{(\partial x_k)_A}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}-\frac{\partial}{\partial \xi_k}, \tag{4.11а}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B=\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}\frac{\partial(x_k)_{AB}}{(\partial x_k)_B}+\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{(\partial x_k)_B}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}+\frac{\partial}{\partial \xi_k}, \tag{4.11б}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_A=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_{AB}+\frac{\partial^2}{\partial \xi_l\,\partial \xi_l}-\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}\frac{\partial}{\partial \xi_k},$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_B=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_l}\right)_{AB}+\frac{\partial^2}{\partial \xi_l\,\partial \xi_l}+\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}\frac{\partial}{\partial \xi_k}$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_{AB} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l}. \quad (4.12)$$

Если применить эти формулы к величинам, входящим в динамическое уравнение и зависящим от $(x_k)_{AB}$ и $\xi_k$, то после осреднения по времени и введения следующих обозначений:

$$\begin{aligned}
\overline{(u_i)_A (u_j)_B} &= Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t),\\
\overline{(u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B} &= S_{i,kj}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t),\\
\overline{(u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A} &= S_{ik,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t),\\
\overline{p_A (u_j)_B} &= K_{p,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t),\\
\overline{p_B (u_i)_A} &= K_{i,p}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t)
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + Q_{k,j}\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}\right)_A + Q_{i,k}\left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\right)_B +\\
&+ \frac{1}{2}[(\bar{U}_k)_A + (\bar{U}_k)_B]\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} Q_{i,j} + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A]\frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{i,j} =\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB}(S_{i,kj} + S_{ik,j}) - \frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,kj} - S_{ik,j}) -\\
&- \frac{1}{2\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{AB} K_{p,j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{AB} K_{i,p}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p}\right] +\\
&+ \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_{AB} Q_{i,j} + 2\nu\frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Это — полное динамическое уравнение для двойной корреляции скорости $(Q_{i,j})_{AB}$ в общем случае неизотропной и неоднородной турбулентности.

*Однородная турбулентность.* Если рассматривается однородная турбулентность, то все производные от корреляций по $(x_k)_{AB}$ обращаются в нуль и уравнение (4.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + Q_{k,j}\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}\right)_A + Q_{i,k}\left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\right)_B + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A]\frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{i,j} =\\
&= -\frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,kj} - S_{ik,j}) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j}\right) + 2\nu\frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Во введении к этой главе уже упоминалось, что однородная турбулентность в потоке со сдвигом существует только тогда, когда основное движение имеет постоянную скорость в заданном направлении и постоянный градиент скорости в поперечном направлении по всему полю.

Не ограничивая общности, турбулентность можно описать с помощью такой системы координат, в которой основное параллельное

течение направлено вдоль одной из координатных осей. Таким образом, относительно этой системы координат имеем

$$\overline{U}_1 = f(x_2), \quad \overline{U}_2 = \overline{U}_3 = 0, \quad \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = \text{const}.$$

Тогда уравнение (4.14) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} + \left(\delta_{i1} Q_{2,j} + \delta_{j1} Q_{i,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j}\right) \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,kj} - S_{ik,j}) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j}\right) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}. \tag{4.15}$$

В случае однородной турбулентности и рассматриваемой специальной системы координат статистические свойства турбулентности не изменятся, если одновременно изменить знаки координатных осей на обратные, а именно: $\xi_1$ на $-\xi_1$, $\xi_2$ на $-\xi_2$ и $\xi_3$ на $-\xi_3$. Иными словами, точка $\xi_l = 0$ является для этого типа турбулентности центром симметрии.

В общем случае произвольного однородного поля течения из условия инвариантности при переносе можно получить следующие соотношения:

$$\overline{[(u_i)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{[(u_j)_A (u_i)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3),$$
$$\overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{[(u_i)_B (u_k)_A (u_j)_A]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3),$$
$$\overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{[(u_i)_B (u_k)_B (u_j)_A]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3),$$
$$\overline{[p_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{[p_B (u_j)_A]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3).$$

В случае рассмотренной выше специальной системы координат из условия инвариантности при отражении получаем дополнительные соотношения:

$$\overline{[(u_i)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{[(u_i)_A (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3),$$
$$\overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3),$$
$$\overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3),$$
$$\overline{[p_A (u_j)_B]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\overline{[p_A (u_j)_B]}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3).$$

Следовательно, если объединить обе системы соотношений, то

$$Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = Q_{i,j}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = Q_{j,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$S_{i,kj}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -S_{i,kj}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -S_{kj,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -S_{ik,j}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -S_{j,ik}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$K_{p,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -K_{p,j}(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -K_{j,p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Далее, вспомним о симметрии тройных корреляций скорости относительно индексов, соответствующих одной и той же точке; таким образом,

$$S_{ik,\,j} = S_{ki,\,j} \quad \text{и} \quad S_{i,\,kj} = S_{i,\,jk}.$$

Отсюда, принимая во внимание полученные выше соотношения для тройных корреляций скорости и корреляций давление — скорость, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,\,kj} - S_{ik,\,j}) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{jk,\,i} + S_{ik,\,j}) = S_{i,\,j} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,\,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,\,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,\,p} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{j,\,p} = P_{i,\,j}, \tag{4.17}$$

и уравнение (4.15) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,\,j} + \left(\delta_{i,\,1} Q_{2,\,j} + \delta_{j,\,1} Q_{i,\,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,\,j}\right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ = S_{i,\,j} - \frac{1}{\rho} P_{i,\,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \, \partial \xi_l} Q_{i,\,j}. \tag{4.18}$$

Так как $S_{i,\,kj}$ — нечетная функция $\xi_l$, то $S_{i,\,kj}(0) = 0$; но, кроме того, $S_{i,\,j}(0) = 0$, что следует из определения этой величины по уравнению (4.16). Тогда из уравнений (4.11а) и (4.11б) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A\right]$$

и, стало быть,

$$S_{i,\,j}(0) = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,\,kj} - S_{ik,\,j})\right]_{\xi_l = 0} = \\ = -\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A\right] \overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B - (u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]}\right\}_{A=B} = 0. \tag{4.19}$$

Этот результат носит общий характер и не требует выполнения условия однородности.

Далее, для однородной турбулентности из уравнения неразрывности следует, что

$$P_{i,\,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{i,\,p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0.$$

Поэтому свертывание индексов в уравнении (4.18) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,\,i} + \left(2Q_{1,\,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,\,i}\right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = S_{i,\,i} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \, \partial \xi_l} Q_{i,\,i}. \tag{4.20}$$

При $\xi_i = 0$ это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{q^2}}{2} + \overline{u_1 u_2}\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\,\partial\xi_l}\boldsymbol{Q}_{l,\,i}\right)_{\xi_i=0} = -\nu\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}}, \qquad (4.21)$$

т. е. сводится к уравнению (1.99) для однородного случая.

Ввиду наличия в уравнениях (4.18) и (4.19) соответственно функций $\boldsymbol{S}_{i,\,j}$ и $\boldsymbol{S}_{i,\,i}$, получить решения этих уравнений без каких-либо дополнительных предположений относительно этих функций оказывается принципиально невозможным.

Ободренные результатами, полученными с помощью удачных предположений относительно преобразований Фурье от этих функций в случае изотропной турбулентности, Бюргерс и Митчнер [4] и Чен [6, 11] предприняли попытки получить решения для преобразования Фурье от $\boldsymbol{Q}_{i,\,i}$ на основании предположений относительно преобразования Фурье от $\boldsymbol{S}_{i,\,i}$, подобных тем, которые принимались в соответствующих теориях изотропной турбулентности.

## § 4.4. Динамическое уравнение энергетического спектра

При выводе этого уравнения для однородной турбулентности будем исходить из уравнения (4.18) и введем преобразования Фурье от функций $\boldsymbol{Q}_{i,\,j}$, $\boldsymbol{S}_{i,\,j}$ и $\boldsymbol{P}_{i,\,j}$:

$$\boldsymbol{Q}_{i,\,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \boldsymbol{E}_{i,\,j}(k_1, k_2, k_3, t)\exp(ik_l\xi_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \qquad (4.22)$$

$$\boldsymbol{S}_{i,\,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \boldsymbol{F}_{i,\,j}(k_1, k_2, k_3, t)\exp(ik_l\xi_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \qquad (4.23)$$

$$\boldsymbol{P}_{i,\,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \boldsymbol{\Pi}_{i,\,j}(k_1, k_2, k_3, t)\exp(ik_l\xi_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3. \qquad (4.24)$$

Чтобы получить преобразование Фурье от $\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\boldsymbol{Q}_{i,\,j}$, поступим следующим образом.

Из (4.22) имеем

$$\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\boldsymbol{Q}_{i,\,j} = i\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \xi_2 k_1 \boldsymbol{E}_{i,\,j}\exp(ik_l\xi_l)\,dk_1\,dk_2\,dk_3,$$

откуда после однократного интегрирования по частям по $k_2$ следует

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{i,j} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int k_1 \frac{\partial E_{i,j}}{\partial k_2} \exp(ik_l\xi_l)\, dk_1\, dk_2\, dk_3. \quad (4.25)$$

Из динамического уравнения (4.18) с помощью выражений (4.22), (4.23), (4.24) и (4.25) получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,j} + \left(\delta_{i1}E_{2,j} + \delta_{j1}E_{i,2} - k_1 \frac{\partial E_{i,j}}{\partial k_2}\right)\frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = \\ = F_{i,j} - \frac{1}{\rho}\Pi_{i,j} - 2\nu k^2 E_{i,j}, \quad (4.26)$$

которое является динамическим уравнением для спектральной функции $E_{i,j}$.

Вследствие того, что $P_{i,i} = 0$, имеем также и $\Pi_{i,j} = 0$; следовательно, свертывание индексов в уравнении (4.26) приводит к уравнению, соответствующему (4.20):

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,i} + \left(2E_{1,2} - k_1 \frac{\partial E_{i,i}}{\partial k_2}\right)\frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = F_{i,i} - 2\nu k^2 E_{l,l}. \quad (4.27)$$

При изотропной турбулентности корреляционные и спектральные функции можно выразить через единственный скаляр, а именно через, соответственно, расстояние $r$ и волновое число $k$.

Бэтчелор [7] предложил воспользоваться точно теми же методами и в случае неизотропной, но однородной турбулентности, применяя для этой цели осреднение корреляционных и спектральных функций по всем направлениям $r$ и $k$ в соответствующих пространствах, т. е. вычисляя, таким образом, средние значения этих функций соответственно на сферических поверхностях $r = \text{const}$ и $k = \text{const}$, например:

$$[E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi k^2}\int E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)\, dA(k), \quad (4.28)$$

$$[Q_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi r^2}\int Q_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)\, dA(r). \quad (4.29)$$

Тогда связь между $(E_{i,i})_{\text{ср}}$ и $(Q_{i,i})_{\text{ср}}$ выражается известным соотношением [см. уравнение (3.56)]:

$$[Q_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{ср}} = 4\pi\int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr}[E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}}\, dk. \quad (4.30)$$

Введем, как и в случае изотропной турбулентности, следующие новые спектральные функции:

$$E(k, t) = 2\pi k^2 [E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{ср}, \tag{4.31}$$

$$F(k, t) = 2\pi k^2 [F_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{ср}, \tag{4.32}$$

$$\mathfrak{E}(k, t) = 2\pi k^2 \left[2 (E_{1,2})_{ср} - \left(k_1 \frac{\partial E_{i,i}}{\partial k_2}\right)_{ср}\right]. \tag{4.33}$$

Физический смысл величины $E(k, t)$ можно выяснить, исходя из соотношения (4.30):

$$[Q_{i,i}(0, t)]_{ср} = Q_{i,i}(0, t) = (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})_{ср} = \overline{q^2} =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty k^2 [E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{ср}\, dk = 2 \int_0^\infty E(k, t)\, dk.$$

Применяя к каждому из членов уравнения (4.27) операцию осреднения, описываемую формулой (4.28), и вводя спектральные функции по уравнениям (4.31)—(4.33), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) + \mathfrak{E}(k, t) \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = F(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t), \tag{4.34}$$

откуда после интегрирования получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k, t)\, dk + \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \int_0^k \mathfrak{E}(k, t)\, dk =$$

$$= \int_0^k F(k, t)\, dk - 2\nu \int_0^k k^2 E(k, t)\, dk. \tag{4.35}$$

Если верхний предел интеграла положить равным $k = \infty$, то получим уравнение, эквивалентное (4.21). Тогда отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \mathfrak{E}(k, t)\, dk = \overline{u_1 u_2}$$

и

$$\int_0^\infty F(k, t)\, dk = 0.$$

Эти результаты можно также получить следующим образом. Из соотношения, описывающего преобразование Фурье

$$[S_{i,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{ср} = 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} [F_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{ср}\, dk,$$

следует [см. уравнение (4.19)]

$$[S_{l,\,l}(0,\,t)]_{\text{ср}} = 4\pi \int_0^\infty k^2 [F_{l,\,l}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)]_{\text{ср}}\, dk = 2\int_0^\infty F(k,\,t)\, dk = 0.$$

Из формулы

$$[Q_{1,\,2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{\text{ср}} = 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} [E_{1,\,2}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)]_{\text{ср}}\, dk$$

вытекает соотношение

$$[Q_{1,\,2}(0,\,t)]_{\text{ср}} = \overline{u_1 u_2} = 4\pi \int_0^\infty k^2 [E_{1,\,2}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)]_{\text{ср}}\, dk.$$

Из (4.25) следует, что

$$\left[\xi_2 \frac{\partial Q_{i,\,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial \xi_1}\right]_{\text{ср}} = -4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} \left[k_1 \frac{\partial E_{i,\,i}(k_1,\,k_2,\,k_3,\,t)}{\partial k_2}\right]_{\text{ср}} dk,$$

а так как

$$\lim_{r \to 0} \left[\xi_2 \frac{\partial Q_{i,\,i}}{\partial \xi_1}\right]_{\text{ср}} = 0,$$

то также и

$$\int_0^\infty k^2 \left[k_1 \frac{\partial E_{i,\,i}}{\partial k_2}\right]_{\text{ср}} dk = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \mathcal{E}(k,\,t)\, dk = 2\pi \int_0^\infty k^2 \left[2(E_{1,\,2})_{\text{ср}} - \left(k_1 \frac{\partial E_{i,\,i}}{\partial k_2}\right)_{\text{ср}}\right] dk = \overline{u_1 u_2}.$$

Тогда уравнение (4.35) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E(k,\,t)\, dk + \overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = -2\nu \int_0^\infty k^2 E(k,\,t)\, dk = -\varepsilon. \quad (4.36)$$

Объединяя уравнения (4.35) и (4.36), получаем

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E(k,\,t)\, dk - \overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} =$$

$$= 2\nu \int_0^k k^2 E(k,\,t)\, dk - \frac{\partial}{\partial t} \int_k^\infty E(k,\,t)\, dk - \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \int_k^\infty \mathcal{E}(k,\,t)\, dk -$$

$$- \int_0^k F(k,\,t)\, dk. \quad (4.37)$$

Для стационарного случая это уравнение упрощается:

$$\varepsilon = -\overline{u_1 u_2}\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \\ = 2\nu\int_0^k k^2 E(k)\,dk - \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\int_k^\infty \mathfrak{E}(k)\,dk - \int_0^k F(k)\,dk. \quad (4.38)$$

Отдельные члены этого уравнения можно интерпретировать следующим образом:

$\varepsilon = -\overline{u_1 u_2}\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$ — Полное порождение энергии турбулентности основным движением, или полная «диссипация» турбулентностью энергии основного движения.

$2\nu\int_0^k k^2 E(k)\,dk$ — Вязкая диссипация турбулентности в диапазоне волновых чисел от 0 до $k$.

$-\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\int_k^\infty \mathfrak{E}(k)\,dk$ — Порождение энергии турбулентности в диапазоне волновых чисел от $k$ до $\infty$, или диссипация турбулентностью энергии основного движения в этом диапазоне.

$-\int_0^k F(k)\,dk$ — Перенос энергии турбулентности в диапазоне волновых чисел от 0 до $k$ к турбулентности с более высокими волновыми числами.

На основании этого уравнения к настоящему времени получено несколько решений для $E(k)$, справедливых в диапазоне больших волновых чисел.

Для получения этих решений воспользуемся предположениями и рассуждениями, принадлежащими Чену [6].

Прежде всего, волновое число $k$ предполагается настолько большим, что турбулентность в этом диапазоне волновых чисел не слишком сильно отклоняется от изотропного состояния; следовательно, можно использовать гипотезы, которые успешно применялись в теориях изотропной турбулентности. Так, если воспользоваться предположением Гейзенберга (3.121) в отношении спектральной функции переноса $F(k)$, то получим

$$\int_0^k F(k)\,dk = -\int_k^\infty F(k)\,dk = -2\alpha'\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\,dk\int_0^k k^2 E(k)\,dk.$$

Другие предположения касаются члена

$$\int_k^\infty \mathfrak{E}(k)\,dk$$

в уравнении (4.38). Чен различает два случая:

1. Завихренность $d\bar{U}_1/dx_2$ основного движения мала по сравнению с завихренностью турбулентности в рассматриваемом диапазоне волновых чисел.

2. Завихренность основного движения сравнима с завихренностью турбулентности в рассматриваемом диапазоне волновых чисел.

Когда завихренность основного движения мала по сравнению с завихренностью турбулентного движения (случай 1), то между этими завихренностями может наблюдаться лишь едва заметное взаимодействие. Согласно Чену, явление резонанса не наблюдается.

С другой стороны, в случае 2, когда завихренности обоих этих движений сравнимы друг с другом, между ними возможны весьма сильные взаимодействия, и может наступить сильный резонанс.

Если рассматривать полный диапазон волновых чисел $0 < k < \infty$, то

$$\int_0^\infty \mathcal{E}(k)\,dk = \overline{u_1 u_2}.$$

Следуя концепции Буссинеска, введем коэффициент вихревой вязкости $\epsilon_m$ [см. уравнение (1.20)] таким образом, что

$$\overline{u_1 u_2} = -\epsilon_m \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}.$$

Чен полагает, что это соотношение применимо в указанном выше случае 1 (относительно малая завихренность основного движения):

$$\int_k^\infty \mathcal{E}(k)\,dk = -\epsilon_m(k)\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}, \tag{4.39}$$

а для $\epsilon_m(k)$ он использует гипотезу Гейзенберга:

$$\epsilon_m(k) = \alpha'' \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\,dk.$$

Отсюда

$$\int_k^\infty \mathcal{E}(k)\,dk = -\alpha'' \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\,dk.$$

С помощью формулы (4.39) получаем соотношение

$$-\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\int_k^\infty \mathcal{E}(k)\,dk = \epsilon_m(k)\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)^2, \tag{4.40}$$

которое, согласно гипотезе Гейзенберга, можно интерпретировать как диссипацию энергии основного движения под действием вихревой

вязкости:

диссипация = коэффициент вихревой вязкости × (завихренность)$^2$.

В случае 2, т. е. при сильном взаимодействии между завихренностями основного и турбулентного движений, Чен предлагает вместо квадрата завихренности основного движения в уравнении (4.40) взять произведение завихренностей обоих рассматриваемых движений.

Среднеквадратичное значение завихренности турбулентности представляется выражением $(\overline{\omega_k\omega_k})^{1/2}$, где

$$\omega_k = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Следовательно,

$$\overline{\omega_k\omega_k} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}}(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}) =$$

$$= \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right) = -\left\{\left[\frac{\partial^2 Q_{i,\,i}}{\partial\xi_j\,\partial\xi_j}\right]_{r=0} - \left[\frac{\partial^2 Q_{i,\,j}}{\partial\xi_j\,\partial\xi_i}\right]_{r=0}\right\}.$$

В случае однородной турбулентности имеем

$$Q_{i,\,j}(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ t) = Q_{j,\,i}(-\xi_1,\ -\xi_2,\ -\xi_3,\ t),$$

а если жидкость является несжимаемой, то

$$\left[\frac{\partial^2 Q_{i,\,j}(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ t)}{\partial\xi_j\,\partial\xi_i}\right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^2 Q_{j,\,i}(-\xi_1,\ -\xi_2,\ -\xi_3,\ t)}{\partial\xi_j\,\partial\xi_i}\right]_{r=0} = 0.$$

Отсюда

$$\overline{\omega_k\omega_k} = -\left[\frac{\partial^2 Q_{i,\,i}}{\partial\xi_j\,\partial\xi_j}\right]_{r=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int k^2 E_{i,i}\,dk_1\,dk_2\,dk_3$$

и

$$\overline{(\omega_k\omega_k)}_{\text{ср}} = 4\pi\int_0^\infty k^4 (E_{l,\,l})_{\text{ср}}\,dk = 2\int_0^\infty k^2 E(k,\ t)\,dk.$$

Попутно можно отметить, что при однородной турбулентности диссипация на единицу массы становится равной кинематическому коэффициенту вязкости, умноженному на среднеквадратичную скорость деформации, и кинематическому коэффициенту вязкости, умноженному на среднеквадратичную завихренность. Выражение, в которое входят все эти три перечисленные величины, имеет вид

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 2\nu\int_0^\infty k^2 E(k)\,dk.$$

Следовательно, в случае 2 вместо соотношения (4.39) получаем $\int_k^\infty \mathcal{E}(k)\,dk = -\epsilon_m(k) \times$ (завихренность турбулентности в диапазоне волновых чисел от 0 до $k) = -\epsilon_m(k)\left[2\int_0^k k^2 E(k)\,dk\right]^{1/2}$. На основании принятых допущений члены $\int_k^\infty \mathcal{E}(k)\,dk$ и $\int_0^k F(k)\,dk$ выражаются через функцию энергетического спектра $E(k)$. Для обоих рассмотренных выше случаев уравнения для этой функции имеют вид:

*Случай* 1:

$$\varepsilon = 2\nu\int_0^k k^2 E(k)\,dk + \alpha''\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)^2 \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\,dk + \\ + 2\alpha'\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\,dk \int_0^k k^2 E(k)\,dk. \quad (4.41)$$

*Случай* 2:

$$\varepsilon = 2\nu\int_0^k k^2 E(k)\,dk + \alpha''\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)\left[2\int_0^k k^2 E(k)\,dk\right]^{1/2} \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\,dk + \\ + 2\alpha'\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k)}{k^3}}\,dk \int_0^k k^2 E(k)\,dk. \quad (4.42)$$

*Анализ случая 1.* Решение уравнения (4.41) можно получить следующим путем.

Обозначим

$$\int_0^k k^2 E(k)\,dk = \Theta(k),$$

так что

$$E(k) = \frac{1}{k^2}\frac{d\Theta}{dk}.$$

Путем некоторых преобразований уравнение (4.41) можно привести к виду

$$\frac{\varepsilon - 2\nu\Theta}{\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2 + 2\alpha'\Theta} = \int_k^\infty \sqrt{\frac{1}{k^5}\frac{d\Theta}{dk}}\,dk.$$

Можно заметить, что это выражение отличается от соответствующего выражения для изотропной турбулентности только добавлением к величине $2\alpha'\Theta$ постоянного слагаемого $\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2$. Как будет ясно из дальнейшего, форма искомого решения, по существу, нечувствительна к этому дополнительному слагаемому. Дифференцирование этого выражения по $k$ после несложных преобразований приводит к уравнению

$$\frac{d\Theta/dk}{[\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+2\alpha'\Theta]^4}=\frac{1}{[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+2\alpha'\varepsilon]^2\,k^5},$$

которое легко интегрируется. Постоянная интегрирования определяется из условия, что $\Theta=\varepsilon/2\nu$ при $k\to\infty$ [см. уравнение (4.36)]. Окончательный результат записывается следующим образом:

$$\left[\alpha''\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)^2+2\alpha'\Theta\right]^3=\frac{4\,[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+2\alpha'\varepsilon]^2\,k^4}{6\alpha'+\dfrac{32\nu^3}{[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+2\alpha'\varepsilon]}\,k^4}.$$

Отсюда

$$E(k)=\frac{1}{k^2}\frac{d\Theta}{dk}=\frac{[\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+2\alpha'\Theta]^4}{[2\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+2\alpha'\varepsilon]^2\,k^7},$$

или

$$E(k)=\frac{4\,[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+\alpha'\varepsilon]^{2/3}\,k^{-5/3}}{\left\{3\alpha'+\dfrac{8\nu^3}{[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+\alpha'\varepsilon]}\,k^4\right\}^{4/3}}. \tag{4.43}$$

Для не слишком больших значений $k$ получаем закон «$-5/3$», известный для невязкой инерционной подобласти в случае изотропной турбулентности. С другой стороны, при очень больших $k$ имеем

$$E(k)\approx\left(\frac{\alpha'\varepsilon}{2\nu^2}\right)^2\left[1+\frac{\alpha''}{\alpha'}\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right)^2\right]^2 k^{-7},$$

что представляет собой решение, полученное Ченом [6]. В случае изотропной турбулентности это решение приводится к уравнению (3.127), полученному для вязкой подобласти. Однако эти решения неприемлемы, потому что гипотеза Гейзенберга в вязкой области несправедлива (см. § 3.5).

Ввиду того, что $\mathcal{E}(k)=\sqrt{E(k)/k^3}$, на основании формулы (4.43) получим

$$\mathcal{E}(k)=\frac{2\,[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+\alpha'\varepsilon]^{1/3}\,k^{-7/3}}{\left\{3\alpha'+\dfrac{8\nu^3}{[\nu\alpha''(d\bar{U}_1/dx_2)^2+\alpha'\varepsilon]}\,k^4\right\}^{2/3}}.$$

Это выражение при больших $k$ сводится к закону «$k^{-5}$», но для умеренных значений $k$ величина $\mathcal{E}(k)$ становится пропорциональ-

ной $k^{-7/3}$. Можно отметить, что если отклонение от изотропности весьма мало и, значит, $(k_1 \partial \boldsymbol{E}_{i,\,i}/\partial k_2)_{\text{ср}} \approx 0$, то спектральная функция $4\pi k^2 (\boldsymbol{E}_{1,\,2})_{\text{ср}}$ величины $u_1 u_2$ приблизительно соответствует $\mathcal{E}(k)$.

Как указывалось, решение (4.43) по своей природе совершенно одинаково с решением, полученным для равновесной области в случае изотропной турбулентности, т. е. с формулой (3.128). Точно такое же выражение получается, если

$$\nu\alpha'' \left(\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right)^2 \ll \alpha' \varepsilon,$$

а именно:

$$\boldsymbol{E}(k) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\alpha'}\right)^{2/3} \frac{k^{-5/3}}{[1 + (8\nu^3/3\alpha'^2\varepsilon)\, k^4]^{4/3}}.$$

Бюргерс и Митчнер [4] нашли это решение прямым путем, исходя из предположения об очень больших значениях $k$; тогда

$$\int_k^\infty \mathcal{E}(k)\, dk \approx 0$$

и вторым членом в правой части уравнения (4.41) можно пренебречь. Это предположение, по-видимому, подразумевает также и малые значения $d\overline{U}_1/dx_2$.

*Анализ случая 2.* В отличие от случая 1, решение полного уравнения (4.42) в замкнутой форме во втором случае получить не удается. Но, как подчеркнул Чен [6], главным, представляющим интерес выводом в этом случае является тот факт, что завихренность $d\overline{U}_1/dx_2$ основного движения велика и, стало быть, влияние его взаимодействия с турбулентным движением превалирует над вязкой диссипацией и вихревым обменом. Логично ожидать, что этот факт, если он действительно имеет место, должен наблюдаться в диапазоне невязких волновых чисел, где значения $k$ невелики. Поэтому мы будем рассматривать в правой части уравнения (4.42) только второй член и пренебрежем двумя другими членами. Преобразованное таким образом приближенное уравнение имеет вид

$$\varepsilon \approx \alpha'' \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \left[2 \int_0^k k^2 \boldsymbol{E}(k)\, dk\right]^{1/2} \int_k^\infty \sqrt{\frac{\boldsymbol{E}(k)}{k^3}}\, dk. \qquad (4.44)$$

Это уравнение допускает решение в замкнутой форме.

Пусть

$$2 \int_0^k k^2 \boldsymbol{E}(k)\, dk = [\varphi(k)]^2,$$

Подстановка в (4.44) дает

$$\frac{\varepsilon}{\alpha''\, d\bar{U}_1/dx_2}\,\frac{1}{\varphi} = \int_k^\infty \sqrt{\frac{\varphi}{k^5}\,\frac{d\varphi}{dk}}\,dk.$$

После дифференцирования этого выражения по $k$ и последующих преобразований получаем уравнение

$$\frac{1}{\varphi^5}\,\frac{d\varphi}{dk} = \left[\frac{\alpha''^2\,(d\bar{U}_1/dx_2)^2}{\varepsilon^2}\right] k^{-5},$$

которое легко может быть проинтегрировано. Если постоянную интегрирования положить равной нулю, то придем к особенно простому решению для $\varphi^2$:

$$\varphi^2 = \frac{\varepsilon k^2}{\alpha''\,(d\bar{U}_1/dx_2)},$$

откуда

$$E(k) = \frac{\varphi}{k^2}\,\frac{d\varphi}{dk} = \frac{\varepsilon k^{-1}}{\alpha''\,(d\bar{U}_1/dx_2)}. \qquad (4.45)$$

При анализе полученных результатов следует, прежде всего, обратить внимание на то, что в случае 1 для энергетического спектра $E(k)$ в диапазоне больших волновых чисел получены решения, существенно одинаковые с решениями для изотропной турбулентности. В конце концов, этот факт по причинам, высказанным выше, с математической точки зрения едва ли может показаться неожиданным.

Но и с физической точки зрения тоже можно было бы ожидать подобных решений, так как мы сделали предположение о том, что в рассматриваемом диапазоне больших волновых чисел турбулентность почти изотропна; стало быть, относительно функции переноса и коэффициента вихревой диффузии можно принять те же предположения, что и в случае изотропной турбулентности. В случае 1 непосредственного взаимодействия между основным движением и турбулентностью не происходит. Однако ясно, что имеет место порождение турбулентности основным движением, которое в данном случае действует как постоянный источник энергии турбулентности.

Роль основного движения в случае 2 несколько отлична; благодаря своей собственной большой завихренности оно не только служит постоянным источником энергии, но также и очень сильно взаимодействует с турбулентностью. Этим эффектом обусловлено отличие энергетического спектра в том диапазоне волновых чисел, в котором как раз и происходит подобное сильное взаимодействие между этими двумя движениями.

Насколько можно судить по имеющимся экспериментальным данным, они, по-видимому, подтверждают изложенные выше выводы. Измерения одномерного энергетического спектра осевой компоненты турбулентной пульсации скорости в турбулентном потоке с поперечным сдвигом вблизи стенки были произведены Клебановым и Дилем [8], Лауфером [9], а также Крайя и Мийа [10]. Подобные турбулентные течения являются неоднородными; кроме того, приведенные выше теоретические результаты относятся к пространственному, а не к одномерному энергетическому спектру.

Чен [6] показал, что результаты, подобные тем, которые были изложены выше относительно функции $E(k)$, получаются и в том случае, когда турбулентность в потоке с поперечным сдвигом является неоднородной.

Что касается применимости результатов, относящихся к пространственному спектру, также и в случае измеряемого в опытах одномерного спектра, то можно заметить, что если турбулентность в диапазоне больших волновых чисел является почти изотропной, то с некоторой степенью приближения можно применять приведенные в главе 3 соотношения между пространственным и одномерным спектрами; следовательно, в этих случаях получаются одинаковые соотношения. Но в то же время между динамическими уравнениями для $E_1(k_1)$ и $E(k)$ существует различие, состоящее в том, что в уравнении для $E_1(k_1)$ содержится спектральная функция корреляции давление — скорость. При рассмотрении соответствующего уравнения (4.4) для распределения энергии $\overline{u_1^2}$ по всем волновым числам было показано, что корреляция давление — градиент скорости оказывает влияние на перенос энергии к другим компонентам скорости. Таким образом, хотя в уравнении полной энергии фигурирует перенос энергии, представленный только функцией турбулентного переноса по различным волновым числам, тем не менее в уравнении энергии для одной компоненты скорости дополнительно содержится перенос энергии по трем компонентам скорости, соответствующий корреляции давление — градиент скорости.

Согласно уравнениям (4.4) — (4.6), в случае, когда основное движение представляет собой однородный параллельный поток, порождение турбулентности основным движением осуществляется только в отношении $\overline{u_1^2}$-компоненты турбулентности. Таким образом, сильное взаимодействие между основным движением и турбулентностью, подобное описанному в случае 2, может наблюдаться только в отношении компоненты $\overline{u_1^2}$. Следовательно, решения, подобного выражению (4.45), если оно вообще существует, можно ожидать только для энергетического спектра компоненты $\overline{u_1^2}$, но не для энергетического спектра поперечных компонент.

На рис. 4.3 изображены результаты измерений, проведенных Лауфером [9] в полностью развитом турбулентном потоке в трубе с диаметром 25 *см*. Число Рейнольдса, отнесенное к средней скорости потока и диаметру трубы, составляло $5 \cdot 10^5$. Число Рейнольдса турбулентности $\mathrm{Re}_\lambda = u_1' \lambda_g / \nu$ было несколько выше 200, что превосходит все значения числа Рейнольдса, когда-либо полученные

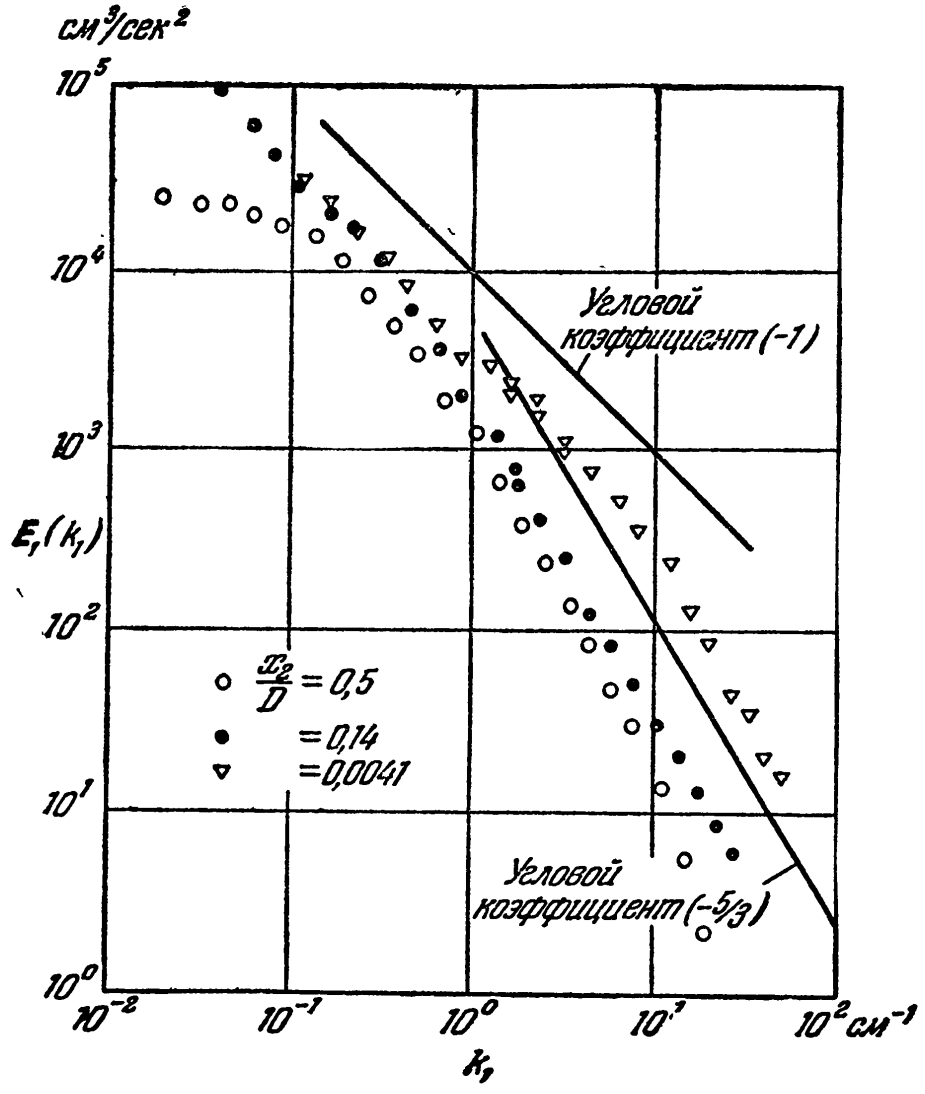



Рис. 4.3. Энергетический спектр пульсаций $u_1$ при течении в трубе; $\mathrm{Re}_D = \bar{U}_{\text{ср}} D/\nu = 5 \cdot 10^5$ [9].

в изотропных турбулентных потоках за решетками. Это значение $\mathrm{Re}_\lambda$ достаточно велико, чтобы можно было предполагать довольно широкий диапазон волновых чисел, в котором существует равновесие. Как показывает этот рисунок, точки спектральных кривых для расстояний, не слишком близких к стенке, охватывают даже более широкий диапазон, в котором наблюдается хорошее соответствие с законом $E_1(k_1) \sim k_1^{-5/3}$. Экспериментальные точки, соответствующие очень малому расстоянию от стенки, указывают на существование диапазона, в котором хорошо оправдывается зависимость $E_1(k_1) \sim k_1^{-1}$.

Лауфер определил также одномерные спектры поперечных компонент $u_2$ и $u_3$. На рис. 4.4 приведены экспериментальные данные для компоненты $u_2$ (нормальной к стенке). Экспериментальные точки заметно отходят от соответствующих кривых для осевой компоненты даже в центре трубы, где отклонение от изотропности можно считать наименьшим. На том же рисунке показана кривая, построенная по измеренным значениям $E_1(k_1)$ для центра трубы в предположении об изотропности турбулентности. Заметно, что в диапазоне малых волновых чисел

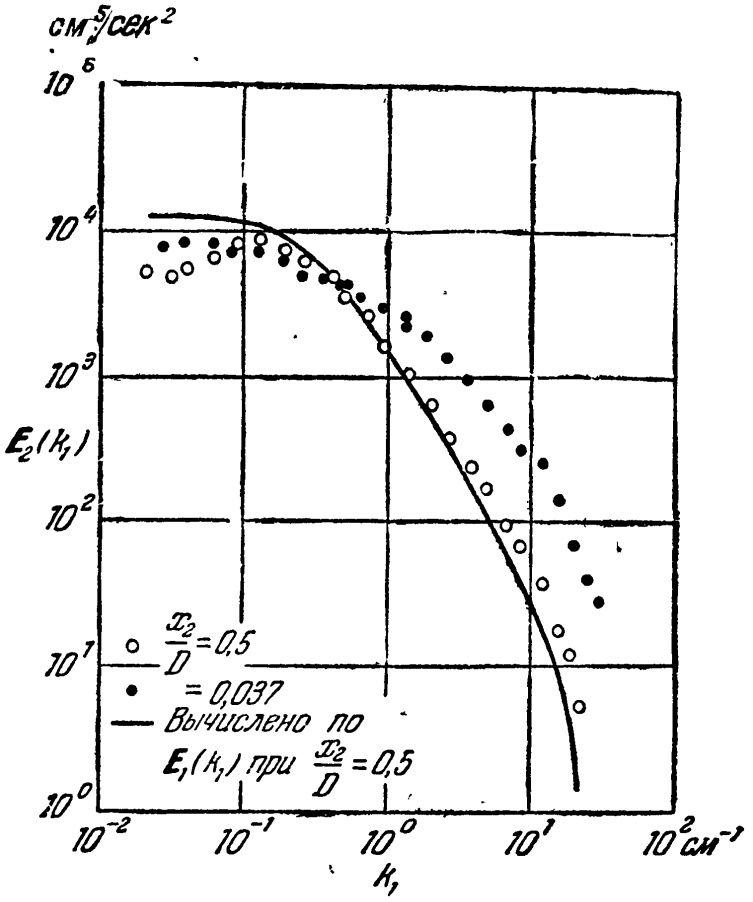



**Рис. 4.4.** Энергетический спектр пульсаций $u_2$ при течении в трубе; $\mathrm{Re}_D = \bar{U}_{\text{ср}} D/\nu = 5 \cdot 10^5$ [9].

уровень энергии в спектре компоненты $u_2$ существенно ниже и что в диапазоне больших волновых чисел это различие исчезает, а в диапазоне наибольших волновых чисел даже принимает обратный характер. Это можно объяснить тем фактом, что энергия компоненты $u_1$ порождается основным движением, главным образом, в диапазоне малых волновых чисел, соответствующем области энергосодержащих вихрей. Часть этой энергии переносится в диапазон больших волновых чисел этой компоненты; другая ее часть переносится через посредство корреляции давление — градиент скорости к компонентам $u_2$ и $u_3$. Поскольку в этой корреляции содержится градиент скорости, логично ожидать, что в последнем случае перенос будет происходи

с большей скоростью в диапазоне более высоких волновых чисел.

Одномерные спектры осевой компоненты скорости, измеренные Клебановым и Дилем, а также Крайя и Мийа, в точках, очень близко

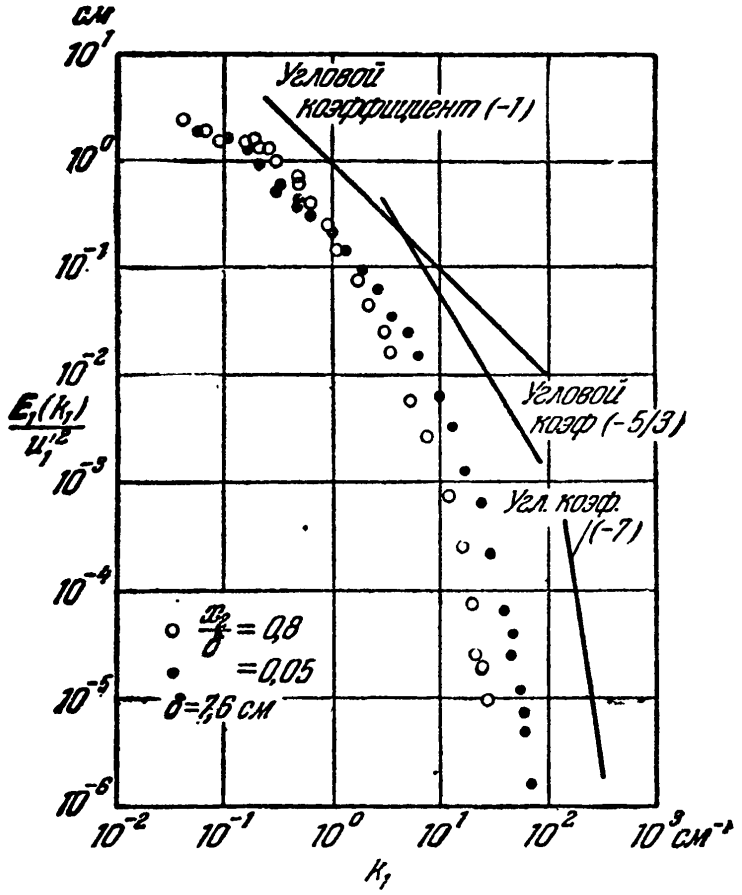



Рис. 4.5. Энергетический спектр пульсации $u_1$ при течении в пограничном слое; $\mathrm{Re}_\delta = U_0\delta/\nu = 7{,}5 \cdot 10^4$ [2].

расположенных от стенки, тоже тяготеют к зависимости вида $k_1^{-1}$, а в точках, находящихся на некотором удалении от стенки — к зависимости вида $k_1^{-5/3}$.

Для всех спектров характерно очень резкое затухание в диапазоне наибольших волновых чисел. Этот вывод особенно четко проиллюстрирован на рис. 4.5, где изображены данные Клебанова и Диля [8]. Здесь же проведена линия, угловой коэффициент которой равен (—7). Однако экспериментальные точки, соответствующие расстоянию $x_2/\delta = 0{,}05$, указывают на постепенное увеличение отрицательного наклона, превосходящего коэффициент (—7).

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

$E_{i,j}$ — спектральный тензор кинетической энергии турбулентности.

$E(k, t) = 2\pi k^2 [E_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}}$ — функция трехмерного энергетического спектра, осредненная по сферической поверхности в пространстве волновых чисел.

$\boldsymbol{F}_{i,j}$ — преобразование Фурье от $\boldsymbol{S}_{i,j}$.

$\boldsymbol{F}(k, t)$ — $2\pi k^2 [\boldsymbol{F}_{i,i}(k_1, k_2, k_3, t)]_{\text{ср}}$ — спектральная функция трехмерного переноса, осредненная по сферической поверхности в пространстве волновых чисел.

$\boldsymbol{K}_i$ — корреляционный тензор первого ранга.

$k$ — волновое число.

$P$ — статическое давление, $\overline{P}$ — осредненная по времени величина, $p$ — турбулентная пульсация.

$\boldsymbol{P}_{i,j}$ — $\frac{\partial}{\partial \xi_j}\boldsymbol{K}_{i,p} + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\boldsymbol{K}_{j,p}$.

$\boldsymbol{Q}_{i,j}$ — тензор корреляции скорости второго ранга.

$\overline{q^2}$ — удвоенная кинетическая энергия турбулентности.

$\mathrm{Re}_\lambda$ — $u'\lambda_g/\nu$ — число Рейнольдса турбулентности.

$\boldsymbol{S}_{i,kj}$ или $\boldsymbol{S}_{ik,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.

$t$ — время.

$U_i$ — эйлерова скорость; $\overline{U_i}$ — осредненная по времени величина; $u_i$ — компонента турбулентной пульсации; $u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}}$.

$x_i$ — эйлерова координата.

$\alpha$ — постоянная Гейзенберга применительно к коэффициенту вихревой вязкости $\epsilon_m$.

$\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

$\mathfrak{E}(k, t)$ — $2\pi k^2 \left[2(\boldsymbol{E}_{1,2})_{\text{ср}} - \left(k_1 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{i,i}}{\partial k_2}\right)_{\text{ср}}\right]$.

$\varepsilon_{ijk}$ — единичный антисимметричный тензор.

$\epsilon_m$ — коэффициент вихревой вязкости.

$\varepsilon$ — диссипация под действием турбулентности на единицу массы.

$i$ — $\sqrt{-1}$.

$\Lambda$ — пространственный интегральный масштаб.

$\lambda_g$ — пространственный поперечный микромасштаб.

$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

$\omega_k$ — завихренность турбулентности.

$\boldsymbol{\Pi}_{i,j}$ — преобразование Фурье от $\boldsymbol{P}_{i,j}$.

$\pi$ — 3,14159 ...

$\rho$ — плотность.

$\xi_i$ — эйлерова координата.

ГЛАВА 5

# ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

## § 5.1. Введение

В главе 1 было показано, что перенос какой-либо субстанции хаотичным движением жидкости носит диффузионный характер. Поскольку турбулентное движение жидкости как раз и является таким хаотичным движением, основная характерная особенность турбулентного потока состоит именно в его диффузионном действии; соответственно процессы обмена в турбулентных потоках играют бóльшую роль, нежели в нетурбулентных. Любая особенность турбулентного течения жидкости, по-видимому, имеет своим началом процесс переноса под действием турбулентности; в таком случае изучение подобной особенности сводится к исследованию соответствующих проблем переноса.

Поэтому представляется целесообразным широко и подробно рассмотреть различные проблемы турбулентного переноса в специальной главе. Общую задачу можно сформулировать следующим образом [68]: выразить интенсивность турбулентного переноса какой-либо субстанции полностью через статистические функции поля турбулентной скорости и граничные или начальные условия.

Таким образом, полного решения проблемы переноса можно ожидать лишь в том случае, когда имеются исчерпывающие сведения о статистических функциях, описывающих турбулентное движение. До тех пор, пока подобных исчерпывающих сведений будет недостаточно, любое решение проблемы переноса обязательно будет неполным и, в лучшем случае, приближенным. Чем больше будут возрастать наши знания о турбулентности, тем ближе станет возможность получения точного и удовлетворительного решения.

Очевидно, что на ранних этапах исследования турбулентности, когда наши знания о механизме турбулентного течения жидкости были довольно скудными, процессы переноса могли изучаться лишь весьма приближенным образом.

Однако эти процессы переноса еще на ранних этапах исследования турбулентного течения уже превратились в центральную проблему.

Среди теорий, возникших на базе этих исследований, наиболее плодотворными оказались те, которые были основаны на понятии «пути смешения» (введенном Тэйлором и независимо от него Прандтлем). Ценность этих теорий состоит не столько в том, что они верно описывают механизм, лежащий в основе процессов турбулентного обмена, сколько в том, что они позволили получить полезные и практически важные полуэмпирические соотношения.

Эти теории являются чисто феноменологическими. Хотя последние исследования и показали, что физическая картина, основанная на понятии пути смешения, не может быть правильной в деталях, все же теории пути смешения наиболее часто используются инженерами. Именно по этой причине рассмотрению этих феноменологических теорий в настоящей главе будет уделено столь много места. Это представляется еще более оправданным и по той причине, что современные исследования пока не дали более правильных теорий, которые с практической, инженерной точки зрения смогли бы успешно заменить теории пути смешения.

Последние исследования значительно расширили и углубили наше проникновение в действительный механизм процесса турбулентного переноса. С одной стороны, они указали на многие серьезные недостатки теорий пути смешения, но, с другой стороны, они подтвердили некоторые характерные особенности, связанные с понятием пути смешения, введенным Прандтлем на основании чисто интуитивных представлений.

В турбулентном потоке частицы жидкости движутся хаотично. Природа этих движений зависит от размера рассматриваемой частицы жидкости. В предыдущей главе эта зависимость была выражена через посредство различных спектральных функций и масштабов (например, микромасштаба и интегрального масштаба). При изучении процессов переноса зачастую оказывается полезным проводить различие между движениями частиц жидкости разных размеров. В этом смысле мы будем различать жидкие частицы и жидкие моли. Под понятием жидкой частицы мы подразумеваем очень небольшой объем жидкости, малый по сравнению, например, с микромасштабом $\lambda$. Континуум, образующий жидкую частицу, сохраняет свою целостность по крайней мере в течение интервала времени, достаточно большого по сравнению с интервалом, который следует рассматривать в ходе процесса переноса [68]. Какой-либо обмен с непосредственно окружающей частицу средой является по своей природе чисто молекулярным. Распределение давления и скорости внутри подобной частицы практически равномерно.

Под понятием жидкого моля мы подразумеваем значительно более протяженную часть жидкого континуума, состоящую из когерентного конгломерата жидких частиц. Размер подобного жидкого моля может быть сравним с интегральным масштабом турбулентного

движения, причем обмен с окружающей его средой будет определяться влиянием мелкомасштабных турбулентных движений.

Принято различать два метода описания процессов турбулентного переноса. Один из них известен как метод Эйлера, а другой — как метод Лагранжа. При использовании метода Эйлера рассматривается изменение некоторой субстанции относительно фиксированной системы координат; в методе Лагранжа рассматривается изменение субстанции, связанной с данной жидкой частицей или жидким молем, при движении этой частицы или моля в потоке. В последующем будут использоваться оба метода, и при этом зачастую одновременно, поскольку в методе Эйлера может оказаться необходимым использовать результаты метода Лагранжа относительно свойств движущегося объема жидкости.

## § 5.2. Теория пути смешения и феноменологические теории

Эти теории первоначально применялись для описания распределения средних значений какой-либо субстанции (импульса, тепла, вещества и т. д.) под влиянием турбулентности.

В ранних теориях, в том числе и в теориях пути смешения, для описания переноса какой-либо субстанции использовался метод Эйлера. Считалось, что диффузионное воздействие турбулентности обусловливает вихревую вязкость или вихревую теплопроводность, по которым может быть вычислено распределение средних значений аналогично тому, как в кинетической теории газов принимается, что процессы молекулярного переноса приводят к вязкости и теплопроводности.

В качестве исходных соотношений будем использовать уравнения движения и уравнение переноса, предложенное Буссинеском [см. уравнение (1.17) совместно с уравнением (1.20) и уравнение (1.28) совместно с уравнением (1.29)]. Сам Буссинеск полагал, что коэффициенты вихревой диффузии $\epsilon_m$ и $\epsilon_\gamma$ являются скалярными величинами. Прандтль [1] сделал попытку связать эти величины с характеристиками турбулентности. Согласно кинетической теории газов, коэффициент кинематической вязкости равен произведению среднеквадратичного значения скорости молекул и среднего пути свободного пробега; по аналогии, Прандтль ввел предположение, что коэффициент вихревой вязкости равен произведению пути «смешения» и некоторой соответствующей скорости (теория пути смешения). Ход рассуждений Прандтля аналогичен соображениям, на которых основана кинетическая теория газов, и вкратце сводится к следующему.

Рассмотрим для простоты плоский поток с осредненной скоростью $\bar{U}_1$ в направлении оси $x_1$ и средний перенос через плоскость,

параллельную $\overline{U}_1$, некоторой субстанции $\mathscr{P}$ на единицу массы, обусловленный скоростью $u_2$ турбулентных движений. Прандтль выдвинул предположение, что каждый моль жидкости, участвующий в турбулентном движении, может рассматриваться как некоторая индивидуальность и что субстанция $\mathscr{P}$ этого моля сохраняется в течение определенного промежутка времени, т. е. на определенном расстоянии. Обозначим через $L_\alpha$ это расстояние для моля жидкости, отмеченного знаком $\alpha$, с объемом $V_\alpha$; величина $L_\alpha$ отрицательна, если движение моля начинается со стороны отрицательного направления оси $x_2$. Если распределение субстанции $\mathscr{P}$ по полю неравномерно, то среднее значение $\overline{\mathscr{P}}$ в точке, удаленной от рассматриваемой плоскости на расстояние $L_\alpha$, будет отличаться от среднего значения в этой плоскости. Тогда перенос субстанции $\mathscr{P}$ молем $\alpha$ через рассматриваемую плоскость выразится как $\rho V_\alpha \Delta\mathscr{P}$.

Величину $\Delta\mathscr{P}$ можно разложить в ряд Тэйлора, что дает

$$\Delta\overline{\mathscr{P}} = L_\alpha \frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2} + \frac{1}{2} L_\alpha^2 \frac{d^2\overline{\mathscr{P}}}{dx^2} + \ldots$$

Прандтль ввел предположение, что расстояние $L_\alpha$ достаточно мало, чтобы членами второго и более высоких порядков в этом разложении можно было пренебречь. По Прандтлю, величина $L_\alpha$ имеет порядок размера моля.

Если $N$ молей жидкости проходят в единицу времени через площадь $F$ рассматриваемой плоскости, то перенос величины $\overline{\mathscr{P}}$ в единицу времени через эту площадь составляет

$$+ \sum_N \rho V_\alpha L_\alpha \frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2}.$$

Величины $L_\alpha$ и $V_\alpha$ неодинаковы для всех молей, проходящих через эту плоскость. Однако можно ввести новую длину $L$, определяемую таким образом, чтобы перенос в единицу времени записывался в следующем виде:

$$\sum_N V_\alpha L_\alpha = F\overline{u_2 L}.$$

Следовательно, перенос субстанции $\overline{\mathscr{P}}$ через единицу площади в единицу времени выразится формулой

$$\mathfrak{I}_{\mathscr{P}} = + \rho \overline{u_2 L} \frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2}. \tag{5.1}$$

Величина $\overline{u_2 L}$ является существенно отрицательной, так как положительному значению $u_2$ должно соответствовать отрицательное значение $L$ и наоборот. Отсюда, если градиент $d\overline{\mathscr{P}}/dx_2$ положителен,

то поток $\Im_{\mathscr{P}}$ через рассматриваемую плоскость имеет отрицательный знак.

Пусть $\mathscr{P}$ является компонентой импульса в направлении оси $x_1$, отнесенного к единице массы жидкости, т. е. $\overline{U}_1$; тогда перенос импульса на единицу объема через единицу площади нашей плоскости запишется так:

$$\Im_m = +\overline{u_2 L_m}\frac{d}{dx_2}\rho\overline{U}_1.$$

Перенос через рассматриваемую плоскость импульса на единицу объема $\rho\overline{U}_1$ вызывает напряжение сдвига $\sigma_{12}$ в этой плоскости:

$$\sigma_{12} = -\Im_m = -\rho\overline{u_2 L_m}\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}.$$

Тогда, по определению, получим следующее выражение для коэффициента вихревой вязкости $\epsilon_m$:

$$\epsilon_m = -\overline{u_2 L_m}.$$

Обобщение на случай трехмерного потока может быть сделано без труда. Рассмотрим элементарную плоскую площадку, перпендикулярную к $i$-му направлению и движущуюся со средней местной скоростью $\overline{U}_i$. Тогда перенос через эту элементарную площадку в единицу времени на единицу площади выразится как $\rho(\overline{U_i\mathscr{P}} - \overline{U}_i\overline{\mathscr{P}})$. При

$$\mathscr{P} = \overline{\mathscr{P}} + L_j\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_j} + \ldots$$

и $U_i = \overline{U}_i + u_i$ получим следующую формулу переноса:

$$\Im_{\mathscr{P},i} = \rho(\overline{U_i\mathscr{P}} - \overline{U}_i\overline{\mathscr{P}}) = +\rho\overline{u_i L_j}\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_j}.$$

Если снова ввести коэффициент вихревой диффузии

$$\epsilon^*_{ij} = -\overline{u_i L_j},$$

то можно сделать вывод, что в общем случае этот коэффициент должен быть тензором второго ранга.

Для однородной, но неизотропной турбулентности корреляция $\overline{u_i L_j}$ несимметрична относительно $i$ и $j$. Следовательно, тензор вихревой диффузии $\epsilon^*_{ij}$ тоже несимметричен относительно своих индексов. Напомним, что индекс $j$ относится к $L_j$, а индекс $i$ — к величине $u_i$. Тензор вихревой диффузии помечен звездочкой, с тем чтобы отличить его от определенного по формуле (5.55) тензора вихревой

диффузии $\epsilon_{ij}$, который входит в уравнение диффузии Фика и является симметричным относительно индексов $i$ и $j$.

Располагая более или менее формальным выражением $\overline{u_2 L_m}$ или $\overline{u_i L_j}$ для коэффициента вихревой диффузии, мы не сможем довести задачу до конца. Цель, которую поставил перед собой Прандтль, состояла в том, чтобы выразить эти величины через некоторую фундаментальную характеристику основного потока. Однако в трехмерном случае это — не простое дело; при этом мы приходим к очень сложным выражениям. Поэтому Прандтль ограничился рассмотрением плоского потока. Рассуждения, которыми он воспользовался, чтобы получить наиболее приемлемое с практической точки зрения выражение для $\epsilon_m = -\overline{u_2 L_m}$, сводятся примерно к следующему.

Каждый моль жидкости, кроме поперечной компоненты скорости $u_2$, имеет еще и компоненту $u_1$ в осевом направлении. Эти компоненты — одинаковые по порядку величины. Далее, Прандтль полагает, что компонента $u_1$ скорости моля определяется разностью между значениями средней скорости $\overline{U}_1$ в рассматриваемой плоскости и в плоскости, из которой начинается движение этого моля. Таким образом,

$$u_1 \sim L \frac{d\overline{U}_1}{dx_2}$$

и, следовательно,

$$u_2 \approx u_1 \sim -L \left| \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \right|,$$

так как знак компоненты $u_2$ определяется знаком величины $L$. Отсюда

$$\epsilon_m = -\overline{u_2 L_m} = \text{const}\, \overline{L_m^2} \left| \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \right|.$$

Коэффициент пропорциональности для удобства можно включить в новый параметр длины $l_m^2 = \text{const}\, \overline{L_m^2}$. Тогда выражение для коэффициента вихревой вязкости запишется так:

$$\epsilon_m = l_m^2 \left| \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \right| \tag{5.2}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{12} = \rho l_m^2 \left| \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d\overline{U}_1}{dx_2}. \tag{5.3}$$

Это соотношение можно получить также и другим способом, а именно исходя из выражения

$$\sigma_{12} = -\rho \overline{u_1 u_2}.$$

Введем коэффициент корреляции второго порядка $R_{12}$ между компонентами скорости $u_1$ и $u_2$ в одной и той же точке:

$$R_{12}(0) = \frac{\overline{u_1 u_2}}{u_1' u_2'}.$$

Тогда выражение для $\sigma_{12}$ запишется в виде

$$\sigma_{12} = -\rho R_{12}(0)\, u_1' u_2'.$$

Если снова воспользоваться предположением о том, что величины $u_1'$ и $u_2'$ пропорциональны $|d\bar{U}_1/dx_2|$, и если учесть, что $\sigma_{12}$ и $R_{12}(0)$ имеют противоположные знаки, то мы придем к соотношению (5.3); коэффициенты пропорциональности вводятся при этом в параметр длины $l_m$.

Эти рассуждения показывают, что в теории Прандтля содержатся предположения о постоянстве коэффициента корреляции между компонентами $u_1$ и $u_2$, а также о постоянстве коэффициента пропорциональности между $u_1'$ и $u_2'$ в поперечном сечении рассматриваемой области течения, если длина $l_m$ принимается в этом сечении неизменной. При рассмотрении свободных турбулентных потоков Прандтль принял, что величина $l_m$ пропорциональна ширине зоны турбулентного смешения и, стало быть, является функцией только осевой координаты и не зависит от поперечных координат (см. также главу 6).

Сила, действующая на единицу объема и равная скорости переноса импульса на единицу объема жидкости под действием турбулентности, определяется по разности напряжений сдвига между двумя соседними плоскостями. Так как поток в направлении оси $x_1$ является равномерным, то имеем

$$\frac{\partial \bar{\mathscr{P}}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho \frac{d}{dx_2}\left( l_m^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right). \tag{5.4}$$

Если $\mathscr{P}$ представляет собой скалярную величину $\Gamma$, то по аналогии с (5.3) можем записать соотношение

$$\mathfrak{I}_\gamma = +\overline{u_2 L \rho}\, \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} = -\rho l_\gamma^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right| \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2}. \tag{5.5}$$

При этом выражение для соответствующего коэффициента вихревой диффузии имеет вид

$$\epsilon_\gamma = l_\gamma^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|. \tag{5.6}$$

Длина $l_\gamma$, конечно, не обязательно должна быть a priori равна $l_m$, хотя такое предположение используется довольно часто.

Применение прандтлевской теории переноса импульса к отысканию распределения средней скорости в свободных струях и в следе за цилиндром или сферой привело к удовлетворительному соответствию с экспериментально определенными распределениями скорости (см. главу 6). В указанных случаях величина $l_m$ подбиралась таким образом, чтобы расчетное и экспериментальное распределения совпадали в точке, где осредненная скорость составляет половину своего максимального значения в данном поперечном сечении.

Расхождение между расчетным и экспериментальным распределениями скорости оказывается особенно заметным в тех точках, для которых $d\overline{U}_1/dx_2 = 0$. Согласно теории Прандтля, в этих точках $\epsilon_m = 0$; в то же время в действительности этот коэффициент должен иметь конечную величину. Прандтль сам почувствовал это уязвимое место своей теории и предложил [2] следующее, более развернутое выражение для коэффициента вихревой вязкости:

$$\epsilon_m = l_m^2 \left[ \left( \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} \right)^2 + l_m'^2 \left( \frac{d^2\overline{U}_1}{dx_2^2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Это нововведение значительно усложняет расчеты. Но оно, очевидно, должно привести к лучшему соответствию с опытом, хотя бы потому, что для стыкования теоретического и экспериментального распределений имеются два параметра: $l_m$ и $l'_m$.

Против теории переноса импульса можно высказать еще одно, более принципиальное возражение. В этой теории совершенно не учитывается влияние пульсаций давления на перенос импульса. Как можно показать на основании уравнений движения, перенос импульса может осуществляться за счет одной только разности давлений, даже когда моль жидкости сам по себе не перемещается. Докажем это иным путем. Из-за пульсаций давления, которые происходят в каждом моле жидкости на всем пути длиной $L$, импульс моля не будет оставаться постоянным; следовательно, этот импульс не будет сохраняться и, стало быть, не будет удовлетворяться требование, предъявляемое к транспортабельной субстанции в смысле Прандтля.

Согласно одному из законов Томпсона для вихревых движений, завихренность при плоском движении должна оставаться постоянной. Следовательно, в поле плоского потока завихренность $\omega$ является транспортабельной субстанцией в смысле Прандтля. Тэйлор [3] на много лет раньше разработал теорию, подобную теории Прандтля, но при этом воспользовался предположением, что завихренность можно рассматривать как транспортабельную субстанцию (теория переноса завихренности Тэйлора).

Если вновь обратиться к плоскому потоку, равномерному в направлении оси $x_1$ и обладающему скоростью $\overline{U}_1$, так что $\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2^2} = 0$, то можно написать

$$\frac{d\overline{P}}{dx_1} = \frac{d\sigma_{12}}{dx_2} = -\rho\frac{d}{dx_2}\overline{u_1u_2} = \rho\overline{u_2\omega_3},$$

где

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Так как завихренность $\omega_3$ считается транспортабельной субстанцией, то отсюда следует, что

$$\overline{u_2\omega_3} = +\overline{u_2L_\omega}\frac{d\overline{\Omega}}{dx_2}.$$

Вследствие того, что

$$\overline{\Omega} = -\frac{d\overline{U}_1}{dx_2},$$

получаем

$$\frac{d\overline{P}}{dx_1} = -\rho\overline{u_2L_\omega}\frac{d^2\overline{U}_1}{dx_2^2} = \rho l_\omega^2\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|\frac{d^2\overline{U}_1}{dx_2^2}. \tag{5.7}$$

Если эту формулу сравнить с уравнением (5.4), то можно заметить, что при условии независимости величины $l_m$ от $x_2$ оба этих выражения идентичны. Согласно Прандтлю, подобное предположение можно принять при рассмотрении свободной турбулентности, когда осредненная скорость направлена вдоль оси $x_1$; следовательно, в этом случае обе изложенные теории приводят к идентичным решениям. Коэффициент 2, который вносит различие между приведенными выше формулами, может быть включен в величину $l$; тогда величина $l_\omega$ должна равняться $l_m\sqrt{2}$.

Выражение для коэффициента вихревой вязкости записывается в виде

$$\epsilon_m = \epsilon_\omega = \frac{l_\omega^2}{2}\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|. \tag{5.8}$$

Если сравнить выражения (5.2), (5.6) и (5.8) соответственно для $\epsilon_m$, $\epsilon_\gamma$ и $\epsilon_\omega$, то можно заметить, что

$$\frac{\epsilon_m}{\epsilon_\gamma} = \frac{l_m^2}{l_\gamma^2}, \quad \frac{\epsilon_m}{\epsilon_\omega} = \frac{2l_m^2}{l_\omega^2} = 1, \quad \frac{\epsilon_\gamma}{\epsilon_\omega} = \frac{2l_\gamma^2}{l_\omega^2}.$$

Если принять $l_\gamma = l_\omega$, то по теории переноса завихренности получится более сильное распространение $\overline{\Gamma}$, нежели $\overline{U}_1$. Но в теории переноса количества движения, если принять в ней $l_\gamma = l_m$, этого не получается.

Если турбулентность носит трехмерный характер, то завихренность больше уже нельзя считать транспортабельной субстанцией в указанном выше смысле. Поскольку реальная турбулентность является трехмерной даже в том случае, когда основное движение представляет собой плоский поток, завихренность молей жидкости непрерывно изменяется из-за того, что вихревые нити при деформации жидких элементов под действием пространственного турбулентного движения удлиняются.

Тэйлор [4], учтя этот эффект, обобщил свою теорию переноса завихренности для плоского течения на случай трехмерного течения (обобщенная теория переноса завихренности), но при этом получились такие выражения, которые практически невозможно использовать. Поэтому, чтобы добиться упрощений, Тэйлору пришлось поступиться точностью теории; ему ничего не оставалось, кроме как принять предположение о том, что в трехмерном потоке завихренность тоже сохраняется неизменной. Эта упрощенная теория известна сейчас как видоизмененная теория переноса завихренности.

Мы дадим здесь вывод дифференциальных уравнений для определения скорости по видоизмененной теории переноса завихренности. Для этого прежде всего необходимо преобразовать уравнения движения таким образом, чтобы выделить в них члены, содержащие завихренность.

Будем считать течение установившимся и пренебрежем влиянием вязкости. Тогда уравнения движения (1.17) запишутся так:

$$\overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}.$$

Преобразуем последний член правой части следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j} = \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = -\overline{u_j \omega_k \varepsilon_{ijk}} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\overline{u_j u_j}}{2},$$

где (см. § 1.2)

$$\omega_k \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Отсюда

$$\overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\overline{u_j u_j}}{2} + \overline{u_j \omega_k \varepsilon_{ijk}}. \qquad (5.9)$$

Согласно теории пути смешения, величина $\omega_k$ определяется величиной средней завихренности в том слое жидкости, из которого начинают свое движение моли жидкости. Если при движении моля жидкости завихренность на некотором расстоянии сохраняется постоянной, то можно написать

$$\omega_k = +L_j \frac{\partial \overline{\Omega}_k}{\partial x_j},$$

откуда

$$\overline{u_j\omega_k}\varepsilon_{ijk} = +\overline{u_jL_l}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{\Omega}_k}{\partial x_l}.$$

Если подставить это соотношение в уравнение (5.9), то получим уравнение, которое оказывается весьма сложным для использования в дальнейших расчетах. Поэтому Тэйлор решительно упростил это уравнение, введя предположение о том, что анизотропность турбулентности достаточно мала и, следовательно, характеристики турбулентности $\overline{u_jL_l}$ могут приближенно рассматриваться как изотропные.

В этом случае имеем

$$\overline{u_jL_l} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l \text{ (инвариантность при отражении)}$$

и

$$\overline{u_jL_l} = \overline{(uL)}_\omega = -\epsilon_\omega \quad \text{при} \quad j = l.$$

Стало быть, тогда можно ввести скалярный коэффициент вихревой диффузии; следовательно,

$$\overline{u_j\omega_k}\varepsilon_{ijk} = -\epsilon_\omega\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x_j}.$$

Так как

$$\varepsilon_{ijk}\overline{\Omega}_k = \frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j},$$

то для несжимаемой жидкости получаем

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{\Omega}_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\overline{U}_j}{\partial x_j\,\partial x_i} - \frac{\partial^2\overline{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j} = -\frac{\partial^2\overline{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}.$$

Отсюда

$$\overline{u_j\omega_k}\varepsilon_{ijk} = \epsilon_\omega\frac{\partial^2\overline{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}.$$

Тогда уравнение (5.9) перепишется следующим образом:

$$\overline{U}_j\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\overline{u_ju_j}}{2} + \epsilon_\omega\frac{\partial^2\overline{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}. \qquad (5.10)$$

Согласно теории переноса импульса, должно было бы получиться такое уравнение:

$$\overline{U}_j\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\epsilon_m)_{ik}\left(\frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{U}_k}{\partial x_j}\right)\right]. \qquad (5.11)$$

Итак, нетрудно видеть, что эти два дифференциальных уравнения становятся идентичными лишь при определенных условиях. Так, рассматриваемая турбулентность должна быть однородной, чтобы вторым членом в правой части уравнения (5.10) можно было пренебречь. Для того чтобы величина $(\epsilon_m)_{ik}$ стала скаляром, который,

помимо всего, не должен зависеть от $x_j$, необходимо принять предположение о приближенной изотропности величин, характеризующих турбулентный перенос, аналогичное предположению, введенному Тэйлором в уравнение (5.9).

Согласно прандтлевской гипотезе пути смешения, коэффициент вихревой вязкости $\epsilon_m$ можно записать в виде произведения квадрата пути смешения и поперечной производной от средней скорости. Как уже упоминалось, Прандтль предположил, что (1) в свободном турбулентном потоке путь смешения постоянен в произвольном поперечном сечении зоны смешения и что (2) путь смешения пропорционален ширине зоны смешения. В этих предположениях подразумевается, что в некотором поперечном сечении зоны смешения масштаб турбулентности, который связан с путем смешения, должен иметь в среднем постоянное значение, определяемое полной шириной зоны смешения.

Карман выдвинул другое предположение относительно величины пути смешения, а именно, что она определяется местными условиями течения и может быть выражена через параметры, которые зависят от этих местных условий. Такими параметрами являются, например, производные от осредненной скорости в некоторой точке поля течения. Кроме того, Карман принял, что картина течения обладает геометрическим подобием по всему полю. Согласно определению подобия (см. § 3.1), для описания структуры турбулентности достаточно лишь масштабов длины и скорости. Поскольку упомянутые производные от осредненной скорости рассматриваются как параметры, определяемые местными условиями, то самый простой способ получения характерного масштаба длины — это выразить его как отношение двух последовательных производных, например первой и второй поперечных производных от средней скорости.

Если обратиться к плоскому течению с осредненной скоростью, направленной вдоль оси $x_1$, то условие геометрического подобия требует, таким образом, чтобы

$$l\frac{(\partial^2\bar{U}_1/\partial x_2^2)}{(\partial\bar{U}_1/\partial x_2)} = \text{const} = K$$

или

$$l = K\frac{(\partial\bar{U}_1/\partial x_2)}{(\partial^2\bar{U}_1/\partial x_2^2)}. \tag{5.12}$$

Тогда для коэффициента вихревой вязкости $\epsilon_m$ получим следующее выражение:

$$\epsilon_m = l_m^2\left|\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\right| = K^2\frac{(\partial\bar{U}_1/\partial x_2)^2}{(\partial^2\bar{U}_1/\partial x_2^2)^2}\left|\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\right|. \tag{5.13}$$

Это выражение показывает, что в тех точках, где $\partial^2\overline{U}_1/\partial x_2^2 = 0$ и $\partial\overline{U}_1/\partial x_2 \neq 0$, величина $\epsilon_m$ обращается в бесконечность. Этот результат не является вполне очевидным. Кроме того, оказывается, что теория Кармана не имеет существенных преимуществ перед намного более простым предположением Прандтля о пропорциональности пути смешения ширине зоны смешения (в случае свободной турбулентности) или расстоянию от стенки (в случае «пристеночной» турбулентности; см. главу 7).

Резюмируя, можно сказать, что теории пути смешения основаны главным образом на двух гипотезах, а именно: (1) на аналогии с кинетической теорией газов в сочетании с предположением о том, что либо импульс, либо завихренность является транспортабельной субстанцией жидких частиц, и (2) на гипотезе, согласно которой путь смешения зависит от условий течения.

Ни Прандтль, ни Тэйлор не занимались подробным анализом того механизма, благодаря которому моли жидкости приспосабливают присущие им транспортабельные субстанции к своей новой окружающей среде. В данном случае предполагается, что подобное приспособление происходит обязательно. Особенно в случае теории переноса завихренности, где завихренность сохраняется постоянной (плоское течение) или предполагается постоянной (трехмерное течение), очень трудно, не принимая во внимание влияние вязкости, представить себе, каким образом завихренность жидкого моля приспосабливается к средней завихренности новой окружающей среды.

Вслед за этими теориями пути смешения были разработаны и другие теории. Карман [6] и Прандтль [2] предложили теории, в которых предполагается некоторое непосредственное соответствие между коэффициентом вихревой диффузии $\epsilon$ и картиной течения. В других теориях, которые будут рассмотрены в дальнейшем, не вводится коэффициента вихревой диффузии, а используются совершенно иные рассуждения, основанные на феноменологических представлениях.

Карман высказал сомнение насчет того, можно ли удовлетворительно описать распределение осредненной скорости с помощью теорий пути смешения, если (например, в случае свободной турбулентности) определять путь смешения размерами зоны смешения, как это предлагалось Прандтлем. Карман следует своему прежнему предположению о том, что процессы турбулентного переноса определяются местными условиями течения. Из соображений размерности величину $\epsilon$ можно записать как произведение скорости на длину. В качестве этой скорости Карман выбирает $u_2'$ и получает

$$\epsilon = u_2' l^*.$$

Длина $l^*$ не идентична прандтлевскому пути смешения. По Карману, величина $l^*$ должна определяться параметрами, носящими мест-

ный характер, такими, как $\lambda_g$ и локальное число Рейнольдса или число Рейнольдса турбулентности $\mathrm{Re}_\lambda$. Таким образом,

$$l^* = \lambda_g f(\mathrm{Re}_\lambda).$$

Самая простая форма этой зависимости имеет вид

$$l^* \sim \lambda_g \mathrm{Re}_\lambda,$$

и, следовательно,

$$\epsilon = \text{const}\,\frac{u_2'^2 \lambda_g^2}{\nu}. \tag{5.14}$$

В предшествовавшем анализе было выяснено различие между идеями Прандтля и Кармана: Прандтль пытается связывать процессы переноса в зонах смешения свободных турбулентных потоков с суммарными условиями течения; в то же время Карман делает попытку увязать эти процессы с местными условиями. Отмеченное различие вновь проявляется между только что изложенной теорией Кармана и другой теорией Прандтля, относящейся к свободной турбулентности. В этой теории Прандтль исходит из предположения о том, что характер течения в зоне смешения как целого определяется размерами этой зоны и наибольшей разностью скоростей в поперечном сечении этой зоны. Полагая, что коэффициент вихревой диффузии определяется именно этими суммарными величинами, Прандтль предлагает следующую формулу для $\epsilon$:

$$\epsilon = \text{const}\, B(\overline{U}_{\max} - \overline{U}_{\min}), \tag{5.15}$$

где $B$ — ширина зоны смешения.

Таким образом, величина $\epsilon$ должна быть постоянной (независимой от $x_2$) в любом поперечном сечении и зависеть только от $x_1$, т. е. от направления основного течения. Следствием этого положения является то, что, согласно соотношению (5.2), путь смешения $l_m$, в противоположность предположению, принятому Прандтлем ранее, непостоянен в поперечном сечении зоны смешения.

Согласно уравнению (5.14), величина $\epsilon$ может зависеть также и от $x_2$. Как будет показано в главе 6, экспериментальные данные о распределении скорости в поперечных сечениях свободной струи и следа за цилиндром свидетельствуют в пользу предположения о постоянстве величины $\epsilon_m$ в поперечном сечении зоны смешения.

Весьма полезным могло бы оказаться более подробное рассмотрение упомянутых здесь различных теорий в свете более поздних исследований по структуре турбулентности, ибо эти исследования ясно показывают недостатки той или иной теории. Однако, поскольку эти исследования относятся, в основном, к свободным турбулентным потокам (свободные струи и аэродинамический след за цилиндром), мы ограничимся здесь лишь анализом именно этого типа

турбулентных течений. При этом нам придется воспользоваться экспериментальными данными, которые будут рассмотрены ниже, в главе 6, но это, по-видимому, не является серьезной помехой.

Прежде всего мы должны подчеркнуть следующее. Во всех рассмотренных выше теориях предполагается, что перенос некоторой транспортабельной субстанции определяется местным градиентом этой субстанции и, следовательно, явление переноса в данном случае относится к градиентному типу и при этом должен быть введен коэффициент вихревой диффузии. Если записать $\epsilon = u_2' l^*$, то градиентный тип переноса означает тогда, что величина $l^*$ должна быть мала, и во всяком случае настолько, чтобы градиент этой транспортабельной субстанции на всем расстоянии $l^*$ был практически равномерным. Но, исходя из соответствующих значений $\epsilon$ и $u_2'$ в зоне смешения, можно показать, что длина $l^*$, по-видимому, обычно не очень мала; следовательно, указанное выше условие не удовлетворяется. По измерениям Таунсенда в следе за цилиндром, эмпирическое значение $l^*$ — порядка 0,1 от полуширины следа.

Если в теорию пути смешения Прандтля ввести величины $u_2'$ и $l^*$, приняв для $\epsilon_m$, например, выражение (5.2), то и в этом случае путь смешения $l_m$ тоже должен быть мал по сравнению с размерами зоны смешения. Как мы увидим в главе 6, величины $l_m$, вычисленные по экспериментальным значениям $\epsilon_m$, далеко не малы по сравнению с шириной зоны смешения.

Выше уже говорилось о том, что теория пути смешения Прандтля содержит также предположение о постоянстве отношения величин $u_1'$ и $u_2'$ в поперечном сечении зоны смешения; отсюда следует подобие структуры турбулентности во всех участках зоны смешения. Но в той же теории, помимо этого, предполагается, что влияние диффузии и конвекции энергии турбулентности должно быть пренебрежимо малым и, следовательно, локальное порождение энергии турбулентности за счет работы напряжений сдвига равно диссипации [см., например, уравнение (1.99)]. Для этого случая имеем

$$-\overline{u_1 u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = \text{диссипация}.$$

Воспользуемся теперь предположением о подобии и выберем в качестве характерной скорости и длины соответственно величины $u_2'$ и $\lambda$. Тогда

$$\overline{u_1 u_2} \sim u_2'^2$$

и

$$\text{диссипация} \sim \frac{\nu u_2'^2}{\lambda^2} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda}\frac{l_m}{\lambda}\frac{u_2'^3}{l_m},$$

так что

$$u_2'^2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda} \frac{l_m}{\lambda} \frac{u_2'^3}{l_m},$$

откуда

$$u_2' \sim l_m \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Это и есть, по существу, одно из предположений, введенных Прандтлем. Но, как будет показано в главе 6, диффузию и конвекцию энергии турбулентности нельзя всегда считать пренебрежимо малыми.

Экспериментально было обнаружено, что при течении в следе, как и в случае свободной струи, коэффициент вихревой вязкости $\epsilon_m$ на большом участке зоны смешения почти постоянен. Если, следуя Карману, считать, что для $\epsilon_m$ применима формула (5.14), то это означает, что либо обе величины — $u_2'^2$ и $\lambda_g$ — постоянны, либо они изменяются, но при этом их произведение остается постоянным. По измерениям Таунсенда в следе за цилиндром, величина $\lambda_g$ в поперечном сечении следа практически постоянна. Но так как величина $u_2'$ в поперечном сечении следа изменяется, соотношение (5.14) должно приводить к непостоянной величине $\epsilon_m'$.

Однако выбор $u_2'$ в качестве характерной скорости является довольно произвольным. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda$, на наш взгляд, лучше относить к среднеквадратичному значению всех трех компонент турбулентных пульсаций и, следовательно, вместо соотношения (5.14) принять

$$\epsilon_m = \mathrm{const} \frac{\left(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2\right) \lambda_g^2}{\nu}. \tag{5.16}$$

По измерениям Таунсенда, энергия турбулентности

$$\frac{1}{2}\left(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2\right)$$

в поперечном сечении следа остается почти постоянной.

Постоянство энергии турбулентности и масштаба диссипации в поперечном сечении зоны смешения — экспериментальные факты. Но эти факты можно подтвердить и путем логических рассуждений. Для этого необходимо более подробно рассмотреть процесс переноса энергии турбулентности в зоне смешения. Анализ результатов измерений, касающихся переноса энергии турбулентности и произведенных Таунсендом в следе за цилиндром, будет дан в главе 6. Здесь достаточно упомянуть лишь об одном из результатов этого анализа, а именно о том, что, по-видимому, существует небольшой участок зоны смешения, в котором диффузия энергии турбулент-

ности, если придерживаться предположения о градиентном типе суммарного переноса $\overline{u_2 q^2}$, происходит не в направлении уменьшения градиента, а, наоборот, в сторону его возрастания. В этом случае величина $\epsilon_q$ становится на этом участке отрицательной, что невозможно. Единственный способ разрешения этого противоречия заключается в отказе от предположения о градиентном типе суммарного переноса $\overline{u_2 q^2}$ и в допущении того, что наблюдаемый в этом случае перенос определяется механизмом, отличным от диффузии градиентного типа. В отношении этого механизма постулируем, что перенос величины $\overline{q^2}$ осуществляется посредством диффузии градиентного типа, обусловленной мелкомасштабной турбулентностью, в сочетании с конвекцией при крупномасштабных движениях вихрей, сравнимых по своим размерам с шириной следа. Отсюда

$$\overline{u_2 q^2} = -\epsilon_q \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{q^2} + \overline{\mathcal{V} q^2}, \tag{5.17}$$

где $\mathcal{V}$ означает скорость крупномасштабных движений.

Очевидно, что такой же комплекс механизмов переноса в принципе применим к любой транспортабельной субстанции — импульсу, теплу или веществу. Таунсенд, анализируя результаты измерений распределения температуры $\overline{\Theta}$ и величины $\overline{u_2 \theta}$, обнаружил, что полный перенос тепла должен быть обусловлен не только диффузией градиентного типа, но также и обменом при перемещении больших масс жидкости.

Относительная роль каждого из членов правой части записанного выше уравнения в полном переносе может зависеть от характера транспортабельной субстанции $\mathcal{P}$. Из полученных Таунсендом экспериментальных данных о распределениях средней скорости, тепла и энергии турбулентности в следе за цилиндром следует, что перенос осевой компоненты импульса, по всей вероятности, обусловлен главным образом диффузией градиентного типа при мелкомасштабной турбулентности, в то время как перенос энергии турбулентности связан прежде всего с конвективным действием крупномасштабного движения, а перенос тепла, возможно, носит «смешанный» характер. Это различие в самой грубой форме можно выразить следующим образом:

$$\overline{u_2 u_1} \approx -\epsilon_m \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}, \tag{5.18}$$

$$\overline{u_2 q^2} \approx \overline{\mathcal{V} q^2}, \tag{5.19}$$

$$\overline{u_2 \theta} \approx -\epsilon_\theta \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x} + \overline{\mathcal{V} \theta}. \tag{5.20}$$

Однако такой подход является очень утрированным.

Так как перенос энергии турбулентности $\overline{q^2}$ вызывается, в основном, крупномасштабными конвективными токами поперек зоны смешения, логично воспользоваться экспериментальным результатом, состоящим в том, что распределение $\overline{q^2}$ на довольно протяженном участке зоны смешения практически равномерно.

Прежде чем закончить этот критический обзор теорий переноса, желательно упомянуть об одной характерной особенности свободных турбулентных потоков, которая определенно влияет на результаты игнорирующих ее теорий. Речь идет о перемежающемся характере турбулентного течения в пограничных слоях между зоной смешения и невозмущенным свободным потоком, расположенным снаружи нее.

Описание процессов переноса с помощью дифференциальных уравнений предполагает непрерывность течения во всей рассматриваемой области. Но если обратиться к картине течения в следе или в свободной струе, то подобную непрерывность можно обнаружить только в центральной части зоны смешения; в направлении к наружным границам зоны смешения непрерывность все более и более нарушается. Решения дифференциальных уравнений, основанные на предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии, оказываются совершенно непригодными в перемежающихся пограничных участках. В самом деле, эффективная величина рассматриваемого коэффициента на этих участках резко уменьшается с приближением к наружной границе. Это и понятно, поскольку диффузия градиентного типа может существовать в данной точке только в течение тех периодов, когда течение в этой точке является турбулентным. Мгновенное значение $\epsilon$ на протяжении этих периодов может быть приблизительно равно значению, наблюдающемуся в непрерывной центральной части зоны смешения; другими словами, величина $\epsilon$ на протяжении этих периодов может быть примерно постоянной.

В теориях, разработанных Буссинеском, Прандтлем, Тэйлором и Карманом, используется дедуктивный метод. Принимается определенная гипотеза относительно напряжений сдвига в турбулентном потоке или относительно коэффициента турбулентной диффузии, на основании которой с помощью уравнений движения и неразрывности, а также в предположении об условиях подобия выводится (дедуцируется) распределение скорости. Рейхардт [7, 8] подверг критике этот метод, указав, что относительно просто измеряемые величины, например средняя скорость, выводятся в этом случае на основании более или менее сомнительных гипотез и что неизбежный разброс экспериментальных данных, используемых для сравнения, сильно затрудняет принятие решения в пользу той или иной гипотезы.

В противоположность дедуктивному методу, Рейхардт предложил индуктивный метод. Основу его составляют экспериментальные данные о непосредственно измеряемых величинах. Индуктивная теория

была подробно разработана Рейхардтом для случая свободных турбулентных течений. Опыты показали, что распределения скорости и субстанции Г в поперечных сечениях зоны смешения довольно близко следуют кривой ошибок Гаусса или связанным с ней функциям. Подобные функции были обнаружены также в процессах выравнивания под действием молекулярной диффузии или теплопроводности. Рейхардт предположил, что процесс турбулентного переноса по своей природе является статистическим и в точности аналогичен процессу молекулярного переноса. Если, например, рассматривать распределение скорости $U_1$ в свободном турбулентном потоке, основная скорость которого направлена вдоль оси $x_1$, то оказывается, что распределение полного потока импульса $\rho\overline{U_1^2}$ (включающего в себя осредненную и пульсационную компоненты) хорошо описывается гауссовой кривой ошибок. Но если это так, то дифференциальное уравнение для $\rho\overline{U_1^2}$ должно быть идентично уравнению молекулярной диффузии или теплопроводности. Следовательно, уравнения движения надо преобразовать таким путем, чтобы получить уравнение теплопроводности; для решения же этого уравнения потребуется отдельная гипотеза.

Чисто феноменологическую теорию Рейхардта мы рассмотрим более подробно на примере плоского течения. Если, как это обычно делается при исследовании свободной турбулентности, пренебречь членом, в который входит давление, и членами, содержащими вязкость, то уравнение движения для мгновенной скорости $U_1$ запишется так:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = 0. \tag{5.21}$$

С помощью уравнения неразрывности преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} U_1 U_2 = 0. \tag{5.22}$$

Но так как осредненное движение считается стационарным, то

$$\frac{\partial \overline{U_1^2}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{U_1 U_2} = 0. \tag{5.22а}$$

Это не что иное, как уравнение сохранения компоненты импульса в направлении оси $x_1$.

Если принять, что величина $\overline{U_1^2}$ следует гауссову закону ошибок, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \overline{U_1^2}}{\partial x_1} = \mathscr{L} \frac{\partial^2 \overline{U_1^2}}{\partial x_2^2}. \tag{5.23}$$

В этом уравнении величина $\mathscr{L}$ имеет размерность длины, но математически она имеет смысл коэффициента диффузии; какого-либо определенного физического смысла она лишена.

Коэффициент $\mathscr{L}$ может, вообще говоря, зависеть от $x_1$ и $x_2$. Применяя свою теорию к свободным турбулентным потокам, Рейхардт предполагал, что $\mathscr{L}$ является функцией только $x_1$, определяемой шириной зоны смешения.

Чтобы преобразовать (5.22) в (5.23), необходимо лишь постулировать, что

$$\overline{U_1 U_2} = -\mathscr{L}\frac{\partial \overline{U_1^2}}{\partial x_2}. \tag{5.24}$$

Это соотношение, которое Рейхардт называет законом переноса импульса, можно интерпретировать следующим образом. Интенсивность переноса импульса, соответствующего компоненте $U_1$, в поперечном направлении со скоростью $U_2$ пропорциональна изменению потока импульса $\overline{U_1^2}$ в этом поперечном направлении.

Этот «закон» не лишен определенного смысла. Однако он является неудовлетворительным и в самом деле оказывается несправедливым, если рассматривать все вытекающие из него следствия. Как показал Прандтль [2], уравнение (5.23) отдает предпочтение оси $x_1$ по сравнению с осью $x_2$; это совершенно неоправданно — единственное оправдание состоит в том, что ось $x_1$ совпадает с направлением осредненного течения.

В то время как уравнение (5.22) инвариантно относительно параллельного переноса координатной системы с постоянной скоростью, этого, по-видимому, нельзя сказать об уравнении переноса импульса (5.24); следовательно, уравнение (5.24) противоречит принципу относительности Ньютона, согласно которому силы, действующие в механической системе, не должны измениться, если этой системе сообщить дополнительную постоянную скорость.

Рассмотрим, кроме системы координат $(x_1, x_2)$, другую систему $(x_1^*, x_2^*)$, параллельную первой и движущуюся в направлении оси $x_2$ с постоянной скоростью $C$. Пусть $U_1^*$ и $U_2^*$ — компоненты скорости относительно движущейся системы. Тогда можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^*, & U_1 &= U_1^*, \\ x_2 &= x_2^* + Ct^*, & U_2 &= U_2^* + C. \\ t &= t^*, \end{aligned}$$

Если учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1^*}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2^*},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} = -C\frac{\partial}{\partial x_2^*} + \frac{\partial}{\partial t^*},$$

то уравнение (5.22) преобразуется так:

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial t} - C\frac{\partial U_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial U_1^{*2}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial}{\partial x_2^*} U_1^* U_2^* + C\frac{\partial U_1^*}{\partial x_2^*} = 0$$

или

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial t} + \frac{\partial U_1^{*2}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial}{\partial x_2^*} U_1^* U_2^* = 0.$$

Относительно движущейся системы координат уравнение (5.24) принимает следующий вид:

$$\overline{U_1^* U_2^*} + C\overline{U_1^*} = -\mathscr{L}\frac{\partial \overline{U_1^{*2}}}{\partial x_2^*}.$$

Следовательно, уравнение (5.24) и в самом деле не инвариантно относительно параллельного переноса системы координат.

Изложенные выше соображения говорят не в пользу теории Рейхардта. Единственный, но, по общему признанию, очень сильный аргумент, который приводится Рейхардтом в пользу его теории, — это хорошее согласие с экспериментальными результатами. Но это на самом деле и не очень удивительно, ибо в этой теории уравнения движения искусственно преобразуются с таким расчетом, чтобы соответствовать опытным данным.

В то же время уравнение (5.23) имеет — не только с математической, но и с практической, инженерной точки зрения — то преимущество, что оно является линейным относительно $\overline{U^2}$, а при этом справедлив принцип суперпозиции элементарных решений. Александэр, Бэрон и Камингс [11] показали, что принцип суперпозиции успешно может применяться для расчета распределения импульса в поперечном сечении двух параллельных свободных струй, вытекающих с одинаковой скоростью из щелей, расположенных в одной и той же плоскости, перпендикулярной к осям струй.

Теорию Рейхардта можно обобщить на случай, в котором вместо компоненты импульса $\rho U_1$ рассматривается скалярная субстанция Г. Для плоского стационарного движения, если пренебречь молекулярными эффектами, уравнение переноса Г записывается в виде

$$\frac{\partial \overline{U_1\Gamma}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{U_2\Gamma} = 0.$$

Теперь необходимо постулировать «закон»

$$\overline{U_2\Gamma} = -\mathscr{L}_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{U_1\Gamma} \qquad (5.25)$$

с тем, чтобы прийти к уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{U_1\Gamma} = \mathscr{L}_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\overline{U_1\Gamma}, \tag{5.26}$$

которое для $\overline{U_1\Gamma}$ дает решение типа гауссовой кривой ошибок.

Другая феноменологическая теория, которая оказывается эквивалентной теории Рейхардта, предложена Бэроном [9]. Бэрон показал, что процессы переноса при свободной турбулентности всегда приводят к гауссовым кривым ошибок для распределения транспортабельной субстанции, так как статистические процессы обычно приводят к кривым ошибок Гаусса, а распространение турбулентности — это и есть статистический процесс. Бэрон высказал предположение о том, что турбулентное течение можно получить в результате распространения «импульсных частиц», движение которых начинается из источников.

Рассмотрим для примера свободную струю. Отверстие, из которого вытекает струя, может быть принято за источник подобных импульсных частиц, эжектирующих импульсные частицы вдоль оси струи. При этом могут происходить отклонения или распространение этих частиц в поперечном направлении; указанные отклонения подчиняются законам вероятности. В нашем случае плотность вероятности отклонения импульсных частиц в поперечном направлении описывается гауссовой кривой ошибок. Эти представления сходны с теми, которые применяются при оценке поперечного разброса орудийных снарядов. Благодаря распространению в поперечном направлении, ширина зоны, занимаемой этими импульсными частицами, должна в направлении струи возрастать. Однако эта теория не позволяет оценить, в какой мере происходит указанное увеличение ширины с расстоянием от сопла. Для этого требуется ввести еще одно предположение, например о подобии профилей скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях струи. В случае струи, вытекающей из отверстия круглой формы, это приводит к линейному закону увеличения ширины струи с расстоянием от отверстия. Результатом теории Бэрона является распределение скорости типа кривой Гаусса. Но если эту гауссову кривую рассматривать как решение дифференциального уравнения (5.23), то те же принципиальные возражения, которые выше были выдвинуты против теории Рейхардта, можно повторить и здесь.

Ни теория Рейхардта, ни теория Бэрона не описывают действительной картины механизма турбулентного течения и даже не делают попытки каким-либо способом углубить наши представления об этом механизме. Единственная заслуга этих теорий, которая носит практический характер и о которой уже упоминалось, состоит в том, что они дают возможность легко строить решения для распределения транспортабельной субстанции в свободном турбулентном

потоке, причем эти решения вполне удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Наконец, можно отметить, что решение типа Гаусса для уравнения (5.23) относится к полному потоку импульса $\overline{U_1^2}$, в который входят компоненты как осредненного, так и пульсационного движения, а именно:

$$\overline{U_1^2} = \overline{U}_1^2 + \overline{u_1^2}.$$

То же самое относится и к решениям, полученным в теории Бэрона.

В главе 6 будет показано, что для свободных турбулентных потоков при определенных предположениях представляется возможным получать из уравнений движения решения типа Гаусса, которые в этом случае относятся к осредненной скорости $\overline{U}_1$.

Экспериментальные данные имеют обычно такой разброс, что принять решение о том, какая из величин — полный поток импульса $\overline{U_1^2}$ или осредненная скорость $\overline{U}_1$ — лучше описывается решением типа Гаусса, весьма затруднительно.

Проведенные Таунсендом и Бэтчелором исследования течения в следе за цилиндром показали, что решение типа Гаусса, по-видимому, справедливо для осредненного движения, по крайней мере для центрального, полностью турбулентного участка зоны смешения. Но в пограничном участке зоны смешения это решение неприемлемо. Более подробно результаты этих исследований будут рассмотрены в главе 6.

## § 5.3. Аналогии при турбулентном переносе

При изучении процессов переноса в турбулентных потоках логично задаться вопросом, нельзя ли провести аналогию между процессами переноса таких различных субстанций, как импульс, тепло, вещество и энергия турбулентности. Если бы такая аналогия существовала для любой пары этих субстанций, то для них можно было бы получить подобные решения и даже оказалось бы возможным выразить параметры, определяющие перенос одной субстанции, через параметры, определяющие перенос другой субстанции. По этой причине вопрос о существовании аналогий был поднят очень давно и в существующих теориях получил более или менее удовлетворительное решение.

Если мы хотим разобраться в проблеме аналогий, то необходимо прежде всего четко условиться о том, что же, собственно, подразумевается под понятием аналогии.

Предполагается, что перенос какой-либо транспортабельной субстанции (например, импульса, тепла, вещества, энергии турбулент-

ности) в турбулентном потоке может быть описан посредством дифференциальных уравнений. В этом случае аналогия при переносе выполняется, если соответствующие дифференциальные уравнения, а также начальные и граничные условия идентичны.

В дифференциальные уравнения, описывающие перенос в турбулентном потоке, входят различные члены, представляющие относительный вклад в полное изменение рассматриваемой субстанции следующих факторов: локального изменения по времени; конвекции при осредненном движении; турбулентной и молекулярной диффузии; внешних эффектов и, в случае переноса импульса, осредненного градиента давления.

Удобно, и притом допустимо, различать процессы переноса в широком и узком смысле. Под процессом переноса в широком смысле условимся понимать полностью весь процесс, который вызывает распространение рассматриваемой субстанции в пространстве и определяет его как функцию времени. Это распространение может включать в себя влияние внешних факторов, а также источников и стоков, которое наряду с влиянием потока, как такового, обусловливает изменение этой субстанции. Выделение и поглощение тепла при химической реакции образует соответственно источник и сток, которые не возникают непосредственно в самом потоке. В то же время происхождение тепла, выделяющегося при диссипации кинетической энергии, связано непосредственно с самим потоком; это тепло оказывает воздействие на энергию турбулентности как непрерывно распределенный сток энергии, а на распределение тепла — как непрерывно распределенный источник тепла.

Процесс переноса в узком смысле будем понимать как процесс диффузии собственно рассматриваемой субстанции.

В главе 1, а также в предыдущем параграфе проводилась параллель между процессами турбулентного и молекулярного переноса, причем оба процесса рассматривались тогда в узком смысле. По-видимому, полезно рассмотреть вначале аналогию между процессами молекулярного переноса импульса, тепла и вещества. Как известно, предположение о том, что молекулы ведут себя подобно твердым шарам, приводит к одинаковым значениям коэффициентов кинематической вязкости, теплопроводности и диффузии. Но поскольку необходимы различные поправки, учитывающие влияние упругости шаров, сил отталкивания, постоянства скоростей после столкновений и т. д. — факторов, роль которых неодинакова в случае переноса импульса, тепла (т. е. энергии молекулярного движения) и вещества, то эти три коэффициента оказываются неодинаковыми по величине. Например, влияние постоянства скоростей после столкновений на коэффициент диффузии отлично от влияния этого фактора на коэффициенты вязкости и теплопроводности. Это объясняется тем, что масса не зависит от столкновений, а импульс и энергия зависят от них.

Различия между парами коэффициентов характеризуются их отношением, например числами Прандтля и Шмидта.

При турбулентных движениях, когда большие комплексы молекул движутся более или менее «совокупно», кинетическая энергия, связанная с движениями этих молей жидкости, не входит во внутреннюю энергию жидкости, т. е. в тепло. Следовательно, логично предположить, что взаимодействие между этими молями при турбулентном движении, в отличие от актов обмена молекулярной природы только в течение времени соприкосновения, не влияет ни на количество тепла, ни на массу. Если влиянием этого молекулярного обмена пренебречь, то вихревой обмен теплом и веществом должен быть одинаков. Это подчеркивалось и в приведенных выше рассуждениях, где для обеих этих субстанций применялся один и тот же символ Г. Столкновение между молями жидкости будет оказывать влияние только на их импульс и энергию турбулентности. Следовательно, в процессе турбулентного обмена, при пренебрежении влиянием молекулярного обмена, можно проводить различие между тремя субстанциями: импульсом, теплом (или веществом) и энергией турбулентности.

Однако не всегда допустимо пренебрегать влиянием молекулярного обмена — например, в случае процессов переноса в пограничном слое на твердой стенке. Молекулярными эффектами не всегда можно пренебречь даже при свободной турбулентности. В дальнейшем мы увидим, что турбулентные движения вызывают растяжение и деформацию молей жидкости, способствуя таким образом увеличению градиентов концентрации и температуры, а стало быть, и молекулярному обмену.

Рассмотрим прежде всего процессы переноса при свободной турбулентности. Несмотря на высказанные выше соображения, будем считать, что процессы переноса в узком смысле являются по своей природе турбулентными и что влиянием молекулярного переноса можно пренебречь. Затем будут рассмотрены аналогии между переносом импульса, тепла (или вещества) и турбулентной энергии в свете теорий, изложенных в предыдущем параграфе.

В случае несжимаемой жидкости изменение скорости описывается уравнением (1.17), которое, если пренебречь вязким членом, имеет вид

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j} + \bar{F}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}. \qquad (5.27)$$

Здесь величина $\bar{F}_i - (1/\rho)(\partial \bar{P}/\partial x_i)$ представляет собой полную «движущую силу» на единицу массы. Уравнение, описывающее изменение субстанции, согласно (1.28), если вновь пренебречь молекулярными эффектами, имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i \gamma} + \bar{F}_\gamma, \qquad (5.28)$$

где $\bar{F}_\gamma$ означает «движущую силу» для субстанции Г.

Из уравнения (1.98) для изменения кинетической энергии турбулентности, к которой добавлена величина $p/\rho$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}}\right)+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}}\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}-\overline{u_iu_j}\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \quad (5.29)$$

В соответствии с тем, что говорилось выше, мы пренебрегли членом, представляющим работу, совершенную на единицу массы в единицу времени вязкими напряжениями сдвига, но сохранили член, характеризующий диссипацию.

Если сравнить уравнения (5.27) и (5.28), то можно заметить, что, за исключением слагаемого $(1/\rho)(\partial\bar{P}/\partial x_i)$ в уравнении (5.27), члены их подобны. Это различие отражает тот факт, что перенос импульса, в отличие от переноса субстанции Г, зависит от изменения давления.

Однако в свободных турбулентных потоках градиент давления $\partial\bar{P}/\partial x_i$ обычно настолько мал, что указанным членом можно пренебречь; в этом случае рассматриваемые уравнения оказываются идентичными, если члены $\bar{F}_i$ и $\bar{F}_\gamma$ одинаковы. Можно заметить, что если транспортабельной субстанцией является тепло, то величина $\bar{F}_\gamma$ включает в себя по крайней мере тепло, выделившееся при диссипации кинетической энергии турбулентности.

В уравнении (5.29) два последних члена в правой части, означающих порождение и диссипацию энергии турбулентности, можно рассматривать как характеристику непрерывно распределенного источника и стока. Очевидно, что полная аналогия между переносом энергии турбулентности, с одной стороны, и переносом импульса и тепла, или вещества, с другой стороны, невозможна, так как едва ли можно допустить, что для движущих сил $-\overline{u_iu_j}\,\partial\bar{U}_i/\partial x_j$, $-\overline{\nu(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)\,\partial u_j/\partial x_i}$ и $\bar{F}_i$ или $\bar{F}_\gamma$ получатся одинаковые функциональные зависимости.

Таким образом, можно сделать вывод, что в свободных турбулентных потоках полная аналогия между переносом (в широком смысле) импульса, тепла (или вещества) и энергии турбулентности невозможна. Только лишь при отсутствии «движущих сил» $\bar{F}_i$ и $\bar{F}_\gamma$ (т. е. при пренебрежении выделением тепла под действием диссипации) возможна аналогия между переносом импульса и тепла (или вещества).

Если перенос рассматривать только в узком смысле, т. е. под воздействием лишь вихревой диффузии, то тогда аналогия между переносом импульса, субстанции Г и энергии турбулентности может

иметь место при условии, что механизм переноса, которым определяется форма соответствующих членов

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\gamma u_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)},$$

идентичен во всех трех случаях.

Рассмотрим теперь эти три диффузионных члена в свете теорий, изложенных в предыдущем параграфе.

Следуя Буссинеску, введем коэффициенты вихревой диффузии $\epsilon_m$, $\epsilon_\gamma$ и $\epsilon_q$ так, чтобы

$$\overline{u_i u_j} = -\epsilon_m\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right), \quad \overline{\gamma u_j} = -\epsilon_\gamma \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_j},$$

$$\overline{u_j\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)} = -\epsilon_q \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}}\right) = -\epsilon_q \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\overline{q^2}}{2}.$$

В случае несжимаемой жидкости и при постоянных значениях коэффициентов вихревой диффузии соответствующие диффузионные члены принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j} = -\epsilon_m\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_j\,\partial x_i}\right) = -\epsilon_m \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j\,\partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\gamma u_j} = -\epsilon_\gamma \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial x_j\,\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)} = -\epsilon_q \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}\frac{\overline{q}^2}{2}.$$

Итак, можно сделать вывод, что налицо полная аналогия. Значения $\epsilon_m$, $\epsilon_\gamma$ и $\epsilon_q$ могут, конечно, быть отличны друг от друга, что будет проявляться в количественном различии скоростей переноса импульса, субстанции $\Gamma$ и энергии турбулентности. При этом можно ввести вихревое число Прандтля, вихревое число Шмидта и аналогичный критерий для соотношения $\epsilon_m/\epsilon_q$.

Если обратиться к теориям пути смешения Прандтля и Тэйлора, то плоское и трехмерное течения придется рассмотреть отдельно.

В случае плоского потока оказывается, что по прандтлевской теории переноса импульса и тэйлоровской теории переноса завихренности полная аналогия существует [см., например, уравнения (5.6) и (5.8)], если различные пути смешения не зависят от поперечной координаты $x_2$, исключая количественные отличия, связанные с неодинаковыми значениями путей смешения $l_m$ или $l_\omega$, $l_\gamma$ и $l_q$.

В трехмерном случае члены, характеризующие вихревую диффузию при переносе импульса, субстанции $\Gamma$ и энергии турбулентности, по прандтлевской теории переноса импульса являются идентичными. Но согласно видоизмененной теории переноса завихренности Тэйлора это не так. Это легко можно показать на примере

осесимметричного течения. В этом случае диффузионный член (см. § 6.7) имеет вид

$$\frac{1}{r}\,l_\omega^2\left|\frac{d\bar{U}_x}{dr}\right|\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\bar{U}_x}{dr}\right),$$

в то время как диффузионные члены для субстанции $\Gamma$ и энергии турбулентности записываются как

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rl_\gamma^2\left|\frac{d\bar{U}_x}{dr}\right|\frac{d\bar{\Gamma}}{dr}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rl_q^2\left|\frac{d\bar{U}_x}{dr}\right|\frac{d}{dr}\frac{\bar{q}^2}{2}\right).$$

Таким образом, по видоизмененной теории переноса завихренности Тэйлора между переносом (в узком смысле) импульса, с одной стороны, и переносом субстанции $\Gamma$ или энергии турбулентности — с другой, аналогия не имеет места; но между переносом субстанции $\Gamma$ и энергии турбулентности она существует.

Опыты, касающиеся распределения скорости, субстанции $\Gamma$ и энергии турбулентности в свободных струях и в следе (см. главу 6), показали, что аналогии, вытекающие из теорий переноса импульса Буссинеска и Прандтля, согласуются с экспериментальными данными только в непрерывных и полностью турбулентных зонах, и то лишь приближенно. В случае переноса энергии турбулентности это согласие носит весьма приближенный характер. Согласно двум этим теориям, отношения $\epsilon_\gamma/\epsilon_m$ и $\epsilon_q/\epsilon_m$ должны быть постоянными. Однако эмпирическое значение $\epsilon_\gamma/\epsilon_m$ сохраняется постоянным только в первом приближении, а отношение $\epsilon_q/\epsilon_m$, по-видимому, вообще не является постоянным [1]).

Если более тщательно рассмотреть механизм переноса при свободной турбулентности и особенно такие факторы, как диффузия градиентного типа и конвективный перенос под действием крупномасштабной турбулентности, то аналогии между процессами переноса (в узком смысле) импульса, субстанции $\Gamma$ и энергии турбулентности уже не обнаружится. Это ясно подтверждается соответствующими выражениями (5.18), (5.19) и (5.20) для этих трех величин.

Как уже указывалось, пренебрежение влиянием молекулярного обмена на процессы переноса в пограничном слое на твердой стенке является неоправданным. Влияние молекулярных эффектов на перенос тепла и на перенос вещества различно. По этой причине эти процессы нельзя рассматривать как идентичные, даже в том случае, когда механизм переноса этих двух величин примерно одинаков. Отмеченные различия могут стать особенно значительными в непосредственной близости от стенки, где течение является почти вязким.

---

[1]) Эти результаты не изменятся, если попытаться учесть перемежающийся характер турбулентности в струе или следе с помощью некоторого коэффициента перемежаемости.

Сравним сначала перенос тепла с переносом импульса. Для анализа переноса в широком смысле используем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \qquad (5.30)$$

и

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \mathfrak{k}_\theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} + F_\theta. \qquad (5.31)$$

«Движущая сила» $F_\theta$ включает в себя тепло, выделяемое при диссипации. Кроме того, здесь введено обозначение $\mathfrak{k}_\theta = \mathsf{K}/\rho c_p$, где $\mathsf{K}$ — коэффициент теплопроводности.

Аналогия в широком смысле существует в том случае, если при $U_i = \alpha\Theta$, где $\alpha$ — коэффициент пропорциональности, уравнения (5.30) и (5.31) становятся идентичными. Но эти уравнения идентичны, если выполняются условия

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i = \alpha F_\theta$$

и

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\mathfrak{k}_\theta} = 1.$$

В общем случае этим условиям удовлетворить невозможно. Так как содержащий давление член $(1/\rho)(\partial P/\partial x_i)$ не может уравновешиваться одной лишь диссипацией, то аналогия возможна только в том случае, когда в величину $F_\theta$ включены также источники или стоки тепла, распределенные по всему полю течения таким образом, чтобы удовлетворялось первое условие. Но ввиду того, что давление $P$ пульсирует, величина $F_\theta$ тоже должна иметь пульсационный характер.

Коэффициент пропорциональности $\alpha$ зависит от типа течения. Для течения в трубе величину $\alpha$ можно получить из условия, что разность между средней температурой жидкости и средней температурой стенки пропорциональна средней скорости движения жидкости по трубе с тем же коэффициентом пропорциональности. Таким образом,

$$\bar{U}_{\mathrm{ср}} = \alpha(\bar{\Theta}_{\mathrm{ср}} - \bar{\Theta}_w),$$

откуда и получается величина $\alpha$.

Тогда аналогия между переносом тепла и импульса при течении в трубе будет наблюдаться в том случае, когда

$$F_\theta = -\frac{\bar{\Theta}_{\mathrm{ср}} - \bar{\Theta}_w}{\bar{U}_{\mathrm{ср}}}\frac{\partial P}{\partial x_i},$$

так как $F_i = 0$. Это означает, что в поле течения должны существовать тепловые источники и стоки, величина и распределение которых определяются градиентом $\partial P/\partial x_i$. Впервые на этот факт обратил внимание Прандтль [14].

В пограничном слое на плоской пластине средний градиент давления равен нулю, если невозмущенный поток снаружи пограничного слоя обладает постоянной скоростью. Шульц [10] пришел к выводу о том, что в этом случае возможна полная аналогия, если $\mathrm{Pr} = 1$. Однако для этого необходимо, чтобы диссипация отсутствовала, а величина $F_\theta$ была точно равна пульсационной составляющей градиента $\partial P/\partial x_i$. Если в то же время рассматривать аналогию применительно к осредненным по времени величинам, то она оказывается возможной только в том случае, когда турбулентный перенос импульса и перенос тепла в узком смысле оказываются идентичными ($\mathrm{Pr}_{\text{турб}} = \epsilon_m/\epsilon_\theta = 1$) и когда диссипацией можно пренебречь. В этом случае для полной аналогии каких-либо источников тепла не требуется.

Перенос вещества описывается уравнением, подобным уравнению (5.31). При постоянной плотности $\rho$ и постоянном коэффициенте молекулярной диффузии $\nu_C = D$ (или, более точно, при постоянной величине $\rho D$) это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_j} + F_C, \tag{5.32}$$

где $C$ — концентрация на единицу массы. Источником «движущей силы» $F_C$ может явиться, например, химическая реакция.

Если сравнить уравнения (5.31) и (5.32), то обнаружится, что полная аналогия между переносом тепла и вещества в широком смысле существует только в том случае, когда «движущие силы» $F_\theta$ (включая выделение тепла за счет диссипации и химических реакций) и $F_C$ пренебрежимо малы. Тогда все положения, доказанные в отношении аналогии между переносом тепла и импульса, справедливы и применительно к аналогии между переносом вещества и импульса.

Однако мы не учли еще граничных условий на стенке. Для идеальной аналогии между различными процессами переноса в пограничном слое необходимо также, чтобы граничные условия на стенке были идентичны. Если рассматривать перенос вещества в сравнении с переносом тепла, то граничные условия можно считать идентичными только в том случае, когда парциальное давление диффундирующего вещества очень мало. Пусть, например, происходит испарение жидкости с поверхности в газ, движущийся вдоль этой поверхности. Перенос пара под действием молекулярной диффузии запишется с помощью уравнения

$$\mathfrak{I}_{\text{пар}} = -\rho D_{\text{пар}} \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2},$$

где $C_{\text{пар}}$ — концентрация пара, $D_{\text{пар}}$ — коэффициент молекулярной диффузии, а $\rho$ — плотность смеси пара с газом. Для переноса газа под

действием молекулярной диффузии имеем аналогичное соотношение:

$$\mathfrak{I}_{\text{газ}} = -\rho D_{\text{газ}} \frac{\partial C_{\text{газ}}}{\partial x_2} = \rho D_{\text{газ}} \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2},$$

так как в бинарной системе $C_{\text{газ}} + C_{\text{пар}} = 1$. Поскольку, кроме того, для бинарной системы справедливо равенство $D_{\text{газ}} = D_{\text{пар}}$, то оба коэффициента диффузии можно для краткости заменить единым символом $D$.

Итак, вблизи стенки должен происходить перенос газа $\mathfrak{I}_{\text{газ}}$ благодаря молекулярной диффузии. Если стенка не является пористой и, следовательно, газ не может проникать через нее, то перенос газа на стенке должен отсутствовать. Это требует существования конвективного переноса токами, перпендикулярными к стенке, который как раз и компенсировал бы перенос газа под действием молекулярной диффузии. Следовательно, полный перенос газа на стенке представится уравнением

$$\rho D \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2} + \rho C_{\text{газ}} U_2 = 0.$$

Отсюда получаем соотношение для конвективного тока

$$U_2 = -\frac{D}{C_{\text{газ}}} \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2}.$$

Этот ток $U_2$ также вызывает конвективный перенос пара; поэтому полный перенос пара представится в виде

$$-\rho D \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2} + \rho C_{\text{пар}} U_2 = -\rho D \left(1 + \frac{C_{\text{пар}}}{C_{\text{газ}}}\right) \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2}.$$

Концентрации $C_{\text{пар}}$ и $C_{\text{газ}}$ можно выразить соответственно через парциальные давления $P_{\text{пар}}$ и $P_{\text{газ}} = P - P_{\text{пар}}$, пользуясь для этого уравнением состояния

$$C_{\text{газ}} = \frac{M_{\text{пар}}}{\rho \mathfrak{R} \Theta} P_{\text{пар}}, \quad C_{\text{газ}} = \frac{M_{\text{газ}}}{\rho \mathfrak{R} \Theta} P_{\text{газ}},$$

где $M_{\text{пар}}$ и $M_{\text{газ}}$ — молекулярные веса пара и газа, а $\mathfrak{R}$ — абсолютная газовая постоянная. Тогда выражение для полного переноса пара преобразуется следующим образом:

$$\text{перенос пара} = -\rho D \left(1 + \frac{M_{\text{пар}}}{M_{\text{газ}}} \frac{P_{\text{пар}}}{P - P_{\text{пар}}}\right) \frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2}. \qquad (5.33)$$

Если парциальное давление пара становится весьма значительным, то второй член в правой части уравнения (5.33) также приобретает важное значение и пренебрегать им уже нельзя.

С точки зрения этого различия между процессами переноса тепла и вещества идеальная аналогия между ними невозможна.

Величину $\partial C_{\text{пар}}/\partial x_2$ с помощью приведенного выше уравнения состояния можно также выразить через $\partial P_{\text{пар}}/\partial x_2$. При дифференцировании следует помнить, что $\rho\mathfrak{R}\Theta = M_{\text{пар}}P_{\text{пар}} + M_{\text{газ}}(P - P_{\text{пар}})$, так что плотность $\rho$ зависит, следовательно, от $x_2$. Итак, получаем соотношение

$$\frac{\partial C_{\text{пар}}}{\partial x_2} = \frac{M_{\text{газ}}M_{\text{пар}}P}{(\rho\mathfrak{R}\Theta)^2}\frac{\partial P_{\text{пар}}}{\partial x_2},$$

подстановка которого в (5.33) дает

$$\text{перенос пара} = -\frac{DM_{\text{пар}}}{\rho\mathfrak{R}\Theta}\frac{P}{P - P_{\text{пар}}}\frac{\partial P_{\text{пар}}}{\partial x_2}. \qquad (5.33\text{а})$$

В заключение можно отметить, что, поскольку в пограничном слое парциальное давление $P_{\text{пар}}$ зависит от $x_2$, величина $\rho D$ уже не сохраняется строго постоянной и, следовательно, дифференциальное уравнение (5.32) не является точным.

Влияние большого парциального давления на явления вблизи поверхности стенки впервые было подмечено, вероятно, Нуссельтом [12]. Эккерт и Либлайн [13] произвели приближенный расчет испарения при переносе в ламинарном пограничном слое с учетом этого влияния; вслед за их работой появились более точные расчеты, выполненные Шу [63], Сполдингом [62], а также Микли, Россом и Сквайерсом [64].

## § 5.4. Диффузия при однородной турбулентности

В теориях пути смешения рассматривается перенос транспортабельной субстанции молями жидкости, пересекающими некоторую контрольную плоскость в турбулентном потоке. Скорость переноса через такую плоскость, перпендикулярную к оси $x_2$, при обмене импульсом и скалярной субстанцией определяется соответственно величинами одноточечных эйлеровых корреляций $\overline{u_1u_2}$ и $\overline{u_2\gamma}$. Скорость переноса обычно принято выражать через коэффициент вихревой диффузии и локальный градиент рассматриваемой субстанции, причем коэффициент вихревой диффузии можно считать равным произведению пути смешения и локального градиента осредненной скорости. Например [см. уравнения (5.5) и (5.6)],

$$\epsilon_\gamma = -\overline{u_2L_\gamma} = u_2'l_\gamma^* = l_\gamma^2\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|.$$

Моли жидкости, которые пересекают контрольную плоскость, переносят транспортабельную субстанцию на расстояние $L_\gamma$, на котором эта субстанция, по предположению, сохраняется неизменной.

Движение молей на расстоянии $L_\gamma$ можно проанализировать более подробно, применяя тэйлоровскую теорию диффузии жидких частиц,

изложенную в § 1.9. Тогда оказывается возможным найти связь между путем смешения $l_\gamma$ и лагранжевым интегральным масштабом $(\Lambda_L)_\gamma$, ибо, согласно результатам § 1.9, имеем

$$\epsilon_\gamma = u_2'^2 \int_0^\infty f(\alpha\tau) R_L(\tau)\, d\tau = u_2' (\Lambda_L)_\gamma.$$

Из сравнения этого выражения для $\epsilon_\gamma$ с предыдущим вытекает, что $l_\gamma^* = (\Lambda_L)_\gamma$ и что величина $l_\gamma$ — такого же порядка, как и $(\Lambda_L)_\gamma$.

Кроме того, имеем еще одно соотношение:

$$\overline{u_2\gamma} = u_2'\gamma' R_{2,\gamma}(0) = -\epsilon_\gamma \frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2},$$

откуда следует формальная связь между коэффициентом эйлеровой одноточечной корреляции $R_{2,\gamma}(0)$ и коэффициентом лагранжевой корреляции $R_L(\tau)$:

$$R_{2,\gamma}(0) = \frac{u_2'}{\gamma'} \frac{d\Gamma'}{dx_2} \int_0^\infty f(\alpha, \tau) R_L(\tau)\, d\tau. \tag{5.34}$$

Теперь можно установить связь между теорией пути смешения и теорией Тэйлора. Для этого рассмотрим контрольную плоскость, проходящую через точку $x_2$ и перпендикулярную к оси $x_2$. Предположим, что жидкие частицы передвигаются в направлении оси $x_2$, перенося вместе с собой субстанцию Г. Они обусловливают перенос этой субстанции через контрольную плоскость, определяемый формулой

$$\overline{v_2\gamma}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(t_0, t)\, v_2(t_0)\, dt_0,$$

где $t_0$ — момент времени, в который жидкая частица проходит через нашу плоскость в точке $x_2$, а $t$ — время движения частицы, т. е. время диффузии. Согласно теории пути смешения, эта жидкая частица переносит субстанцию из некоторой точки, удаленной от точки $x_2$ нашей плоскости на расстояние $y_2$. Предполагая линейную зависимость $\overline{\Gamma}$ от $x_2$, согласно этой теории имеем

$$\gamma(t_0, t) = -y_2(t_0, t) \frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2}.$$

Но так как

$$v_2(t_0) = \frac{d}{dt} y_2(t_0, t),$$

то получаем

$$\overline{v_2\gamma} = -\frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2}\frac{1}{T}\int_0^T y_2(t_0, t)\frac{d}{dt}y_2(t_0, t)\,dt_0 = -\frac{d\overline{\Gamma}}{dx}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{y_2^2}(t).$$

Если снова положить, что по определению,

$$\overline{v_2\gamma} = -\epsilon_\gamma\frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2},$$

то будем иметь

$$\epsilon_\gamma(t) = \epsilon(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{y_2^2}(t) = \overline{y_2(t)\,v_2(t)}. \tag{5.35}$$

Отсюда, используя выражение (1.76) для $\overline{y_2^2}(t)$, получаем

$$\epsilon_\gamma(t) = \epsilon(t) = \overline{v_2^2}\int_0^t R_L(\tau)\,d\tau. \tag{5.36}$$

Выражения (5.35) и (5.36) показывают, что при непродолжительном времени диффузии коэффициент диффузии еще зависит от времени. Но в теории пути смешения нам приходится иметь дело с продолжительным временем диффузии жидких частиц, и тогда соотношение (5.36) упрощается:

$$[\epsilon_\gamma]_{t=\infty} = \epsilon = \overline{v_2^2}\int_0^\infty R_L(\tau)\,d\tau = v_2'\Lambda_L. \tag{1.82}$$

Здесь для коэффициента диффузии $\epsilon_\gamma$ мы получили такую же величину, как и для жидкой частицы $\epsilon$, так как каких-либо потерь субстанции $\Gamma$ при движении жидкой частицы на расстоянии $y_2$ не учитывалось *). В действительности величины $(\Lambda_L)_\gamma$ и $l_\gamma$ для различных транспортабельных субстанций неодинаковы. Они зависят от той скорости, с которой жидкие частицы теряют транспортабельную субстанцию на своем пути, иначе говоря, от скорости, которая определяется степенью взаимодействия жидких частиц с окружающей их средой.

Бюргерс [15] сделал попытку оценить влияние этого обмена с окружающей средой в случае настолько малых жидких частиц, что можно использовать линейное соотношение для скорости обмена, т. е.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \alpha(\overline{\Gamma} - \Gamma), \tag{5.37}$$

*) Следует заметить, что коэффициент диффузии для жидкой частицы относится к величине, определяемой диффузией только под действием турбулентных движений, независимо от влияния молекулярной диффузии.

где $\bar{\Gamma}$ — среднее значение $\Gamma$ в среде, непосредственно окружающей рассматриваемую частицу. Величина $\bar{\Gamma}$ считается равной среднему значению $\Gamma$ во всем слое жидкости, пересекаемом жидкой частицей, и поэтому — известной функцией от $x_2$. Кроме того, коэффициент обмена $\alpha$ принимается постоянным.

При движении жидкой частицы ее координата $y_2$ изменяется по времени; следовательно, по отношению к самой частице величина $\bar{\Gamma}$ является функцией времени.

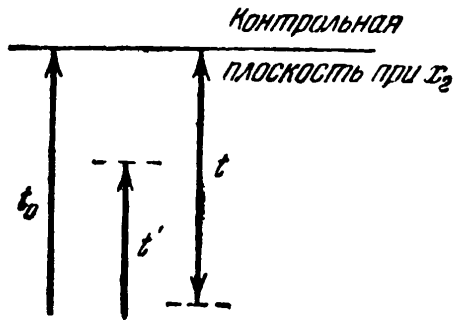



Рис. 5.1. Временные координаты жидкой частицы, проходящей контрольную плоскость в момент времени $t_0$ и движущейся в течение промежутка времени $t$.

Общее решение уравнения (5.37), конечное при $t \geqslant 0$, записывается в виде

$$\Gamma = \alpha \int_0^t \bar{\Gamma}(t') \exp[-\alpha(t-t')]\, dt' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

Рассмотрим жидкую частицу, которая проходит через нашу плоскость в точке $x_2$ в момент времени $t_0$ (см. рис. 5.1). Прежде чем достичь этой плоскости в точке $x_2$, она уже двигалась в течение времени $t$. Тогда для этой частицы в момент времени $t_0$ имеем

$$\Gamma(t_0, t) = \alpha \int_{t_0-t}^{t_0} \bar{\Gamma}(t') \exp[-\alpha(t_0-t')]\, dt' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

Предположим вновь, что

$$\bar{\Gamma}(t') = \bar{\Gamma}(x_2) - \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_{t'}^{t_0} v_2(t'')\, dt'';$$

следовательно,

$$\Gamma(t_0, t) = \alpha \int_{t_0-t}^{t_0} \bar{\Gamma}(x_2) \exp[-\alpha(t_0-t')]\, dt' -$$

$$- \alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_{t_0-t}^{t_0} \exp[\alpha(t_0-t')]\, dt' \int_{t'}^{t_0} v_2(t'')\, dt'' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t) =$$

$$= \bar{\Gamma}(x_2)[1 - \exp(-\alpha t)] -$$

$$- \alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \int_{t_0-t}^{t} \exp[-\alpha(t_0-t')]\, dt' \int_{t'}^{t_0} v_2(t'')\, dt'' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

Пусть $t' = t_0 - \tau$. Тогда получим

$$\Gamma(t_0, t) = \overline{\Gamma}(x_2)[1 - \exp(-\alpha t)] - \\ - \alpha \frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2} \int_0^t \exp(-\alpha\tau)\, d\tau \int_{t_0-\tau}^{t_0} v_2(t'')\, dt'' + \Gamma_0 \exp(-\alpha t).$$

Таким образом, перенос через нашу плоскость в точке $x_2$ на единицу площади в единицу времени запишется в виде

$$\frac{\mathfrak{I}_1}{\rho} = \frac{1}{T}\int_0^T \Gamma(t_0, t)\, v_2(t_0)\, dt_0 = \\ = -\alpha \frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2} \int_0^t \exp(-\alpha\tau)\, d\tau \frac{1}{T}\int_0^T dt_0 \int_{t_0-\tau}^{t_0} v_2(t_0)\, v_2(t'')\, dt'' + \\ + \exp(-\alpha t)\,\overline{\Gamma_0 v_2} = \\ = -\alpha \frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2} \int_0^t \exp(-\alpha\tau)\, d\tau \int_0^\tau \overline{v_2(t_0)\, v_2(t_0 - t''')}\, dt''' + \exp(-\alpha t)\,\overline{\Gamma_0 v_2},$$

где $t''' = t_0 - t''$.

Введя коэффициент лагранжевой корреляции $R_L(t''')$ и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\mathfrak{I}_1}{\rho} = -\frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2}\overline{v_2^2}\left[\int_0^t R_L(\tau)\exp(-\alpha\tau)\, d\tau - \exp(-\alpha t)\int_0^t R_L(\tau)\, d\tau\right] + \\ + \exp(-\alpha t)\,\overline{\Gamma_0 v_2}.$$

Последний член в правой части этого соотношения содержит неизвестную корреляцию $\overline{\Gamma_0 v_2}$ между значением $\Gamma$ для жидких частиц при $t = 0$ и их скоростью $v_2(t_0)$ в момент прохождения плоскости в точке $x_2$. Избавиться от этого члена можно либо предполагая промежуток времени $t$ настолько большим, что эта корреляция $\overline{\Gamma_0 v_2(t_0)} \approx 0$, либо считая величину $\alpha t$ настолько большой, что $\exp(-\alpha t) \approx 0$.

Мы воспользуемся здесь последним предположением. Тогда можно заметить, что это предположение сразу подтверждается, если коэффициент обмена $\alpha$ очень велик, и в этом случае время $t$ не обязательно должно быть большим.

Отсюда при $\alpha t \gg 1$, когда, стало быть, $\exp(-\alpha t) \approx 0$, имеем

$$\mathfrak{I}_1 = -\rho \frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2}\overline{v_2^2}\int_0^t R_L(\tau)\exp(-\alpha\tau)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$\epsilon_\gamma = \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau)\, d\tau. \tag{5.38}$$

Если $\alpha$ не очень велико, то условие $\alpha t \gg 1$ выполняется только для больших $t$, и в этом случае можем принять

$$\epsilon_\gamma = \overline{v_2^2} \int_0^\infty R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau)\, d\tau, \tag{5.39}$$

откуда

$$(\Lambda_L)_\gamma = v_2' \int_0^\infty R_L(\tau) \exp(-\alpha\tau)\, d\tau. \tag{5.40}$$

При $\alpha \to 0$ выражения (5.39) и (5.40) переходят соответственно в (1.81) и (1.83).

Следует подчеркнуть, что соотношение (5.39) основано на предположении о линейной зависимости $\bar{\Gamma}$ от $x_2$ на расстояниях, сравнимых с лагранжевым интегральным масштабом.

Основываясь на формуле (5.38), можно сделать вывод, что если коэффициент обмена $\alpha$ очень велик, то $\exp(-\alpha\tau) \approx 0$ даже при умеренных значениях $\tau$. В этом случае лагранжев коэффициент $R_L(\tau)$ может отличаться от $R_L(0) = 1$ лишь на весьма малую величину. В предельном случае имеем

$$\epsilon_\gamma \approx \overline{v_2^2} R_L(0) \int_0^\infty \exp(-\alpha\tau)\, d\tau \approx \frac{\overline{v_2^2}}{\alpha}.$$

Следовательно, в величину коэффициента вихревой диффузии входят составляющие от всех частот турбулентных пульсаций. Конечно, это нетрудно показать, если ввести лагранжеву функцию энергетического спектра $E_L(n)$:

$$R_L(\tau) = \frac{1}{\overline{v_2^2}} \int_0^\infty E_L(n) \cos 2\pi n\tau\, dn. \tag{5.41}$$

Подставляя это выражение для $R_L(\tau)$ в (5.38), выполняя интегрирование по $t$ и принимая во внимание, что $\exp(-\alpha t) \approx 0$, получаем

$$\epsilon_\gamma = \int_0^\infty E_L(n) \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 n^2}\, dn. \tag{5.42}$$

Этот результат, действительно, показывает, что при очень больших $\alpha$

$$\epsilon_\gamma \approx \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty E_L(n)\,dn = \frac{\overline{v_2^2}}{\alpha}$$

и, стало быть, налицо составляющие от всех частот.

Предположим теперь, что величина $\alpha$ очень мала. Это означает, что нам придется рассматривать очень большое время диффузии. Пусть $2\pi n/\alpha = \beta$. Тогда из (5.42) получим

$$\epsilon_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty E_L\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right)\frac{1}{1+\beta^2}\,d\beta.$$

При больших $\beta$ сомножитель $(1+\beta^2)^{-1}$ очень мал. Таким образом, следует ожидать, что величина интеграла определяется главным образом составляющими от умеренных значений $\beta$. Но при $\alpha \to 0$ умеренные значения $\beta$ получаются только в том случае, когда величина $n$ мала, следовательно, мала и величина $\alpha\beta/2\pi$.

Таким образом, в предельном случае $\alpha \to 0$ можно принять, что

$$\epsilon_\gamma \approx E_L(0)\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\beta^2}\,d\beta = \frac{1}{4}E_L(0).$$

Этот результат показывает, что при большом времени диффузии величину коэффициента вихревой диффузии определяют составляющие только от низких частот.

Если выражение (5.39) для $\epsilon_\gamma$, которое основано на линейной зависимости для скорости обмена (5.37), сравнить с более общим выражением

$$\epsilon_\gamma = u_2'^2\int_0^\infty f(\alpha, \tau)\,R_L(\tau)\,d\tau,$$

то отсюда, как нетрудно видеть, получится $f(\alpha, \tau) = \exp(-\alpha\tau)$. Логично ожидать, что линейная зависимость для скорости обмена будет иметь место в том случае, когда обмен с окружающей средой является по своей природе молекулярным. А это, в свою очередь, означает, что рассматриваемые жидкие частицы должны быть достаточно малы.

Итак, в теориях пути смешения приходится иметь дело с молями жидкости, сравнимыми по своим размерам с путем смешения, а следовательно, и с величиной $(\Lambda_L)_\gamma$. В таком случае логичнее ожидать, что обмен между движущимися молями жидкости и окружающей их средой носит нелинейный характер, так как сильное влияние на этот обмен оказывают мелкомасштабные турбулентные движения. И в самом деле, прандтлевская оценка размера молей жидкости, через посредство

которых и осуществляются процессы переноса, основывается на предположении о том, что перенос импульса при столкновениях молей жидкости с окружающей их средой следует квадратичной зависимости.

Взаимодействие моля жидкости с его окружением вызывает сильную деформацию моля. Но, по хорошо известной теореме механики, движение системы частиц может быть разложено на движение центра тяжести этой системы и движение отдельных частиц относительно этого центра тяжести. Может оказаться полезным применить эту теорему и к изучению движения моля жидкости в турбулентном потоке путем рассмотрения этого моля как большого числа жидких частиц. Тогда можно раздельно изучать движение центра массы моля жидкости и движение жидких частиц этого моля относительно центра массы. Относительное движение жидких частиц определяет деформацию и изменение формы моля, а также взаимодействие и обмен транспортабельной субстанции с окружающей средой. Как показал Бэтчелор [16, 17], изучение движения центра массы сводится к анализу диффузии отдельной меченой жидкой частицы методом Эйлера. Для изучения относительных движений жидких частиц достаточно обратиться к лагранжеву методу анализа относительного движения двух меченых жидких частиц. Движение центра массы группы жидких частиц и осредненная концентрация жидких частиц не зависят от исходной формы моля жидкости. Они определяются только диффузией отдельных жидких частиц, диффузия которых не зависит от диффузии других частиц.

Из формулы (1.82) следует, что при продолжительных периодах диффузия меченой жидкой частицы определяется лагранжевым интегральным масштабом $\Lambda_L$. Тогда интуитивно можно прийти к заключению, что диффузия при продолжительных периодах определяется крупномасштабными движениями с медленными пульсациями. Эта мысль находит сильную поддержку со стороны полученного ранее результата, который состоит в том, что в случае малой скорости обмена с окружающей средой коэффициент диффузии для большого времени диффузии определяется главным образом движениями с низкой частотой.

Обратимся теперь к анализу влияния различных частот турбулентного движения жидкой частицы на ее диффузию. Для этой цели подставим соотношение (5.41) между $\boldsymbol{R}_L(\tau)$ и $\boldsymbol{E}_L(\tau)$ в уравнение (1.77):

$$\overline{y_2^2} = 2\int_0^t (t-\tau)\,\boldsymbol{R}_L(\tau)\,d\tau = 2\int_0^\infty \boldsymbol{E}_L(n)\,dn \int_0^t (t-\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau =$$

$$= 2\int_0^\infty \boldsymbol{E}_L(n)\,\frac{1-\cos 2\pi nt}{4\pi^2 n^2}\,dn. \quad (5.43)$$

Для малых значений $t$ получим

$$\overline{y_2^2} \approx t^2 \int_0^\infty E_L(n)\, dn.$$

Отсюда следует, что при малом времени диффузии в величину $\overline{y_2^2}$ входят составляющие от всех частот движения жидкой частицы.

Для больших значений $t$ перепишем выражение для $\overline{y_2^2}$ следующим образом [17]:

$$\overline{y_2^2} = \frac{t}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} E_L\left(\frac{\theta}{2\pi t}\right) d\theta,$$

где $\theta = 2\pi n t$.

Величина $(1-\cos\theta)/\theta^2$ при больших значениях $\theta$ очень мала. Следовательно, величина интеграла определяется в основном только теми значениями подынтегрального выражения, которые соответствуют умеренным значениям $\theta$. Стало быть, можно положить $E_L(\theta/2\pi t) \approx E_L(0)$, что позволяет получить следующее соотношение:

$$\overline{y_2^2} \approx \frac{t}{\pi} E_L(0) \int_0^\infty \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} d\theta = \frac{t}{2} E_L(0) = 2\overline{v_2^2}\mathcal{J}_L t,$$

поскольку из преобразования Фурье от (5.41) следует, что

$$E_L(0) = 4\overline{v_2^2} \int_0^\infty R_L(\tau)\, d\tau = 4\overline{v_2^2}\mathcal{J}_L.$$

Полученный выше результат в точности совпадает с выражением, которое определяется уравнением (1.80); однако мы показали здесь, что существенный вклад в величину $\overline{y_2^2}$ вносят лишь низкочастотные компоненты движения.

Таким образом, при больших $t$ диффузия отдельной жидкой частицы и, следовательно, центра массы моля жидкости определяется главным образом крупномасштабными турбулентными движениями, а для изучения распространения и распределения меченых жидких частиц в пространстве, по-видимому, наиболее подходящим является метод Эйлера, при котором вводится коэффициент диффузии $\epsilon = \overline{y_2^2}/2t = v'^2\mathcal{J}_L$. В самом деле, например, в теориях пути смешения метод решения задачи является эйлеровским. Однако следует еще раз подчеркнуть, что при использовании здесь метода Эйлера необходимо лагранжево описание движения отдельной жидкой частицы.

До сих пор мы рассматривали диффузию жидких частиц только в одном направлении, а именно в направлении оси $x_2$. Обобщение на случай диффузии жидких частиц в трехмерном пространстве может быть получено посредством рассмотрения вместо $\overline{y_2^2}$ «диффузионного» тензора $\overline{y_i y_j}$ (Бэтчелор [16, 17]). При однородной турбулентности этот диффузионный тензор зависит только от времени $t$. Его можно выразить через коэффициент тензора лагранжевой корреляции скорости

$$[R_{i,j}(\tau)]_L = \frac{\overline{v_i(t)\, v_j(t+\tau)}}{v_i' v_j'}. \tag{5.44}$$

Для этого воспользуемся способом, аналогичным тому, который применялся в § 1.9:

$$\overline{y_i(t)\, y_j(t)} = \overline{y_i(0)\, y_j(0)} + \int_0^t dt' \int_0^{t'} [\overline{v_i(t')\, v_j(t'')} + \overline{v_i(t'')\, v_j(t')}]\, dt''.$$

При однородной стационарной турбулентности величина $\overline{v_i(t')\, v_j(t'')}$ зависит только от $t'' - t' = \tau$. Отсюда, используя (5.44), получаем

$$\overline{y_i(t)\, y_j(t)} = \overline{y_i(0)\, y_j(0)} + v_i' v_j' \int_0^t dt' \int_0^{t'} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\}\, d\tau,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\overline{y_i(t)\, y_j(t)} = \overline{y_i(0)\, y_j(0)} + v_i' v_j' \int_0^t (t-\tau)\, \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\}\, d\tau. \tag{5.45}$$

Можно заметить, что величина $[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L$ является четной функцией от $\tau$, так как

$$[R_{i,j}(\tau)]_L = [R_{j,i}(-\tau)]_L. \tag{5.46}$$

Выражение (5.45) представляет собой обобщение формулы (1.77) на трехмерный случай. Точно так же, как это делалось для последнего выражения, можно теперь рассмотреть и предельные случаи, в которых величина $t$ соответственно либо очень мала, либо очень велика.

При очень малых значениях времени имеем $[R_{i,j}(\tau)]_L \approx [R_{i,j}(0)]_L$ и уравнение (5.45) упрощается:

$$\overline{y_i(t)\, y_j(t)} \approx \overline{y_i(0)\, y_j(0)} + v_i' v_j' [R_{i,j}(0)]_L\, t^2,$$

или

$$\overline{y_i(t)\, y_j(t)} \approx \overline{y_i(0)\, y_j(0)} + \overline{v_i(t')\, v_j(t')}\, t^2. \tag{5.47}$$

В случае очень больших $t$ предположим, что при $\tau > t_0$ справедливо приближенное равенство $[R_{i,j}(\tau)]_L \approx 0$, и, следовательно, при $t \gg t_0$ из (5.45) получим

$$\overline{y_i(t)\,y_j(t)} \approx \overline{y_i(0)\,y_j(0)} + 2v_i'v_j'(\mathcal{J}_{i,j})_L t, \tag{5.48}$$

где

$$(\mathcal{J}_{i,j})_L = \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\}\,d\tau.$$

Вернемся теперь к одномерному случаю. В § 1.9 было показано, что диффузия при однородной турбулентности в случае большого времени диффузии может быть описана с помощью постоянного коэффициента диффузии $\epsilon$. Тогда, например, для диффузии из фиксированной плоскости получается выражение типа гауссовой функции ошибок, подобное уравнению (1.68).

Бэтчелор [16] показал, что описание диффузии меченой жидкой частицы с помощью коэффициента диффузии не обязательно должно быть ограничено большим временем диффузии, если в одномерном случае распределение плотности вероятности величины $y_2$ является гауссовским. Поскольку, согласно имеющимся опытным данным, распределение плотности вероятности величины $y_2$ при однородной турбулентности, для которой поперечный сдвиг в среднем отсутствует, действительно является гауссовским как при малых, так и при больших временах диффузии, то остается лишь предположить, что это распределение для $y_2$ остается гауссовским также и при промежуточных значениях времени диффузии.

Положим, что в момент времени $t = t_0$ меченые жидкие частицы сконцентрированы в области $-a \leqslant x_2 \leqslant +a$. Под действием турбулентности эти меченые жидкие частицы начнут двигаться в направлении оси $x_2$. Обозначим через $P(x_2, t)$ вероятность пребывания меченой жидкой частицы в точке $x_2$ в момент времени $t$. Тогда величина $P(x_2, t)$ идентична распределению концентрации меченых жидких частиц в момент времени $t$. При $t = t_0$ имеем

$$P(x_2, t_0) = 1, \quad \text{если } -a \leqslant x_2 \leqslant +a,$$

$$P(x_2, t_0) = 0 \quad \text{вне этой области}$$

и, кроме того, для любого момента времени

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x_2, t)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_2, t_0)\,dx_2 = 2a.$$

Пусть $Q(y_2, t; t_0)$ — плотность вероятности $y_2(t-t_0)$, т. е. вероятность того, что жидкая частица в течение времени $t-t_0$ продвинется на расстояние $y_2$. Тогда имеем соотношение

$$P(x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x_2 - x_2', t; t_0) P(x_2', t_0) dx_2', \tag{5.49}$$

так как $y_2'(t-t_0) = x_2 - x_2'$ и в интеграл входят составляющие только от тех жидких частиц, которые в момент времени $t = t_0$ находились в точках $-a \leqslant x_2' \leqslant +a$.

Предположим, что распределение плотности вероятности $Q(y_2, t; t_0)$ является гауссовским и, стало быть,

$$Q(y_2, t; t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{y_2^2}}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{2\overline{y_2^2}}\right), \tag{5.50}$$

где $\overline{y_2^2}$ зависит только от $t-t_0$.

Подставляя это выражение для $Q(y_2, t; t_0)$ в соотношение (5.49), получаем

$$P(x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{y_2^2}}} \exp\left[-(x_2 - x_2')^2 / 2\overline{y_2^2}\right] P(x_2', t_0)\, dx_2'.$$

Нетрудно убедиться, что это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \epsilon_{22} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}, \tag{5.51}$$

где величина

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_2^2} \tag{5.52}$$

имеет смысл коэффициента диффузии. Но так как величина $\overline{y_2^2}$ в общем случае является нелинейной функцией времени, ясно, что коэффициент диффузии, вообще говоря, непостоянен.

С учетом выражения (1.77) для $\overline{y_2^2}$ из (5.52) можно получить

$$\epsilon_{22} = v_2'^2 \int_0^t R_L(\tau)\, d\tau. \tag{5.53}$$

Этот результат для малой и большой величин $t$ приводит соответственно к $\epsilon_{22} = v_2'^2 t$ и $\epsilon_{22} = v_2' \Lambda_L$.

Следовательно, если изобразить зависимость величины $\epsilon_{22}/v_2'\Lambda_L$ от $v_2' t/\Lambda_L$, то получится кривая, угол которой с осью абсцисс со-

ставляет вначале 45°. При более высоких значениях $v_2't/\Lambda_L$ эта кривая отклоняется от указанной линейной зависимости, асимптотически приближаясь к постоянному значению 1 при больших значениях $v_2't/\Lambda_L$.

Обобщение на трехмерный случай, предложенное Бэтчелором [16, 18], основывается на предположении о том, что распределение плотности вероятности всех трех компонент $y_i$, не только каждое в отдельности, но также и совместно, является гауссовским. Тогда можно показать, что вероятность $P(x_1, x_2, x_3, t)$ пребывания меченой жидкой частицы в точке $(x_1, x_2, x_3)$ в момент времени $t$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x_1, x_2, x_3, t) = \epsilon_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(x_1, x_2, x_3, t), \tag{5.54}$$

где

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_i y_j}. \tag{5.55}$$

Коэффициент диффузии представляется здесь тензором второго ранга и связан с диффузионным тензором $\overline{y_i y_j}$ соотношением (5.55). Относительно своих главных осей тензор $\epsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, и правая часть уравнения (5.54) сокращается до трех членов. В случае изотропной турбулентности имеет место сферическая симметрия и $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$; поэтому правая часть уравнения (5.54) принимает форму лапласиана:

$$\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} P(x_1, x_2, x_3, t).$$

Из выражений (5.47) и (5.48) для $\overline{y_i y_j}$ получим соответственно:

для малых $t$ $$\epsilon_{ij} = \overline{v_i(t') v_j(t')}\, t, \tag{5.56}$$

для больших $t$ $$\epsilon_{ij} = v_i' v_j' (\mathcal{J}_{i,j})_L. \tag{5.57}$$

При промежуточных значениях времени $t$ величина $\epsilon_{ij}$ будет изменяться подобно $\epsilon_{22}$, как это было в описанном выше случае одномерной диффузии в направлении оси $x_2$.

В настоящий момент обобщения на случай трехмерной диффузии представляют лишь сугубо теоретический интерес и не имеют непосредственного практического значения, так как ничего — ни теоретически, ни экспериментально — не известно относительно коэффициента тензора лагранжевой корреляции $[R_{i,j}(\tau)]_L$. Как мы увидим в следующем параграфе, все доступные для теоретической обработки экспериментальные результаты, касающиеся турбулентной диффузии, вполне удовлетворительно могут быть описаны с помощью одномерных теорий диффузии.

Как указывалось, приведенный выше анализ диффузии отдельной меченой жидкой частицы может быть применен и к движению центра

массы моля жидкости. Но для изучения деформации такого моля жидкости приходится рассматривать относительное движение двух жидких частиц этого моля. Основной вклад в исследование относительной диффузии двух жидких частиц принадлежит Бэтчелору [17], хотя за много лет до него некоторые фундаментальные представления были развиты Тэйлором [19], а также Ричардсоном [20] в его теории диффузии в атмосфере.

Относительная диффузия двух жидких частиц будет, конечно, зависеть от их начального относительного положения и расстояния между ними. Если это начальное расстояние велико по сравнению с интегральным масштабом турбулентности, то между движениями этих двух жидких частиц какой-либо связи существовать не будет и они будут двигаться независимо друг от друга. Но если в то же время эти две жидкие частицы в начальный момент расположены близко одна от другой, то их движения будут тесно связаны, по крайней мере в течение первых фаз их движения, и будут определяться турбулентными движениями, соответствующими многим, если не всем, частотам. Поскольку мы собираемся исследовать относительное движение двух жидких частиц, образующих часть моля жидкости, то будем считать, что эти две жидкие частицы находятся в начальный момент очень близко друг к другу, в пределах расстояния, равного наименьшему масштабу турбулентности. Тогда движение этих жидких частиц как целого состоит в одновременном переносе под действием крупномасштабных турбулентных движений, а относительная диффузия первоначально определяется только турбулентными движениями с наименьшим масштабом. Соответственно по мере увеличения расстояния между двумя жидкими частицами вследствие их относительной диффузии их относительные движения будут все более и более подчиняться движениям с наибольшим масштабом, присущим рассматриваемой турбулентности. Это означает, что расстояние между двумя жидкими частицами $\Delta y_i$ и разность их скоростей $\Delta v_i$ являются нестационарными функциями времени, даже если турбулентность сама по себе однородна и статистически стационарна.

Обозначим эти две меченые жидкие частицы символами $\alpha$ и $\beta$, а их координаты в данный момент времени — через $(y_i)_\alpha$ и $(y_i)_\beta$. Относительная диффузия этих двух жидких частиц в пространстве может быть описана с помощью тензора относительной диффузии $\overline{\Delta y_i \Delta y_j}$, где

$$\Delta y_i = (y_i)_\beta - (y_i)_\alpha, \quad \Delta y_j = (y_j)_\beta - (y_j)_\alpha.$$

Пользуясь этими соотношениями, тензор относительной диффузии можно выразить через диффузионные тензоры $\overline{y_i y_j}$ каждой жидкой

частицы и новые тензоры $\overline{(y_i)_\alpha (y_j)_\beta}$, т. е.

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_j} = \overline{(y_i y_j)_\beta} + \overline{(y_i y_j)_\alpha} - \overline{(y_i)_\beta (y_j)_\alpha} - \overline{(y_j)_\beta (y_i)_\alpha} =$$
$$= 2\overline{y_i y_j} - \overline{(y_i)_\beta (y_j)_\alpha} - \overline{(y_j)_\beta (y_i)_\alpha},$$

так как при однородной турбулентности диффузионные тензоры для обеих жидких частиц одинаковы. Тензоры $\overline{(y_i)_\alpha (y_j)_\beta}$ можно выразить через тензоры лагранжевой двойной корреляции $[(Q_{i,j})_L]_{\alpha,\beta} = \overline{(v_i)_\alpha (v_j)_\beta}$, однако каких-либо данных об этих тензорах лагранжевой корреляции для двух частиц не имеется. Поскольку логично предположить, что эти корреляции при большом времени диффузии обращаются в нуль и, стало быть, две жидкие частицы будут двигаться независимо друг от друга, то в результате получим

$$\text{при больших } t \quad \overline{\Delta y_i \Delta y_j} \approx \overline{2 y_i y_j}. \tag{5.58}$$

В то же время можно воспользоваться предположением о том, что при очень малом времени диффузии эти частицы имеют такую начальную скорость $v_i(0)$, которую практически можно принять равной скорости $u_i(x_1, x_2, x_3, 0)$ в начальной точке. Отсюда

$$(y_i)_\alpha \approx [v_i(0)]_\alpha t = [u_i(x_1, x_2, x_3, 0)]_\alpha t$$

и

$$(y_i)_\beta \approx [v_i(0)]_\beta t = [u_i(x_1, x_2, x_3, 0)]_\beta t.$$

Вводя новые координаты $\xi_i = (x_i)_\beta - (x_i)_\alpha$, начало которых, таким образом, совпадает с исходным положением частицы $\alpha$, в случае однородной турбулентности получаем:

$$\frac{\overline{\Delta y_i \Delta y_j}}{t^2} = \overline{[u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)\, u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_\beta} +$$
$$+ \overline{[u_i(0, 0, 0, 0)\, u_j(0, 0, 0, 0)]_\alpha} -$$
$$- \overline{[u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_\beta [u_j(0, 0, 0, 0)]_\alpha} -$$
$$- \overline{[u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_\beta [u_i(0, 0, 0, 0)]_\alpha} =$$
$$= 2Q_{i,j}(0, 0) - [Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_{\beta,\alpha} - [Q_{j,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]_{\beta,\alpha}. \tag{5.59}$$

Следовательно, начальное значение тензора относительной диффузии определяется эйлеровыми двойными корреляциями скорости, соответствующими исходным положениям жидких частиц $\alpha$ и $\beta$, т. е. корреляциями, которые могут быть измерены непосредственно с помощью известных методов.

Если число Рейнольдса турбулентности очень велико, так что существует достаточно широкая равновесная область, то тогда тензор относительной диффузии в течение первых периодов времени

будет определяться параметрами, характеризующими равновесную область турбулентности, т. е. величинами $\nu$ и $\varepsilon$, а также временем $t$. Если дополнительно предположить наличие в этой области локальной изотропности, то для $Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$ оказывается справедливым соотношение (3.11), полученное для изотропной турбулентности. Тогда имеем

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_j} = u_2' \left\{ \left( \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + 2[1 - f(r)]\delta_{ij} \right\} t^2 + \xi_i \xi_j. \quad (5.60)$$

Но для равновесной области при малых значениях $r$ было получено следующее приближенное соотношение:

$$f(r) \approx 1 - \frac{A}{u'^2} (\varepsilon r)^{2/3}, \quad (3.133)$$

где $A$ — универсальная постоянная. Используя это выражение, для тензора относительной диффузии получаем

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_j} \approx \frac{2}{3} A \left( 4\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \right) (\varepsilon r)^{2/3} t^2 + \xi_i \xi_j, \quad (5.61)$$

откуда вытекает формула для среднеквадратичного значения расстояния:

$$(\overline{\Delta y_i \Delta y_i} - r^2)^{1/2} \approx \left( \frac{22}{3} A \right)^{1/2} (\varepsilon r)^{1/3} t. \quad (5.62)$$

Проведенный анализ относительной диффузии двух меченых жидких частиц показывает, что в среднем эти две частицы стремятся сепарироваться, причем расстояние между ними со временем возрастает и если $\overline{\Delta y_i \Delta y_i} \gg r^2$, то этот рост при не слишком больших значениях времени пропорционален ему.

Если обратиться к выражениям (5.58) и (5.62), то можно заключить, что соответствующие скорости сепарации двух меченых жидких частиц постоянны, но имеют различные значения. Скорость сепарации при больших значениях времени намного выше скорости сепарации в начальный период. Следовательно, в отличие от скорости диффузии отдельной жидкой частицы, которая в первые моменты может считаться постоянной, скорость сепарации двух жидких частиц возрастает по времени.

Увеличивающееся по времени расстояние сепарации между двумя жидкими частицами должно иметь место также и в случае течения с равномерной скоростью деформации.

Итак, в турбулентном потоке малые области в пределах наименьшего масштаба турбулентности могут рассматриваться как временные области с равномерной скоростью деформации. Ускоряющуюся в начальные моменты диффузии сепарацию двух жидких частиц в турбулентном потоке можно рассм тривать, исходя из

предположения о том, что во все эти моменты времени расстояние между жидкими частицами не превышает наименьшего масштаба турбулентности. В таком случае мы имеем не только $\overline{\Delta y_i \Delta y_i}(0) \approx 0$ при $t = 0$, но и во все рассматриваемые моменты времени также $\overline{\Delta y_i \Delta y_i} < \eta^2 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/2}$. Это нужно всегда иметь в виду, даже если в последующем анализе время $t$ для удобства будет приниматься очень большим.

Тогда скорость деформации жидкости одинакова во всех точках материальной линии, соединяющей обе наши меченые жидкие частицы. Если $|\Delta y(t)|$ — длина этой материальной линии в момент времени $t$, то, очевидно, имеем соотношение

$$\frac{d|\Delta y|}{dt} = e_{li} e_{lj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} |\Delta y|,$$

где $e_{li}$ и $e_{lj}$ — направляющие косинусы углов между мгновенным направлением $l$ этой материальной линии и осями координат. Отсюда

$$\frac{d}{dt} \ln |\Delta y| = e_{li} e_{lj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

По истечении достаточно продолжительного периода времени скорость растяжения при однородной турбулентности, определяемая правой частью этого выражения, будет стационарной случайной функцией времени. Следовательно, в среднем (по большому числу линейных элементов или по большому числу идентичных опытов) скорость растяжения не будет зависеть от времени:

$$\overline{e_{li} e_{lj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \zeta \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

где $\zeta \sim (\varepsilon/\nu)^{1/2}$, т. е. величина $\zeta$ обратно пропорциональна времени, характерному для равновесной области, поскольку мы использовали предположение, что величины $|\Delta y|$ во все моменты времени очень малы. Весьма вероятно, что при $t \to \infty$ отношение $\Delta y_i / |\Delta y|$ тоже является стационарной случайной функцией времени. Бэтчелор [21] показал, что в этом случае

$$\overline{\frac{d}{dt} \ln |\Delta y|} = \frac{d}{dt} \ln \overline{|\Delta y|}.$$

Отсюда для $\overline{|\Delta y|}$ получаем

$$\overline{|\Delta y|} \approx |\Delta y(0)| \exp(\zeta t). \tag{5.63}$$

Этот результат тоже показывает, что расстояние между двумя жидкими частицами с течением времени возрастает. Следовательно, моль жидкости будет деформироваться таким образом, что расстояние между любыми двумя из его жидких частиц в среднем увеличивается

по времени. Это означает, что деформация малого моля жидкости может происходить только вполне определенным путем.

Бэтчелор [21] и Райд [22] исследовали влияние процесса растяжения материальных линий на деформацию молей жидкости, а также на локальные изменения по времени скалярных и векторных субстанций, переносимых жидкостью, например тепла и завихренности турбулентности. Они пришли к выводу, что любой малый сферический элемент в конечном счете вытягивается в длинную тонкую ленту, у которой

$$\text{длина} \quad \text{пропорциональна} \exp(\zeta_1, t), \tag{5.64а}$$

$$\text{ширина} \quad \text{пропорциональна} \exp(\zeta_2, t), \tag{5.64б}$$

$$\text{толщина} \quad \text{пропорциональна} \exp(\zeta_3, t), \tag{5.64в}$$

где $\zeta_1$ и $\zeta_2$ положительны, а $\zeta_1 \gg \zeta_2$. Ввиду того, что для несжимаемой жидкости имеем условие

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0,$$

обязательно должно быть

$$\zeta_3 = -(\zeta_1 + \zeta_2) < 0.$$

Следует подчеркнуть, что этот сферический элемент должен быть достаточно мал, с тем чтобы выполнялось соотношение (5.63) и исходное предположение. Тогда скорость деформации, испытываемой этим сферическим элементом, почти равномерна. Наблюдения Таунсенда [23] над диффузией тепловых пятен при однородной турбулентности показывают, что при этом происходит медленное вращение относительно жидкости главных осей скорости деформации, которой подвержен жидкий элемент, и что эти оси практически остаются совмещенными с главными осями того эллипсоида, в который первоначально преобразуется сферический элемент. Наблюдения Таунсенда дают, кроме того, основания полагать, что протяженность двух главных осей этого эллипсоида велика по сравнению с длиной третьей оси, а также сравнительно с диаметром исходной сферы.

Таким образом, все материальные линии и поверхности имеют тенденцию стать параллельными направлению максимальной скорости растяжения. Этот вид деформации любого жидкого элемента имеет тесное отношение к изменениям скалярных и векторных субстанций, увлеченных этим жидким элементом.

Если имеется неравномерное распределение какой-либо скалярной субстанции, например тепла, то градиенты этой скалярной субстанции будут изменяться в ходе деформации жидкого элемента. При этом градиент в направлении, скорость растяжения в котором составляет $\zeta_i$, изменяется обратно пропорционально величине $\exp(\zeta_i t)$. Следовательно, градиент скалярной субстанции резко возрастает в направлении наикратчайшей главной оси эллипсоида, в который преобразуется

исходный сферический элемент, так как две соседние поверхности постоянной концентрации этой скалярной субстанции стремятся подойти одна к другой как можно ближе.

Итак, если Г — скалярная субстанция и рассматривается движущаяся вместе с жидким элементом система координат $x_i^*$, оси которой совпадают с главными осями удлиняющегося эллипсоида, то имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} \sim \exp(-\zeta_i t). \tag{5.65}$$

В то же время векторная субстанция, например завихренность $\omega_k$, будет возрастать пропорционально увеличению того линейного элемента, который по направлению совпадает с этой векторной субстанцией, так как величина вектора обратно пропорциональна площади поперечного сечения векторной трубки. Следовательно, в системе координат $x_i^*$

$$\omega_1 \sim \exp[-(\zeta_2 + \zeta_3)\, t] = \exp(\zeta_1 t),$$

или, в более общем виде,

$$\omega_k \sim \exp(\zeta_k t). \tag{5.66}$$

Из уравнений (5.65) и (5.66) получается следующий интересный результат:

$$\delta_{ik}\omega_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} = \omega_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} \sim \exp(-\zeta_i t) \exp(\zeta_i t) = 1,$$

или

$$\omega_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i^*} = \text{const}. \tag{5.67}$$

Этот результат, найденный для общего случая скалярной и векторной субстанций Бэтчелором и Таунсендом [25], был получен ранее Эртелем [24] в его метеорологических исследованиях для градиента температуры и завихренности.

Соотношения (5.65) — (5.67) справедливы только в том случае, когда молекулярная диффузия отсутствует. Однако в действительности молекулярная диффузия всегда имеет место, а ее влияние сильно возрастает благодаря процессу растяжения жидких элементов. Это означает, что, если даже молекулярная диффузия очень мала по сравнению с вихревой диффузией, ее влияние отнюдь не обязательно пренебрежимо мало благодаря сильному возрастанию локальных градиентов под действием турбулентности. Следовательно, повышенная молекулярная диффузия и вихревая диффузия не являются независимыми друг от друга процессами, а тесно связаны между собой. Еще одно вытекающее отсюда следствие состоит в том, что в большинстве случаев оказывается весьма затруднительным, если

не невозможным, учесть влияние молекулярной диффузии на диффузионные процессы в турбулентных потоках.

Возвратимся теперь вновь к теориям пути смешения и посмотрим, как влияют рассмотренные выше факторы на эти теории. Моли жидкости, которые, по предположению, сохраняют транспортабельную субстанцию на расстоянии, равном длине пути смешения, имеют размеры, одинаковые по порядку величины с этой длиной и с лагранжевым интегральным масштабом диффузии отдельной жидкой частицы. На своем пути (равном пути смешения) жидкий моль под действием мелкомасштабных турбулентных движений будет деформироваться. Деформация и растяжение жидких элементов этого моля вызывают повышенный обмен транспортабельной субстанции с окружающей жидкостью благодаря мелкомасштабной вихревой диффузии и возросшей молекулярной диффузии, как это было описано выше. Сложность этого процесса диффузии, а значит, и переноса транспортабельной субстанции между молем и окружающей его средой не позволяет описать подобный обмен с помощью простого закона типа (5.37). Как отмечалось, Бюргерс выдвинул предположение о том, что линейное соотношение (5.37) применимо лишь для очень малых жидких частиц, но даже и в этом случае усиленная молекулярная диффузия, обусловленная растяжением, должна оказывать значительное влияние на величину коэффициента обмена $\alpha$, который входит в соотношение (5.37).

При изучении относительной диффузии двух меченых частиц было показано, что в течение начального периода диффузии тензор относительной диффузии $\overline{\Delta y_i \Delta y_j}$ тесно связан с эйлеровыми двойными корреляциями, соответствующими исходным положениям этих двух жидких частиц [см. уравнение (5.59)]. Что касается отдельной жидкой частицы, то и в этом случае снова можно предполагать наличие в течение первого периода диффузии тесной связи между лагранжевой диффузионной корреляцией и эйлеровыми корреляциями, относящимися к исходному положению частицы. И в самом деле, как будет показано, можно получить соотношения между лагранжевым и эйлеровым микромасштабами, хотя эти соотношения и содержат обычно корреляции скорости более высокого порядка, о которых либо ничего не известно, либо известно очень мало.

В случае большего времени диффузии тоже можно ожидать существования некоторой связи между лагранжевой и эйлеровой корреляциями. Но подобного рода соотношение будет очень сложным, даже в случае однородной и изотропной турбулентности. Рассмотрим, например, лагранжеву корреляцию между компонентами скорости $v_2$ в направлении оси $x_2$ некоторой меченой жидкой частицы для двух моментов времени:

$$[Q_{2,2}(\tau)]_L = \overline{v_2(t)\, v_2(t+\tau)}.$$

Считается, что меченая жидкая частица в момент времени $t$ находится в точке с координатами $y_k$. В течение времени $\tau$ эта частица перемещается на расстояние $\eta_k$. Операцию осреднения можно производить либо как осреднение по совокупности, либо, поскольку турбулентность принимается однородной и стационарной, как осреднение по времени $t$ или по пространству.

Компонента скорости $v_2$ меченой жидкой частицы будет равна скорости $u_2$ в той точке, которую только что миновала жидкая частица. Следовательно,

$$v_2(t) = u_2(y_k, t) \tag{5.68а}$$

и

$$v_2(t+\tau) = u_2(y_k + \eta_k, t+\tau), \tag{5.68б}$$

где величины $\eta_k$ и $\tau$ связаны соотношением

$$\eta_k = \int_t^{t+\tau} v_k(t')\,dt', \tag{5.69}$$

откуда

$$\overline{v_2(t)\,v_2(t+\tau)} = \overline{u_2(y_k, t)\,u_2(y_k+\eta_k, t+\tau)},$$

или

$$[Q_{2,2}(\tau)]_L = [Q_{2,2}(\eta_k, \tau)]_E. \tag{5.70}$$

Эйлерова корреляция в правой части этого равенства не является ни обычной пространственной двойной корреляцией скорости в двух точках, находящихся друг от друга на расстоянии $\eta_k$, в один и тот же момент времени, ни двойной корреляцией в одной точке за интервал времени $\tau$, а представляет собой пространственно-временную корреляцию. Кроме того, величины $\eta_k$ и $\tau$ не являются независимыми друг от друга; связь между ними определяется формулой (5.69).

Чандрасекар [26] провел для случая стационарной изотропной турбулентности исследование кинематики и динамики двойной корреляции скорости относительно пространства и времени. По-видимому, представляется возможным выразить эту двойную корреляцию скорости через единственный определяющий скаляр, например $f(r, \tau)$ — коэффициент двойной продольной корреляции скорости в двух точках, находящихся одна от другой на расстоянии $r$, за интервал времени $\tau$:

$$f(r, \tau) = \frac{\overline{u_r(0, 0)\,u_r(r, \tau)}}{u'^2}.$$

Логично предположить, что существует связь между $f(r, \tau)$, коэффициентом продольной пространственной корреляции $f(r)$ и коэффициентом эйлеровой временной корреляции $R_E(\tau) = \overline{u(t)\,u(t+\tau)}/u'^2$.

Однако пока о подобном соотношении для общего случая произвольных значений $r$ и $\tau$ ничего не известно.

Это соотношение можно получить путем разложения $f(r, \tau)$ в ряд по степеням $r$ и $\tau$ с коэффициентами, являющимися производными от $f(r)$ и $R_E(\tau)$ при $r=0$ и $\tau=0$. Тот же способ можно, конечно, применить и непосредственно к соотношению (5.70). Таким образом,

$$[Q_{2,2}(\tau)]_L = [Q_{2,2}(0)]_L + \frac{\tau^2}{2}\left[\frac{d^2(Q_{2,2})_L}{d\tau^2}\right]_{\tau=0} + \frac{\tau^4}{4!}\left[\frac{d^4(Q_{2,2})_L}{d\tau^4}\right]_{\tau=0} + \ldots =$$

$$= [\overline{v_2^2}]_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2}\left[\overline{v_2\frac{d^2v_2}{d\tau^2}}\right]_{\tau=0} + \frac{\tau^4}{4!}\left[\overline{v_2\frac{d^4v_2}{d\tau^4}}\right]_{\tau=0} + \ldots, \quad (5.71)$$

так как при однородной стационарной турбулентности

$$\left[\overline{v_2\frac{dv_2}{d\tau}}\right]_{\tau=0} = 0, \quad \left[\overline{v_2\frac{d^3v_2}{d\tau^3}}\right]_{\tau=0} = 0 \ldots$$

Аналогично для $[Q_{2,2}(\eta_k, \tau)]_E$ получаем

$$[Q_{2,2}(\eta_k, \tau)]_E = \overline{u_2^2} + \frac{\eta_k\eta_l}{2}\left[\overline{u_2\frac{\partial^2u_2}{\partial\eta_k\,\partial\eta_l}}\right]_{\substack{\tau=0\\ \eta_k=0}} +$$

$$+ \frac{\tau^2}{2}\left[\overline{u_2\frac{\partial^2u_2}{\partial\tau^2}}\right]_{\substack{\tau=0\\ \eta_k=0}} + \eta_k\tau\left[\overline{u_2\frac{\partial^2u_2}{\partial\eta_k\,\partial\tau}}\right]_{\substack{\tau=0\\ \eta_k=0}} + \ldots \quad (5.72)$$

Выражение (5.69) также может быть разложено в ряд:

$$\eta_k = [v_k]_{\tau=0}\,\tau + \left[\frac{dv_k}{d\tau}\right]_{\tau=0}\frac{\tau^2}{2} + \ldots \quad (5.73)$$

Метод разложения в степенной ряд с целью получения связи между лагранжевой и эйлеровой корреляциями имеет практический смысл только в применении к малым интервалам времени $\tau$. Но наряду с этим приведенный выше анализ является хорошей иллюстрацией того, насколько сложна эта проблема и каковы трудности, встречающиеся на пути отыскания указанного соотношения.

В дальнейшем будем рассматривать только малые интервалы времени $\tau$. Из уравнений (5.71)—(5.73) можно получить соотношение между величиной $\overline{[v_2\,d^2v_2/d\tau^2]}_{\tau=0}$ и соответствующим выражением для эйлеровой скорости $u_2(y_k, t)$. Однако это соотношение легко вывести также, исходя из уравнения

$$\frac{dv_2}{d\tau} = \frac{\partial u_2}{\partial\tau} + u_l\frac{\partial u_2}{\partial x_l}. \quad (5.74)$$

Но ввиду того, что при однородной стационарной турбулентности

$$\overline{\left[v_2 \frac{d^2v_2}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}} = -\overline{\left[\frac{dv_2}{d\tau}\right]^2_{\tau=0}},$$

искомое соотношение получается просто путем возведения в квадрат обеих частей соотношения (5.74). Таким образом,

$$-\overline{\left[v_2 \frac{d^2v_2}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}} = \overline{\left(\frac{dv_2}{d\tau}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial \tau}\right)^2} + \overline{2u_i \frac{\partial u_2}{\partial \tau}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}}. \quad (5.75)$$

Итак, имеем $\overline{(dv_2/d\tau)^2} = 2/\tau_L^2$ и $\overline{(\partial u_2/\partial\tau)^2} = 2/\tau_E^2$. Кроме того, для выражения последних двух членов в правой части (5.75) через соответствующие коэффициенты корреляции, а также временной микромасштаб $\tau_E$ и пространственные микромасштабы $\lambda_{2i}$ можно использовать метод Френкиля [27]. Если, кроме этого, предположить еще наличие изотропности, в случае которой все $\lambda_{2i}$ выражаются через $\lambda_g$, то в конечном счете получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{\tau_L^2} = \frac{1}{\tau_E^2} + A\frac{u'}{\tau_E \lambda_g} + B\frac{u_2'}{\lambda_g^2}, \quad (5.76)$$

где $A$ и $B$ — численные постоянные, содержащие, помимо других величин, значения рассматриваемых коэффициентов корреляции при $\tau = 0$ и $x_i = 0$. Но вследствие того, что значения этих коэффициентов корреляции, а следовательно, и значения $A$ и $B$ неизвестны, соотношение (5.76) между лагранжевым и эйлеровым микромасштабами для расчета лагранжева микромасштаба по известному, например, из непосредственных измерений эйлерову микромасштабу лишено практического смысла.

Другой метод, который позволяет получить соотношение между лагранжевым и эйлеровым микромасштабами, не содержащее неизвестных коэффициентов, принадлежит Юберою и Корсину [28]. При этом предполагается наличие изотропности и в качестве исходного соотношения используется уравнение движения для компоненты скорости $v_2$:

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (5.77)$$

Ввиду того, что при изотропной турбулентности

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k}} = 0,$$

из уравнения (5.77) получим

$$\overline{\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\rho^2}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)^2} + \nu^2\overline{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_l \partial x_l}}. \quad (5.78)$$

Каждый член в правой части уравнения (5.78) можно выразить через коэффициент двойной продольной корреляции $f(r)$, а именно: первый член — с помощью соотношения (3.240), а второй член — с помощью соотношения, которое получается следующим образом.

Введем тензор двойной корреляции скорости $(Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}$; тогда имеем

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\right)_B (Q_{i,j})_{A,B} = \frac{\partial^4}{\partial \xi_k \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_l} (Q_{i,j})_{A,B}.$$

Следовательно,

$$\overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}} = \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi_k \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}\right]_{r=0}.$$

Из (3.19) получим

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \xi_k \partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}\right]_{r=0} = \frac{35}{3} \delta_{ij} u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0}, \tag{5.79}$$

откуда

$$\overline{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_l \partial x_l}} = \frac{35}{3} u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0}. \tag{5.80}$$

Замена обоих членов в правой части уравнения (5.78) соответственно по формулам (3.240) и (5.80) дает

$$\overline{\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2} = 4u'^4 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 dr + \frac{35}{3} \nu^2 u'^2 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0}. \tag{5.81}$$

Чтобы найти численное значение правой части этого уравнения, надо знать выражение для функции $f(r)$ в широком диапазоне значений $r$. В главе 3 для $f(r)$ было получено точное выражение в полностью вязкой области турбулентности, т. е. при очень малых значениях числа Рейнольдса турбулентности $\mathrm{Re}_\lambda$. Для очень больших значений $\mathrm{Re}_\lambda$, когда имеется существенный диапазон волновых чисел, в котором справедлив спектр Колмогорова, аналитическое выражение для $f(r)$ также известно в широком диапазоне значений $r$.

Остановимся вначале на случае очень больших значений $\mathrm{Re}_\lambda$. Будем считать, что значения $\mathrm{Re}_\lambda$ настолько велики, что для энергетического спектра $E(k)$ справедливо выражение (3.128). Соответствующее значение $f(r)$ может быть при этом вычислено с помощью соотношения (3.68). Таким образом,

$$4 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'^2 f}{\partial r}\right)^2 dr = 16 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left[\int_0^\infty E(k) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin kr}{k^3 r^3} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2}\right) dk\right]^2 dr.$$

Подставляя сюда вместо $E(k)$ выражение (3.128) и вводя одновременно обозначения $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ и $\varepsilon = 15\nu u'^2/\lambda_g^2$, после некоторых преобразований получаем

$$4\int_0^\infty \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u'^2 f}{\partial r}\right)^2 dr = \frac{2^{\frac{15}{2}}5^{\frac{3}{2}}}{3} A \frac{\nu u'^3}{\alpha\lambda_g^3},$$

где

$$A = \int_0^\infty s\left[\int_0^\infty \frac{s^4 w^{-2/3}}{(s^4+w^4)^{4/3}} \frac{d}{dw}\left(\frac{\sin w}{w^3} - \frac{\cos w}{w^2}\right) dw\right]^2 ds = 0{,}03776.$$

Значение этого интеграла было определено численным и графическим методами.

Для второго члена в правой части соотношения (5.81) получим

$$\frac{35}{3}\nu^2 u'^2\left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0} = \frac{70}{3}\nu^2\int_0^\infty E(k)\left[\frac{\partial^4}{\partial r^4}\left(\frac{\sin kr}{k^3r^3} - \frac{\cos kr}{k^2r^2}\right)\right]_{r=0} dk =$$

$$= \frac{2}{3}\nu^2\int_0^\infty k^4 E(k)\, dk,$$

или, с учетом (3.128),

$$\frac{35}{3}\nu^2 u'^2\left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4}\right]_{r=0} = \nu^2 k_d^5\left(\frac{8}{9\alpha}\right)^{2/3}(\varepsilon\nu^5)^{1/4}\left(\frac{8}{3\alpha^2}\right)^{-5/6}\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} =$$

$$= \alpha\frac{\nu u'^3}{\lambda_g^3}\frac{15^{3/2}\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}.$$

Если в то же время воспользоваться формулой

$$\overline{\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2} = \frac{2u'^2}{\tau_L^2},$$

то соотношение (5.81) примет вид

$$\frac{1}{\tau_L^2} = 12{,}75\frac{\nu u'}{\alpha\lambda_g^3} + \alpha\frac{3(5\pi/2)^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\frac{\nu u'}{\lambda_g^3} = \left(\frac{12{,}75}{\alpha} + 4{,}46\alpha\right)\frac{\nu u'}{\lambda_g^3}.$$

Итак, получаем связь между $\tau_L$ и $\lambda_g$ для больших значений $\mathrm{Re}_\lambda$, которая выражается формулой

$$\frac{\lambda_g^2}{u'^2\tau_L^2} = \left(\frac{12{,}75}{\alpha} + 4{,}46\alpha\right)\frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda}. \qquad (5.82)$$

С другой стороны, при очень малых значениях $\mathrm{Re}_\lambda$ для $f(r)$ можно воспользоваться выражением (3.45), которое, будучи записанным через $\lambda_g$, имеет вид

$$f(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\lambda_g^2}\right).$$

Тогда из соотношения (5.81) для очень малых значений $\mathrm{Re}_\lambda$ получим следующую зависимость:

$$\overline{\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2} = \frac{u'^4}{\lambda_g^2}\left(2 + 35\,\frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda^2}\right) \approx 35\,\frac{u'^4}{\lambda_g^2}\,\frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda^2},$$

откуда вытекает, что влиянием члена, характеризующего давление, в уравнении (5.82) можно пренебречь.

При таком сильном влиянии вязкости уже нельзя пренебречь процессом вырождения турбулентности, как это делалось до сих пор, когда турбулентность предполагалась стационарной; Юберой и Корсин показали, что для вырождающейся турбулентности

$$\frac{2u'^2}{\tau_L^2} = \overline{\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2} - \left(\frac{dv_2'}{dt}\right)^2.$$

При $dv_2'/dt = du'/dt = -5\nu u'/\lambda_g^2$ окончательно получим

$$\frac{2u'^2}{\tau_L^2} \approx 35\,\frac{u'^4}{\lambda_g^2}\,\frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda^2} - 25\nu^2\,\frac{u'^2}{\lambda_g^4} = 10\,\frac{u'^4}{\lambda_g^2}\,\frac{1}{\mathrm{Re}_\lambda^2},$$

или

$$\frac{\lambda_g^2}{u'^2\tau_L^2} \approx \frac{5}{\mathrm{Re}_\lambda^2}. \tag{5.83}$$

Относительно величины $\lambda_g/u'\tau_L$ есть некоторые экспериментальные данные, полученные Юбероем и Корсином [28] при исследовании изотропной турбулентности за решеткой, но эти данные имеют настолько большой разброс, что получить надежное подтверждение теоретического соотношения (5.82), кроме оценки по порядку величины, оказывается практически невозможным.

Уравнения (5.82) и (5.83) представляют собой непосредственную связь между лагранжевым микромасштабом $\tau_L$ и эйлеровым пространственным микромасштабом $\lambda_g$. Весьма возможно, что некоторая связь существует также между лагранжевым и эйлеровым пространственными интегральными масштабами, но для ее определения пришлось бы рассмотреть большие интервалы времени диффузии. Подобные соотношения в этом случае становятся очень громоздкими, и задача отыскания их пока остается нерешенной.

Но в то же время экспериментальные факты свидетельствуют о том, что по меньшей мере при больших числах Рейнольдса общая

форма зависимости коэффициента лагранжевой корреляции $R_L(\tau)$ и коэффициента продольной пространственной корреляции $f(r)$ может быть аппроксимирована соответственно экспоненциальными функциями $\exp(-\tau/\mathcal{T}_L)$ и $\exp(-r/\Lambda_f)$. Таким образом, эти коэффициенты корреляции описываются одинаковыми функциональными зависимостями. В таком случае можно предположить, что коэффициенты лагранжевой и эйлеровой корреляции вообще имеют одинаковое функциональное выражение; тогда лагранжев и эйлеров интегральные масштабы должны быть пропорциональны. Подобное предположение было выдвинуто Микельсеном [30]. Итак, если $f(r)=\varphi(r/\Lambda_f)$ и $R_L(\tau)=\varphi(\tau/\mathcal{T}_L)$, то должно выполняться соотношение

$$\tau=\frac{r\mathcal{T}_L}{\Lambda_f}=r\frac{\Lambda_L}{u'\Lambda_f}=\frac{r}{\beta u'},$$

где $\beta=\Lambda_f/\Lambda_L$.

Микельсен проводил опыты с почти однородной изотропной турбулентностью в центральном ядре турбулентного потока в трубе с диаметром 20 *см*. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}_D$ изменялось приблизительно от $2\cdot10^5$ до $6\cdot10^5$. Микельсен производил раздельное измерение коэффициента продольной корреляции $f(r)$ и коэффициента лагранжевой корреляции методом диффузии гелия вниз по потоку от фиксированной точки вдува. Он обнаружил, что при одинаковых значениях $\varphi(r/\Lambda_f)$ и $\varphi(\tau/\mathcal{T}_L)$ величина $r$ в пределах точности эксперимента пропорциональна $\tau$ при постоянном значении $\beta$. Этот коэффициент пропорциональности возрастает почти линейно с увеличением интенсивности турбулентности $u'$; его среднее значение в рассмотренном диапазоне изменения $u'$ составляло 0,6. Следует отметить, что использованный метод приводит к результатам, которые весьма нечувствительны к изменениям формы любого коэффициента корреляции. Больше того, определение турбулентной диффузии жидких частиц по диффузии «трассирующего» газа становится неясным благодаря неизвестному влиянию молекулярной диффузии, как об этом говорилось выше; а это, в свою очередь, усугубляет ненадежность определения лагранжевых корреляций для жидких частиц. К обсуждению этого вопроса мы возвратимся в следующем параграфе.

Самое большее, что можно выявить из опытов Микельсена,—это то, что общая форма зависимости коэффициентов лагранжевой и эйлеровой корреляции одинакова.

Юберой и Корсин [28] тоже произвели раздельное измерение интегральных масштабов $\Lambda_L$ и $\Lambda_f$, но на этот раз — при изотропной турбулентности, созданной с помощью решетки. Хотя в величинах $\Lambda_f/\Lambda_L$ и наблюдается значительный разброс, все же можно сделать вывод, что и в этом случае величина $\beta$ тоже возрастает с

увеличением $\mathrm{Re}_{\Delta_f}$. В первом приближении можно принять, что при малых значениях ($\approx 10$) величины $\mathrm{Re}_{\Delta_f}$ имеем $\beta \approx 0{,}5$, а при больших значениях ($\approx 100$) величины $\mathrm{Re}_{\Delta_f}$ $\beta \approx 0{,}8$.

## § 5.5. Диффузия от неподвижного источника в равномерном потоке

В этом параграфе мы рассмотрим турбулентную диффузию вещества или тепла, которое непрерывно подводится неподвижным источником, либо точечным, либо в виде бесконечной линии, помещенным в турбулентном потоке. Будем считать, что количество вещества или тепла, выделяемого в единицу времени на единицу объема, настолько невелико, что какое-либо влияние его на турбулентность пренебрежимо мало. Осредненную скорость турбулентного потока будем предполагать равномерной, причем постоянную скорость в направлении $x_1$ обозначим через $\overline{U}_1$. В следующем параграфе будет рассмотрен случай турбулентного потока с поперечным сдвигом, когда скорость $\overline{U}_1$ имеет градиент только в направлении оси $x_2$.

Большинство опытов по турбулентной диффузии касается диффузии от неподвижного источника, и имеющиеся данные могут быть использованы для проверки соответствующих теорий. Важный вклад в теорию представляет цикл работ Френкиля [32—35], в которых исследовалось распределение жидких частиц на малых и на больших расстояниях от источника, т. е. при малом и большом интервалах времени диффузии, а также при произвольно больших значениях коэффициентов диффузии.

Прежде чем перейти к результатам экспериментальных исследований, рассмотрим диффузию от неподвижного источника теоретически.

Для начала обратимся к диффузии и распределению в пространстве меченых жидких частиц, выделяемых с постоянной объемной скоростью неподвижным источником. Самым простым случаем является тот, в котором диффузия этих меченых жидких частиц может быть определена с помощью коэффициента диффузии. Это должно соответствовать тем условиям, при которых турбулентность однородна и изотропна и рассматривается продолжительное время диффузии. Тогда наша задача оказывается идентичной с проблемой молекулярной диффузии и теплопроводности в изотропной среде. Решения для распределений концентрации или температуры вниз по потоку от точечного или линейного источника даются, например, Карслоу и Егером [31]. Осредненная концентрация меченых жидких частиц в точке $(x_1, x_2, x_3)$ идентична с вероятностью $P(x_1, x_2, x_3)$ пребывания меченой жидкой частицы в этой точке. Дифференциаль-

ное уравнение для этой осредненной концентрации, или для $P$, записывается в виде [ср. с уравнением (5.54)]:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} P. \tag{5.84}$$

Решения этого уравнения таковы.

1. *Точечный источник* с интенсивностью $S$ в начале координат:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S}{4\pi r \epsilon} \exp\left[-\frac{\bar{U}_1 (r - x_1)}{2\epsilon}\right], \tag{5.85}$$

где $r^2 = x_i x_i$.

Это решение можно упростить, если рассматривать точки, расположенные вблизи оси $x_1$, так что $x_2^2 + x_3^2 \ll x_1^2$ или $r/x_1 \approx 1$:

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S}{4\pi\epsilon |x_1|} \exp\left[-\frac{\bar{U}_1 (x_2^2 + x_3^2)}{4\epsilon |x_1|}\right]. \tag{5.85a}$$

2. *Линейный источник* с интенсивностью $S^*$ на единицу длины, ориентированный вдоль оси $x_3$:

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\pi\epsilon} K_0\left(\frac{\bar{U}_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2\epsilon}\right) \exp\left(\frac{\bar{U}_1 x_1}{2\epsilon}\right), \tag{5.86}$$

где $K_0$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Так как $K_0(z) \to (\pi/2z)^{1/2} \exp(-z)$ при $z \to \infty$, то решение (5.86) для малых $\epsilon/\bar{U}_1 x_1$ и не слишком больших значений $x_2/x_1$ упрощается:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{2\sqrt{\pi\epsilon\bar{U}_1 |x_1|}} \exp\left(-\frac{\bar{U}_1 x_2^2}{4\epsilon |x_1|}\right). \tag{5.86a}$$

Заметим, что решения (5.85) и (5.86) дают конечную концентрацию в точках, расположенных вверх по потоку от источника, которая с увеличением расстояния вверх по потоку быстро убывает.

В предыдущем параграфе упоминалось доказательство Бэтчелором того факта, что вероятность $P(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, подобному (5.84), если распределения плотности вероятности всех трех компонент $y_i$ диффундирующей меченой жидкой частицы считаются как в отдельности, так и в совокупности гауссовскими. Как мы увидим ниже, экспериментальные данные показывают, что для малого и большого интервалов времени диффузии распределения плотности вероятности величин $y_i$ при однородной турбулентности с равномерной осредненной скоростью являются гауссовскими. Флайшман и Френкиль [36] доказали, что в этом случае при малом и большом интервалах времени

диффузии решения для распределения концентрации можно получить непосредственно, без рассмотрения соответствующих дифференциальных уравнений. При малом времени диффузии коэффициенты диффузии зависят от времени. Кроме того, нет никакой необходимости ограничиваться случаем изотропной турбулентности, т. е. турбулентности, при которой коэффициент диффузии не зависит от направления.

Пусть $Q(x_i - x_i', t; t_0)$ — плотность вероятности попадания меченой жидкой частицы в момент времени $t$ в точку $(x_i)$ из точки $(x_i')$, где она находилась в момент времени $t_0$. Тогда имеем [см. соотношение (5.49)]

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int Q(x_1 - x_1', x_2 - x_2', x_3 - x_3', t; t_0) \times \times P(x_1', x_2', x_3', t_0)\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'. \quad (5.87)$$

Предположим, что главные оси тензора турбулентных напряжений совпадают с осями координат. Тогда выражение для плотности вероятности $Q$ запишется в виде

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{y_1^2}\,\overline{y_2^2}\,\overline{y_3^2}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x_1')^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{(x_2 - x_2')^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{(x_3 - x_3')^2}{\overline{y_3^2}}\right]\right\}, \quad (5.88)$$

где величины $\overline{y_i^2}$ пока являются функциями времени.

Если в момент времени $t = 0$ в начале координат $(x_i' = 0)$ в окружающую среду с нулевой осредненной скоростью выделяется меченая жидкость с объемом $s$, то вероятность $P(x_i, t)$, согласно формулам (5.87) и (5.88), запишется так:

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{s}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{y_1^2}\,\overline{y_2^2}\,\overline{y_3^2}\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{x_2^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{x_3^2}{\overline{y_3^2}}\right)\right].$$

Если в момент времени $t_0$ в течение короткого интервала времени $dt_0$ в начале координат выделяется меченая жидкость, объемный расход которой составляет $S$, тогда, так как все поле течения имеет в направлении оси $x_1$ постоянную осредненную скорость $\overline{U}_1$, записанное выше выражение справедливо и в системе координат $x_i^*$, движущейся вместе с потоком со скоростью $\overline{U}_1$. В этом слу-

чае величины $x_1$ и $x_1^*$ в момент времени $t$ связаны соотношением $x_1^* = x_1 - \overline{U}_1(t-t_0)$, но при этом $x_2^* = x_2$ и $x_3^* = x_3$. Отсюда вероятность пребывания в момент времени $t$ в точке $(x_i)$ меченой жидкости, выделяемой в течение интервала времени $dt_0$, записывается в виде

$$P'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t-t_0)\,dt_0 =$$

$$= \frac{S\,dt_0}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{y_1^2}\,\overline{y_2^2}\,\overline{y_3^2}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{[x_1-\overline{U}_1(t-t_0)]^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{x_2^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{x_3^2}{\overline{y_3^2}}\right\}\right),$$

откуда при непрерывном выделении жидкости с объемным расходом $S$ получаем

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{S}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{y_1^2}\,\overline{y_2^2}\,\overline{y_3^2}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{[x_1-\overline{U}_1(t-t_0)]^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{x_2^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{x_3^2}{\overline{y_3^2}}\right\}\right) dt_0,$$

или, если произвести замену $\tau = t - t_0$,

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{S}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{y_1^2}\,\overline{y_2^2}\,\overline{y_3^2}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\overline{U}_1\tau)^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{x_2^2}{\overline{y_2^2}} + \frac{x_3^2}{\overline{y_3^2}}\right]\right\} d\tau. \qquad (5.89)$$

Таким образом, мы получили общее решение задачи о диффузии от непрерывно действующего *точечного источника* в равномерном потоке при однородной турбулентности.

Рассмотрим сначала малый интервал времени диффузии, что соответствует малым расстояниям от точечного источника. В этом случае можно положить [см. уравнение (1.78)], что

$$\overline{y_i^2} = \overline{v_i^2}(t-t_0)^2 = \overline{u_i^2}\tau^2, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Тогда интеграл (5.89) примет вид

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3) =$$

$$= \frac{S}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{u_1^2}\,\overline{u_2^2}\,\overline{u_3^2}\right)^{1/2}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\tau^3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\overline{U}_1\tau)^2}{\overline{u_1^2}\tau^2} + \frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}\tau^2} + \frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}\tau^2}\right]\right\} d\tau.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S \exp\left(-\overline{U}_1^2/2\overline{u_1^2}\right)}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{u_1^2}\,\overline{u_2^2}\,\overline{u_3^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)} \times$$

$$\times\left\{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{x_1\overline{U}_1 \exp\left[\dfrac{x_1^2\overline{U}_1^2}{2\left(\overline{u_1^2}\right)^2\left(\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)}\right]}{\overline{u_1^2}\left(\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)^{1/2}} \times\right.$$

$$\left.\times \operatorname{erfc}\left[\frac{-x_1\overline{U}_1}{\sqrt{2}\,\overline{u_1^2}\left(\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)^{1/2}}\right]\right\}, \qquad (5.90)$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\alpha^2)\,d\alpha.$$

Если решение (5.90) должно оставаться совместным с предположением о малом времени диффузии, то его справедливость ограничена. Согласно этому предположению, время диффузии $\tau$ должно быть мало по сравнению, скажем, с лагранжевым интегральным масштабом; таким образом, $\tau \ll \mathcal{J}_L$. Но интегрирование распространяется на диапазон изменения $\tau$ от нуля до бесконечности. Следовательно, этот интервал совместен с предположением $\tau \ll \mathcal{J}_L$ только в том случае, когда в нем роль составляющих от больших значений $\tau$ пренебрежимо мала. Иными словами, величина подынтегрального выражения при значениях $\tau$, сравнимых с $\mathcal{J}_L$, должна становиться исчезающе малой. Можно показать, что это условие выполняется, если

$$\frac{x_1\overline{U}_1}{\overline{u_1^2}\left(\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)^{1/2}} \gg 1.$$

В этом случае решение (5.90) упрощается, принимая следующий вид:

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S}{2\pi\left(\overline{u_1^2}\,\overline{u_2^2}\,\overline{u_3^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)^{3/2}} \times$$

$$\times \frac{x_1 \overline{U}_1}{\overline{u_1^2}} \exp\left[ - \frac{\frac{\overline{U}_1^2}{2\overline{u_1^2}}\left(\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}\right)}{\frac{x_1^2}{\overline{u_1^2}}+\frac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}+\frac{x_3^2}{\overline{u_3^2}}} \right]. \qquad (5.90а)$$

Значительно более сильное упрощение получается в предположении о том, что относительная интенсивность турбулентности мала: $\overline{u_1^2}/\overline{U}_1^2 \ll 1$. Это предположение в то же время означает также, что $\left(\overline{x_2^2}+\overline{x_3^2}\right)/\overline{x_1^2} \ll 1$, ибо величины $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ — такого же порядка, как и $\overline{u_1^2}$. При этом условии решение (5.90) записывается следующим образом:

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S\overline{U}_1}{2\pi\left(\overline{u_2^2}\,\overline{u_3^2}\right)^{1/2} x_1^2} \exp\left[ - \frac{\overline{U}_1^2}{2\overline{u_1^2}}\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{u_3^2}}+\frac{x_3^2}{x_1^2}\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{u_3^2}}\right)\right] \qquad (5.90б)$$

При большом времени диффузии, т. е. для больших расстояний от точечного источника, можно ввести асимптотические постоянные значения коэффициентов диффузии:

$$\epsilon_{11} = \frac{\overline{y_1^2}}{2(t-t_0)} \quad \text{или} \quad \overline{y_1^2} = 2\epsilon_{11}\tau$$

и аналогично

$$\overline{y_2^2} = 2\epsilon_{22}\tau, \qquad \overline{y_3^2} = 2\epsilon_{33}\tau.$$

Тогда из (5.89) получим

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S}{(4\pi)^{3/2}(\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33})^{1/2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\left\{ - \frac{1}{4}\left[ \frac{(x_1-\overline{U}_1\tau)^2}{\epsilon_{11}\tau} + \frac{x_2^2}{\epsilon_{22}\tau} + \frac{x_3^2}{\epsilon_{33}\tau} \right] \right\} d\tau,$$

или, после интегрирования,

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{S}{4\pi(\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33})^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{\epsilon_{11}}+\frac{x_2^2}{\epsilon_{22}}+\frac{x_3^2}{\epsilon_{33}}\right)^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{ - \frac{\overline{U}_1}{2\epsilon_{11}}\left[ \epsilon_{11}^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{\epsilon_{11}}+\frac{x_2^2}{\epsilon_{22}}+\frac{x_3^2}{\epsilon_{33}}\right)^{1/2} - x_1 \right] \right\}. \qquad (5.91)$$

Нетрудно убедиться в том, что этот результат, если ввести предположение об изотропности, т. е. принять $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$, идентичен с выражением (5.85а).

Для точек, расположенных вблизи оси $x_1$, можно получить следующее приближенное выражение, которое соответствует решению (5.85а):

$$P(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{S}{4\pi(\epsilon_{22}\epsilon_{33})^{1/2}|x_1|} \exp\left[-\frac{\bar{U}_1}{4\epsilon_{11}|x_1|}\left(x_2^2\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} + x_3^2\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}\right)\right]. \tag{5.91а}$$

Задача о диффузии в равномерном потоке от непрерывного *линейного источника*, расположенного вдоль оси $x_3$, может быть решена посредством интегрирования уравнения (5.89) по $x_3$ от $-\infty$ до $+\infty$. При этом получаем выражение

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(\overline{y_1^2}\,\overline{y_2^2})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - \bar{U}_1\tau)^2}{\overline{y_1^2}} + \frac{x_2^2}{\overline{y_2^2}}\right]\right\} d\tau, \tag{5.92}$$

где $S^*$ — интенсивность источника на единицу длины. Для малых расстояний снова можно воспользоваться предположением, что

$$\overline{y_1^2} = \overline{u_1^2}\tau^2 \quad \text{и} \quad \overline{y_2^2} = \overline{u_2^2}\tau^2.$$

Тогда решение (5.92) преобразуется так:

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\sqrt{2\pi}\left(\overline{u_2^2}x_1^2 + \overline{u_1^2}x_2^2\right)^{1/2}} \operatorname{erfc}\left[\frac{-u_2'\bar{U}_1 x_1}{u_1'\left(2\overline{u_2^2}x_1^2 + 2\overline{u_1^2}x_2^2\right)^{1/2}}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\bar{U}_1^2 x_2^2}{2\left(\overline{u_2^2}x_1^2 + \overline{u_1^2}x_2^2\right)}\right]. \tag{5.93}$$

Конечно, и в этом случае приходится учитывать ограничение, накладываемое условием малости времени диффузии $\tau \ll \mathcal{T}_L$. А это, в свою очередь, приводит к условию

$$\frac{x_1\bar{U}_1}{\overline{u_1^2}\left(\dfrac{x_1^2}{\overline{u_1^2}} + \dfrac{x_2^2}{\overline{u_2^2}}\right)^{1/2}} \gg 1.$$

Тогда решение (5.93) упрощается:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{\sqrt{2\pi}\left(\overline{u_2^2}x_1^2 + \overline{u_1^2}x_2^2\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\bar{U}_1^2 x_2^2}{2\left(\overline{u_2^2}x_1^2 + \overline{u_1^2}x_2^2\right)}\right]. \tag{5.93а}$$

Если вновь принять условие $\overline{u_1^2}/\bar{U}_1^2 \ll 1$ и, следовательно, $x_2^2/x_1^2 \ll 1$, то получается еще более простое решение:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{\sqrt{2\pi}\, u_2' |x_1|} \exp\left(-\frac{\bar{U}_1^2 x_2^2}{2\overline{u_2^2} x_1^2}\right). \qquad (5.93б)$$

Для продолжительного времени диффузии, вводя постоянные коэффициенты диффузии $\epsilon_{11}$ и $\epsilon_{22}$, из (5.92) получаем

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\pi(\epsilon_{11}\epsilon_{22})^{1/2}} K_0\left[\frac{1}{2}\bar{U}_1\left(\frac{x_1^2}{\epsilon_{11}^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_{22}^2}\right)^{1/2}\right] \exp\left(\frac{\bar{U}_1 x_1}{2\epsilon_{11}}\right), \qquad (5.94)$$

где $K_0(z)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода.

Это решение можно упростить, если принять, что

$$\frac{\epsilon_{11}}{\bar{U}_1 x_1} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_2^2}{x_1^2} \ll 1.$$

Тогда получим следующий результат:

$$P(x_1, x_2) \approx \frac{S^*}{2(\pi\epsilon_{22}\bar{U}_1 |x_1|)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\bar{U}_1 x_2^2}{4\epsilon_{22}^2 |x_1|}\epsilon_{11}\right). \qquad (5.94а)$$

Произведем сравнение (5.94) и (5.94а) с соответствующими выражениями (5.86) и (5.86а). Из формул (5.90), (5.91), (5.93) и (5.94) можно заключить, что при малой относительной интенсивности турбулентности диффузия происходит, по существу, только в поперечном направлении, тогда как при не очень малой относительной интенсивности турбулентности может стать существенной диффузия в направлении вверх по потоку. Однако в этом случае мы быстро приходим к противоречию с условием, накладываемым предположением о малом времени диффузии. Тем не менее, чтобы продемонстрировать заведомо преувеличенное влияние диффузии вверх по потоку, приведем рис. 5.2, заимствованный из работы Флайшмана и Френкиля [36]. На этом рисунке изображены кривые постоянной концентрации,

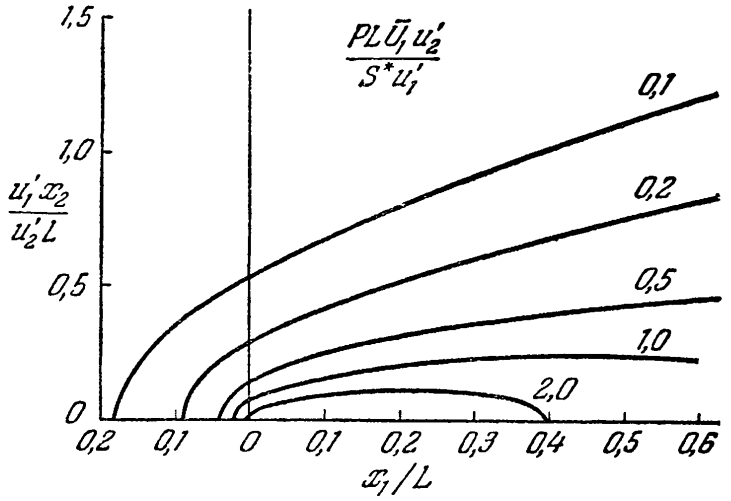



Рис. 5.2. Кривые постоянной концентрации по формуле (5.93) для малых расстояний при $u_2'/\bar{U}_1 = 0{,}5$ [36].

вычисленные по формуле (5.93) для малых расстояний при относительной интенсивности $u_2'/\bar{U}_1 = 0{,}5$. При этом введены безразмерные координаты $x_1/L$ и $u_1'x_2/u_2'L$, где $L$ — характерная длина, а также безразмерный параметр $PL\bar{U}_1u_2'/S^*u_1'$.

Весь предшествовавший анализ был посвящен исследованию диффузии меченых жидких частиц, определяемой только турбулентным движением, без учета влияния молекулярной диффузии. Поэтому решения, полученные для распределения концентрации $P(x_1, x_2, x_3)$, применимы только в том случае, когда в жидкость оказывается возможным ввести такое «трассирующее» вещество, которое не было бы подвержено молекулярной диффузии, например инородные частицы, имеющие одинаковую с жидкостью плотность. Они должны быть достаточно невелики, чтобы не оказывать влияния на турбулентное движение жидкости, но не слишком малы, ибо тогда пришлось бы иметь дело с броуновским движением. Представим себе, что имеется возможность экспериментировать с подобными инородными частицами. В таком случае значения $\overline{y_i^2}$, в принципе, можно было бы отыскать по распределению частиц, непрерывно вводимых в жидкость из неподвижного источника, и найти, следовательно, интенсивность турбулентности, лагранжев интегральный масштаб, коэффициент вихревой диффузии и даже лагранжеву корреляцию.

Рассмотрим, например, случай диффузии от линейного источника при однородной изотропной турбулентности с малой относительной интенсивностью. Тогда по распределению концентрации $P(x_1, x_2)$ вниз по потоку от источника можно определить среднеквадратичное значение $\overline{y_2^2}$ для поперечной турбулентной диффузии согласно соотношению

$$\overline{y_2^2}(x_1) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 P(x_1, x_2)\, dx_2}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x_1, x_2)\, dx_2}, \tag{5.95}$$

т. е. взяв нулевой и второй моменты распределения концентрации в некотором поперечном сечении на расстоянии $x_1$ от источника.

Подставляя решения (5.93б) и (5.94а) в (5.95) и выполняя интегрирование, соответственно получаем

$\overline{y_2^2} = \dfrac{\overline{u_2^2}x_1^2}{\bar{U}_1^2} = \overline{u_2^2}(t - t_0)^2$ для малого интервала времени диффузии

и

$\overline{y_2^2} = \dfrac{2\epsilon x_1}{\bar{U}_1} = 2\epsilon(t - t_0)$ для большого интервала времени диффузии,

как это и должно быть. Таким образом, интенсивность турбулентности и коэффициент вихревой диффузии можно определить непосредственно по значениям $\overline{y_2^2}$ на малом и на большом расстояниях от источника.

Зная значения $\overline{y_2^2}$ на промежуточных расстояниях от источника, определенные по формуле (5.95), и располагая соотношением типа (1.77), можно получить лагранжев коэффициент корреляции $R_L$:

$$\overline{y_2^2}(x_1) = 2\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}_1^2}\int_0^{x_1}(x_1-\xi_1)R_L\left(\frac{\xi_1}{\overline{U}_1}\right)d\xi_1. \tag{1.77a}$$

Дифференцирование этого выражения по $x_1$ дает

$$\frac{d}{dx_1}\overline{y_2^2}(x_1) = 2\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}_1^2}\int_0^{x_1}R_L\left(\frac{\xi_1}{\overline{U}_1}\right)d\xi_1, \tag{5.96}$$

откуда

$$\lim_{x_1\to\infty}\frac{d}{dx_1}\overline{y_2^2}(x_1) = 2\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}_1}\mathcal{J}_L = 2\frac{u_2'}{\overline{U}_1}\Lambda_L = \frac{2\epsilon}{\overline{U}_1}. \tag{5.96a}$$

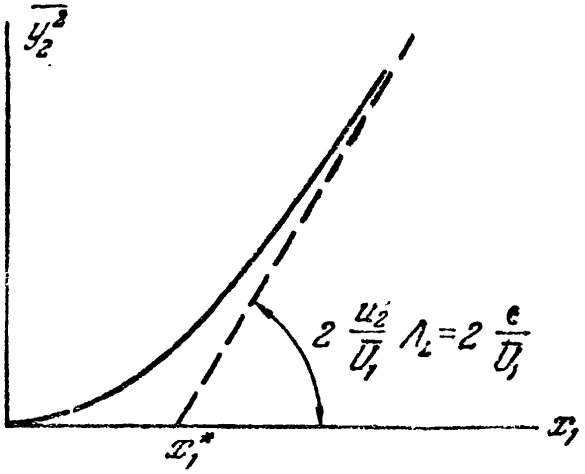



Рис. 5.3. Зависимость среднеквадратичной величины $\overline{y_2^2}$ для поперечной диффузии частиц при изотропной турбулентности от расстояния $x_1$ до неподвижного точечного источника.

Дважды дифференцируя выражение (1.77a), получаем

$$\frac{d^2}{dx_1^2}\overline{y_2^2}(x_1) = 2\frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}_1^2}R_L\left(\frac{x_1}{\overline{U}_1}\right). \tag{5.97}$$

Если графически изобразить зависимость величины $\overline{y_2^2}$ от $x_1$, то получим кривую, форма которой показана на рис. 5.3; здесь величина $\overline{y_2^2}$ возрастает вначале пропорционально $x_1^2$, а затем — пропорционально $x_1$, причем угловой коэффициент асимптоты к этой кривой равен $2u_2'\Lambda_L/\overline{U}_1$. Точка пересечения $x_1^*$ асимптоты к этой кривой с осью $x_1$, согласно соотношению (1.77a), определяется формулой

$$x_1^* = \frac{u_2'}{\overline{U}_1\Lambda_L}\int_0^{\infty}\xi_1 R_L\left(\frac{\xi_1}{\overline{U}_1}\right)d\xi_1. \tag{5.98}$$

Уравнение этой асимптоты имеет вид

$$\overline{y_2^2} = 2\frac{u_2'}{\overline{U}_1}\Lambda_L(x_1-x_1^*) = 2\frac{\epsilon}{\overline{U}_1}(x_1-x_1^*). \tag{5.99}$$

Различными экспериментаторами делались попытки определить характеристики однородной и почти изотропной турбулентности, следуя только что описанному методу. Большинство из них использовали в качестве трассирующего вещества либо краску, растворенную в жидкости, либо ее нагревание. Так как на диффузию краски или тепла наверняка влияет молекулярная диффузия, то эти измерения

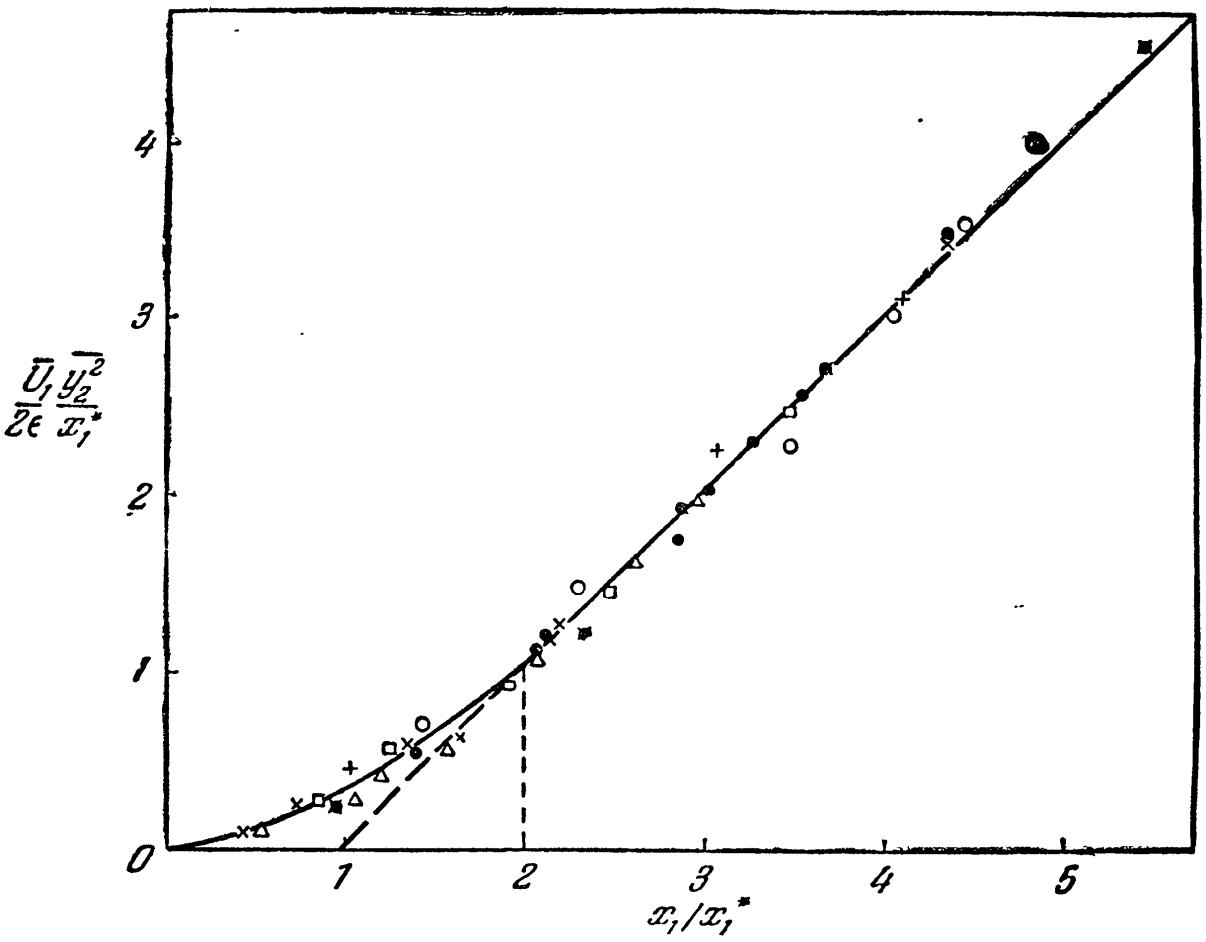



Рис. 5.4. Поперечная диффузия капель смеси бензол — четыреххлористый углерод в турбулентном потоке воды вниз по течению от точки впрыска [38].

параметров диффузии нельзя использовать для определения характеристик турбулентности, особенно лагранжевой корреляции. Кампе де Ферье [37] описывает опыты по диффузии, проведенные Дюпюи в аэродинамической трубе, в которых использовались мыльные пузырьки с диаметром около 3 *мм*, вводившиеся в некоторой точке в воздушный поток в аэродинамической трубе. Было обнаружено, что концентрация пузырьков, проходящих через плоскость, перпендикулярную к осредненному потоку, подчиняется распределению Гаусса.

Калинске и Пян [38] провели опыты по диффузии в воде, протекающей по лотку. На некотором расстоянии от дна и боковых стенок турбулентное течение было почти изотропным. Вводя в поток смесь четыреххлористого углерода с бензолом, имеющую одинаковую

с водой плотность и образовывавшую в воде мелкие капли, эти исследователи определяли затем значения $\overline{y_2^2}$ по фотографическим снимкам. Распределение концентрации капель, проходящих через плоскость, перпендикулярную к потоку, на расстоянии $x_1$ от точки подвода смеси было очень близко к распределению Гаусса:

$$P(x_1, x_2) = P(x_1, 0) \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\overline{y_2^2}}\right).$$

Если считать, что капли достаточно малы по сравнению с наименьшим масштабом турбулентности, то в этом случае их диффузию можно рассматривать как такую диффузию жидких частиц, которая обусловлена только турбулентностью, ибо молекулярные эффекты не оказывают влияния на диффузию капель.

Вычисляя значения $\overline{y_2^2}$ по распределению смеси в поперечных сечениях потока на различных расстояниях от источника, можно определить зависимость $\overline{y_2^2}$ от $x_1$. По кривой, изображающей эту зависимость, при малых значениях $x_1$ определяется интенсивность турбулентности $\overline{u_2^2}/\overline{U_1^2} = \overline{y_2^2}/x_1^2$, а при больших значениях $x_1$ — величина $\epsilon = \overline{y_2^2}\overline{U}_1/2x_1$. Применяя далее соотношение (5.97), определяют лагранжеву корреляцию $R_L(x_1/\overline{U}_1)$. На рис. 5.4 показана кривая зависимости величины $\overline{y_2^2}\overline{U}_1/2\epsilon$ от $x_1/x_1^*$.

Оказалось, что приближенная форма зависимости коэффициента лагранжевой корреляции неплохо аппроксимируется экспоненциальной функцией

$$R_L = \exp\left(-\frac{x_1}{a}\right),$$

где

$$a = \int_0^\infty R_L(x_1)\,dx_1 = \overline{U}_1 \mathcal{J}_L = \frac{\overline{U}_1}{u_2'} \Lambda_L = \frac{\overline{U}_1}{\overline{u_2^2}} \epsilon.$$

Заменяя $R_L$ в (5.98) этой экспоненциальной функцией, получаем

$$x_1^* = \frac{u_2'}{\overline{U}_1 \Lambda_L} a^2 = a.$$

Следовательно, если лагранжева корреляция описывается экспоненциальной функцией, то

$$R_L = \exp\left(-\frac{x_1}{x_1^*}\right),$$

откуда

$$\overline{y_2^2} = \frac{2\epsilon x_1^*}{\overline{U}_1}\left\{\frac{x_1}{x_1^*} - \left[1 - \exp\left(-\frac{x_1}{x_1^*}\right)\right]\right\}.$$

Но поскольку $\exp(-2) = 0{,}135$, то при таком представлении лагранжевой корреляции величина $\overline{y_2^2}$ при $x_1 > 2x_1^*$ примерно соответствует значению, определяемому асимптотической формулой (5.99). Анализ рис. 5.4 показывает, что, учитывая обычный разброс экспериментальных точек, эту аппроксимацию можно считать вполне оправданной.

Рассмотрим теперь влияние молекулярной диффузии на распространение, скажем, тепла вниз по потоку от линейного источника, помещенного в однородном турбулентном потоке, имеющем равномерную осредненную скорость $\overline{U}_1$.

Согласно исследованиям Таунсенда [39], а также Бэтчелора и Таунсенда [25], можно различить три стадии развития теплового следа вниз по потоку от источника тепла. На протяжении первых двух стадий след состоит из непрерывного связного слоя, который с увеличением расстояния от источника тепла становится все более и более искривленным. На первой стадии жидкие частицы, проходящие мимо теплового источника и отбирающие от него тепло, образуют тонкую пелену, толщина которой может считаться малой по сравнению с микромасштабом турбулентности. Эта пелена под действием крупномасштабных движений раскачивается вверх и вниз и в то же время, благодаря мелкомасштабным движениям за счет молекулярной диффузии, все больше деформируется. Толщина этой пелены увеличивается. Среднеквадратичное значение ширины следа возрастает по времени пропорционально $2\mathfrak{k}_\theta (t - t_0)$, где $t_0$ обозначает тот момент времени, когда жидкие частицы минуют источник тепла. Полное распространение тепла определяется молекулярной диффузией и воздействием турбулентности, крупномасштабные движения которой вызывают поперечные перемещения нагретой пелены. Среднеквадратичное значение $\overline{(y_2)_\theta^2}$ для распределения температуры определяется формулой

$$\overline{(y_2)_\theta^2} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 \overline{\Theta}(t, x_2)\, dx_2}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Theta}(t, x_2)\, dx_2} = \overline{y_2^2} + 2\mathfrak{k}_\theta (t - t_0),$$

так как на этой стадии диффузия благодаря молекулярным эффектам и распространение под действием турбулентности статистически не зависят друг от друга и поэтому обе эти составляющие в общей дисперсии аддитивны. Это, однако, справедливо лишь постольку, поскольку деформации пелены, вызываемые мелкомасштабными движениями, не оказывают влияния на ускорение молекулярной диффузии благодаря процессу растяжения жидких элементов. Это условие удовлетворяется лишь в том случае, когда время диффузии $t - t_0$

мало по сравнению с временным масштабом наименьших вихрей, который при больших числах Рейнольдса турбулентности определяется величиной $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$.

Можно принять еще также условие, что распространение под действием молекулярной диффузии должно быть мало по сравнению с размерами наименьших вихрей, т. е. по сравнению с величиной $\nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$. Отсюда

$$\mathfrak{k}_\theta (t - t_0) \ll \nu^{3/2}\varepsilon^{-1/2},$$

или

$$(t - t_0)\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{1/2} \ll \frac{\nu}{\mathfrak{k}_\theta} = \mathrm{Pr}.$$

На второй стадии важное значение приобретает искривление нагретой пелены наиболее мелкими вихрями. Влияние турбулентности приводит не только к смещению жидких частиц, но также и к растяжению и вращению жидких элементов. На молекулярную диффузию оказывают влияние только два последних процесса: они способствуют ее ускорению.

Бэтчелор и Таунсенд произвели оценку этого ускорения путем анализа молекулярной диффузии от произвольного элемента нагретой пелены, когда она одновременно растягивается и вращается, в предположении о том, что скорости растяжения и вращения остаются равномерными в течение интервала времени $t - t_0$, будучи также равномерными в поперечном сечении пелены. Эти скорости определяются завихренностью турбулентности $\omega_k = \varepsilon_{ijk}\, \partial u_j/\partial x_i$. Предположив, далее, наличие локальной изотропности, Бэтчелор и Таунсенд пришли к следующему выражению для полного распространения:

$$\overline{(y_2)_\theta^2} = \overline{y_2^2} + 2\mathfrak{k}_\theta (t - t_0) + \frac{28}{45}\mathfrak{k}_\theta \overline{\omega_k \omega_k}\,(t - t_0)^3,$$

или, поскольку при изотропной турбулентности $\overline{\omega_k \omega_k} = \varepsilon/\nu$,

$$\overline{(y_2)_\theta^2} = \overline{y_2^2} + 2\mathfrak{k}_\theta (t - t_0) + \frac{28}{45}\mathfrak{k}_\theta \frac{\varepsilon}{\nu}(t - t_0)^3.$$

Это выражение можно представить также в следующем виде:

$$\frac{\overline{(y_2)_\theta^2}}{M^2} = \frac{\overline{y_2^2}}{M^2} + \frac{2}{\mathrm{Pr}}\frac{\nu}{M\bar{U}_1}\frac{\bar{U}_1 (t - t_0)}{M} + \frac{28}{45}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\varepsilon M}{\bar{U}_1^3}\frac{\bar{U}_1^3 (t - t_0)^3}{M^3}, \qquad (5.100)$$

где $M$ — масштаб длины, например размер ячейки турбулизирующей решетки.

Второй член в правой части этого уравнения, непосредственно характеризующий роль молекулярной диффузии, показывает, что при заданном расстоянии вниз по потоку от источника

$$x_1 - x_{1,0} = \bar{U}_1 (t - t_0)$$

роль молекулярной диффузии с увеличением $\mathrm{Re}_M = \bar{U}_1 M/\nu$ ослабевает. Этого и следовало ожидать, поскольку в данном случае с увеличением $\mathrm{Re}_M$ возрастает скорость $\bar{U}_1$, так что время диффузии $t - t_0$ уменьшается.

Третий член в правой части, который характеризует роль ускоренной молекулярной диффузии, по-видимому, не зависит от $\mathrm{Re}_M$. Этот факт представляется довольно странным, но при этом надо иметь в виду, что толщина пелены, измеренная в направлении оси $x_2$, т. е. перпендикулярно к исходной плоскости пелены, при увеличении $\mathrm{Re}_M$ остается неизменной благодаря совокупности эффектов растяжения и вращения элементов пелены. Этот результат, касающийся взаимодействия между турбулентной диффузией и молекулярной диффузией, по-видимому, подтверждается опытами, проведенными Таунсендом [39].

Те же опыты Таунсенда показали, что на третьей стадии уже нельзя более говорить о непрерывной связной пелене нагретой жидкости. Искривление становится уже настолько сильным, что дисперсия образуется большим числом практически дискретных жидких элементов, группирующихся в большей или меньшей степени около исходной плоскости невозмущенной пелены (плоскости симметрии). Эта стадия наступает при $(t - t_0)/t_0 \gg 1$. Опыты Таунсенда и аналогичные опыты Юбероя и Корсина [28] показали, что при этом величина $\overline{(y_2)_\theta^2}$ линейно возрастает с увеличением $t - t_0$. А это должно было бы иметь место в том случае, когда распространение тепла обусловливается процессом диффузии при постоянном коэффициенте диффузии. В этом случае должно было бы выполняться также условие $t - t_0 \gg (\mathcal{J}_L)_\theta$, где $(\mathcal{J}_L)_\theta$ — лагранжев интегральный масштаб времени для распространения тепла.

Искривление отдельных нагретых жидких элементов под действием турбулентных движений будет продолжаться, и поэтому они будут испытывать влияние процесса ускоренной молекулярной диффузии. Непрерывные потери тепла в окружающую среду при перемещении жидких элементов проявляются в уменьшении эффективного коэффициента диффузии тепла относительно коэффициента диффузии жидких частиц. Для сравнения следует обратиться к выражению (5.39) для коэффициента диффузии.

Рассматривая явление, три стадии которого были только что описаны, можно прийти к выводу, что влияние молекулярной диффузии на полное распространение тепла на протяжении первых двух стадий отличается от этого влияния на третьей стадии. В то время как в ходе первых двух стадий, когда нагретые жидкие элементы все еще образуют связный (хотя и искривленный) слой, молекулярная диффузия усиливает распространение тепла, на третьей и последней

стадии, когда образуются дискретные элементы нагретой жидкости, молекулярная диффузия ослабляет распространение тепла.

Следовательно, сравнивая на одном и том же графике распространение тепла $\overline{(y_2)_0^2}$ с распространением жидких частиц $\overline{y_2^2}$, мы должны были бы получить результат, изображенный на рис. 5.5.

Выше было показано, что если коэффициент лагранжевой корреляции для диффузии жидких частиц можно представить в виде экспоненциальной функции, то расстояние, на котором величина $\overline{y_2^2}$ почти одинакова с расстоянием, определяемым асимптотой к кривой $(\overline{y_2^2}, x_1)$, приблизительно равно $2x_1^*$. Для кривой $[\overline{(y_2)_0^2}, x_1]$ этот вывод уже не является справедливым. Соответствующее расстояние оказывается значительно больше, чем $2(x_1^*)_0$, так как эта кривая становится более пологой.

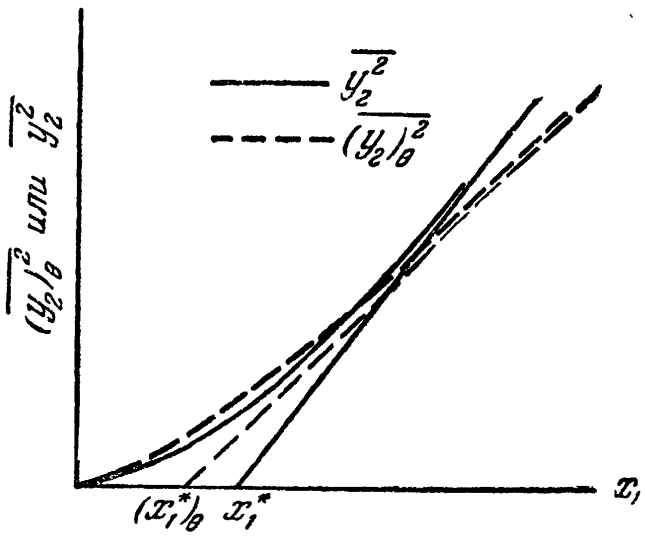



Рис. 5.5. Сравнение поперечной диффузии тепла с диффузией жидких частиц вниз по потоку от теплового источника.

Описанное влияние молекулярной диффузии еще раз ясно показывает, что из опытов по диффузии, в которых диффундирующая субстанция подвержена воздействию молекулярно-диффузионных эффектов, невозможно получить надежные данные о коэффициенте лагранжевой корреляции $R_L$ и коэффициенте диффузии $\epsilon$ жидких частиц. Поскольку, как следует из соотношения (5.100), эти молекулярные эффекты пропорциональны $\mathrm{Pr}^{-1}$, то при больших значениях Pr указанная ошибка становится меньше.

Правда, из этих опытов по диффузии оказывается все же возможным определить величину $\epsilon_\gamma$.

Имеется также возможность определить по результатам этих опытов величину $\overline{y_2^2}$ и, следовательно, $\overline{v_2^2}$, правда, при условии, что рассматривается только малое время диффузии; а стало быть, (1) $t - t_0 \ll \mathcal{T}_L$ и существует идеальная корреляция ($R_L \approx 1$) и (2) процесс диффузии находится еще в первой стадии. Хотя на этой первой стадии и можно внести в расчет поправку на влияние молекулярной диффузии, все же для того, чтобы необходимая поправка была минимальной, следует рекомендовать большие значения Pr.

На рис. 5.6 изображены результаты опытов Таунсенда [39] по диффузии тепла вниз по течению от линейного источника, помещенного в поток с однородной турбулентностью, которая создавалась

в аэродинамической трубе с помощью решетки с квадратными ячейками ($M = 1{,}27$ *см*, $\overline{U}_1 = 640$ *см/сек*). Сравнение диффузионной кривой на этом рисунке с кривой, изображенной на рис. 5.4, наглядно показывает различие, о котором уже говорилось; это иллюстрируется также и кривыми на рис. 5.5.

Большинство опытов по диффузии при однородной турбулентности проводилось в поле приблизительно изотропного турбулентного потока за решеткой. Теперь мы знаем, что это поле турбулентного течения с увеличением расстояния от решетки вырождается. Это вырождение — относительно медленный процесс по сравнению

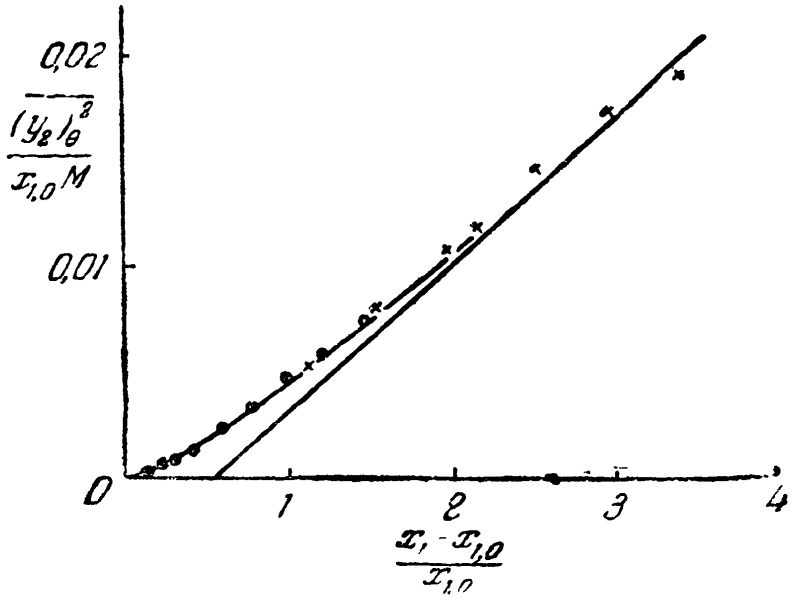



Рис. 5.6. Поперечная диффузия тепла вниз по потоку от линейного источника при однородной турбулентности [39].

с временным масштабом турбулентных пульсаций; следовательно, предположение об однородности поля, по-видимому, удовлетворяется в зонах, протяженность которых не превосходит, по крайней мере, в несколько раз интегрального масштаба турбулентности. Свойства различных величин, например корреляций скорости, основанные на предположении о пространственной однородности, тем не менее сохраняются.

Все же при проведении опытов по диффузии при вырождающейся изотропной турбулентности, особенно в случае большого времени диффузии, полностью пренебречь влиянием процесса вырождения нельзя, так как масштабы времени и длины изменяются с расстоянием от решетки, а следовательно, изменяются также и в течение процесса диффузии вниз по потоку от неподвижного источника.

Пусть этот источник расположен на расстоянии $x_0$ от решетки. Если время отсчитывать от того момента, когда жидкость проходит через решетку, то жидкость достигнет неподвижного источника

в момент времени $t_0 = x_0/\overline{U}_1$. Поперечная диффузия жидких частиц, проходящих мимо источника, определится тогда выражением

$$\overline{y_2^2}(t) = 2\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} \overline{v_2(t')\, v_2(t'')}\, dt'' = 2\int_{t_0}^{t} dt' \int_{0}^{t'-t_0} \overline{v_2(t')\, v_2(t'-\tau)}\, d\tau.$$

Если ввести коэффициент лагранжевой корреляции

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_2(t)\, v_2(t-\tau)}}{v_2'(t)\, v_2'(t-\tau)},$$

то следует иметь в виду, что теперь, вследствие процесса вырождения, $v_2'(t) \neq v_2'(t-\tau)$.

Таким образом,

$$\overline{y_2^2}(t) = 2\int_{t_0}^{t} v_2'(t')\, dt' \int_{0}^{t'-t_0} v_2'(t'-\tau)\, R_L(\tau)\, d\tau,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{y_2^2}(t) = v_2'(t)\int_{0}^{t-t_0} v_2'(t-\tau)\, R_L(\tau)\, d\tau.$$

Это соотношение можно выразить через расстояние $x_1$, которое, будучи отнесенным к размеру ячейки решетки $M$, превращается в безразмерную величину:

$$\frac{1}{2}\frac{d\overline{y_2^2}}{M\,dx_1} = \frac{1}{\overline{U}_1^2 M}\, v_2'\left(\frac{x_1 - x_0}{M}\right) \int_{0}^{(x_1-x_0)/M} v_2'\left(\frac{x_1-\xi_1}{M}\right) R_L\left(\frac{\xi_1}{M}\right) d\xi_1. \quad (5.101)$$

Экспериментальные данные показывают, что, в пределах точности измерений, величина $v_2'/\overline{U}_1$ почти не зависит от $\overline{U}_1$ и является функцией только $x_1/M$. Ширина теплового следа вниз по потоку от источника тепла также является функцией только расстояния от источника тепла и не зависит от $\overline{U}_1$. Этот результат привел Тэйлора [40] к предположению о том, что процесс диффузии зависит только от переменной $\eta$, которая определяется следующим выражением:

$$d\eta = \frac{v_2'}{\overline{U}_1 M}\, dx_1.$$

Тогда получаем

$$\frac{1}{2M^2}\frac{d\overline{y_2^2}}{d\eta} = \int_{0}^{\eta} R_L(\eta')\, d\eta'$$

и

$$\frac{1}{2M^2}\frac{d^2\overline{y_2^2}}{d\eta^2} = R_L(\eta).$$

Можно воспользоваться и другим экспериментальным фактом, а именно тем, что на начальной стадии процесса вырождения масштаб длины турбулентности возрастает почти пропорционально $t^{1/2}$, а масштаб скорости убывает приблизительно пропорционально $t^{-1/2}$. Следовательно, масштаб времени увеличивается пропорционально $t$. В соответствии с этим Бэтчелор и Таунсенд [25] полагают, что диффузия от неподвижного источника при вырождающейся турбулентности, созданной с помощью решетки, должна быть стационарной случайной функцией новой переменной $t^*$, для которой

$$dt^* = \frac{dt}{t}, \quad \text{или} \quad t^* = \ln \frac{t}{t_1},$$

где величина $t_1$ произвольна.

Выраженные через эту новую переменную уравнения диффузии жидких частиц принимают вид

$$\frac{\overline{y_2^2}}{M^2} = 2 \frac{v_2'^2 (t_0) t_0 t_1}{M^2} \int_{\ln (t_0/t_1)}^{\ln (t/t_1)} \exp(t'^*)\, dt'^* \int_0^{t'^* + \ln (t_0/t_1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^*\right) R_L(\tau^*)\, d\tau^* \tag{5.102}$$

и

$$\frac{1}{2M^2} \frac{d\overline{y_2^2}}{d(t/t_0)} = \frac{v_2'^2 (t_0) t_0^2}{M^2} \int_0^{\ln (t/t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^*\right) R_L(\tau^*)\, d\tau^*.$$

Поскольку величина $v_2'^2(t_0) t_0$ для данной решетки постоянна, правые части этих уравнений, по-видимому, становятся функциями соответственно только $t/t_0$ и $t_0 f(t/t_0)$. Эти уравнения показывают, далее, что при продолжительном времени диффузии распространение $\overline{y_2^2}$, несмотря на вырождение турбулентности, линейно возрастает по времени.

Если проанализировать уравнение (5.100) для диффузии тепла на второй стадии диффузии совместно с выписанными выше выражениями для $\overline{y_2^2}$, то можно прийти к выводу, что распространение тепла тоже определяется функцией вида $t_0 f/(t/t_0)$. Опыты Таунсенда по распространению тепла показали, что это, по-видимому, справедливо также и для всех значений $(t - t_0)/t_0$, как это оказалось и в случае распространения $\overline{y_2^2}$ жидких частиц (см. рис. 5.6).

В 1939 году Таул и Шервуд [41] опубликовали результаты опытов, проведенных на круглой трубе с диаметром 30 *см*. Они вводили углекислый газ и водород через тонкую трубку, расположенную на оси трубы, и измеряли концентрацию в поперечных сечениях потока на больших расстояниях от источника путем непрерывного отбора пробы с помощью гребенки из тонких трубок. Таул и Шер-

вуд исследовали влияние турбулентности, созданной решеткой ($M = 1{,}27$ *см*, $M/d = 6$), установленной на различных расстояниях вверх по потоку от источника. Расстояния между источником и поперечными сечениями, в которых проводилось измерение концентрации, были достаточно велики, чтобы оправдывалось предположение о постоянстве коэффициента вихревой диффузии. Коэффициент вихревой диффузии определялся по распределениям концентрации, которые были близки к гауссовой кривой ошибок, методом, описанным в § 2.10 и основанным на использовании уравнения (5.85а). Никаких поправок, учитывающих влияние молекулярной диффузии или вырождение турбулентности, созданной решетками, не вносилось. В связи с этим необходимо упомянуть о следующем факте: многие измерения производились на столь больших расстояниях между источником и решеткой (более чем $600M$), что турбулентность за решеткой, вероятно, находилась уже на конечной стадии вырождения. Однако эти результаты интересны в том отношении, что они ясно указали на заметное увеличение коэффициента вихревой диффузии, когда расстояние между источником и решеткой было в 25 раз больше диаметра трубы; при этом достигалось постоянное значение, близкое к тому, которое было получено при отсутствии решетки на расстояниях, превышающих 50 диаметров трубы. Очевидно, масштаб турбулентности невозмущенного потока в трубе при отсутствии решетки был намного больше, нежели масштаб турбулентности, созданной с помощью решетки, благодаря чему коэффициент вихревой диффузии при наличии решетки в потоке оказался значительно меньше.

Аналогичные результаты были получены Маккартером, Штуцманом и Кохом [42] в опытах, проводившихся на вертикально расположенной трубе с диаметром 20 *см*. Через стеклянную трубку с внутренним диаметром 1,9 *см*, помещенную на оси трубы на расстоянии 125 *см* от входа в нее, в поток вводился нагретый воздух. Измерение температуры осуществлялось с помощью медноконстантановых термопар, изготовленных из весьма тонких проволочек. Недалеко вверх по потоку от места подвода нагретого воздуха устанавливались решетки с 8 и 40 ячейками на 1 *дюйм*. Влиянием молекулярной диффузии и вырождения турбулентности пренебрегалось. Предполагалось, что коэффициент вихревой диффузии $\epsilon_\theta$ постоянен, а его значение определялось по экспериментальным профилям температуры, которые по форме очень близки к соответствующим гауссовым кривым ошибок.

Как и в опытах Таула и Шервуда, коэффициенты вихревой диффузии при наличии решетки в потоке были значительно меньше, чем при ее отсутствии, причем эта разница была больше для решетки с 40 ячейками на 1 *дюйм*, в случае которой величина $\epsilon_\theta$ составляла приблизительно половину от своего значения, найденного для

невозмущенного потока в трубе. Далее, был сделан вывод о том, что значения $\epsilon_\eta$ для невозмущенного потока в трубе приблизительно равны значениям, которые получаются по эмпирической формуле, предложенной Шервудом и Вёрцем [43]:

$$\epsilon_\eta = 0{,}02\overline{U}_{\text{ср}} D \sqrt{\lambda},$$

где $\overline{U}_{\text{ср}}$ — средняя скорость потока в трубе, $D$ — диаметр трубы, а $\lambda$ — коэффициент трения о стенку, определяемый из соотношения для градиента давления:

$$-\frac{d\overline{P}}{dx} = \frac{\lambda}{D}\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2_{\text{ср}}.$$

По результатам этих опытов, а также по данным экспериментального исследования, проведенного Таулом и Шервудом, можно заключить, что введение решетки с целью повышения суммарной скорости перемешивания не всегда может служить этой цели. Такая решетка не должна иметь слишком мелкие ячейки, потому что уменьшение коэффициента вихревой диффузии, вследствие сокращения масштаба турбулентности, зачастую перекрывает по величине возросшую интенсивность турбулентности.

## § 5.6. Диффузия от неподвижного источника в турбулентном потоке со сдвигом

В предыдущем параграфе предполагалось, что рассматриваемый турбулентный поток обладает равномерной осредненной скоростью, а турбулентность является однородной. В этом случае кривые распределения концентрации оказываются симметричными относительно некоторой оси (при точечном источнике) или относительно некоторой плоскости (при линейном источнике). Но если осредненная скорость не равномерна, а зависит от пространственных координат, то можно, по-видимому, полагать, что симметрии у кривых распределения концентрации наблюдаться уже не будет. В общем случае форма этих кривых распределения будет определяться характеристиками турбулентности и распределением осредненной скорости в пространстве. Если, однако, рассматривать только малое время диффузии, иными словами, диффузию на небольших расстояниях от источника, то форма кривой распределения концентрации может определяться в основном локальным распределением осредненной скорости и локальной турбулентностью в непосредственной близости от источника.

Самым простым случаем турбулентного потока со сдвигом является тот, в котором поток со сдвигом — стационарный и однородный, а именно параллельный поток с постоянным градиентом

осредненной скорости в направлении, перпендикулярном к этой скорости:

$$\overline{U}_1 = \text{const}\, x_2, \quad \overline{U}_2 = \overline{U}_3 = 0.$$

Представим себе, что некоторый линейный источник помещен перпендикулярно к осредненной скорости и к направлению ее градиента. Тогда распределение диффундирующего вещества вниз по потоку от источника будет асимметричным. Подобная асимметрия действительно наблюдалась в опытах Скрэмстеда [44] с турбулентным пограничным слоем, Корсина и Юбероя [45] — с турбулентной зоной смешения круглой свободной струи, а также Хинце и Ван дер Хегге Цийнена [46] — с турбулентной зоной смешения плоской свободной струи. В качестве линейного источника тепла все эти экспериментаторы использовали тонкую нагретую проволочку. Характер указанной асимметрии был таков, что большее распространение в поперечном направлении наблюдалось на стороне более высокой осредненной скорости.

Если бы это распространение можно было описать с помощью некоторого постоянного коэффициента вихревой диффузии, то влияние градиента осредненной скорости привело бы к асимметрии в совершенно противоположном направлении по сравнению с тем, которое действительно наблюдалось в опытах. Этот эффект можно объяснить следующим образом. В общем случае поперечное распространение на данном расстоянии от источника определяется тем временем, которое необходимо потоку, чтобы покрыть это расстояние. Но это время короче для той стороны, где скорость потока больше, и наоборот. Следовательно, поперечное распространение будет более узким со стороны большей осредненной скорости и более широким со стороны меньшей осредненной скорости.

Математически эта задача была решена Ловерье [47]. В качестве исходного соотношения он использовал уравнение диффузии под действием конвекции

$$\overline{U}_{1,0}(1 + ax_2)\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_2} = \epsilon_\gamma \frac{\partial^2 \overline{\Gamma}}{\partial x_2^2}$$

и принял, что $\overline{\Gamma} = 0$ в плоскости $x_2 = -1/a$. Решение Ловерье имеет вид

$$\overline{\Gamma} = \frac{S_0}{3ax_1}(1 + ax_2)^{1/2} I_{1/3}\left[\frac{2}{9}\overline{U}_{1,0}\frac{(1+ax_2)^{3/2}}{a^2\epsilon_\gamma x_1}\right] \times \exp\left[-\frac{1}{9}\overline{U}_{1,0}\frac{1+(1+ax_2)^3}{a^2\epsilon_\gamma x_1}\right], \quad (5.103)$$

где $S_0$ — интенсивность источника, а $I_{1/3}$ — бесселева функция порядка $1/3$. Распределение $\overline{\Gamma}$, определяемое формулой (5.103), обладает именно такой асимметрией, которая описана выше.

В практических случаях, когда, например, измеряется распределение температуры за нагретой проволочкой, размер этой проволочки должен быть пренебрежимо мал по сравнению с размерами области турбулентного течения; тогда диффузия в поперечном направлении будет ограничена расстояниями, на которых изменение осредненной скорости $\overline{U}_1$ происходит лишь на весьма малую величину. Следовательно, асимметрия распределения температуры будет очень мала.

Предположение о постоянном коэффициенте вихревой диффузии встречает формальное возражение в связи с невозможностью увязать интегральный масштаб с однородной турбулентностью в потоке с поперечным сдвигом, как это было объяснено в главе 4. Следовательно, не представляется также возможным увязать с этой турбулентностью понятие о постоянном коэффициенте вихревой диффузии, который тогда можно было бы выразить через интегральный масштаб и интенсивность турбулентности.

Но помимо этого формального возражения имеются еще и другие, более сильные аргументы, которые лишают решение (5.103) какой-либо практической ценности для анализа процессов диффузии в турбулентных потоках.

Во-первых, если не все, то по крайней мере большинство турбулентных потоков лишь приближенно обладает постоянным градиентом распределения осредненной скорости и то лишь в зонах, которые заведомо невелики по сравнению с интегральным масштабом турбулентности. Значит, нельзя представить такого реального случая, в котором большие, сравнительно с лагранжевым интегральным масштабом, интервалы времени диффузии могли бы рассматриваться без учета присущего этому случаю изменения градиента осредненной скорости.

Во-вторых, относительная интенсивность турбулентности в потоке с поперечным сдвигом обычно не является малой. Например, турбулентное распространение тепла от тонкой проволочки в пределах интегрального масштаба турбулентности уже настолько велико, что увеличение температуры вне этого масштаба составляет лишь очень небольшую часть от начальной избыточной температуры, имеющей место в непосредственной окрестности нагретой проволочки, которую вряд ли можно измерить с приемлемой точностью. Следовательно, измерения должны ограничиваться областью интегрального масштаба. Это условие выполнялось в опытах Скрэмстеда, Корсина и Юбероя, а также Хинце и Ван дер Хегге Цийнена, которые получили линейное увеличение распространения с расстоянием.

Картина развития процесса диффузии в непосредственной близости от источника, в пределах интегрального масштаба турбулентности, отличается от соответствующей картины, наблюдаемой на большем расстоянии. Хинце [48] показал, что представление об этой

картине можно получить, если рассмотреть столь короткие расстояния, при которых в последовательные моменты времени наблюдается идеальная корреляция между скоростями жидких частиц, проходящих мимо источника. Следовательно, предположим, что в течение рассматриваемого времени диффузии $t$ коэффициент лагранжевой корреляции $R_L(t) \approx 1$. Тогда, согласно соотношению (1.78), имеем

$$\overline{y_2^2}(t) = v_2'^2 t^2.$$

Такой же результат получается и в том случае, когда для перемещения жидкой частицы принимают

$$y_2(t) = \int_0^t v_2(\tau)\, d\tau \approx v_2(0)\, t = u_2(0)\, t,$$

пренебрегая, таким образом, в разложении функции $v_2(t)$ членами более высоких порядков:

$$v_2(t) = v_2(0) + \left[\frac{dv_2}{dt}\right]_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2v_2}{dt^2}\right]_{t=0} t^2 + \ldots$$

С той же степенью приближения можно для перемещения жидкой частицы в осевом направлении принять зависимость

$$y_1(t) \approx [\overline{U}_1 + u_1(0)]\, t.$$

Здесь $\overline{U}_1$ — осредненная скорость в точке, где расположен источник.

Обратимся теперь к распределению меченых жидких частиц, миновавших источник, в плоскости, расположенной на расстоянии $x_1$ от этого источника. Это распределение имеет тот же вид, что и распределение $y_2(x_1)$ при заданном $x_1$; требуется отыскать плотность вероятности величины $y_2(x_1)$. Согласно сказанному выше,

$$x_1 = [\overline{U}_1 + u_1(0)]\, t, \quad \text{или} \quad t = x_1/[\overline{U}_1 + u_1(0)],$$

значит,

$$y_2(x_1) = \frac{u_2(0)}{\overline{U}_1 + u_1(0)}\, x_1. \tag{5.104}$$

Если $u_1(0)/\overline{U}_1 \ll 1$, то распределения плотности вероятности величин $y_2(x_1)$ и $u_2(0)$, т. е. $v_2(0)$, идентичны. Но если относительная интенсивность турбулентности не так мала, то эта идентичность уже не наблюдается. В самом деле, часто оказывается, что асимметрия распределения $\overline{\Gamma}$, т. е. — если пренебречь молекулярными эффектами — распределения $y_2$ в плоскости на расстоянии $x_1$, не только значительно больше, чем у распределения $v_2$, но может даже иметь противоположный характер. Это наблюдается, например, в случаях, которые описаны ниже.

Из уравнения (5.104) можно получить различные соотношения, имеющие важное значение. Примем, прежде всего, в качестве

среднего значения $y_2$ то, которое получено путем осреднения по большому числу частиц, миновавших источник в последовательные моменты времени $t_0$:

$$\overline{y}_2(x_1) = \frac{x_1}{T}\int_0^T \frac{u_2(t_0)}{\overline{U}_1 + u_1(t_0)}\,dt_0.$$

Пусть $u_1(t_0)/\overline{U}_1 < 1$, так что величину $(1 + u_1/\overline{U}_1)^{-1}$ можно разложить в ряд Тэйлора:

$$\frac{\overline{y}_2(x_1)}{x_1} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u_2(t_0)}{\overline{U}_1}\left[1 - \frac{u_1(t_0)}{\overline{U}_1} + \frac{u_1^2(t_0)}{\overline{U}_1^2} - \ldots\right] dt_0 =$$

$$= -\frac{\overline{u_1 u_2}}{\overline{U}_1^2} + \frac{\overline{u_1^2 u_2}}{\overline{U}_1^3} - \frac{\overline{u_1^3 u_2}}{\overline{U}_1^4} + \ldots \qquad (5.105)$$

Аналогичным способом определяются и средние значения квадрата и куба величины $y_2$ для большого числа частиц:

$$\frac{\overline{y_2^2}}{x_1^2} = \frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}_1^2} - 2\frac{\overline{u_1 u_2^2}}{\overline{U}_1^3} + 3\frac{\overline{u_1^2 u_2^2}}{\overline{U}_1^4} - \ldots \qquad (5.106)$$

и

$$\frac{\overline{y_2^3}}{x_1^3} = \frac{\overline{u_2^3}}{\overline{U}_1^3} - 3\frac{\overline{u_1 u_2^3}}{\overline{U}_1^4} + 6\frac{\overline{u_1^2 u_2^3}}{\overline{U}_1^5} - \ldots \qquad (5.107)$$

Из двух последних соотношений легко можно определить коэффициент асимметрии $S_{y_2}$ распределения $y_2$. Коэффициент асимметрии определяется формулой

$$S_{y_2} = \frac{\overline{y_2^3}}{\left(\overline{y_2^2}\right)^{3/2}}.$$

Используя уравнения (5.106) и (5.107), получаем

$$S_{y_2} = \frac{\overline{u_2^3}}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{3/2}} - 3\frac{\overline{u_1 u_2^3}}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{3/2}\overline{U}_1} + 3\frac{\overline{u_2^3}\,\overline{u_1 u_2^2}}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{3/2}\overline{U}_1} + 6\frac{\overline{u_1^2 u_2^3}}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{3/2}\overline{U}_1^2} -$$

$$- 4{,}5\frac{\overline{u_2^3}\,\overline{u_1^2 u_2^2}}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{5/2}\overline{U}_1^2} + 7{,}5\frac{\overline{u_2^3}\left(\overline{u_1 u_2^2}\right)^2}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{7/2}\overline{U}_1^2} - 9\frac{\overline{u_1 u_2^3}\,\overline{u_1 u_2^2}}{\left(\overline{u_2^2}\right)^{5/2}\overline{U}_1^2} + \ldots \qquad (5.108)$$

Если в выражении (5.105) для $\overline{y}_2/x_1$ результирующее влияние корреляций третьего и более высоких порядков пренебрежимо мало, то получается интересный результат, состоящий в том, что вели-

чина $\overline{y}_2/x_1$ должна быть пропорциональна напряжению сдвига в потоке в точке, где находится источник:

$$\frac{\overline{y}_2}{x_1} \approx -\frac{\overline{u_1 u_2}}{\overline{U}_1^2} = \frac{\sigma_{12}}{\rho \overline{U}_1^2}. \tag{5.109}$$

Величина $\overline{y}_2/x_1$ идентична со средней линией, т. е. с центроидом поверхности распределения $\overline{\Gamma}$, так как, по определению,

$$\frac{\overline{y}_2}{x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y_2}{x_1}\right) \frac{\overline{\Gamma}\left(\frac{y_2}{x_1}\right)}{\overline{\Gamma}(0)}\, d\left(\frac{y_2}{x_1}\right).$$

Таким образом, ордината этого центроида в первом приближении пропорциональна локальному турбулентному напряжению сдвига.

На рис. 5.7 показано асимметричное распределение температуры вниз по потоку от тонкой нагретой проволоки, помещенной

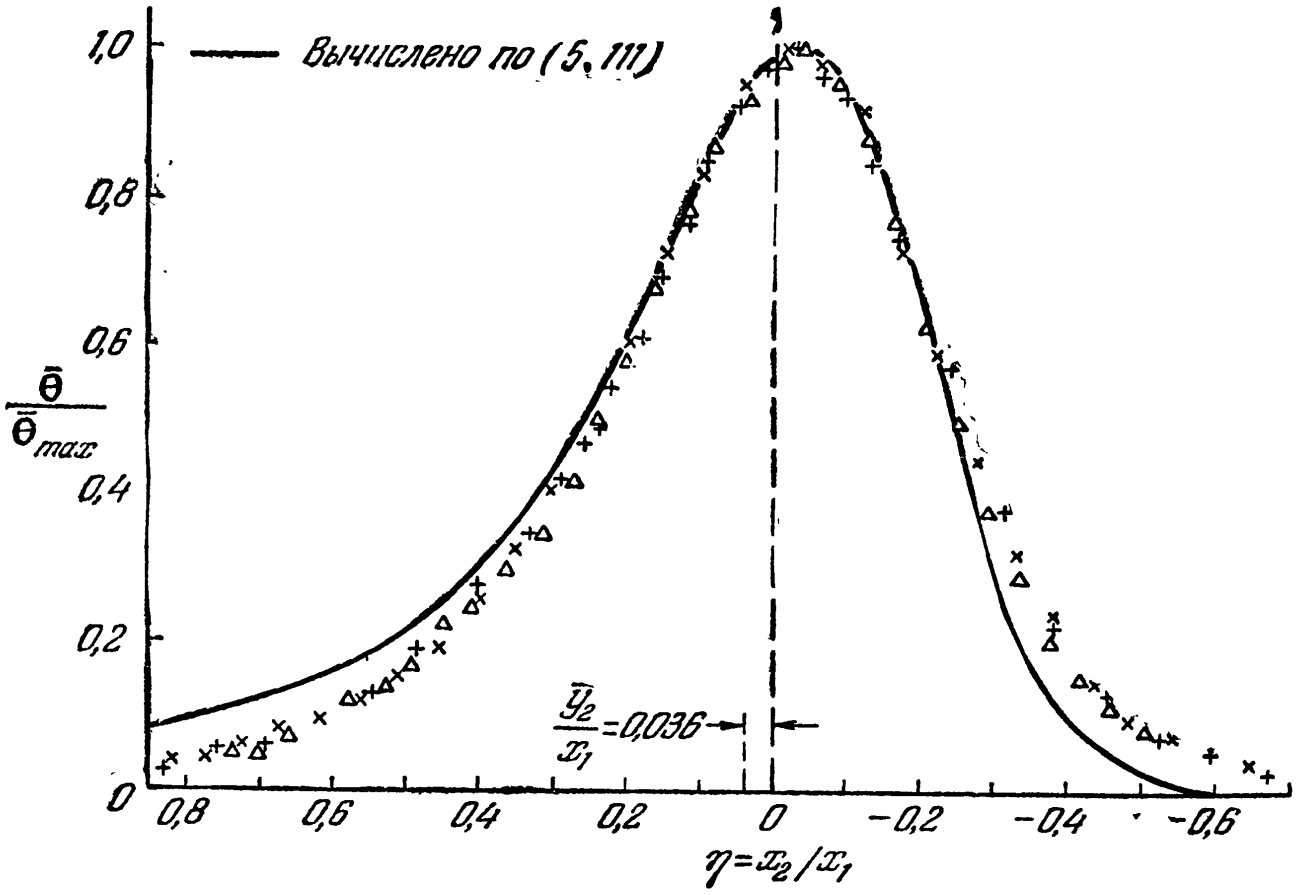



Рис. 5.7. Асимметричное распределение температуры вниз по потоку от нагретой нити в поле турбулентности, генерированной в плоской свободной струе. Местоположение — на 6 *мм* ниже оси, на расстоянии 100 *мм* от сопла шириной 5 *мм*. Скорость истечения 40 *м/сек* [46].

в горизонтальной плоской свободной струе воздуха, по измерениям Ван дер Хегге Цийнена [46]. Ширина сопла, из которого вытекала струя, составляла $d = 5$ *мм*; скорость истечения струи была 40 *м/сек*. В поперечном сечении струи, удаленном от сопла на расстояние $20d$

(где максимальная скорость составляла 22 *м/сек*, а ширина струи была около 40 *мм*), была установлена нагретая до 400° С платиноиридиевая проволока диаметром 0,05 *мм* и длиной 10 *мм*, которая находилась на 6 *мм* ниже оси струи. Распределение температуры дано в системе координат, начало которой совпадает с местоположением источника тепла, а ось $x_1$ параллельна направлению осредненной скорости и проходит через источник.

Характер полученной асимметрии таков, что распространение $\overline{\Gamma}$ является наибольшим в направлении зоны, где осредненная скорость $\overline{U}_1$ выше. Это легко объяснить. Если, например, $d\overline{U}_1/dx_2 > 0$ и, следовательно, $\sigma_{12} > 0$, то тогда $\overline{u_1 u_2} < 0$. Но это значит, что при положительных значениях $u_2$ через контрольную плоскость в среднем будет переноситься большее количество жидких частиц с отрицательной скоростью $u_1$, и наоборот. Положительным значениям $u_2$ жидких частиц, проходящих через контрольную плоскость, соответствуют также и положительные значения $x_2$. Значит, при одинаковом значении $x_1$ для положительных значений $x_2$ в среднем получается $t > x_1/\overline{U}_1$. Аналогично при отрицательных значениях $x_2$ в среднем $t < x_1/\overline{U}_1$. Следовательно, распространение жидких частиц для положительных значений $x_2$ должно быть больше, нежели для отрицательных значений $x_2$.

Ордината центроида поверхности распределения температуры равна $\overline{y}_2/x_1 = 0{,}036$, что согласуется со значением $\sigma_{12}/\rho\overline{U}_1^2 = 0{,}036$, вычисленным по распределению осредненной скорости.

Для того же распределения температуры имеем $\overline{y_2^2}/x_1^2 = 0{,}0704$ и $\overline{y_2^3}/x_1^3 = 0{,}01705$. Отсюда получаем коэффициент асимметрии $S_{y_2}$=0,85. Никаких измерений, касающихся величины $\overline{u_2^3}$ или различных корреляций скорости третьего и более высоких порядков, которые содержатся в (5.108), не проводилось. Однако это соотношение можно использовать для вычисления коэффициента асимметрии распределения скорости $u_2$, если, следуя предложению Бэтчелора и Таунсенда [25], рассматривать только первые три члена в правой части выражения (5.108) и считать, что (1) связь корреляции скорости четвертого порядка $\overline{u_1 u_2^3}$ с $\overline{u_1 u_2}$ такова, как будто распределение совместной вероятности $u_1$ и $u_2$ нормально, и что (2) величина $\overline{u_1 u_2^2}$ меньше $\overline{u_2^3}$ в $\overline{u_1 u_2}/\overline{u_2^2}$ раз.

Если $F(u_1, u_2)$ — функция распределения плотности совместной вероятности $u_1$ и $u_2$, то ее выражение в том случае, когда это рас-

пределение нормально, имеет вид (см., например, [49])

$$F\left(\frac{u_1}{\bar{U}_1}, \frac{u_2}{\bar{U}_1}\right) = \frac{\bar{U}_1^2}{2\pi u_1' u_2' \left[1 - R_{12}^2(0)\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2\left[1 - R_{12}^2(0)\right]}\left[\frac{u_1^2}{u_1'^2} - \frac{2u_1 u_2 R_{12}(0)}{u_1' u_2'} + \frac{u_2^2}{u_1'^2}\right]\right\}, \qquad (5.110)$$

где $R_{12}(0) = \overline{u_1 u_2}/u_1' u_2'$.

Нормальное распределение плотности совместной вероятности имеет следующие характерные особенности:

1. Предельные распределения величин $u_1$ и $u_2$ представляют собой нормальные гауссовские распределения.

2. Все нечетные моменты являются нулями:

$$\overline{u_1^m u_1^n} = \frac{1}{\bar{U}_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(u_1, u_2) u_1^m u_2^n \, du_1 \, du_2 = 0,$$

когда $m$ и $n$ — целые числа, а $(m+n)$ — нечетное число.

Соотношение между моментом четвертого порядка $\overline{u_1 u_2^3}$ и $\overline{u_1 u_2}$ запишется в виде

$$\overline{u_1 u_2^3} = \frac{1}{\bar{U}_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(u_1, u_2) \overline{u_1 u_2^3} \, du_1 \, du_2 = 3R_{12}(0) u_1' u_2'^3.$$

Таким образом, воспользовавшись предположением Бэтчелора и Таунсенда, из формулы (5.108) получим

$$S_{y_2} \approx S_{u_2} - 9\frac{u_1'}{\bar{U}_1} R_{12}(0) + 3S_{u_2}^2 \frac{u_1'}{\bar{U}_1} R_{12}(0),$$

где $S_{u_2}$ — коэффициент асимметрии распределения $u_2$.

Как будет показано ниже, асимметричное распределение температуры можно вычислить, если известна функция плотности совместной вероятности $F(u_1, u_2)$. Тогда по этому асимметричному распределению температуры можно оценить величины $u_1'$ и $u_2'$. Для распределения температуры, изображенного на рис. 5.7, Хинце и Ван дер Хегге Цийнен получили $u_1'/\bar{U}_1 = 0{,}28$ и $u_2'/\bar{U}_1 = 0{,}215$. Отсюда при $\overline{u_1 u_2}/\bar{U}_1^2 = -\sigma_{12}/\rho\bar{U}_1^2 = -0{,}036$ получается $R_{12}(0) = -0{,}60$. Таким образом, при $S_{y_2} = 0{,}85$ значение $S_{u_2}$ оказывается равным $-0{,}48$. Отрицательную величину коэффициента асимметрии распределения $u_2$ как раз и следовало ожидать, поскольку интенсивность турбулентности $u_2'$ в точке, где расположен источник тепла, имеет положительный

градиент $du_2'/dx > 0$. Это значение $S_{u_2}$ по своей величине близко к значениям, полученным Таунсендом [50] для следа за круглым цилиндром, вблизи точки максимального напряжения сдвига и находящимся в диапазоне от —0,4 до —0,5.

Если величину $\overline{u_2^2}/\overline{U_1^2} = 0{,}046$ сравнить с $\overline{y_2^2}/x_1^2 = 0{,}074$, то, основываясь на соотношении (5.106), придем к заключению, что вкладом от корреляций скорости более высокого порядка пренебрегать нельзя.




Рис. 5.8. Распределение напряжения сдвига в плоской свободной струе в сечении на расстоянии 100 *мм* от сопла шириной 5 *мм* [46].

Кроме того, используя значение коэффициента асимметрии $S_{u_2} = -0{,}48$, получаем

$$\frac{\overline{u_2^3}}{\overline{U_1^3}} = -0{,}0048,$$

тогда как $\overline{y_2^3}/x_1^3 = 0{,}01705$. Следовательно, и в данном случае составляющими от корреляции скорости более высокого порядка в соотношении (5.107) тоже пренебрегать нельзя. Эти результаты относительно $\overline{y_2^2}/x_1^2$ и $\overline{y_2^3}/x_1^3$, как видим, совершенно противоположны выводу, сделанному в отношении $\overline{y}_2/x_1$. Этот последний вывод, состоящий в том, что результирующей составляющей от корреляций третьего и более высоких порядков в соотношении (5.105) можно пренебречь, по-видимому, справедлив также и применительно к другим точкам, расположенным в том же поперечном сечении струи. На рис. 5.8 изображено распределение величины $\sigma_{12}/\rho\overline{U}_1^2$ в поперечном сечении струи, определенное один раз по значениям $\overline{y}_2/x_1$, а другой раз — по распределению осредненной скорости согласно методике, которая будет описана в главе 6.

Покажем теперь, как вычисляется распределение температуры, если функцию плотности совместной вероятности $F(u_1, u_2)$ считать известной. При этом мы воспользуемся методом, аналогичным изложенному в предыдущем параграфе.

Рассмотрим расположенную вниз по потоку от теплового источника точку с координатами $(x_1, x_2)$. Для жидкой частицы, которая проходит мимо источника тепла в момент времени $t_0$ с компонентами скорости $\overline{U}_1 + u_1$ и $u_2$ и которая попадает в рассматриваемую точку

в момент времени $t$, компоненты скорости и интервал времени $t - t_0$ связаны соотношениями

$$x_1 = (\overline{U}_1 + u_1)(t - t_0), \quad x_2 = u_2 (t - t_0).$$

Обозначим через $P'(x_1, x_2, t - t_0)\, dx_1\, dx_2$ вероятность прохождения жидкой частицы через элементарную площадку $dx_1\, dx_2$ в рассматриваемой точке по истечении интервала времени $t - t_0$. Попытаемся выразить эту вероятность через функцию плотности совместной вероятности $F(u_1, u_2)$. При условии, что величины $u_1$, $u_2$, $x_1$, $x_2$ и $t - t_0$ удовлетворяют записанным выше соотношениям, вероятность $P'(x_1, x_2, t - t_0)\, dx_1\, dx_2$ должна быть в точности равна $F(u_1, u_2)\, du_1\, du_2$. Таким образом, если через $S^*$ снова обозначить интенсивность источника, то вероятность того, что жидкость, миновавшая тепловой источник за время $dt_0$, пройдет через элементарную площадку $dx_1\, dx_2$, определится выражением

$$P'(x_1, x_2, t - t_0)\, dt_0\, dx_1\, dx_2 = S^*\, dt_0 F(u_1, u_2)\, du_1\, du_2 \overline{U}_1^2.$$

Для непрерывного источника вероятность пребывания жидкой частицы, которая начала свое движение от источника, на элементарной площадке $dx_1\, dx_2$ запишется так:

$$P(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{\overline{U}_1^2} \int_{-\infty}^{t} S^* F(u_1, u_2)\, du_1\, du_2\, dt_0.$$

Но поскольку при заданной величине $t - t_0$ имеем

$$du_1 = \frac{dx_1}{t - t_0}, \quad du_2 = \frac{dx_2}{t - t_0},$$

то записанное выше соотношение принимает вид

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{\overline{U}_1^2} \int_{-\infty}^{t} F(u_1, u_2) \frac{1}{(t - t_0)^2}\, dt_0.$$

При заданной величине $x_1$ можем записать

$$\frac{dt_0}{(t - t_0)^2} = d\frac{1}{t - t_0} = d\frac{\overline{U}_1 + u_1}{x_1} = \frac{du_1}{x_1}.$$

Следовательно,

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{x_1^2} \frac{1}{\overline{U}_1^2} \int_{-\overline{U}_1}^{\infty} F(u_1, u_2)\, du_1,$$

или

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{x_1 \overline{U}_1} \int_{-1}^{\infty} F\left[\frac{u_1}{\overline{U}_1}, \left(1 + \frac{u_1}{\overline{U}_1}\right)\frac{x_2}{x_1}\right] d\frac{u_1}{\overline{U}_1}.$$

Подставляя сюда выражение (5.110) для нормальной функции плотности совместной вероятности и выполняя интегрирование, получаем

$$P(x_1, x_2) = \frac{S^*}{2\sqrt{2\pi}\left[\overline{u_2^2}x_1^2 - 2u_1'u_2'R_{12}(0)\,x_2x_1 + \overline{u_1^2}x_2^2\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \operatorname{erfc}\left\{ - \frac{u_2'\bar{U}_1 x_1\left[1 - \dfrac{u_1'}{u_2'}R_{12}(0)\right]}{u_1'\left\{2\left[1 - R_{12}(0)\right]\left[\overline{u_2^2}x_1^2 - 2u_1'u_2'R_{12}(0)\,x_2x_1 + \overline{u_1^2}x_2^2\right]\right\}^{1/2}} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{-\bar{U}_1^2 x_2^2}{2\left[\overline{u_2^2}x_1^2 - 2u_1'u_2'R_{12}(0)\,x_2x_1 + \overline{u_1^2}x_2^2\right]} \right\}. \quad (5.111a)$$

Нетрудно убедиться в том, что при $R_{12}(0) = 0$, т. е. в случае равномерного осредненного потока, это выражение сводится к (5.93).

Если влиянием молекулярной диффузии пренебречь, то распределение $\overline{\Gamma}$ окажется идентичным функции $P(x_1, x_2)$. Это распределение зависит только от $\eta = x_2/x_1$; иными словами, распределения температуры в последовательных поперечных сечениях следа за тепловым источником являются подобными.

Если уравнение (5.111a) желательно применить к действительным распределениям $\overline{\Gamma}$, то следует иметь в виду, что (1) предположение о нормальном распределении совместной вероятности $u_1$ и $u_2$, по всей видимости, несправедливо и что (2) полученные соотношения справедливы только при малом времени диффузии $t - t_0$, т. е. при малых значениях $x_1/(\bar{U}_1 + u_1)$ и $x_2/u_2$. Если величина $u_1'/\bar{U}_1$ значительно меньше единицы, то условие малости времени диффузии эквивалентно требованию, чтобы значение $\eta = x_2/x_1$ было мало. Оценка значений $\eta$, выше которых предположение о малости времени диффузии при небольших величинах $u_1'/\bar{U}_1$ уже более несправедливо, может быть произведена по величине $u_2'/\bar{U}_1$. Таким образом, если исследуется диффузия в свободной струе, то следует выбирать значения $\eta$, ненамного превышающие $u_2'/\bar{U}_1$, т. е. приблизительно 0,2.

При малом времени диффузии значение функции erfc, входящей в выражение (5.111a), практически равно 2. Тогда для распределения $\overline{\Gamma}$ в поперечном сечении, отнесенного к $\overline{\Gamma}(0)$, получим следующее выражение:

$$\frac{\overline{\Gamma}(\eta)}{\overline{\Gamma}(0)} = \frac{1}{\left[1 - 2\left(u_1'/u_2'\right)R_{12}(0)\,\eta + \left(u_1'^2/u_2'^2\right)\eta^2\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{-\bar{U}_1^2\eta^2}{2u_2'^2\left[1 - 2\left(u_1'/u_2'\right)R_{12}(0)\,\eta + \left(u_1'^2/u_2'^2\right)\eta^2\right]} \right\}.$$

В случае изотропной турбулентности, когда $u_1' = u_2'$ и $R_{12}(0) = 0$, имеем

$$\frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{\bar{\Gamma}(0)} = \frac{1}{(1+\eta^2)^{1/2}} \exp\left[\frac{-\bar{U}_1^2\eta^2}{2u_2'^2(1+\eta^2)}\right]. \qquad (5.111б)$$

Согласно этому результату, распространение $\bar{\Gamma}$ при более высоких значениях $\eta$ должно быть несколько больше, чем по распределению Гаусса.

На рис. 5.7 нанесена кривая распределения температуры, рассчитанная по уравнению (5.111а), где значение $R_{12}(0)$ определялось по

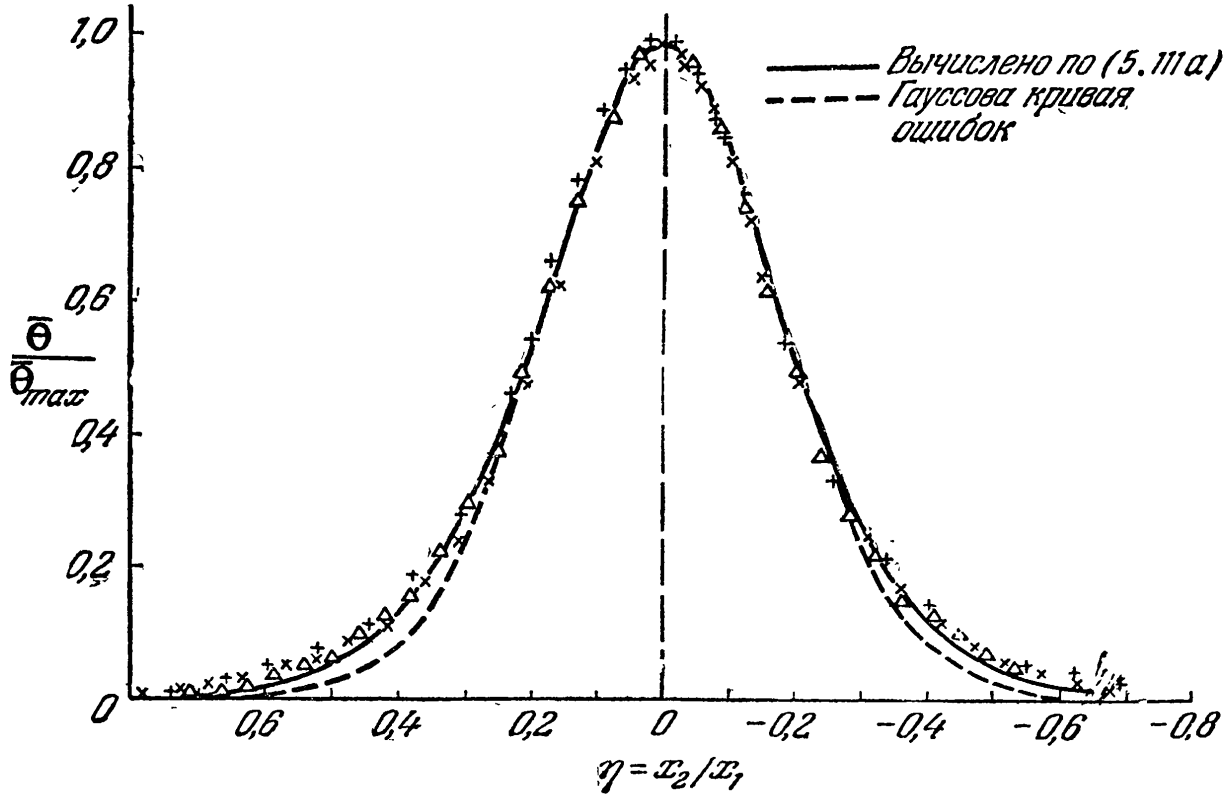



Рис. 5.9. Распределение температуры вниз по потоку от нагретой нити при почти изотропной турбулентности в сечении плоской свободной струи на расстоянии 100 *мм* от сопла шириной 5 *мм* [46].

величине $\bar{y}_2/x_1$, а $u_1'$ и $u_2'$ вычислялись методом последовательных приближений. При этом для $u_1'/\bar{U}_1$ и $u_2'/\bar{U}_1$ были найдены соответственно значения 0,28 и 0,215, приведенные выше. Согласование с опытными данными в диапазоне $-0{,}2 < x_2/x_1 < 0{,}2$ является вполне удовлетворительным. При бóльших значениях $x_2/x_1$ расчетная кривая оказывается слишком асимметричной.

На рис. 5.9 показано полученное в опытах Ван дер Хегге Цийнена [46] распределение температуры вниз по потоку от нагретой проволочки, расположенной в некоторой точке на оси плоской свободной струи. Здесь же приведены расчетные кривые, соответствующие уравнению (5.111а) и гауссовой функции ошибок.

Различие между этими двумя расчетными кривыми заметно лишь при значениях $x_2/x_1$, значительно превышающих 0,2. Хотя кривая, рассчитанная по уравнению (5.111а), и лучше соответствует опытным данным по сравнению с кривой Гаусса, к ней все же следует относиться с некоторой оговоркой по причинам, указанным выше.

## § 5.7. Диффузия дискретных частиц при однородной турбулентности

Знание поведения дискретных частиц в турбулентном потоке представляет большой интерес для многих отраслей техники, особенно если между частицами и жидкостью имеется значительная разница в плотности. Совместное движение твердых частиц и жидкости или распыленных капельных жидкостей и газов (запыленное течение) встречается, например, по крайней мере в одном из следующих технических приложений: в аппаратах для очистки газа и жидкости (например, в циклонных сепараторах), в пневмотранспорте, при промывке угля и обогащении руды, в химических реакторах, работающих на жидких суспензиях твердых частиц, при сжигании размельченного или распыленного топлива и т. д.

Поведение конгломерата дискретных частиц в турбулентном потоке жидкости в значительной степени зависит (1) от концентрации этих частиц и (2) от размера частиц по сравнению с масштабом турбулентности в жидкости.

При высокой концентрации наблюдается непосредственное взаимодействие между частицами из-за столкновений, а также из-за влияния на течение жидкости в окрестности частиц. Движение частиц относительно жидкости вследствие образования дополнительной турбулентности может привести к добавочной диссипации кинетической энергии турбулентного движения жидкости, способствуя тем самым подавлению турбулентности в жидкости. При крайне высоких концентрациях, близких к концентрации при максимальной упаковке частиц, турбулентность может даже «вымерзнуть», по терминологии, введенной Бэгнольдом для обозначения условий почти полного подавления турбулентного движения. Как показал Бэгнольд [51, 52], при таких высоких концентрациях частиц вследствие столкновений и явления сальтации все еще могут наблюдаться значительные нормальные и касательные напряжения. Если частицы являются очень мелкими, то могут играть роль эффекты, отличные от чисто гидродинамических, приводя, например, к агломерации частиц.

В другом предельном случае, а именно, когда концентрация частиц очень низка, взаимодействием между частицами можно пренебречь и каждую частицу рассматривать, как если бы в турбулентном потоке она была единственной. Если частицы крупны по сравнению с масштабом турбулентности, то основное влияние тур-

булентности на частицы будет состоять в увеличении их сопротивления течению и частицы, самое большее, будут в той или иной мере следовать за крупномасштабными турбулентными движениями жидкости. Но если, с другой стороны, частицы очень малы по сравнению с наименьшим масштабом турбулентности, то они будут стремиться следовать за всеми компонентами турбулентного движения в жидкости. Сопротивление движению частиц относительно окружающей жидкости по своей природе обычно полностью связано с вязкостью. В этом случае наличие частиц тоже будет увеличивать диссипацию в турбулентном потоке. Так как эта добавочная диссипация обусловливается отставанием частицы от турбулентного движения жидкости, а также поскольку это отставание с ростом волнового числа турбулентности увеличивается, то логично ожидать, что наличие частиц будет оказывать влияние на энергетический спектр турбулентности главным образом в диапазоне больших волновых чисел.

Теоретических сведений о гидродинамике смеси дискретных частиц произвольного размера и концентрации с жидкостью при турбулентном движении обоих компонентов смеси известно очень мало. При больших концентрациях очень мелких частиц смесь можно считать однородной суспензией и рассматривать ее как неньютоновскую жидкость, обладающую при течении определенными общими особенностями. Для более крупных частиц, как, например, зерна и песчинки, анализ связи между напряжением и скоростью деформации в смеси при почти турбулентном движении был проведен Бэгнольдом.

Интенсивное теоретическое исследование движения мелких частиц, суспендированных в турбулентном потоке жидкости, было осуществлено Ченом [53]. После работы Чена в печати появилось лишь несколько статей по этому вопросу. Наиболее важными из них являются исследования Корсина и Ламли [55, 69], а также Фридлэндера [70].

Ниже мы будем касаться главным образом исследований Чена, однако в несколько отличной математической трактовке. Хотя случай, рассмотренный Ченом, и является предельным ввиду принятых им упрощающих предположений, некоторые из полученных при этом результатов представляют общий интерес.

В теории Чена приняты следующие предположения:

1. Турбулентность в жидкости является однородной и стационарной.

2. Область турбулентности имеет бесконечную протяженность.

3. Частица имеет сферическую форму и обладает настолько малыми размерами, что ее движение относительно окружающей среды подчиняется стоксову закону сопротивления.

4. Частица мала по сравнению с наименьшей длиной волны, имеющей место при турбулентном движении.

5. При движении частицы в ее окрестности содержатся одни и те же жидкие частицы.

6. Любая внешняя сила, действующая на частицу, связана с потенциальным полем, например гравитационным.

Все перечисленные здесь предположения, за исключением предположения 5, достаточно логичны и действительно могут быть удовлетворены. Что касается предположения 5, то механизм реальной турбулентности таков, что это предположение вряд ли удовлетворяется. Если элемент жидкости, содержащий мелкую дискретную частицу, можно было бы рассматривать как недеформируемое целое, скажем как сферу, то, вероятно, и оказалось бы возможным удовлетворить этому предположению при условии, однако, что размер этого элемента больше амплитуды движения дискретной частицы относительно жидкости (частица не выходит за пределы элемента — «не промахивается» мимо него при своем движении). Движение дискретной частицы и жидкого элемента можно было бы в этом случае представить так, как это изображено на рис. 5.10. Однако известно, что при турбулентном движении жидкие элементы деформируются и растягиваются в длинные тонкие ленты, и трудно себе представить, чтобы жидкий элемент в процессе своего растяжения продолжал содержать одни и те же дискретные частицы. Кроме того, условие непокидания частицей пределов жидкого элемента означает, что дискретная частица не может быть слишком тяжелой по сравнению с жидкостью. Стало быть, любой полученный при последующем анализе результат, касающийся большого отношения плотностей дискретной частицы и жидкости, следует рассматривать с некоторым ограничением.

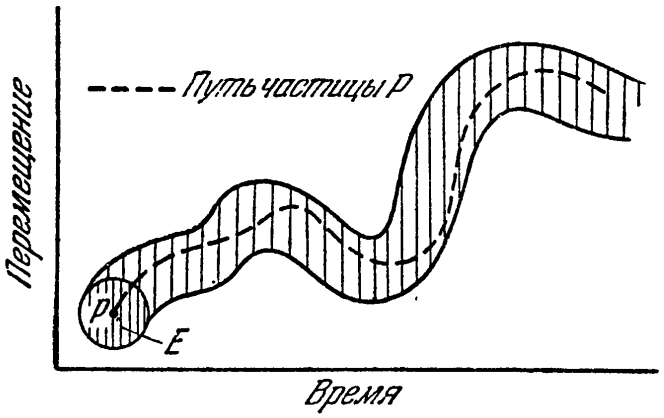



Рис. 5.10. Перемещение дискретной частицы $P$ и сферического жидкого элемента $E$, внутри которого находится $P$.

Мы будем исходить из уравнения медленного движения сферической частицы, выведенного Бассэ [65], Буссинеском [66] и Озееном [67] для случая покоящейся жидкости, но обобщенного Ченом [53] на случай жидкости, движущейся с переменной скоростью:

$$\frac{\pi}{6} d^3 \rho_p \frac{dv_p}{dt} = 3\pi\mu d (v_f - v_p) + \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \frac{dv_f}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \left(\frac{dv_f}{dt} - \frac{dv_p}{dt}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu} \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dv_f}{dt'} - \frac{dv_p}{dt'}}{\sqrt{t - t'}} dt' + F_e, \qquad (5.112)$$

где $t$ — начальный момент времени; индекс $f$ соответствует жидкости, а индекс $p$ — частице; наконец, скорость жидкости $v_f$ — скорость жидких частиц в окрестности дискретной частицы, достаточно удаленных от нее, чтобы не испытывать возмущений, связанных с относительным движением этой частицы.

Смысл различных членов этого уравнения состоит в следующем. Член в левой части представляет силу, необходимую для ускорения частицы. Первый член в правой части — сила вязкого сопротивления, определяемая законом Стокса. Второй член связан с градиентом давления в жидкости, окружающей рассматриваемую частицу, который обусловлен ускорением жидкости. Третий член характеризует силу, приводящую к ускорению кажущейся массы частицы относительно окружающей жидкости. Четвертый член — так называемая «сила Бассэ» — учитывает влияние отклонения картины течения от установившегося состояния. Последний член $F_e$ представляет собой внешнюю потенциальную силу.

Здесь можно отметить, что второй, третий и четвертый члены в правой части уравнения приобретают важное значение только в том случае, когда плотность жидкости сравнима с плотностью частицы или же превышает ее. Сила Бассэ увеличивает мгновенное сопротивление течению. В момент времени $t' = t$ подынтегральное выражение здесь обращается в бесконечность, но поскольку стремление этого выражения к бесконечности происходит пропорционально $\lim_{\tau=0} \tau^{-1/2}$, то интеграл останется конечной величиной. Когда частица быстро ускоряется под действием большой внешней силы, то сила Бассэ может стать существенной, увеличив тем самым мгновенный коэффициент сопротивления во много раз по сравнению с его величиной при установившемся состоянии. Расчеты, указавшие на это увеличение, были произведены Хьюджесом и Джиллилэндом [54].

Когда внешняя потенциальная сила $F_e$ имеет постоянную величину, например в случае гравитационного поля, при котором соответствующая компонента равняется весу за вычетом подъемной силы, то движение частицы в установившемся состоянии представляет собой суперпозицию постоянной скорости, равной скорости свободного падения в жидкости, и скорости, накладываемой движением жидкости. В силу линейности уравнения (5.112) скорость свободного падения не зависит от движения жидкости.

Поскольку нас интересует в основном движение дискретной частицы, обусловленное движением жидкости, то ниже мы больше не будем учитывать влияние внешних сил. Но, благодаря линейности уравнения (5.112), полученные при этом результаты все же будут справедливы даже при наличии внешних сил.

Если движение жидкости является турбулентным, то следует считать, что скорость жидкости представляет собой случайную

функцию времени и пространственных координат. Для удобства выберем систему координат, движущуюся вместе с дискретной частицей. Тогда любая неоднородность пространственного движения системы испытывается частицей как неоднородность относительно времени. Однако в связи с тем, что скорость жидкости отлична от скорости дискретной частицы, скорость жидкости относительно рассматриваемой системы координат остается также функцией и пространственных координат. Ниже будут сформулированы условия, которые должны быть удовлетворены, чтобы движение жидкости зависело только от времени.

Как показали Корсин и Ламли [55], второй член в правой части уравнения (5.112), если это уравнение применяется к турбулентному движению жидкости, при котором скорость жидкости зависит от времени и пространства, должен быть видоизменен. Этот член связан с падением давления в окружающей жидкости. Согласно уравнению Навье — Стокса, для компоненты $(v_f)_i$ имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho_f\left[\frac{\partial (v_f)_i}{\partial t}+(v_f)_k\frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k}\right]-\mu\frac{\partial^2 (v_f)_i}{\partial x_j\,\partial x_j}.$$

Кроме того, следует иметь в виду, что во всех других членах

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(v_p)_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

так как наша система координат движется вместе с дискретной частицей.

Следовательно, уравнение (5.112) для $i$-й компоненты скорости дискретной частицы и жидкости должно иметь следующий вид:

$$\frac{\pi}{6}d^3\rho_p\frac{d}{dt}(v_p)_i=3\pi\mu d\,[(v_f)_i-(v_p)_i]+\frac{\pi}{6}d^3\rho_f\left[\frac{\partial}{\partial t}(v_f)_i+(v_f)_k\frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k}\right]-$$

$$-\frac{\pi}{6}d^3\mu\frac{\partial^2 (v_f)_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}d^3\rho_f\frac{d}{dt}[(v_f)_i-(v_p)_i]+$$

$$+\frac{3}{2}d^2\sqrt{\pi\rho_f\mu}\int_{t_0}^{t}\frac{\frac{d}{dt'}[(v_f)_i-(v_p)_i]}{\sqrt{t-t'}}dt',$$

где

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(v_p)_k\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Теперь можем записать

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_f)_i+(v_f)_k\frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k}=\frac{d}{dt}(v_f)_i+[(v_f)_k-(v_p)_k]\frac{\partial (v_f)_i}{\partial x_k}.$$

Таким образом, наше уравнение после некоторых преобразований примет вид

$$\frac{d}{dt}(v_p)_i = \frac{3\rho_f}{2\rho_p+\rho_f}\left[\frac{d}{dt}(v_f)_i - \frac{2}{3}\nu\frac{\partial^2(v_f)_i}{\partial x_j\,\partial x_j}\right] +$$
$$+\frac{2}{2\rho_p+\rho_f}\left\{\frac{18\mu}{d^2}[(v_f)_i-(v_p)_i]+\rho_f[(v_f)_k-(v_p)_k]\frac{\partial(v_f)_i}{\partial x_k}\right\}+$$
$$+\frac{18}{(2\rho_p+\rho_f)\,d}\sqrt{\frac{\rho_f\mu}{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{\frac{d}{dt'}[(v_f)_i-(v_p)_i]}{\sqrt{t-t'}}\,dt'. \quad (5.113)$$

Это уравнение показывает, что нелинейными членами можно пренебречь, когда

$$\rho_f\frac{\partial v_f}{\partial x} \ll \frac{\mu}{d^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2}{\nu}\frac{\partial v_f}{\partial x} \ll 1. \quad (5.114)$$

Это условие выполняется, если дискретная частица мала и если $\partial v_f/\partial x^* \ll 1$, где $x^* = x/d$. Кроме того, это уравнение остается уравнением первого порядка, в котором единственной независимой переменной является только время, если слагаемым, связанным с вязкостью, в первом члене правой части можно пренебречь. Для этого необходимо, чтобы

$$v_p\frac{\partial v_f}{\partial x} \gg \nu\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{v_p}{\nu}\frac{\partial v_f/\partial x}{\partial^2 v_f/\partial x^2} \gg 1.$$

Согласно требованию (5.114), должно быть

$$\frac{v_p}{d^2(\partial^2 v_f/\partial x^2)} \ggg 1. \quad (5.115)$$

Таким образом, вторая производная, отнесенная к $d$ как к единице длины, т. е. $\partial^2 v_f/\partial x^{*2}$, где $x^* = x/d$, должна быть очень мала.

Чен полагал производные $\partial(v_f)_i/\partial x_k$ в члене

$$\rho_f[(v_f)_k-(v_p)_k]\frac{\partial(v_f)_i}{\partial x_k}$$

заданными величинами, которые в первом приближении, вероятно, могут даже рассматриваться как постоянные, так что этот член в совокупности со слагаемым, выражающим стоксово сопротивление, дает дополнительное кажущееся линейное сопротивление.

Предположим, что условия (5.114) и (5.115) выполняются и что уравнение (5.113) сохраняет характер уравнения (5.112), т. е. является линейным и зависит только от времени. Не нарушая общности, можно рассматривать лишь по одной компоненте скоростей $v_p$ и $v_f$. Основываясь на принятых выше приближенных

предположениях и опуская для упрощения индекс $i$, приводим уравнение (5.113) к следующей форме:

$$\frac{dv_p}{dt} + av_p = av_f + b\frac{dv_f}{dt} + c\int_{t_0}^{t} \frac{dv_f/dt' - dv_p/dt'}{\sqrt{t-t'}}\,dt', \quad (5.116)$$

где

$$a = \frac{36\mu}{(2\rho_p + \rho_f)\,d^2}, \quad b = \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f}, \quad c = \frac{18}{(2\rho_p + \rho_f)\,d}\sqrt{\frac{\rho_f \mu}{\pi}}.$$

Обратимся сначала к стационарному случаю, который также был исследован Ченом. При этом исходный момент времени $t_0$ может быть принят равным $-\infty$. Чену удалось преобразовать уравнение (5.116) в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и найти его общее решение. Он показал, далее, что в общем случае, при большом времени диффузии, коэффициенты диффузии для дискретных частиц и для жидких частиц одинаковы. Этот интересный результат можно получить непосредственно из уравнения (5.116), если предположить, что обе скорости $v_p$ и $v_f$ могут быть представлены интегралом Фурье [ср. с уравнением (1.87)]:

$$v_f = \int_0^\infty (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)\,d\omega$$

и (5.117)

$$v_p = \int_0^\infty (\gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t)\,d\omega,$$

где $\omega = 2\pi n$ — угловая частота.

Если выражения (5.117) для $v_f$ и $v_p$ подставить в уравнение (5.116) и изменить порядок интегрирования, то появятся следующие интегралы:

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\sin \omega t'}{\sqrt{t-t'}}\,dt' \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{t} \frac{\cos \omega t'}{\sqrt{t-t'}}\,dt'.$$

Эти интегралы берутся посредством замены $t - t'$ на $\tau$ и использования известных значений определенных интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{\cos \omega\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}.$$

Таким образом, подставляя (5.117) в уравнение (5.116) и выполняя необходимые операции дифференцирования и интегрирования, находим, что уравнение (5.116) тождественно удовлетворяется, если

сумму членов с синусами и сумму членов с косинусами положить равными нулю. Отсюда получим следующие соотношения между $\gamma$, $\delta$, $\alpha$ и $\beta$:

$$\gamma = [1 + f_1(\omega)]\,\alpha + f_2(\omega)\,\beta, \quad \delta = -f_2(\omega)\,\alpha + [1 + f_1(\omega)]\,\beta, \tag{5.118}$$

где

$$f_1(\omega) = \frac{\omega(\omega + c\sqrt{\pi\omega/2})(b-1)}{(a + c\sqrt{\pi\omega/2})^2 + (\omega + c\sqrt{\pi\omega/2})^2},$$

$$f_2(\omega) = \frac{\omega(a + c\sqrt{\pi\omega/2})(b-1)}{(a + c\sqrt{\pi\omega/2})^2 + (\omega + c\sqrt{2\pi\omega/2})^2}.$$

Введем теперь лагранжевы функции энергетического спектра $E_{f_L}(n)$ — для жидкости и $E_{p_L}(n)$ — для дискретных частиц. Тогда, как и в § 1.12, можно показать, что

$$\begin{aligned} \overline{v_f^2} &= \pi^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2}{T}\, dn = \int_0^\infty E_{f_L}(n)\, dn, \\ \overline{v_p^2} &= \pi^2 \int_0^\infty \frac{\gamma^2 + \delta^2}{T}\, dn = \int_0^\infty E_{p_L}(n)\, dn, \end{aligned} \tag{5.119}$$

где $T$ — достаточно длительный период времени. Кроме того,

$$R_{f_L}(t) = \frac{\overline{v_f(t_0)\, v_f(t_0+t)}}{v_f'^2} = \frac{1}{v_f'^2} \int_0^\infty E_{f_L}(n) \cos 2\pi n t\, dn$$

и (5.120)

$$R_{p_L}(t) = \frac{\overline{v_p(t_0)\, v_p(t_0+t)}}{v_p'^2} = \frac{1}{v_p'^2} \int_0^\infty E_{p_L}(n) \cos 2\pi n t\, dn.$$

Уравнение (5.43) определяет диффузию частиц как функцию от времени, выраженную через лагранжеву функцию энергетического спектра. В рассматриваемом случае имеем

$$\overline{y_f^2}(t) = 2 \int_0^\infty E_{f_L}(n) \frac{1 - \cos 2\pi n t}{4\pi^2 n^2}\, dn$$

и (5.121)

$$\overline{y_p^2}(t) = 2 \int_0^\infty E_{p_L}(n) \frac{1 - \cos 2\pi n t}{4\pi^2 n^2}\, dn,$$

откуда с помощью соотношения (5.35) получим следующие выражения для коэффициентов диффузии:

$$\epsilon_f = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{y_f^2}(t) = \int_0^\infty E_{f_L}(n)\frac{\sin 2\pi nt}{2\pi n}\,dn$$

и (5.122)

$$\epsilon_p = \int_0^\infty E_{p_L}(n)\frac{\sin 2\pi nt}{2\pi n}\,dn.$$

При малом времени диффузии

$$\epsilon_f = t\int_0^\infty E_{f_L}(n)\,dn = \overline{v_f^2}t$$

и

$$\epsilon_p = t\int_0^\infty E_{p_L}(n)\,dn = \overline{v_p^2}t,$$

откуда

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} = \frac{\overline{v_p^2}}{\overline{v_f^2}}. \qquad (5.123)$$

При большом времени диффузии основная роль вновь принадлежит низкочастотным компонентам движения:

$$\epsilon_f = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}E_{f_L}\left(\frac{\theta}{2\pi t}\right)d\theta = \frac{1}{4}E_{f_L}(0)$$

и аналогично $\epsilon_p = \frac{1}{4}E_{p_L}(0)$.

Эти соотношения можно также получить из четного преобразования Фурье от выражения (5.120), если положить, что $n = 0$.

Отсюда

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} = \frac{E_{p_L}(0)}{E_{f_L}(0)} = 1, \qquad (5.124)$$

что следует из соотношения

$$\frac{E_{p_L}(n)}{E_{f_L}(n)} = \frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} = [1+f_1(\omega)]^2 + f_2^2(\omega), \qquad (5.125)$$

поскольку $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Это и есть результат, полученный Ченом.

Но при большом времени диффузии коэффициент диффузии можно записать как $\epsilon_f = v'_f \Lambda_L$. Поскольку $v'_p \neq v'_f$, то, по-видимому, $\Lambda_{p_L} \neq \Lambda_{f_L}$, причем это неравенство таково, что величина $v'_p \Lambda_{p_L}$ в точности как раз и равна $v'_f \Lambda_{f_L}$.

Результат (5.124), состоящий в том, что $\epsilon_p = \epsilon_f$, противоречит следствию соотношения (5.123) для малого времени диффузии, а именно: $\epsilon_p \neq \epsilon_f$, так как $\overline{v_p^2} \neq \overline{v_f^2}$.

Согласно равенству $\epsilon_f = \frac{1}{4} E_{f_L}(0)$, коэффициент диффузии пропорционален той доле кинетической энергии, которая приходится на турбулентное движение с нулевой частотой. Но при нулевой частоте никакого различия между движением частицы и движением жидкости не существует. Следовательно, с физической точки зрения представляется весьма логичным, что, если это уравнение выполняется, то коэффициенты диффузии для дискретной частицы и для жидких частиц должны быть одинаковы. До сих пор для дискретной частицы принимался линейный закон сопротивления. Но при нулевой частоте характер закона сопротивления не играет никакой роли, так как при этом не наблюдается отставания дискретной частицы от жидкости. Отсюда со всей очевидностью следует вывод, что результат (5.124) должен быть справедлив безотносительно к характеру закона сопротивления.

Этот вывод, разумеется, несправедлив при $n \neq 0$, так как соотношение (5.125) получено именно для случая линейного закона сопротивления, а при нелинейном законе сопротивления оно имело бы иной вид. Кроме того, формула (5.124) справедлива только для бесконечно большого времени диффузии. Следовательно, если пытаться применить этот результат к турбулентному течению в аппаратах, имеющих конечные размеры, то необходимо удостовериться в том, что область турбулентности не только достаточно однородна, но также и достаточно велика по сравнению, например, с лагранжевым пространственным интегральным масштабом. В большинстве случаев реального течения это требование вряд ли выполняется, так что может наблюдаться не только различие, хотя и незначительное, между значениями $\epsilon_p$ и $\epsilon_f$, но также и влияние закона сопротивления на $\epsilon_p$, а следовательно, и на $\epsilon_p/\epsilon_f$.

Чтобы лучше понять смысл различия величин $\epsilon_p$ и $\epsilon_f$, когда время диффузии невелико, предположим, что коэффициент лагранжевой корреляции для движения жидкости может быть представлен в виде экспоненциальной зависимости:

$$R_{f_L}(t) = \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{T}_{f_L}}\right).$$

Тогда соответствующий лагранжев энергетический спектр запишется в виде

$$E_{f_L}(n) = 4\overline{v_f^2}\frac{\mathcal{J}_{f_L}}{1+\omega^2\mathcal{J}_{f_L}^2}.$$

Примем, далее, что сила Бассэ в уравнении (5.116) пренебрежимо мала и, следовательно, величиной $c$ в выражениях для $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ можно пренебречь. Тогда имеем

$$E_{p_L}(n) = \frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}E_{f_L}(n) = \frac{a^2+b^2\omega^2}{a^2+\omega^2}E_{f_L}(n).$$

Следовательно,

$$E_{p_L}(n) = 4\overline{v_f^2}\frac{a^2+b^2\omega^2}{a^2+\omega^2}\frac{\mathcal{J}_{f_L}}{1+\omega^2\mathcal{J}_{f_L}^2}$$

и

$$\overline{v_p^2} = \int_0^\infty E_{p_L}(n)\,dn = \frac{2}{\pi}\overline{v_f^2}\mathcal{J}_{f_L}\int_0^\infty \frac{a^2+b^2\omega^2}{(a^2+\omega^2)\left(1+\omega^2\mathcal{J}_{f_L}^2\right)}d\omega =$$

$$= \frac{a\mathcal{J}_{f_L}+b^2}{a\mathcal{J}_{f_L}+1}\overline{v_f^2}.$$

Согласно этому соотношению между $\overline{v_p^2}$ и $\overline{v_f^2}$, равенство $\overline{v_p^2} = \overline{v_f^2}$ должно выполняться только при $b=1$, т. е. при $\rho_p = \rho_f$; этот результат является вполне очевидным. Далее,

$$R_{p_L}(t) = \frac{1}{\overline{v_{p0}^2}}\int_0^\infty E_{p_L}(n)\cos\omega t\,dn = \frac{2}{\pi}\frac{\overline{v_f^2}}{\overline{v_p^2}}\mathcal{J}_{f_L}\int_0^\infty \frac{(a^2+b^2\omega^2)\cos\omega t}{(a^2+\omega^2)\left(1+\omega^2\mathcal{J}_{f_L}^2\right)}d\omega =$$

$$= \frac{\overline{v_f^2}}{\overline{v_p^2}}\frac{1}{a^2\mathcal{J}_{f_L}^2-1}\left[\left(a^2\mathcal{J}_{f_L}^2-b^2\right)\exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right) - \right.$$

$$\left. - a\mathcal{J}_{f_L}(1-b^2)\exp(-at)\right] =$$

$$= \frac{1}{a\mathcal{J}_{f_L}-1}\left[\frac{\left(a^2\mathcal{J}_{f_L}^2-b^2\right)\exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right)}{a\mathcal{J}_{f_L}+b^2} - \frac{a\mathcal{J}_{f_L}(1-b^2)}{a\mathcal{J}_{f_L}+b^2}\exp(-at)\right].$$

Стало быть, можно сделать вывод о том, что коэффициент лагранжевой корреляции для движения дискретной частицы уже больше не определяется единственной экспоненциальной функцией.

По коэффициенту лагранжевой корреляции можно с помощью уравнения (5.36) определить коэффициент диффузии:

$$\epsilon_p = \overline{v_p^2} \int_0^t R_{p_L}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \overline{v_f^2} \mathcal{J}_{f_L} \left[ 1 - \frac{(a^2 \mathcal{J}_{f_L}^2 - b^2) \exp(-t/\mathcal{J}_{f_L}) - (1 - b^2) \exp(-at)}{a^2 \mathcal{J}_{f_L}^2 - 1} \right].$$

Тогда при $\epsilon_f = \overline{v_f^2} \mathcal{J}_{f_L} [1 - \exp(-t/\mathcal{J}_{f_L})]$ после некоторых преобразований получим

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} = 1 + \frac{1 - b^2}{a^2 \mathcal{J}_{f_L}^2 - 1} \frac{\exp(-at) - \exp(-t/\mathcal{J}_{f_L})}{1 - \exp(-t/\mathcal{J}_{f_L})}.$$

Разница в поведении дискретных частиц и жидкости становится более ощутимой с уменьшением величины $b$, т. е. при убывании отношения $\rho_f/\rho_p$. В случае твердых частиц в турбулентном потоке воздуха при атмосферных условиях величина $\rho_f/\rho_p$ имеет порядок 1/2000; поэтому можно принять $b = 0$.

На рис. 5.11 показано, как в этом случае с увеличением $n$ убывает величина $E_{p_L}(n)/E_{f_L}(n) = a^2/(a^2 + 4\pi^2 n^2)$, а на рис. 5.12 изображено, как возрастает отношение $\epsilon_p/\epsilon_f$ по времени при различных значениях параметра $a\mathcal{J}_{f_L}$: 0,1, 1 и 10. Для определенности заметим, что для частиц с диаметром 100 *мк* величина $a$ — порядка 10 *сек*$^{-1}$.

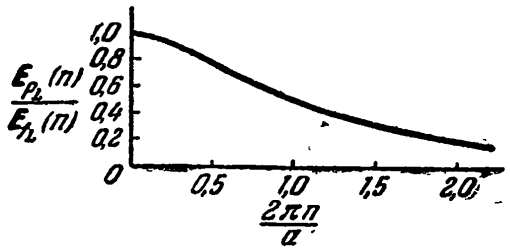



Рис. 5.11. Убывание отношения энергетических спектров дискретной частицы и жидкости с увеличением частоты при $\rho_f/\rho_p \to 0$.

Другим интересным предельным случаем является тот, когда плотность дискретной частицы мала по сравнению с плотностью жидкости. Этот случай наблюдается при дисперсии мелких пузырьков газа в турбулентном потоке жидкости. При $\rho_p/\rho_f \to 0$ величина $b \to 3$. Обычно силой Бассэ пренебрегать нельзя, но если принять, что вязкость жидкости стремится к нулю, то значения $a$ и $c$ тоже обращаются в нуль. Тогда уравнение (5.116) сводится к соотношению

$$\frac{dv_p}{dt} \approx b \frac{dv_f}{dt},$$

где $b \to 3$. При этом существенную роль играют только силы, связанные с градиентом давления в жидкости и с относительным уско-

рением виртуальной массы. Записанное выше уравнение представляет результат равновесия двух этих сил.

Далее, из соотношений (5.119) и (5.125) получается следующий замечательный результат, что при $a = c = 0$

$$\frac{E_{p_L}(n)}{E_{f_L}(n)} = \frac{\overline{v_p^2}}{\overline{v_f^2}} = b^2 \approx 9,$$

т. е. интенсивность и амплитуды пульсационного движения частицы значительно больше тех же характеристик для жидкости. Из формул (5.120) вытекает, что

$$R_{p_L}(t) = R_{f_L}(t)$$

и следовательно,

$$\mathcal{J}_{p_L} = \mathcal{J}_{f_L}.$$

Таким образом, всегда выполняется равенство $\epsilon_p/\epsilon_f = \overline{v_p^2}/\overline{v_f^2} = b^2$, которое также непосредственно вытекает из соотношений (5.122).

Однако, как только $a$ оказывается не нулем, а конечной величиной, отношение $\epsilon_p/\epsilon_f$ становится функцией времени, стремящейся

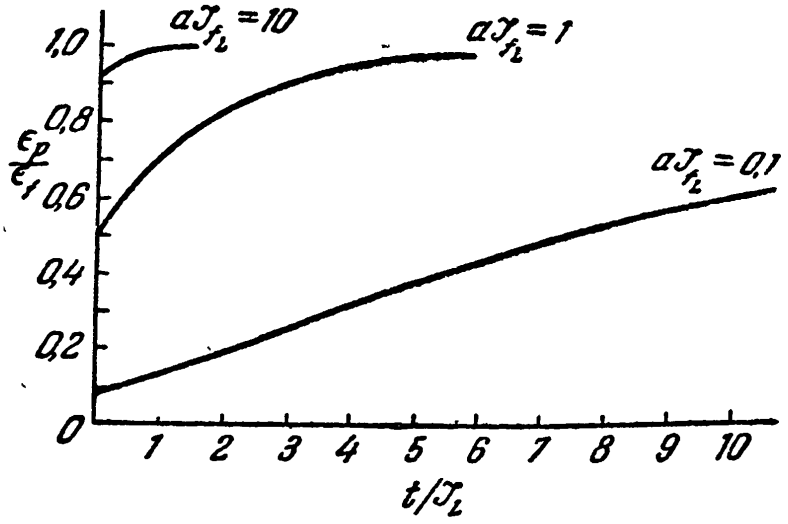



Рис. 5.12. Возрастание отношения коэффициентов диффузии дискретной частицы и жидкости в зависимости от времени при различных значениях $a\mathcal{J}_{f_L}$ и при $\rho_f/\rho_p \to 0$.

при $t \to \infty$ к значению 1. При $a \to 0$ и $t \to \infty$ выражение для $\epsilon_p/\epsilon_f$ становится неопределенным.

Этот параграф мы закончим рассмотрением влияния разницы плотностей дискретной частицы и жидкости на индукционный период [70], который наблюдается тогда, когда условия движения дискретных частиц в начальный момент не соответствуют стационарному случаю, например, если частицы в начале процесса диффузии находятся

в покоящемся состоянии. Логично ожидать, что этот эффект с увеличением отношения $\rho_p/\rho_f$ будет усиливаться. Поэтому будем рассматривать в последующем лишь настолько большие значения $\rho_p/\rho_f$, что коэффициент $b \approx 0$. Но тогда одновременно и коэффициент $c \approx 0$. В этом случае уравнение (5.116) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dv_p}{dt} + av_p = av_f.$$

Пусть $v_{p\infty}(t)$ — решение этого уравнения при установившемся состоянии. Решение, которое удовлетворяет начальному условию

$$t = 0 \quad v_p = 0,$$

запишется так:

$$v_p(t) = v_{p\infty}(t) - v_{p\infty}(0)\exp(-at).$$

Рассмотрим снова большое число дискретных частиц, начальный момент движения которых обозначим через $t_0$ и положим, что в этот момент $y_p(t_0) = 0$. По истечении времени $t$ распространение $y_p(t_0 + t)$ будет равно

$$y_p(t_0+t) = \int_0^t v_p(t_0+t')\,dt' =$$

$$= \int_0^t v_{p\infty}(t_0+t')\,dt' - v_{p\infty}(t_0)\int_0^t \exp(-at')\,dt' =$$

$$= \int_0^t v_{p\infty}(t_0+t')\,dt' - \frac{v_{p\infty}(t_0)}{a}[1-\exp(-at)].$$

Возьмем от этого выражения его среднеквадратичное значение по большому числу частиц:

$$\overline{y_p^2}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt_0 \int_0^t dt' \int_0^t v_{p\infty}(t_0+t')\,v_{p\infty}(t_0+t'')\,dt'' +$$

$$+ \frac{[1-\exp(-at)]^2}{a^2T}\int_0^T v_{p\infty}^2(t_0)\,dt_0 -$$

$$- \frac{2}{aT}[1-\exp(-at)]\int_0^T dt_0 \int_0^t v_{p\infty}(t_0)\,v_{p\infty}(t_0+t')\,dt'.$$

Поскольку при однородной стационарной турбулентности

$$\overline{v_{p\infty}^2(t_0)} = \overline{v_{p\infty}^2(t_0+t')} = \overline{v_{p\infty}^2},$$

то из предыдущего уравнения, изменяя порядок интегрирования и пользуясь описанным выше методом, получаем

$$\overline{y_p^2}(t) = \overline{v_{p\infty}^2}\left\{2\int_0^t (t-\tau)\,R_{p_L}(\tau)\,d\tau - \frac{2}{a}[1-\exp(-at)]\int_0^t R_{p_L}(\tau)\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{[1-\exp(-at)]^2}{a^2}\right\}, \quad (5.126)$$

где

$$R_{p_L}(\tau) = \frac{\overline{v_{p\infty}(t)\,v_{p\infty}(t+\tau)}}{\overline{v_{p\infty}^2}}.$$

Следовательно,

$$\epsilon_p = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{y_p^2}(t) =$$
$$= \overline{v_{p\infty}^2}[1-\exp(-at)]\left[\int_0^t R_{p_L}(\tau)\,d\tau - \frac{1}{a}R_{p_L}(t) + \frac{1}{a}\exp(-at)\right]. \quad (5.127)$$

Если это выражение сравнить с формулой для установившегося состояния [см. уравнение (5.36)]

$$(\epsilon_p)_{\text{уст}} = \overline{v_{p\infty}^2}\int_0^t R_{p_L}(\tau)\,d\tau,$$

то можно заметить, что коэффициент диффузии $\epsilon_p$ зависит от времени не только из-за ограниченности диффузии пределами масштаба турбулентности при малом времени, но также и благодаря переходному процессу индукции.

Для интенсивности турбулентного движения частицы получим выражение

$$\overline{v_p^2} = \overline{v_{p\infty}^2}[1-2\exp(-at)\,R_{p_L}(t) + \exp(-2at)]. \quad (5.128)$$

Индукционный период определяется функцией $\exp(-at)$. Если рассматривать твердые частицы в турбулентном потоке воздуха, то для частиц с диаметром 100 *мк* получим значение $a \approx 10$ *сек*$^{-1}$. Если принять $\exp(-at) = 0{,}05$, то индукционный период составит 0,3 *сек*. Хотя этот период и является довольно непродолжительным, тем не

менее в высокоскоростном потоке частица в течение этого индукционного периода может пройти значительное расстояние.

Когда коэффициент корреляции $R_{f_L}(t) = \exp\left(-t/\mathcal{J}_{f_L}\right)$, то для $R_{p_L}(t)$ справедливо полученное выше выражение

$$R_{p_L}(t) = \frac{1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1}\left[a\mathcal{J}_{f_L}\exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right) - \exp(-at)\right].$$

Отсюда

$$\overline{v_p^2} = \overline{v_{p\infty}^2}\left[1 - \frac{2a\mathcal{J}_{f_L}}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1}\exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}} - at\right) + \frac{a\mathcal{J}_{f_L} + 1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1}\exp(-2at)\right] =$$

$$= \overline{v_f^2}\frac{a\mathcal{J}_{f_L}}{a\mathcal{J}_{f_L} + 1}\left[1 - \frac{2a\mathcal{J}_{f_L}}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1}\exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}} - at\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a\mathcal{J}_{f_L} + 1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1}\exp(-2at)\right]$$

и

$$\epsilon_p = \overline{v_f^2}\frac{\mathcal{J}_{f_L}}{a^2\mathcal{J}_{f_L}^2 - 1}[1 - \exp(-at)] \times$$

$$\times\left\{a^2\mathcal{J}_{f_L}^2\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right)\right] - [1 - \exp(-at)] + \right.$$

$$\left. + a\mathcal{J}_{f_L}\left[\exp(-at) - \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right)\right]\right\}.$$

## § 5.8. Влияние сжимаемости

Соотношения между диффузией жидких частиц и лагранжевой корреляцией скорости, выведенные в предыдущем параграфе, носят общий характер и не зависят от сжимаемости, хотя диффузия сама по себе, а также корреляции не свободны от ее влияния, так как сжимаемость влияет на движение жидких частиц. Рассмотрим, например, смещение частицы в направлении оси $x_2$, начиная с момента времени $t = 0$:

$$y_2(t) = \int_0^t v_2(t')\,dt' = v_2(0)\,t + \frac{1}{2!}\left[\frac{dv_2}{dt}\right]_{t=0}t^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{d^2v_2}{dt^2}\right]_{t=0}t^3 + \ldots;$$

здесь, согласно уравнению движения Навье — Стокса [см. уравнение (1.9) или (1.11)], каждая из величин $dv_2/dt$, $d^2v_2/dt^2$, ... содержит член, отражающий влияние сжимаемости.

Таким образом, скорости диффузии меченых жидких частиц и транспортабельных субстанций зависят от сжимаемости жидкости. Если для описания процесса диффузии ввести коэффициент диффузии, то при этом придется рассматривать то его значение, которое отличается от соответствующей величины для несжимаемой жидкости.

Тогда распространение транспортабельной субстанции будет по-прежнему определяться градиентом осредненной величины и будет происходить в направлении, соответствующем этому градиенту.

Существует, однако, случай, когда распространение тепла может происходить в направлении, противоположном тому, которое определяется градиентом осредненной температуры, т. е. в направлении, совпадающем с этим локальным градиентом, а не в противоположном ему. Этот случай наблюдается при неравномерном распределении осредненного давления и при отклонении распределения осредненной температуры от адиабатического, которое определяется соотношением

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa},$$

откуда, например, следует, что

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\Theta}{p} \frac{dP}{dt},$$

где $\varkappa = c_p/c_v$.

Давно известно, что в устойчивой расслоенной атмосфере может наблюдаться перенос тепла, направленный вдоль градиента температуры, от низкой температуры к более высокой [56]. Если распределение температуры по высоте $x_2$ является политропическим с показателем степени $n$, то расслоение устойчиво, если $n < \varkappa$, так что

$$\frac{d}{dx_2}(\Theta_{\text{ад}} - \Theta_{\text{пол}}) > 0.$$

В диапазоне $1 < n < \varkappa$ перенос «против» градиента температуры наблюдается в том случае, когда процесс происходит благодаря турбулентности в атмосфере.

Турбулентность вызывает перемешивание верхних слоев атмосферы с нижними, стремясь приблизить распределение температуры к адиабатическому ($n \to \varkappa$). Частицы воздуха, движущиеся под действием турбулентности вверх и вниз, от одного слоя к другому, сжимаются или расширяются по адиабатическому закону. Повышение или понижение температуры из-за адиабатического сжатия или расширения приводит к тому, что частица воздуха имеет более высокую температуру, нежели окружающая ее среда, при движении вниз и более низкую температуру при движении вверх. Вследствие этой разности температур происходит теплообмен с окружающей средой, и чистый эффект выражается в переносе тепла от верхних слоев атмосферы к нижним. Как показал Шульц-Грунов [57], если принять, что

под действием турбулентности вверх и вниз движется одна и та же частица воздуха, то в ней будет происходить циклический термодинамический процесс. На диаграмме этого процесса в координатах давление — объем можно видеть, что воздушная частица поглощает тепло при низком давлении и выделяет его при высоком давлении. Это как раз и есть то, что наблюдается в холодильном процессе.

Такой же процесс теплообмена может происходить в следе за телами в сжимаемом потоке при больших числах Маха [58], когда измеренная температура торможения (например, на поверхности тела) оказывается значительно ниже ожидаемой. Обычные значения коэффициента восстановления, т. е. отношения действительной температуры торможения к температуре адиабатического торможения, в ламинарном пограничном слое близки к величине $\sqrt{\mathrm{Pr}}$, которая для воздуха составляет $\sim 0{,}85$. Однако в этом случае были измерены значительно более низкие, даже отрицательные, значения.

Одно интересное устройство, которое уже нашло практическое применение, основано на только что описанном явлении. Это — вихревая труба Ранка — Хильша для «сепарации» газа на горячую и холодную фракции [59–61]. По существу, это устройство представляет собой цилиндрическую трубу, один из концов которой закрыт диафрагмой с центральным отверстием; другой конец трубы может быть в большей или меньшей степени прикрыт с помощью дроссельной заслонки. Газ вводится со звуковой или со сверхзвуковой скоростью через тангенциальные сопла на периферии трубы, желательнее в сечении, расположенном ближе к концу трубы с центральным отверстием. Вытекающий через это центральное отверстие газ обладает значительно меньшей температурой торможения, нежели газ, втекающий в трубу, а температура торможения газа, вытекающего через дроссельную заслонку на другом конце трубы, наоборот, оказывается значительно выше. Отношение расходов фракций и отношение соответствующих температур газов, вытекающих с разных концов трубы, зависят от степени дросселирования на «горячем» конце.

Внутри цилиндрической трубы наблюдается расслоение турбулентного потока газа, статическое давление $P$ в котором уменьшается в радиальном направлении к оси трубы. Радиальное распределение температуры, по-видимому, не является адиабатическим, а турбулентный обмен между газовыми слоями приводит к возникновению потока тепла от внутренних участков к стенке трубы, направленного вдоль градиента температуры.

Объяснение этого эффекта турбулентного обмена в сжимаемом газе с неравномерными распределениями осредненной температуры и осредненного давления может быть основано на теории, изложенной в § 5.4.

Хотя распределение осредненного давления и, возможно, распределение осредненной скорости неравномерны, все же будем считать,

что турбулентное течение достаточно однородно и, следовательно, можно пользоваться соотношением для однородной турбулентности.

Примем вначале равновесное распределение температуры в стационарном состоянии, полученное из уравнения баланса между полным потоком тепла через единицу объема пространства и выделением тепла вследствие сжатия и вязкой диссипации.

Полный поток тепла состоит из двух частей, обусловленных соответственно конвекцией и молекулярной теплопроводностью. Таким образом, полный поток тепла равен

$$\rho U_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} c_v - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\right).$$

Выделение тепла вследствие сжатия и вязкой диссипации определяется по работе, совершаемой нормальными напряжениями и напряжениями сдвига при деформации; таким образом, выделение тепла равно

$$e\sigma_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i},$$

где $e$ — коэффициент пропорциональности.

Используя для $\sigma_{ij}$ выражение (1.8), получаем для выделения тепла следующую формулу:

$$e\left\{-P\frac{\partial U_j}{\partial x_j}+\mu\left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}+\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)-\frac{2}{3}\Theta\delta_{ij}\right]\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right\}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

имеем

$$-P\frac{\partial U_j}{\partial x_j}=P\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{dP}{dt}-\frac{1}{e}(c_p-c_v)\frac{d\Theta}{dt}.$$

Следовательно, уравнение, выражающее баланс тепла, принимает вид

$$\rho c_p U_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\right)=$$

$$=e\left[U_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}+\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right)^2\right]. \quad (5.129)$$

Теперь положим, как и раньше, что

$$\rho=\bar{\rho}+\tilde{\rho},\quad U_i=\bar{U}_i+u_i,\quad \Theta=\bar{\Theta}+\theta,\quad P=\bar{P}+p.$$

Если пренебречь влиянием молекулярной теплопроводности и вязкой диссипацией при осредненном движении, то осредненное по времени

уравнение теплового баланса запишется так:

$$\overline{\rho} c_p \overline{U}_i \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} = -\overline{\widetilde{\rho} u_i c_p} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\widetilde{\rho} c_p \theta u_i} + \overline{\widetilde{\rho}\theta} c_p \overline{U}_i + c_p \overline{\widetilde{\rho}\theta u_i}\right) +$$

$$+ \varepsilon\left[\overline{U}_i \frac{\overline{\partial P}}{\partial x_i} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \mu \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} - \frac{2}{3}\mu \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2}\right].$$

Это уравнение содержит несколько турбулентных членов, порядок величин которых, по всей вероятности, неодинаков. В общем случае можно считать, что величины $\widetilde{\rho}/\overline{\rho}$ и $p/\overline{P}$ на один порядок ниже, чем величина $u_i/\overline{U}_i$. Если это предположение правильно, то записанное выше уравнение можно упростить путем пренебрежения членами, содержащими пульсации плотности и давления. Отсюда

$$\overline{\rho} c_p \overline{U}_i \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho} c_p \overline{\theta u_i}\right) +$$

$$+ \varepsilon\left[\overline{U}_i \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} - \frac{2}{3}\mu \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2}\right]. \quad (5.130)$$

Тогда турбулентный член $\overline{\theta u_i} = \overline{\Theta u_i}$ определяет перенос тепла турбулентной пульсацией скорости $u_i$ через плоскость, перпендикулярную к оси $x_i$:

$$\overline{\Theta u_i} = \frac{1}{T}\int_0^T \Theta(t_0)\, v_i(t_0)\, dt_0.$$

Теперь предположим, что:

1. Температура $\Theta(t_0)$ жидкой частицы, которая проходит через плоскость $x_i$ в момент времени $t_0$, определяется распределениями осредненной температуры и осредненного давления в зоне, через которую она проходит, и в то же время жидкая частица подвергается адиабатическому сжатию или расширению, а также испытывает обмен с окружающей средой, скорость которого прямо пропорциональна разности температур.

2. С одной стороны, масштаб лагранжевой корреляции относительно мал, так что на расстоянии, равном этому масштабу, изменение осредненной температуры и осредненного давления можно аппроксимировать линейными зависимостями.

3. С другой стороны, жидкая частица находится в пути в течение настолько продолжительного времени, что это время можно считать бесконечно большим.

Тогда дифференциальное уравнение для температуры жидкой частицы, выражающее наличие теплового баланса, запишется в виде

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{\Theta}{\overline{P}}\frac{d\overline{P}}{dt} + \alpha(\overline{\Theta} - \Theta) + \varepsilon\frac{\varepsilon}{c_p}. \quad (5.131)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет вклад, приходящийся на долю адиабатического сжатия частицы, когда она испытывает изменение давления $d\bar{P}/dt$. Третий член в правой части представляет вклад вязкой диссипации. В последующем этим членом мы пренебрежем. Однако если этот член удержать, то единственное отличие конечного результата будет состоять в замене осредненной температуры $\bar{\Theta}$ в выражении (5.132) для $\overline{\Theta u_i}$ на величину $\bar{\Theta} + \varepsilon\varepsilon/\alpha c_p$.

Обозначим время перемещения через $t$. Тогда для начального условия $\Theta = \Theta_0$ при $t = 0$ решение нашего дифференциального уравнения запишется следующим образом:

$$\Theta = \alpha \exp(-\alpha t) \int_0^t \bar{\Theta}(t') \left[\frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(t')}\right]^{(\varkappa-1)/\varkappa} \exp(\alpha t')\, dt' + \\ + \Theta_0 \left[\frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(0)}\right]^{(\varkappa-1)/\varkappa} \exp(-\alpha t).$$

Выражение для температуры жидкой частицы, которая в момент времени $t_0$ проходит через плоскость $x_i$, с учетом предположения (3) принимает вид

$$\Theta(t_0) = \alpha \int_{-\infty}^{t_0} \bar{\Theta}(t') \left[\frac{\bar{P}(t_0)}{\bar{P}(t')}\right]^{(\varkappa-1)/\varkappa} \exp[-\alpha(t_0 - t')]\, dt'.$$

Но в первом приближении можно положить

$$\bar{\Theta}(t') = \bar{\Theta}(t_0) - \frac{d\bar{\Theta}}{dt'}(t_0 - t') = \bar{\Theta}(x_j) - \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_j}\int_{t'}^{t_0} v_j(t'')\, dt''$$

и

$$\bar{P}(t') = \bar{P}(x_j) - \frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\int_{t'}^{t_0} v_j(t'')\, dt''.$$

Кроме того, с той же степенью приближения можем записать

$$\left[\frac{\bar{P}(t_0)}{\bar{P}(t')}\right]^{(\varkappa-1)/\varkappa} = 1 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{1}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\int_{t'}^{t_0} v_j(t'')\, dt''.$$

Следовательно,

$$\bar{\Theta}(t')\left[\frac{\bar{P}(t_0)}{\bar{P}(t')}\right]^{(\varkappa-1)/\varkappa} = \bar{\Theta}(x_j) - \left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\right)\int_{t'}^{t_0} v_j(t'')\, dt'',$$

откуда

$$\Theta(t_0) = \bar{\Theta}(x_j) - \alpha\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{t_0}\exp\left[-\alpha(t_0-t')\right]dt'\int_{t'}^{t_0}v_j(t'')\,dt''.$$

Тогда выражение для корреляции $\overline{\Theta u_i}$ получится в таком виде:

$$\overline{\Theta u_i} = -(\epsilon_\theta^*)_{ij}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\right), \tag{5.132}$$

где

$$(\epsilon_\theta^*)_{ij} = \frac{\alpha}{T}\int_0^T dt_0\int_{-\infty}^{t_0}\exp\left[-\alpha(t_0-t')\right]dt'\int_{t'}^{t_0}v_i(t_0)\,v_j(t'')\,dt''.$$

Пользуясь методом, применявшимся в § 5.4, это выражение можно преобразовать так:

$$(\epsilon_\theta^*)_{ij} = \int_0^\infty\overline{v_i(t_0)\,v_j(t_0+\tau)}\exp(-\alpha\tau)\,d\tau =$$

$$= v_i'v_j'\int_0^\infty[R_{i,j}(\tau)]_L\exp(-\alpha\tau)\,d\tau.$$

Полученное выше выражение для $\overline{\Theta u_i}$ показывает, что (1) если распределение осредненной температуры адиабатическое, то чистый перенос тепла отсутствует, и что (2) если распределение осредненной температуры не является адиабатическим, то происходит перенос тепла в направлении градиента температуры при условии, что производные $\partial\bar{\Theta}/\partial x_j$ и $\partial\bar{P}/\partial x_j$ имеют одинаковые знаки, а также

$$\left|\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\right| > \left|\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_j}\right|.$$

Если воспользоваться только что полученным выражением для $\overline{\Theta u_i}$, то тогда уравнение теплового баланса запишется следующим образом:

$$\bar{\rho}c_p\bar{U}_i\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\rho}c_p(\epsilon_\theta^*)_{ij}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \varepsilon\left[\bar{U}_i\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i} + \mu\,\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} - \frac{2}{3}\mu\overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2}\right]. \tag{5.133}$$

В этом выражении после проведения свертки по индексам $i$ и $j$ несимметричный тензор вихревой диффузии $(\epsilon_\theta^*)_{ij}$ можно заменить симметричным тензором

$$(\epsilon_\theta)_{ij} = \frac{1}{2}[(\epsilon_\theta^*)_{ij} + (\epsilon_\theta^*)_{ji}] =$$

$$= \frac{1}{2} v_i' v_j' \int_0^\infty \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\} \exp(-\alpha\tau)\, d\tau.$$

Во многих практических приложениях уравнение (5.133) в своей общей форме не поддается решению. Однако в некоторых особых случаях оно допускает значительные упрощения. Если это уравнение применяется к процессам переноса тепла в вихревой трубе, то принято рассматривать только вращательную компоненту скорости $U_\varphi$, так как эта компонента значительно больше, чем радиальная и осевая. Кроме того, изменения в радиальном направлении значительно больше, чем в других; вследствие этого можно положить $\bar{U}_i \partial/\partial x_i \approx 0$.

Другое упрощение состоит в предположении, что для расслоенного потока, где перенос происходит в основном в радиальном направлении, можно ввести коэффициент переноса импульса $\epsilon_m$ и принять для него постоянное значение. Тогда диссипативный член может быть вычислен по выражению

$$\epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_\varphi}{\partial r} - \frac{\bar{U}_\varphi}{r}\right)^2.$$

Следовательно, уравнение баланса тепла примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho} c_p \epsilon_\theta \left(r \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\bar{\theta}}{\bar{P}} r \frac{\partial \bar{P}}{\partial r}\right) + e \epsilon_m \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{U}_\varphi}{\partial r} - \frac{\bar{U}_\varphi}{r}\right)^2 = 0$$

или, поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \bar{\rho} \frac{\bar{U}_\varphi^2}{r}$$

и

$$\bar{\rho} \frac{\bar{\theta}}{\bar{P}} = \frac{e}{c_p - c_v} = \frac{e\varkappa}{c_p(\varkappa - 1)},$$

то

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho} c_p \epsilon_\theta r \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} - \frac{e}{c_p} \frac{\bar{U}_\varphi^2}{r}\right) + e \epsilon_m \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{U}_\varphi}{\partial r} - \frac{\bar{U}_\varphi}{r}\right)^2 = 0.$$

Радиальное распределение температуры может быть вычислено, если известно распределение $\bar{U}_\varphi(r)$.

# УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

$C$ — концентрация.

$c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

$D$ — диаметр трубы; коэффициент молекулярной диффузии.

$d$ — диаметр цилиндра или стержня.

$E_L$ — функция лагранжева энергетического спектра.

$e_{ij}$ — направляющие косинусы.

$F$ — «движущая сила».

$F(u_1, u_2)$ — распределение плотности совместной вероятности.

$f$ — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.

$L$ — расстояние, на котором транспортабельная субстанция жидкого моля сохраняется постоянной; $L_m$ — для импульса; $L_\gamma$ — для скалярной величины.

$M$ — размер ячейки решетки; молекулярный вес.

$n$ — частота.

$P$ — статическое давление; $\overline{P}$ — осредненная по времени величина; $p$ — турбулентная пульсация.

$P$ — вероятность.

$\mathrm{Pr}$ — число Прандтля $\nu/\mathfrak{f}_\theta$; $\mathrm{Pr}_{\text{турб}} = \epsilon_m/\epsilon_\theta$.

$Q$ — распределение плотности вероятности.

$\overline{q^2}$ — $\overline{u_i u_i}$ — удвоенная кинетическая энергия турбулентности.

$R_{ij}$ — коэффициент тензора пространственной корреляции скорости второго ранга.

$(R_{ij})_L$ — коэффициент тензора лагранжевой корреляции скорости второго ранга.

$R_L$ — коэффициент лагранжевой временной корреляции.

$\mathrm{Re}$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Re}_\lambda = u'\lambda_g/\nu$; $\mathrm{Re}_M = \overline{U}_1 M/\nu$; $\mathrm{Re}_{\Lambda_f} = u'\Lambda_f/\nu$.

$r$ — расстояние между двумя точками.

$S$ — интенсивность точечного источника.

$S^*$ — интенсивность линейного источника на единицу длины.

$t$ — время.

$U_i$ — эйлерова скорость; $\overline{U}_i$ — осредненная по времени величина; $u_i$ — компонента турбулентной пульсации; $u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}}$.

$v_i$ — лагранжева турбулентная пульсация скорости.

$x_i$ — эйлеровы координаты.

$y_i$ — лагранжевы координаты жидкой частицы.

$\alpha$ — коэффициент обмена.

$\beta$ — $2\pi n/\alpha$.

$\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

$\varepsilon_{ijk}$ — антисимметричный единичный тензор.

$\epsilon$ — коэффициент вихревой диффузии; $\epsilon_m$ — для импульса; $\epsilon_\omega$ — для завихренности; $\epsilon_\gamma$ — для скалярной субстанции; $\epsilon_q$ — для кинетической энергии турбулентности; $\epsilon_\theta$ — для тепла.

$\epsilon_{ij}$ — коэффициент тензора вихревой диффузии.

$e$ — коэффициент пропорциональности.

$\varepsilon$ — диссипация на единицу массы под действием турбулентности.

$\eta$ — $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$.

$\eta_i$ — лагранжево расстояние, проходимое жидкой частицей.

$\Gamma$ — скалярная субстанция; $\overline{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; $\gamma$ — турбулентная пульсация.

$\Gamma$ — гамма-функция.

$\mathcal{J}_L$ — лагранжев интегральный временной масштаб.

$(\mathcal{J}_{i,j})_L$ — тензор лагранжева интегрального временного масштаба.

$\mathfrak{I}$ — поток через единицу площади; $\mathfrak{I}_\mathcal{P}$ — для транспортабельной субстанции; $\mathfrak{I}_m$ — для импульса; $\mathfrak{I}_\gamma$ — для скалярной субстанции.

$\varkappa$ — $c_p/c_v$, отношение удельных теплоемкостей.

$\mathcal{K}$ — коэффициент теплопроводности.

$\mathfrak{k}_\theta$ — $\mathcal{K}/c_p\rho$; $\mathfrak{k}_c$, $D$ — коэффициент молекулярной диффузии.

$\Lambda_L$ — лагранжев интегральный масштаб $v'\mathcal{J}_L$.

$\lambda_g$ — пространственный поперечный микромасштаб.

$\lambda$ — коэффициент трения о стенку при течении в трубе.

$\mathcal{L}$ — коэффициент в уравнении «диффузии» Рейхардта; $\mathcal{L}_\gamma$ — для скалярной субстанции.

$l$ — путь смешения Прандтля; $l_m$ — для импульса; $l_\gamma$ — для скалярной субстанции.

$\mu$ — динамический коэффициент вязкости.

$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

$\Omega_k$ — завихренность; $\overline{\Omega}_k$ — осредненная по времени величина; $\omega_k$ — турбулентная пульсация.

$\omega$ — угловая частота.

$\mathcal{P}$ — транспортабельная субстанция; $\overline{\mathcal{P}}$ — осредненная по времени величина.

$\pi$ — 3,14159...

$\mathfrak{R}$ — газовая постоянная.

$\rho$ — плотность.

$\sigma_{ij}$ — тензор напряжений.

$\tau$ — время.

$\tau_E$ — эйлеров временной микромасштаб.
$\tau_L$ — лагранжев временной микромасштаб.
$\Theta$ — дилатация.
$\Theta$ — температура; $\overline{\Theta}$ — осредненная по времени величина; $\theta$ — турбулентная пульсация.
$\mathcal{V}$ — скорость крупномасштабных турбулентных движений.
$\xi_i$ — эйлеровы координаты.
$\zeta$ — скорость деформации $\overline{e_{li}e_{lj}\,\partial u_i/\partial x_j}$ при $t \to \infty$.

ГЛАВА 6

# НЕИЗОТРОПНАЯ СВОБОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

## § 6.1. Введение

Свободная турбулентность наблюдается в таком потоке, где отсутствует непосредственное влияние каких-либо твердых границ на турбулентность потока. При этом допускается косвенное влияние, поскольку твердые границы могут порождать условия существования свободной турбулентности; например, препятствие, помещенное в потоке, может создать такую картину течения, при которой наблюдается свободная турбулентность.

В неизотропном потоке имеются отличные от нуля осредненные по времени величины напряжений сдвига; эти напряжения и создают турбулентные движения (см., например, § 4.2). Таким образом, в отличие от изотропной турбулентности, при которой турбулентные движения вследствие вязкой диссипации носят вырождающийся характер, в неизотропном турбулентном потоке существует как порождение, так и диссипация турбулентности.

Поток, обладающий отличными от нуля осредненными по времени напряжениями сдвига, идентичен потоку с осредненными по времени градиентами скорости. Значит, можно сказать, что неизотропная турбулентность наблюдается в таком потоке, целые области которого отличаются друг от друга по осредненной скорости обычно весьма существенно.

При изучении подобных турбулентных течений из практических соображений желательно ограничиться вначале наиболее простыми, элементарными видами течения. Эти элементарные виды течения можно разделить на две основные группы: (1) свободные струи и (2) течения в следе за препятствиями.

Дальнейшее разделение можно провести между двумерными, или плоскими, и осесимметричными осредненными потоками.

К настоящему времени выполнены теоретические и экспериментальные исследования следующих видов течения: течения на границе между двумя параллельными потоками с различными значениями

осредненной скорости (часто называемого полуструей); плоской и осесимметричной струи; плоского следа за цилиндрическим стержнем; осесимметричного следа за сферой; плоского следа непосредственно позади ряда цилиндрических стержней.

В перечисленных видах течения оказывается возможным выделить одно основное направление потока, скорость в котором значительно больше, нежели в каком-либо другом. Этот факт имеет очень важное значение, ибо позволяет существенно упростить теоретическое исследование этих течений. Указанные упрощения основаны на следующих предположениях:

1. Скорость осредненного течения в направлении, перпендикулярном к основному потоку, очень мала по сравнению со скоростью основного потока, и в некоторых случаях ею даже можно пренебречь.

2. Изменения различных параметров в направлении основного потока происходят очень медленно по сравнению с изменениями в поперечном направлении. Это предположение согласуется с тем фактом, что область свободного турбулентного течения в направлении основного потока обладает значительно большей протяженностью, нежели в поперечном направлении.

3. Изменение осредненного давления по области течения в поперечном направлении очень мало; в направлении основного потока давление изменяется, по существу, в соответствии с распределением давления в невозмущенном потоке. Распределение давления в направлении основного потока обычно является равномерным; поэтому можно принять допущение о том, что осредненное давление постоянно по всей области турбулентного течения.

В главе 4 уже говорилось о незавершенности теорий турбулентного течения со сдвигом. Пока еще не создано какой-либо статистической теории, эквивалентной теории изотропной турбулентности, которая дала бы возможность проанализировать турбулентное течение с поперечным сдвигом и найти, скажем, распределение скорости; в связи с этим наши знания о деталях механизма турбулентного течения, основанные на экспериментальных фактах, очень полезны для понимания этого механизма и интерпретации опытных данных.

Различные теории, разработанные применительно к свободным турбулентным потокам и постепенно ставшие более или менее классическими, носят чисто феноменологический характер. Мы рассматривали эти теории в главе 5; среди них отметим теории, основанные на предположении о том, что распределение скорости (или температуры, или концентрации) может быть вычислено с помощью соответствующим образом выбранных коэффициентов вихревой диффузии (теория Буссинеска и теории пути смешения), а также индуктивную теорию свободной турбулентности, выдвинутую Рейхардтом. Поскольку эти теории являются пока единственными, хотя и не очень удовлетворительными теориями, которыми мы можем воспользоваться

для расчета распределения осредненных параметров свободных турбулентных потоков, нам придется в дальнейшем изложении ссылаться только на них.

При использовании этих феноменологических теорий применительно к свободным турбулентным потокам широкое распространение получило предположение о подобии, или, лучше сказать, об автомодельности в том смысле, как это определено во введении к главе 3. Если говорить более строго, то понятие автомодельности используется здесь для выражения того факта, что турбулентность сохраняет свою структуру при распространении турбулентной области в направлении вниз по потоку.

В настоящее время накоплено уже достаточно экспериментальных данных о подобии профилей осредненной скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях струи и следа в направлении вниз по потоку. Для каждого из частных случаев свободных турбулентных потоков получаются колоколообразные кривые, которые оказываются геометрически подобными, если значения скорости в каком-либо сечении представлять в безразмерном виде, используя для этой цели в качестве масштаба скорости максимальную разность осредненных скоростей, а поперечные координаты относить к своему масштабу, равному местной ширине турбулентной области, или лучше, в случае симметричных профилей осредненной скорости, — к так называемой «полуширине». Это — такое расстояние от оси симметрии, на котором осредненная скорость составляет половину максимальной разности осредненных скоростей. Указанные масштабы скорости и длины зависят только от расстояния до некоторого фиктивного источника, из которого как бы берет начало свободный турбулентный поток (струя или след).

Это подобие картин течения в различных поперечных сечениях и автомодельность турбулентной структуры, движущейся вниз по течению вместе с основным потоком, следуют из того эмпирического факта, что области свободного турбулентного течения являются относительно узкими, а скорость основного течения значительно больше скорости в поперечном направлении, тогда как пространственные изменения в направлении основного потока намного меньше соответствующих изменений в поперечном направлении. Отсюда следует, что картина развития турбулентного течения вниз по потоку в сильной степени зависит от истории его возникновения. Этот вывод особенно справедлив для случая следа и струи в спутном равномерном потоке, скорость которого велика по сравнению с разностью между абсолютной скоростью струи и скоростью спутного потока.

Если бы порождения турбулентности осредненными напряжениями сдвига не происходило, то турбулентность в направлении вниз по потоку вырождалась бы, а автомодельность сохранялась бы в основ-

ной части диапазона волновых чисел, точно так же, как это происходит в вырождающейся изотропной турбулентности. Однако в свободном турбулентном потоке с поперечным сдвигом наблюдается порождение турбулентности. Но это порождение определяется градиентом распределения осредненной скорости, который, в свою очередь, зависит от турбулентности, возникшей выше по потоку и перенесенной вниз по нему благодаря турбулентной диффузии и конвекции. Эта тесная связь турбулентности и распределения осредненной скорости в некотором сечении и в сечениях, расположенных выше по потоку, позволяет ожидать подобия полной картины течения несмотря на то, что турбулентность непрерывно порождается основным движением через посредство турбулентных напряжений сдвига.

Ниже мы не будем останавливаться на всех исследованиях свободных турбулентных потоков. Мы ограничимся рассмотрением двух специальных случаев: (1) следа за цилиндром, который представляет собой группу течений в следе, и (2) круглой свободной струи, представляющей группу струйных течений. Этими двумя случаями представлены также соответственно как плоское, так и осесимметричное течения. Оба этих случая исследованы наиболее полно.

## § 6.2. Приближенные предположения, используемые для упрощения уравнений движения

Прежде чем анализировать два особых случая свободных турбулентных течений, упомянутых в предыдущем параграфе, полезно рассмотреть в более общей постановке те приближенные предположения, которые могут быть использованы для преобразований уравнений движения и которые совместны с эмпирическим фактом, состоящим в том, что свободные турбулентные зоны являются относительно узкими.

Осредненное движение мы будем полагать стационарным, а числа Рейнольдса будем считать настолько большими, что молекулярными эффектами по сравнению с турбулентными можно пренебречь.

Будем считать, что ось $x_1$ системы координат и соответствующая скорость $\overline{U}_1$ совпадают с направлением основного течения, т. е. с направлением, в котором скорость существенно больше, чем в других.

Введем для осей $x_1$, $x_2$ и $x_3$ соответственно масштабы длины $L_1$, $L_2$ и $L_3$. Поскольку турбулентная зона в направлениях осей $x_2$ и $x_3$ по сравнению с направлением оси $x_1$ является узкой, масштабы длины выбираются так, чтобы

$$\frac{L_2}{L_1} \ll 1, \quad \frac{L_3}{L_1} \ll 1, \quad \frac{L_2}{L_3} \sim 1. \tag{6.1}$$

Пусть $\mathcal{U}_1$ — подходящий масштаб для скорости осредненного течения $\overline{U}_1$; в качестве его удобно выбрать, например, максимальную разность скоростей в поперечном сечении, перпендикулярном к направлению осредненного течения.

Величины масштабов скорости $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_3$ для компонент скорости $\overline{U}_2$ и $\overline{U}_3$ зависят от масштаба скорости $\mathcal{U}_1$, потому что изменения скорости в различных направлениях, как это следует из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\mathcal{U}_1}{L_1} \qquad \frac{\mathcal{U}_2}{L_2} \qquad \frac{\mathcal{U}_3}{L_3}$$

не являются независимыми. Под отдельными слагаемыми уравнения неразрывности записаны порядки этих членов; они должны быть одинаковы. Отсюда

$$\frac{\mathcal{U}_1}{L_1} \sim \frac{\mathcal{U}_2}{L_2} \sim \frac{\mathcal{U}_3}{L_3},$$

или

$$\frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} = \frac{L_2}{L_1}, \quad \frac{\mathcal{U}_3}{\mathcal{U}_1} = \frac{L_3}{L_1}, \quad \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_3} \sim 1. \tag{6.2}$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \frac{L_2}{L_1}, \quad \frac{\overline{U}_3}{\overline{U}_1} = \frac{L_3}{L_1}, \quad \frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_3} \sim 1.$$

Уравнения движения Рейнольдса содержат турбулентные рейнольдсовы напряжения $\rho\overline{u_i u_j}$, для которых тоже необходимо ввести подходящий масштаб. Из опыта известно, что в анизотропных потоках с поперечным сдвигом интенсивности $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ одинаковы по порядку величины. Следовательно, для $u_1'$, $u_2'$ и $u_3'$ можно ввести один и тот же масштаб $\mathfrak{v}$. Величины напряжений сдвига $\rho\overline{u_i u_j}$ при $i \neq j$ по сравнению с $\rho\overline{u_1^2}$, $\rho\overline{u_2^2}$ и $\rho\overline{u_3^2}$ зависят от величины коэффициентов корреляции $\boldsymbol{R}_{ij}$ при $i \neq j$. Следовательно, можно положить, что

$$\overline{u_1^2} \sim \overline{u_2^2} \sim \overline{u_3^2} \sim \mathfrak{v}^2$$

и

$$\overline{u_i u_j} \sim \boldsymbol{R}_{ij}\mathfrak{v}^2 \quad \text{для} \quad i \neq j. \tag{6.3}$$

Целесообразно отдельно рассмотреть два различных случая течения этого типа.

1. Имеется постоянная скорость $U_0$, наложенная на скорость осредненного течения $\overline{U}_1$, причем $U_0/\overline{U}_1 \gg 1$.

Мы увидим далее, что порядок величины этого отношения не является независимым от порядка величины $L_1/L_2$.

Этот случай встречается при течении в следе и в свободной струе в спутном потоке, обладающем постоянной скоростью $U_0$, большой по сравнению с относительной скоростью истечения струи.

2. Наложенная скорость $U_0$ отсутствует или, в противном случае, имеет такой же порядок величины, как и $\overline{U}_1$. Это соответствует случаю свободной струи, вытекающей в неподвижную или движущуюся с малой скоростью окружающую среду.

Рассмотрим вначале уравнение движения Рейнольдса для случая 1. Ввиду того, что при сравнении явлений, происходящих в различных направлениях, существенной разницы между направлениями осей $x_2$ и $x_3$ не наблюдается, достаточно рассмотреть только уравнение для осей $x_1$ и $x_2$. Любой вывод, полученный в отношении оси $x_2$, справедлив также и для оси $x_3$.

Выпишем уравнение движения и под каждым членом поставим относительный порядок его величины по сравнению с другими членами, выраженный через масштабы скорости и длины.

Для оси $x_1$ получим

$$(U_0+\overline{U}_1)\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}+\overline{U}_3\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1^2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}-\frac{\partial}{\partial x^3}\overline{u_1u_3} \tag{6.4}$$

$$\frac{U_0}{\overline{U}_1}\frac{u_1^2}{L_1} \quad \frac{u_1^2}{L_1} \quad \frac{u_1^2}{L_1} \quad \frac{\Delta P_1}{\rho L_1} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{L_1} \quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_2} \quad R_{13}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_3}$$

или

$$\frac{U_0}{U_1} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_1}{\rho u_1^2} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{u_1^2} \quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{u_1^2}\frac{L_1}{L_2} \quad R_{13}\frac{\mathfrak{v}^2}{u_1^2}\frac{L_1}{L_3}$$

Под величиной $\Delta P_1$ подразумевается изменение давления в направлении оси $x_1$. Можно заметить, что величины $\overline{U}_2\,\partial\overline{U}_1/\partial x_2$ и $\overline{U}_3\,\partial\overline{U}_1/\partial x_3$ имеют такой же порядок, как и $\overline{U}_1\,\partial\overline{U}_1/\partial x_1$. Это можно показать следующим образом: величина $\overline{U}_2\,\partial\overline{U}_1/\partial x_2$ имеет порядок $u_2u_1/L_2\sim$ $\sim u_1^2/L_1$, так как $u_2=u_1L_2/L_1$.

Аналогичный результат получается и для члена $\overline{U}_3\,\partial\overline{U}_1/\partial x_3$.

Для уравнения движения в проекции на ось $x_2$ получим

$$(U_0+\overline{U}_1)\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial x_2}+\overline{U}_3\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2u_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2^2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2u_3}. \tag{6.5}$$

$$\frac{U_0}{\overline{U}_1}\frac{u_1^2L_2}{L_1^2} \quad \frac{u_1^2L_2}{L_1^2} \quad \frac{u_1^2L_2}{L_1^2} \quad \frac{\Delta P_2}{\rho L_2} \quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_1} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{L_2} \quad R_{23}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_3}$$

или

$$\frac{U_0}{\overline{U}_1} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{L_1^2}{L_2^2}\frac{\Delta P_2}{\rho u_1^2} \quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2L_1}{u_1^2L_2} \quad \frac{\mathfrak{v}^2L_1^2}{u_1^2L_2^2} \quad R_{23}\frac{\mathfrak{v}^2}{u_1^2}\frac{L_1^2}{L_2L_3}$$

На основании предположения о том, что $U_0/\overline{U}_1 \gg 1$ (случай 1), второй и третий члены в левой части уравнений (6.4) и (6.5) оказываются на порядок меньше. Если предположить, что коэффициенты корреляции $R_{12}$, $R_{13}$ и $R_{23}$ не являются малыми, то производная $\partial\overline{u_1^2}/\partial x_1$ в уравнении (6.4) мала по сравнению с $\partial\overline{u_1u_2}/\partial x_2$ и $\partial\overline{u_1u_3}/\partial x_3$, а производная $\partial\overline{u_2u_1}/\partial x_1$ в уравнении (6.5) мала по сравнению с другими турбулентными членами.

Так как в большинстве случаев величина $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$ может быть порядка 1, то из уравнения (6.4) следует, что величина $U_0/\overline{U}_1$ не может быть по порядку больше, нежели $L_1/L_2$; в противном случае все турбулентные члены должны были бы быть малы по сравнению с первым членом в левой части уравнения (6.4). Другими словами, величина $U_0/\overline{U}_1$ должна иметь тот же порядок, что и $L_1/L_2$. Но если это так, то первый член в левой части уравнения (6.5) также остается малым по сравнению с турбулентными членами $\partial\overline{u_2^2}/\partial x_2$ и $\partial\overline{u_2u_3}/\partial x_3$. Отсюда следует, что единственным членом, который может уравновесить эти турбулентные члены, является слагаемое, содержащее давление $\partial\overline{P}/\rho\,\partial x_2$. Следовательно, отношение $\Delta P_2/\rho\mathcal{U}_1^2$ по порядку величины одинаково с $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$.

Таким образом, если в уравнении движения (6.5) сохранить только члены, имеющие наибольший порядок величины, то оно упростится следующим образом:

$$\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_2} + \rho\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2^2} + \rho\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2u_3} = 0, \tag{6.6}$$

или, после интегрирования,

$$\overline{P} + \rho\overline{u_2^2} + \rho\int\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2u_3}\,dx_2 = P_0, \tag{6.6а}$$

где $P_0$ — давление в том же поперечном сечении, но снаружи турбулентной зоны.

Из уравнения (6.6а) получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dx_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2u_3}\,dx_2. \tag{6.7}$$

Но так как скорость снаружи турбулентной зоны равна постоянной величине $U_0$, то градиент давления $dP_0/dx_1 = 0$.

Можно заметить, далее, что турбулентные члены имеют тот же порядок, что и турбулентный член $\partial\overline{u_1^2}/\partial x_1$ в уравнении (6.4). Следовательно, если в этом уравнении также удержать только члены наивысшего порядка, то после упрощения уравнения (6.4) получим

$$U_0\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_1u_3}. \tag{6.8}$$

Это уравнение может быть решено, если известны функции $\overline{u_1u_2}$ и $\overline{u_1u_3}$ или их связь с распределением скорости $\overline{U}_1$. Тогда из уравнения (6.7) можно вычислить распределение давления.

Турбулентные члены могут быть выражены через распределение скорости $\overline{U}_1$ путем введения тензора вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{il}$, если предположить, что перенос импульса обусловлен диффузией градиентного типа:

$$-\overline{u_iu_j} = (\epsilon_m)_{il}\left(\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_l}\right).$$

В этом выражении все производные от скорости малы, за исключением $\partial\overline{U}_1/\partial x_2$ и $\partial\overline{U}_1/\partial x_3$. Отсюда, если считать, что все компоненты тензора $(\epsilon_m)_{il}$ одинаковы по порядку величины, уравнение (6.8) принимает вид *)

$$U_0\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3}\right]. \qquad (6.9)$$

Это уравнение, если компоненту $(\epsilon_m)_{11}$ тензора вихревой диффузии считать постоянной, приводит к решению типа кривой Гаусса.

Если течение является плоским, так что скорость $\overline{U}_1$ зависит только от $x_1$ и $x_2$, то при использовании теории пути смешения Прандтля можно получить другое решение. В этом случае наше уравнение имеет вид

$$U_0\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = l_m^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}\right)^2. \qquad (6.10)$$

Решение этого уравнения для следа за круглым цилиндром будет дано в следующем параграфе.

Во втором рассматриваемом случае мы не будем вводить в уравнение движения возможную наложенную постоянную скорость $U_0$, поскольку предполагается, что эта скорость, если она и существует, мала или имеет такой же порядок, как и $\overline{U}_1$, и, следовательно, не

---

*) Если коэффициент вихревой диффузии выразить не через тензор второго ранга, а через тензор четвертого ранга, то получим

$$-\overline{u_1u_2} = [(\epsilon_m)_{1212} + (\epsilon_m)_{1221}]\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + [(\epsilon_m)_{1213} + (\epsilon_m)_{1231}]\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3},$$

$$-\overline{u_1u_3} = [(\epsilon_m)_{1312} + (\epsilon_m)_{1321}]\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + [(\epsilon_m)_{1313} + (\epsilon_m)_{1331}]\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3}.$$

Эти соотношения в том случае, когда осредненное течение является плоским, приводят к тому же результату, что и уравнение (6.9).

влияет на анализ порядков величин:

$$\overline{U}_1\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}+\overline{U}_3\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1^2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_1u_3}. \tag{6.11}$$

$$\frac{\mathcal{U}_1^2}{L_1}\quad\frac{\mathcal{U}_1^2}{L_1}\quad\frac{\mathcal{U}_1^2}{L_1}\quad\frac{\Delta P_1}{\rho L_1}\quad\frac{\mathfrak{v}^2}{L_1}\quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_2}\quad R_{13}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_3}$$

или

$$1\quad 1\quad 1\quad\frac{\Delta P_1}{\rho\mathcal{U}_1^2}\quad\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1}{L_2}\quad R_{13}\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1}{L_3}$$

Из анализа этого уравнения сразу можно заключить, что отношение $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$ в большинстве случаев может быть величиной порядка $L_2/L_1$, т. е. на один порядок меньше, чем в предыдущем случае.

Второе уравнение движения описывается следующим выражением:

$$\overline{U}_1\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2u_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2^2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2u_3}. \tag{6.12}$$

$$\frac{\mathcal{U}_1^2L_2}{L_1^2}\quad\frac{\mathcal{U}_1^2L_2}{L_1^2}\quad\frac{\mathcal{U}_1^2L_2}{L_1^2}\quad\frac{\Delta P_2}{\rho L_2}\quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_1}\quad\frac{\mathfrak{v}^2}{L_2}\quad R_{23}\frac{\mathfrak{v}^2}{L_3}$$

или

$$1\quad 1\quad 1\quad\frac{\Delta P_2}{\rho\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1^2}{L_2^2}\quad R_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1}{L_2}\quad\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1^2}{L_2^2}\quad R_{23}\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1^2}{L_3^2}$$

Поскольку, согласно уравнению (6.11), отношение $\mathfrak{v}^2/U_1^2$ по порядку величины одинаково с $L_2/L_1$, то турбулентные члены $\partial u_2^2/\partial x_2$ и $\partial\overline{u_2u_3}/\partial x_3$ в уравнении (6.12) должны быть велики по сравнению с членами, содержащими скорость, в левой части уравнения, а член, содержащий давление $\Delta P_2/\rho\mathcal{U}_1^2$, должен быть величиной того же порядка.

Таким образом, уравнение (6.12) сводится к уравнению (6.6), а (6.11) — к уравнению

$$\overline{U}_1\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}+\overline{U}_3\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_3}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dx_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_1u_3}. \tag{6.13}$$

Здесь мы опять-таки можем воспользоваться предположением о том, что перенос импульса связан с диффузией градиентного типа, и ввести тензор вихревой диффузии. Тогда это уравнение станет

подобным уравнению (6.9) и запишется в виде

$$\overline{U}_1\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}+\overline{U}_3\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dx_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_3}\right]. \quad (6.14)$$

В случае двумерного течения решения этого уравнения могут быть получены при

$$(\epsilon_m)_{11}=\text{const}$$

и при

$$(\epsilon_m)_{11}=l_m^2\,\partial\overline{U}_1/\partial x_2.$$

Это относится и к течению, симметричному относительно оси $z$, вдоль которой направлен осредненный поток. В этом случае уравнение для компоненты $\overline{U}_z$ скорости осредненного течения имеет вид

$$\overline{U}_z\frac{\partial\overline{U}_z}{\partial z}+\overline{U}_r\frac{\partial\overline{U}_z}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dz}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(\epsilon_m)_{zz}\,r\,\frac{\partial\overline{U}_z}{\partial r}\right], \quad (6.15)$$

а распределение давления поперек зоны турбулентного течения отыскивается из соотношения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\overline{u_r^2}+\frac{\overline{u_r^2}-\overline{u_\varphi^2}}{r}=0 \quad (6.16)$$

или, после интегрирования,

$$\overline{P}+\rho\overline{u_r^2}+\rho\int\frac{\overline{u_r^2}-\overline{u_\varphi^2}}{r}\,dr=P_0. \quad (6.16а)$$

Наконец, заметим, что величины различных членов в уравнениях (6.11) и (6.12) отличаются друг от друга, самое большее, на один порядок. Следовательно, если приближенные предположения, принятые при выводе уравнения (6.13), окажутся слишком грубыми, то в качестве следующего возможного шага придется рассматривать полное уравнение (6.11). Так как при этом в уравнении (6.11) удерживается турбулентный член $\partial\overline{u^2}/\partial x_1$, то пренебрегать турбулентными членами в соотношении (6.7) уже нельзя. Следовательно, в этом случае вместо уравнения (6.13) получим уравнение

$$\overline{U}_1\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1}+\overline{U}_2\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}+\overline{U}_3\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dx_1}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overline{u_1^2}-\overline{u_2^2}-\int\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2u_3}\,dx_2\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_1u_3}. \quad (6.17)$$

## § 6.3. Распределение скорости в следе за цилиндром по классическим теориям

В этом параграфе мы рассмотрим распределения осредненной скорости, полученные в соответствии с классическими теориями Буссинеска, Прандтля и Тэйлора. В этих теориях используется предположение о подобии между профилями скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях, находящихся вне определенного расстояния от цилиндра.

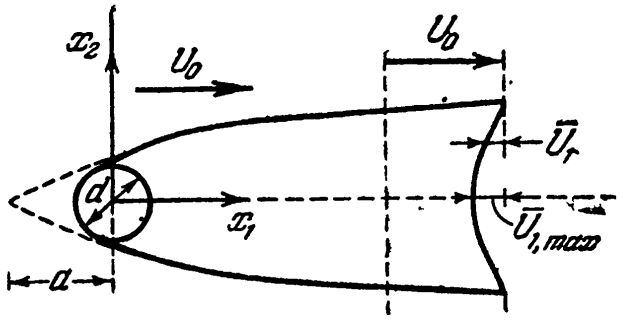



Рис. 6.1. Схема течения в следе за цилиндром.

Обозначим через $U_0$ скорость невозмущенного набегающего потока.

Начало системы координат поместим в центр цилиндра, а ось $x_1$ совместим с направлением скорости невозмущенного потока $U_0$; ось $x_2$ считается перпендикулярной к оси цилиндра (см. рис. 6.1).

Обозначим отклонение скорости от величины $U_0$, вызванное наличием цилиндра, через $U_1$, а через $\overline{U}_1$ — его осредненное значение.

В рамках предположений, перечисленных в предыдущем параграфе, уравнение движения в проекции на ось $x_1$ запишется в виде

$$\rho U_0 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\overline{U}_1}{U_0} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2}. \tag{6.18}$$

На основании предположения о подобии потока в последовательно расположенных поперечных сечениях можно положить

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\,max}} = f(\xi_2), \quad \frac{\overline{U}_{1,\,max}}{U_0} = \psi(\xi_1), \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho \overline{U}_{1,\,max}^2} = h(\xi_2), \tag{6.19}$$

где

$$\xi_2 = \frac{x_2}{d} \varphi(\xi_1), \quad \xi_1 = \frac{x_1 + a}{d}, \tag{6.20}$$

$a$ — расстояние между геометрическим источником подобия и началом системы координат; $d$ — диаметр цилиндра.

Из соотношений (6.19) получаем

$$\frac{\overline{U}_1}{U_0} = \psi(\xi_1) f(\xi_2), \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = \psi^2(\xi_1) h(\xi_2). \tag{6.21}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\overline{U}_1}{U_0} = \frac{1}{d} f \frac{d\psi}{d\xi_1} + \frac{1}{d}\psi\xi_2 \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\xi_1}\frac{df}{d\xi_2}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = \frac{1}{d}\psi^2\varphi\frac{dh}{d\xi_2},$$

уравнение (6.18) принимает вид

$$f\frac{d\psi}{d\xi_1} + \psi\xi_2\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\xi_1}\frac{df}{d\xi_2} = \psi^2\varphi\frac{dh}{d\xi_2}. \tag{6.22}$$

Следовательно, функции $\psi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_1)$ не являются независимыми. До сих пор мы рассматривали только дифференциальные уравнения и не вводили граничных или начальных условий. Поскольку $\sigma_{12} = 0$ при $x_2 = +\infty$ и при $x_2 = -\infty$, интегрирование уравнения (6.18) по $x_2$ дает

$$\frac{d}{dx_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{U}_1}{U_0}dx_2 = -\frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{U}_1}{U_0}dx_2 = \text{const}.$$

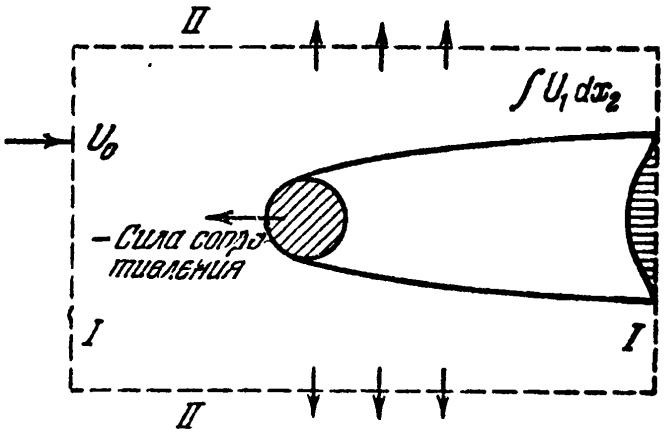



Рис. 6.2. Контрольные поверхности, используемые при составлении баланса потока импульса.

Эта постоянная величина, по-видимому, непосредственно связана с сопротивлением цилиндра. Это следует из рассмотрения баланса потока импульса для течения около цилиндра.

Для определения этого баланса выделим на больших расстояниях от цилиндра несколько контрольных плоскостей (см. рис. 6.2). Через пару плоскостей *I* имеется поток импульса в направлении оси $x_1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\left[U_0^2 - \overline{(U_0 - U_1)^2}\right]dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho\left(2U_0\overline{U}_1 - \overline{U}_1^2\right)dx_2 \approx$$

$$\approx 2\rho U_0\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{U}_1\,dx_2.$$

Между контрольными плоскостями *I* происходит изменение расхода на величину $\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{U}_1\,dx_2$. Это изменение уравновешивается втеканием

равного количества жидкости через пару контрольных плоскостей *II*, вызывающим потерю потока импульса в направлении оси $x_1$:

$$-\rho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{U}_1 \, dx_2.$$

Сумма этих потоков импульса должна быть равна сопротивлению цилиндра.

Отсюда, поскольку на достаточно больших расстояниях

$$\frac{\overline{U_1^2}}{\overline{U}_1 U_0} \ll 1,$$

$$\frac{\text{сопротивление}}{\rho U_0^2 d} = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{U}_1}{U_0} \, dx_2.$$

Таким образом, с помощью соотношений (6.21) и (6.20) получаем

$$\frac{\psi}{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_2) \, d\xi_2 = \frac{\text{сопротивление}}{\rho U_0^2 d} = \text{const},$$

откуда

$$\psi(\xi_1) = A\varphi(\xi_1). \tag{6.23}$$

Из соотношений (6.22) и (6.23) имеем

$$\frac{f}{dh/d\xi_2} + \frac{\xi_2 \, df/d\xi_2}{dh/d\xi_2} = A \frac{\varphi^3}{d\varphi/d\xi_1}. \tag{6.24}$$

В этом уравнении левая часть зависит только от $\xi_2$, а правая часть — только от $\xi_1$. Следовательно, обе части этого уравнения должны быть равны одной и той же постоянной величине. Таким образом, получаем соотношение

$$\varphi^3 = \text{const} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi_1},$$

которое удовлетворяется, если

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\xi_1}}.$$

С помощью этого соотношения для $\varphi$ выражение для $\xi_2$ можно преобразовать к виду

$$\xi_2 = \frac{x_2}{d} \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} = \frac{x_2}{\sqrt{d(x_1 + a)}}. \tag{6.25}$$

Тогда выражения (6.21) запишутся так [см. также уравнение (6.23)]:

$$\frac{\overline{U}_1}{U_0} = A \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} f(\xi_2), \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = A^2 \frac{d}{x_1 + a} h(\xi_2). \tag{6.26}$$

С учетом известных теперь функциональных зависимостей для $\xi_2$, $\varphi$ и $\psi$ можно решить уравнение движения (6.22), получив при этом соотношение между $f$ и $h$ или между распределением осредненной скорости и распределением напряжения сдвига. При этом из уравнения (6.24) имеем

$$f+\xi_2\frac{df}{d\xi_2}=-2A\frac{dh}{d\xi_2}.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$h=-\frac{1}{2A}\xi_2 f.$$

Постоянная интегрирования здесь обращается в нуль, так как напряжение сдвига при $\xi_2=0$ из условий симметрии тоже обращается в нуль.

Распределение напряжения сдвига, будучи выраженным через распределение скорости, запишется в виде

$$\frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{x_1+a}}\,\xi_2\frac{\bar U_1}{U_0}=-\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1+a}\frac{\bar U_1}{U_0}. \qquad (6.27)$$

Из этого выражения получается компонента $(\epsilon_m)_{11}$ вихревой диффузии, которая имеет вид

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d}=-\frac{1}{2}\frac{\xi_2\bar U_1/U_0}{\frac{d}{d\xi_2}(\bar U_1/U_0)}=-\frac{1}{2}\frac{\xi_2\bar U_1/\bar U_{1,\max}}{\frac{d}{d\xi_2}(\bar U_1/\bar U_{1,\max})}. \qquad (6.28)$$

Это соотношение показывает, что коэффициент вихревой диффузии не зависит от $x_1$, а является функцией только $\xi_2$.

Интегрирование уравнения (6.28) приводит к зависимости

$$\frac{\bar U_1}{\bar U_{1,\max}}=\exp\left[-\frac{U_0 d}{2}\int_0^{\xi_2}\frac{\xi_2\,d\xi_2}{(\epsilon_m)_{11}}\right]. \qquad (6.29)$$

Если воспользоваться каким-либо предположением относительно величины $(\epsilon_m)_{11}$, то можно вычислить интеграл в уравнении (6.29) и получить распределение скорости. Примем сначала наиболее простое предположение, а именно будем считать эту величину постоянной. Тогда после взятия интеграла в формуле (6.29) получаем следующее выражение:

$$\frac{\bar U_1}{\bar U_{1,\max}}=\exp\left[-\frac{U_0 d}{4(\epsilon_m)_{11}}\xi_2^2\right]. \qquad (6.29а)$$

## Теории пути смешения

В теориях пути смешения можно воспользоваться либо гипотезой Прандтля о том, что транспортабельной субстанцией, которая подлежит рассмотрению, является импульс, либо гипотезой Тэйлора о том, что транспортабельной субстанцией является завихренность. Но в главе 5 было показано, что при двумерном течении обе гипотезы приводят к одинаковому результату, если путь смешения для переноса завихренности $l_\omega$ взять в $\sqrt{2}$ раз больше пути смешения для переноса импульса.

Предположим здесь, что транспортабельной субстанцией является импульс. Согласно теории пути смешения, в этом случае имеем [см. уравнение (5.8)]

$$(\epsilon_m) = l_m^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|,$$

откуда

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d} = \frac{A l_m^2}{d(x_1 + a)} \left| \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}} \right|.$$

Так как величина $(\epsilon_m)_{11}$ не зависит от $x_1$, а путь смешения $l_m$ считается функцией только $x_1$, то отсюда следует, что

$$l_m = c_m \sqrt{d(x_1 + a)}.$$

Подставляя последнее выражение для $(\epsilon_m)_{11}/U_0 d$ в уравнение (6.28), получаем дифференциальное уравнение для $\bar{U}_1/\bar{U}_{1,\max}$, которое легко интегрируется. Результат интегрирования записывается в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}} = \frac{(\xi_2)_0^3}{18 c_m^2 A} \left\{ 1 - \left[ \frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^2,$$

где $(\xi_2)_0$ — такое значение $\xi_2$, при котором скорость $\bar{U}_1$ обращается в нуль. Таким образом, это решение дает для ширины следа конечную величину.

Так как $\bar{U}_1/\bar{U}_{1,\max} = 1$ при $\xi_2 = 0$, то величины $(\xi_2)_0$, $A$ и $c_m$ должны удовлетворять соотношению

$$(\xi_2)_0^3 = 18 c_m^2 A.$$

Таким образом, окончательное выражение для распределения скорости принимает вид

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}} = \left\{ 1 - \left[ \frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^2. \tag{6.30}$$

Для распределения скорости $\bar{U}_{1,\max}$ вдоль оси получаем

$$\frac{\bar{U}_{1,\max}}{U_0} = A \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} = \frac{(\xi_2)_0^3}{18 c_m^2} \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}}. \tag{6.31}$$

Значение $(\xi_2)_0$, в принципе, можно определить по экспериментальным профилям скорости, а именно по тем точкам, где $\overline{U}_1 = 0$. Величину $c_m$ можно найти по распределению скорости в осевом направлении путем совмещения теоретического и экспериментального распределений скорости вдоль оси следа. Величину $c_m$ можно также определить, зная сопротивление цилиндра, так как

$$\frac{\text{сопротивление}}{\rho U_0^2 d} = \frac{(\xi_2)_0^3}{18c_m^2} \int_{-(\xi_2)_0}^{+(\xi_2)_0} \left\{1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0}\right]^{3/2}\right\}^2 d\xi_2 = \frac{(\xi_2)_0^4}{20c_m^2}.$$

Но из-за низкой точности измерений скорости вблизи границ следа экспериментальные данные в этой области имеют большой разброс. Поэтому определить точное значение $(\xi_2)_0$ весьма затруднительно. По этой причине указанную величину обычно предпочитают определять по полуширине $(\xi_2)_{1/2}$, т. е. по тому значению $\xi_2$, при котором $\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max} = 0{,}5$. Эта полуширина, согласно уравнению (6.30), описывается соотношением

$$\frac{(\xi_2)_{1/2}}{(\xi_2)_0} = 0{,}441.$$

## Индуктивная теория Рейхардта

Хотя индуктивную теорию Рейхардта пока и не принято считать классической, мы все же кратко рассмотрим результаты, которые получаются по этой теории для течения в следе. Согласно этой теории, поток импульса $\rho\overline{(U_0 + U_1)^2}$ удовлетворяет уравнению диффузии (5.23). Но так как

$$\overline{(U_0 + U_1)^2} = U_0^2 + 2U_0\overline{U}_1 + \overline{U}_1^2 + \overline{u_1^2},$$

а величина $U_0^2$ имеет постоянное значение, Рейхардт [1] вместо величины $\overline{(U_0 + U_1)^2}$ ввел в рассмотрение величину

$$\overline{\mathfrak{V}^2} = 2U_0\overline{U}_1 + \overline{U}_1^2 + \overline{u_1^2}. \tag{6.32}$$

Тогда уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\mathfrak{V}^2} = \mathscr{L}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\overline{\mathfrak{V}^2}. \tag{6.33}$$

Здесь снова используется предположение о подобии профилей $\overline{\mathfrak{V}^2}$ в последовательно расположенных сечениях.

Поэтому, если положить, что

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_0^2} = \psi_1(\xi_1)\, f_1(\xi_2), \tag{6.34}$$

где $\xi_1$ и $\xi_2$ определяются соотношениями (6.20) и (6.25), то оказывается, что подобие существует только в том случае, когда [см. также соотношение (6.23)]

$$\psi_1 = \frac{A_1}{\sqrt{\xi_1}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathscr{L}}{d} = \text{const}. \tag{6.35}$$

Тогда функция $f_1(\xi_2)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathscr{L}}{d}\frac{d^2 f_1}{d\xi_2^2} + \frac{\xi_2}{2}\frac{df_1}{d\xi_2} + \frac{1}{2} f_1 = 0. \tag{6.36}$$

Легко проверить, что функция

$$f_1 = \exp\left(-\frac{d}{4\mathscr{L}}\xi_2^2\right)$$

является решением дифференциального уравнения (6.36). Отсюда

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_0^2} = A_1 \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} \exp\left(-\frac{d}{4\mathscr{L}}\xi_2^2\right). \tag{6.37}$$

Если сравнить это решение с другим решением типа Гаусса (6.29а), то можно заметить следующее несоответствие между ними: в решении (6.29а) величиной, которая пропорциональна $\sqrt{d/(x_1+a)}$, является $\bar{U}_{1,\max}/U_0$, а здесь $\overline{\mathfrak{V}}^2_{\max}/U_0^2$. Но

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_0^2} = 2\frac{\bar{U}_1}{U_0} + \frac{\bar{U}_1^2}{U_0^2} + \frac{\overline{u_1^2}}{U_0^2},$$

а так как предполагалось, что $\bar{U}_1/U_0 \ll 1$, то квадратичными членами в правой части здесь можно пренебречь. Таким образом, фактически приходим к прежнему решению, а именно:

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = \frac{1}{2} A_1 \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} \exp\left(-\frac{d}{4\mathscr{L}}\xi_2^2\right). \tag{6.37а}$$

Из сравнения с выражениями (6.26) и (6.29а) получаются следующие формальные соотношения:

$$A_1 = 2A, \quad U_0\mathscr{L} = (\epsilon_m)_{11}.$$

## § 6.4. Перенос скалярной субстанции в следе за цилиндром

Если в уравнении (1.28) для переноса скалярной субстанции Г воспользоваться теми же предположениями, что и выше, то получим

$$U_0 \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2\gamma}. \tag{6.38}$$

Если, кроме того, принять, что турбулентный перенос величины $\gamma$

может быть описан с той же степенью приближения с помощью тензора диффузии $(\epsilon_\gamma)_{ij}$, то, согласно формуле (1.30), величина $\overline{u_2\gamma}$ запишется так:

$$-\overline{u_2\gamma} = (\epsilon_\gamma)_{22}\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial x_2},$$

и, следовательно,

$$U_0\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[(\epsilon_\gamma)_{22}\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial x_2}\right]. \tag{6.39}$$

Это уравнение, конечно, стало бы полностью аналогично уравнению (6.18), если в (6.18) положить, что

$$\sigma_{12} = \rho\,(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}.$$

Следовательно, если профили $\overline{\Gamma}$ тоже считать подобными, то для $(\epsilon_\gamma)_{22}/U_0 d$ получается соотношение, аналогичное формуле (6.28), а именно:

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{22}}{U_0 d} = -\frac{1}{2}\frac{\xi_2\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}_{\max}}{\frac{d}{d\xi_2}(\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}_{\max})}. \tag{6.40}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{\Gamma}_{\max}} = \exp\left[-\frac{U_0 d}{2}\int_0^{\xi_2}\frac{\xi_2\,d\xi_2}{(\epsilon_\gamma)_{22}}\right]. \tag{6.41}$$

В простейшем случае постоянного значения $(\epsilon_\gamma)_{22}$ вновь получается решение Гаусса:

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{\Gamma}_{\max}} = \exp\left[-\frac{U_0 d}{4(\epsilon_\gamma)_{22}}\xi_2^2\right]. \tag{6.41а}$$

Из решений (6.29а) и (6.41а) следует, что

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{\Gamma}_{\max}} = \left(\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right)^{(\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\gamma)_{22}}. \tag{6.42}$$

Однако этот результат, по-видимому, носит более общий характер. Он получается также и из соотношений (6.29) и (6.41), если предположить, что отношение $(\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\gamma)_{22}$ постоянно во всей области следа и, стало быть, величины $(\epsilon_m)_{11}$ и $(\epsilon_\gamma)_{22}$ не обязательно должны быть постоянными каждая в отдельности.

### Теория Прандтля переноса импульса

Если в отношении величины $(\epsilon_\gamma)_{22}$ воспользоваться прандтлевской гипотезой переноса импульса, то получим

$$(\epsilon_\gamma)_{22} = l_\gamma^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|. \tag{6.43}$$

При использовании распределения скорости (6.30), полученного по теории переноса импульса, и при $l_\gamma = c_\gamma \sqrt{d(x_1 + a)}$ выражение для $(\epsilon_\gamma)_{22}$ принимает вид

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{22}}{U_0 d} = \frac{1}{6} \frac{c_\gamma^2}{c_m^2} (\xi_2)_0^2 \left\{ 1 - \left[ \frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\} \left[ \frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{1/2}. \tag{6.44}$$

Подставляя это выражение в соотношение (6.41) и выполняя интегрирование, получаем

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \left\{ 1 - \left[ \frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^{2c_m^2/c_\gamma^2}, \tag{6.45}$$

однако поскольку $(\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\gamma)_{22} = l_m^2/l_\gamma^2 = c_m^2/c_\gamma^2 = \text{const}$, то этот результат сразу следует из соотношений (6.42) и (6.30).

В более ранних работах (см., например, [2]) часто предполагалось, что $l_\gamma = l_m$; однако это предположение не является справедливым. Если бы это было так, то распределение $\bar{\Gamma}$ было бы идентично распределению скорости. В связи с тем, что все опыты по исследованию теплового следа за нагретым цилиндром свидетельствуют о большем распространении температуры, нежели скорости, то от теории переноса импульса пришлось отказаться. Однако это нельзя признать оправданным указанными аргументами, так как экспериментальные факты показали лишь несправедливость предположения $l_\gamma = l_m$.

### Теория Тэйлора переноса завихренности

В теории переноса завихренности для распределения скорости получается прежний результат, поскольку

$$(\epsilon_m)_{11} = (\epsilon_\omega)_{11} = \frac{l_\omega^2}{2} \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|. \tag{5.8}$$

Поэтому распределение $\bar{\Gamma}$ получается из уравнения (6.45) простой заменой $c_m^2$ на $c_\omega^2/2$:

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \left\{ 1 - \left[ \frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^{c_\omega^2/c_\gamma^2}. \tag{6.46}$$

Если принять предположение о том, что $l_\gamma = l_\omega$ (см., например, [2]), то распространение $\overline{\Gamma}$, согласно теории переноса завихренности, получается больше, нежели распространение $\overline{U}_1$. Этот результат принято считать аргументом в пользу последней теории, тем более, что количественное различие между измеренными распространениями температуры и скорости достаточно хорошо согласуется с опытными данными (см. § 6.5). Однако поскольку предположение $l_\omega = l_\gamma$ произвольно и не имеет под собой реальных физических оснований, то этот аргумент в пользу теории переноса завихренности является не очень сильным.

### Индуктивная теория Рейхардта

В индуктивной теории Рейхардта приходится в данном случае рассматривать перенос величины $\overline{(U_0 + U_1)\Gamma}$. Но с той же самой степенью приближения, которая была принята и в других теориях, следует учитывать только величину $U_0\overline{\Gamma}$, так что уравнение диффузии (5.26) принимает вид

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_1} = \mathscr{L}_\gamma \frac{\partial^2 \overline{\Gamma}}{\partial x_2^2}. \tag{6.47}$$

Решение этого уравнения, основанное на предположении о подобии профилей $\overline{\Gamma}$, записывается в виде

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{\Gamma}_{\max}} = \exp\left(-\frac{d}{4\mathscr{L}_\gamma}\xi_2^2\right). \tag{6.48}$$

Сравнение с решением (6.41а) дает следующее формальное соотношение:

$$U_0\mathscr{L}_\gamma = (\epsilon_\gamma)_{22}.$$

## § 6.5. Результаты измерения распределений осредненной скорости и осредненной температуры в следе за цилиндром

Измерения распределений осредненной скорости на различных расстояниях от цилиндра были проведены Шлихтингом [3], Фейджем и Фокнером [4], а также Таунсендом [5]. В теориях, описывающих эти распределения и рассмотренных в предыдущем параграфе, предполагалось подобие профилей этих распределений в последовательно расположенных поперечных сечениях следа. Следовательно, при сравнении измеренных распределений с теоретическими нам прежде всего следует проверить, насколько действительная картина течения в следе обладает таким подобием. Прежде всего, имеется подобие по числу Рейнольдса. Известно, что при достаточно больших числах Рейнольдса коэффициент сопротивления цилиндра становится

независимым от этого критерия в широком диапазоне его значений. Поскольку на некотором расстоянии от цилиндра картина турбулентного течения почти полностью определяется работой, совершаемой силой сопротивления, то при больших числах Рейнольдса логично ожидать подобия. Таунсенд обнаружил, что практически никакого влияния числа Рейнольдса на распределение осредненной скорости не наблюдается при $\mathrm{Re}_d > 800$.

Что касается подобия картины течения в последовательных поперечных сечениях, то оказалось, что автомодельность общей структуры потока, характеризуемой распределением осредненной скорости и увеличением ширины следа с расстоянием от цилиндра, наблюдается на расстояниях

$$\xi_1 = \frac{x_1 + a}{d} > 90,$$

но что для установления автомодельности тонкой структуры турбулентности требуются значительно большие расстояния: $\xi_1 = 500 \div 1000$.

Если сравнить результаты опытов Таунсенда [5, 6] для значений $\xi_1 > 500$ с теоретическими распределениями, соответствующими «классическим» теориям, то оказывается, что теория переноса импульса (а следовательно, также и теория переноса завихренности,

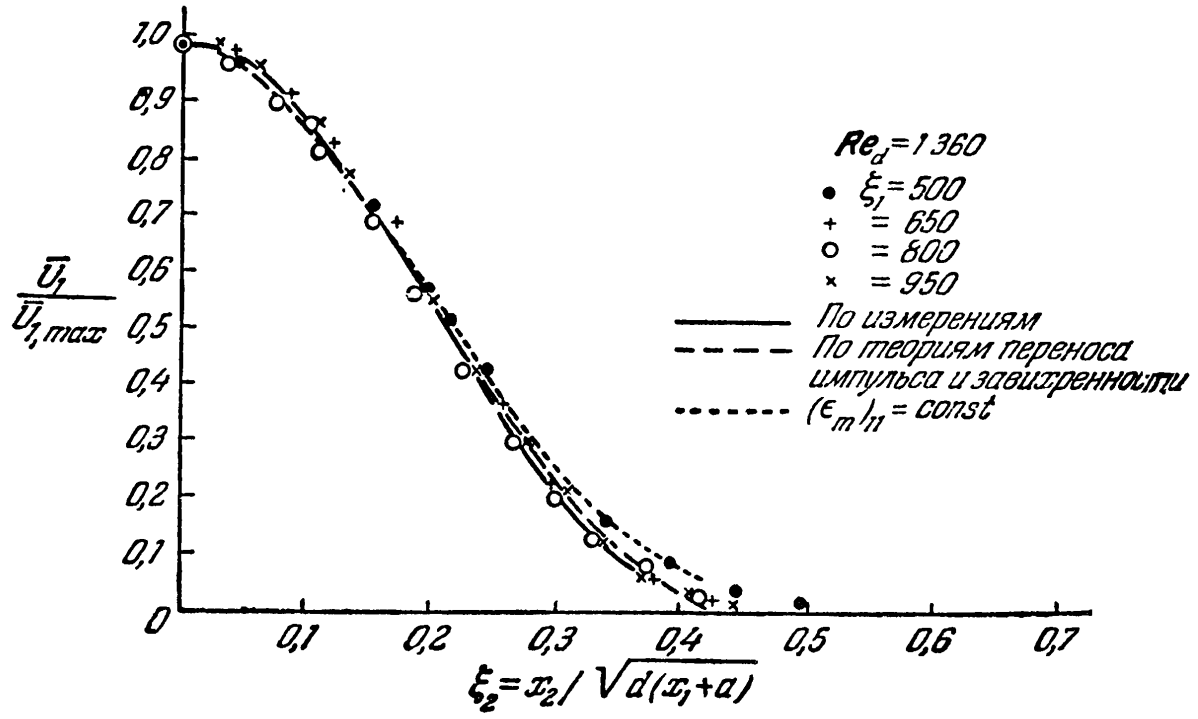



Рис. 6.3. Распределение скорости в следе за круглым цилиндром [6].

которая приводит к такому же результату) дает решение, достаточно хорошо согласующееся с измеренным распределением, за исключением областей, прилегающих к оси и к границе следа. На рис. 6.3 изображены измеренное и вычисленное распределения скорости; постоянная $(\xi_2)_0$, содержащаяся в выражении (6.30), принята равной 0,48.

Из соображений, которые будут изложены ниже, отмеченному расхождению вблизи границы следа не следует придавать серьезного значения. Существенно более важным для суждения об этих теориях является тот факт, что вблизи оси следа вычисленное распределение дает значения, которые ниже измеренных скоростей; это означает, что теоретическая величина коэффициента переноса слишком мала (на оси она даже обращается в нуль).

Очень хорошее соответствие отмечается для гауссова распределения (6.29а), которое в настоящем случае записывается в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}} = \exp\left[-\left(\frac{\xi_2}{0{,}256}\right)^2\right].$$

Незначительное отклонение от экспериментальных значений наблюдается лишь вблизи границы следа. В этой области действительное значение кажущегося коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{11}$ намного меньше постоянного значения, принятого для основной (центральной) части кривой распределения скорости. Это постоянное значение, согласно экспериментальным данным, составляет

$$(\epsilon_m)_{11} = \frac{1}{4}(0{,}256)^2 U_0 d = 0{,}016 U_0 d.$$

Если величину $(\epsilon_m)_{11}$ вычислить непосредственно по измеренному распределению скорости, используя выражение (6.28), то оказывается, что величина $(\epsilon_m)_{11}$ практически постоянна в основной (центральной) части следа.

Если по значениям $(\epsilon_m)_{11}$, полученным непосредственно по измеренному распределению скорости, вычислить величину пути смешения $l_m$, то окажется, что величина $(\epsilon_m)_{11}$ непостоянна в поперечном сечении следа: она обращается в бесконечность на оси следа и в нуль — на его границе.

Среднее значение $l_m$ можно вычислить по постоянной величине $c_m$, содержащейся в выражении (6.31). По опытным данным Таунсенда можно получить соотношение $l_m/(x_2)_{1/2} \approx 0{,}4$, где $(x_2)_{1/2}$ — полуширина. По опытным данным Шлихтинга соответствующая величина оказывается равной 0,46. Эти величины, как видим, являются далеко не малыми в отличие от того, что предполагалось в теориях пути смешения.

Эти факты, а именно: непостоянство значения $l_m$, а также то, что среднее значение $l_m$ не слишком мало по сравнению с шириной следа, являются сильными аргументами против теории пути смешения.

По измеренному распределению скорости с помощью соотношений (6.27) можно вычислить распределение напряжения сдвига. Если принять, например, что кривая ошибок Гаусса является удовлетворительным приближением к действительному распределению скорости,

то вычисления показывают, что максимальное значение напряжения сдвига равно

$$\left(\frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2}\right)_{\max} = -\frac{A}{2}\frac{d}{x_1+a}\sqrt{\frac{2(\epsilon_m)_{11}}{eU_0 d}}$$

(здесь $e$ означает основание натуральных логарифмов).

Это максимальное значение имеет место в точке

$$(\xi_2)_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d}}.$$

Поскольку

$$(\xi_2)_{1/2} = \sqrt{\frac{4(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d}\ln 2},$$

то видно, что $(\xi_2)_{\text{опт}}$ меньше полуширины $(\xi_2)_{1/2}$. Как мы увидим ниже, максимальное порождение турбулентности происходит вне области, ограниченной координатой $(\xi_2)_{1/2}$, и, стало быть, не при $(\xi_2)_{\text{опт}}$.

Измерения температуры в тепловом следе за нагретым цилиндром производились Фейджем и Фокнером [4], а также Таунсендом [6]. Опыты Таунсенда показывают, что подобие между профилями температуры в последовательно расположенных поперечных сечениях устанавливается на расстояниях, превышающих $\xi_1 = 500$. При этом профили теплового потока $\overline{u_2\theta}$ также оказываются подобными.

Опытные данные, полученные этими исследователями и удовлетворительно согласующиеся между собой, показывают, что распространение тепла должно быть значительно больше, нежели распространение импульса; по крайней мере, ширина температурного следа должна быть намного больше ширины скоростного.

На рис. 6.4 приведены результаты измерений Фейджа и Фокнера, а также кривые, соответствующие различным теориям, а именно:

1. Теории Прандтля переноса импульса при $c_\gamma = c_m$ [см. решение (6.45)]:

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{\Gamma}_{\max}} = \left\{1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0}\right]^{3/2}\right\}^2.$$

2. Теории Прандтля переноса импульса при $c_\gamma = c_m\sqrt{2}$ или теории Тэйлора переноса завихренности при $c_\gamma = c_\omega$ [см. решение (6.46)]:

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{\Gamma}_{\max}} = 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0}\right]^{3/2}.$$

3. Теории Буссинеска при $(\epsilon_\gamma)_{22} = \text{const}$ [см. решение (6.41а)].

Количество экспериментальных точек здесь не очень велико, и поскольку, кроме того, эти экспериментальные данные имеют

значительный разброс, то затруднительно решить, какой из теорий следует отдать предпочтение, исключая теорию Прандтля переноса импульса при $c_\gamma = c_m$, которая приводит к индентичным распределениям для температуры и скорости. В записанных выше выражениях для $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_{max}$ снова принято $(\xi_2)_0 = 0{,}48$.

Если, однако, в теории Прандтля переноса импульса положить $c_\gamma = c_m\sqrt{2}$ или в теории Тэйлора переноса завихренности $c_\gamma = c_\omega$, то согласование с экспериментальными данными на большей части

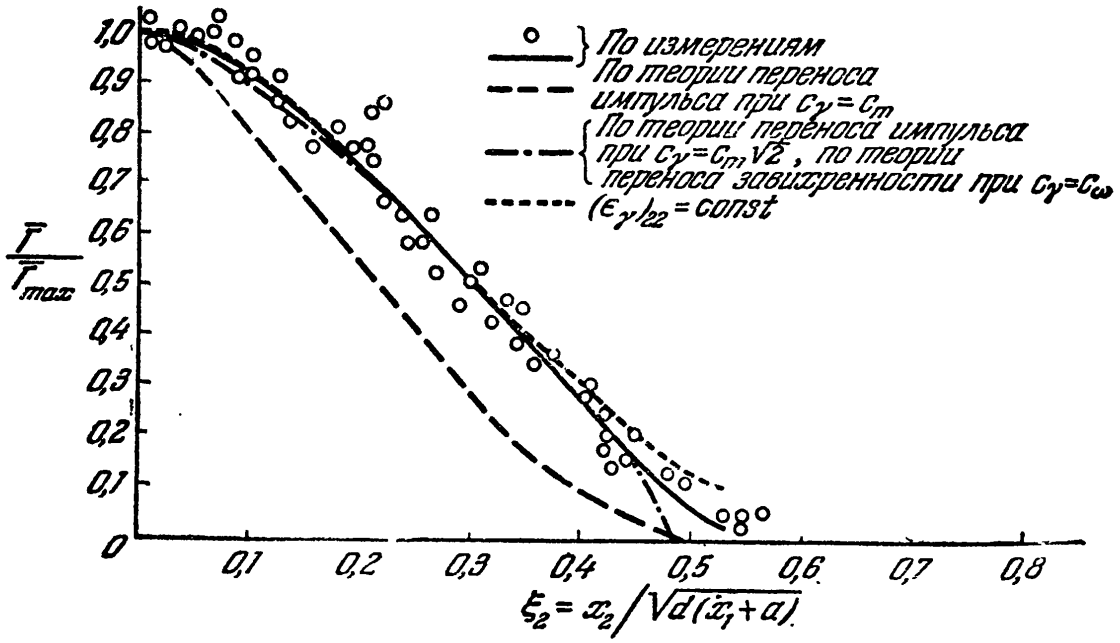



Рис. 6.4. Распределение температуры в следе за круглым цилиндром [4].

следа получается удовлетворительным, за исключением самой центральной части следа и зоны, прилегающей к его границе.

Коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{22}$ может быть вычислен по измеренному распределению температуры с помощью соотношения (6.40). Если это проделать, то получится почти постоянное значение $(\epsilon_\gamma)_{22}$ в поперечном сечении следа, причем среднее значение $(\epsilon_\gamma)_{22} \approx 0{,}12 U_0 d$. Это значение почти в два раза превышает величину $(\epsilon_m)_{11}$. Согласно теории Тэйлора переноса завихренности, при $c_\gamma = c_\omega$ должно было бы быть $(\epsilon_\gamma)_{22} = 2(\epsilon_m)_{11}$.

Кривая ошибок Гаусса снова приводит к наилучшему соотношению, за исключением приграничной зоны. Соответствующее значение $(\epsilon_\gamma)_{22} = 0{,}119 U_0 d$, т. е. составляет $1{,}85(\epsilon_m)_{11}$.

## § 6.6. Измерение характеристик турбулентности в следе за цилиндром

Наиболее систематические измерения характеристик турбулентности были произведены Таунсендом; результаты этих измерений опубликованы в его работах [5—9]. Измерения проводились в различных поперечных сечениях следа при относительных расстояниях $\xi_1$ от 80 до 950. Большинство измерений соответствует скорости невозмущенного потока $U_0 = 1280$ *см/сек* и цилиндру с диамет-

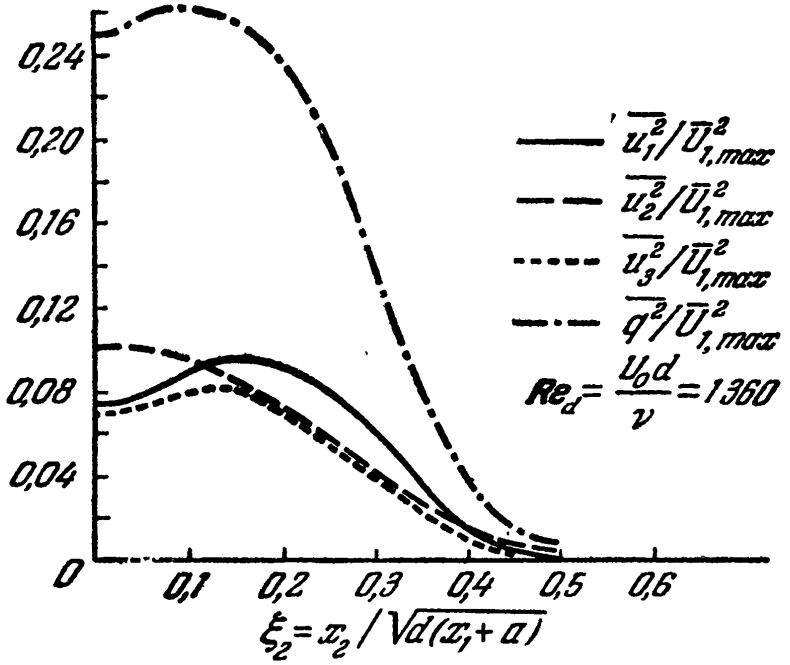



Рис. 6.5. Распределение компонент относительной интенсивности турбулентности в поперечных сечениях следа за круглым цилиндром, соответствующих $\xi_1 = 500$; 650; 800 и 950 [6].

ром 0,159 *см*; некоторое количество экспериментальных точек получено также для цилиндра с диаметром 0,953 *см*.

В предыдущем параграфе уже указывалось, что автомодельность тонкой структуры турбулентности в различных поперечных сечениях устанавливается только на больших расстояниях вниз по потоку от цилиндра, например при $\xi_1 = 500$. Однако для таких больших расстояний не имеется всех данных, которые нам хотелось бы привести здесь. Но, так или иначе, мы все же приведем некоторые из них, так как факты, вытекающие из их анализа, несмотря на неполную автомодельность, представляют значительный интерес.

На рис. 6.5 представлены значения квадратов компонент относительной интенсивности турбулентности: $\overline{u_1^2}/\overline{U}^2_{1,\max}$, $\overline{u_2^2}/\overline{U}^2_{1,\max}$ и $\overline{u_3^2}/\overline{U}^2_{1,\max}$. Изображенные здесь кривые проходят по средним значениям этих величин для четырех поперечных сечений, соответствующих $\xi_1 = 500$;

650; 800 и 950. Разница между распределениями каждой из этих величин в указанных сечениях невелика и лежит в пределах разброса экспериментальных точек; следовательно, между различными кривыми действительно существует хорошее подобие.

На рис. 6.6 показаны кривые изменения напряжения сдвига $\overline{u_1 u_2}/\overline{U}^2_{1,\max}$ и коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}/U_0 d$, а на рис. 6.7 — кривые изменения характеристик переноса в поперечном направлении $\overline{u_1^2 u_2}/\overline{U}^3_{1,\max}$, $\overline{u_2^3}/\overline{U}^3_{1,\max}$ и $\overline{u_3^2 u_2}/\overline{U}^3_{1,\max}$.

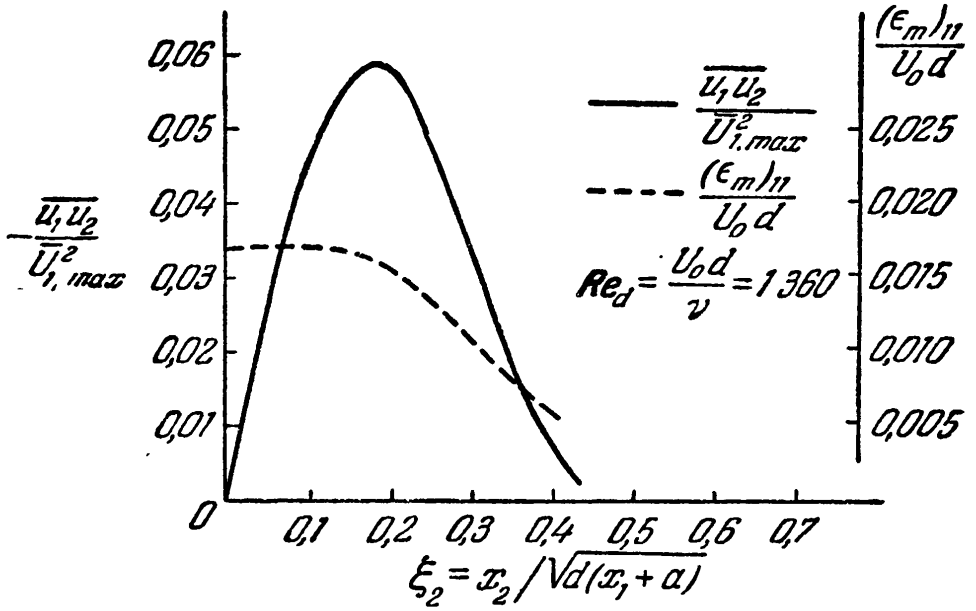



Рис. 6.6. Распределение напряжения сдвига и коэффициента вихревой вязкости в поперечных сечениях следа за круглым цилиндром, соответствующих $\xi_1 = 500$; 650 и 800 [6].

Кривые распределения $\overline{u_1^2 u_2}/\overline{U}^3_{1,\max}$ и $\overline{u_3^2 u_2}/\overline{U}^3_{1,\max}$ в центральной области следа имеют участки с отрицательными значениями, что указывает на наличие переноса по направлению к оси следа. Это согласуется с характером изменения градиентов интенсивности, изображенной на рис. 6.5, хотя более тщательный анализ соответствующих кривых показывает, что области, в которых наблюдается перенос по направлению к оси следа, и области, в которых градиенты интенсивности вблизи центра следа положительны, не полностью перекрывают друг друга. Следовательно, имеется небольшой участок области течения, где перенос, по-видимому, происходит в направлении, противоположном тому, которое определяется градиентом интенсивности. К этому вопросу мы возвратимся несколько ниже.

Диссипация турбулентности на единицу массы в неизотропном турбулентном потоке выражается следующим образом:

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}.$$

Для точного определения диссипации потребовалось бы измерить все величины вида $\overline{(\partial u_i/\partial x_j)(\partial u_k/\partial x_l)}$. Как известно, в случае изотропной турбулентности это сложное выражение для $\varepsilon$ упрощается:

$$\varepsilon = -15\nu u'^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]_{r=0} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}.$$

Было бы очень удачно, если бы удалось воспользоваться этим простым выражением для $\varepsilon$. К счастью, турбулентность в следе обладает вполне достаточной степенью локальной изотропности, чтобы

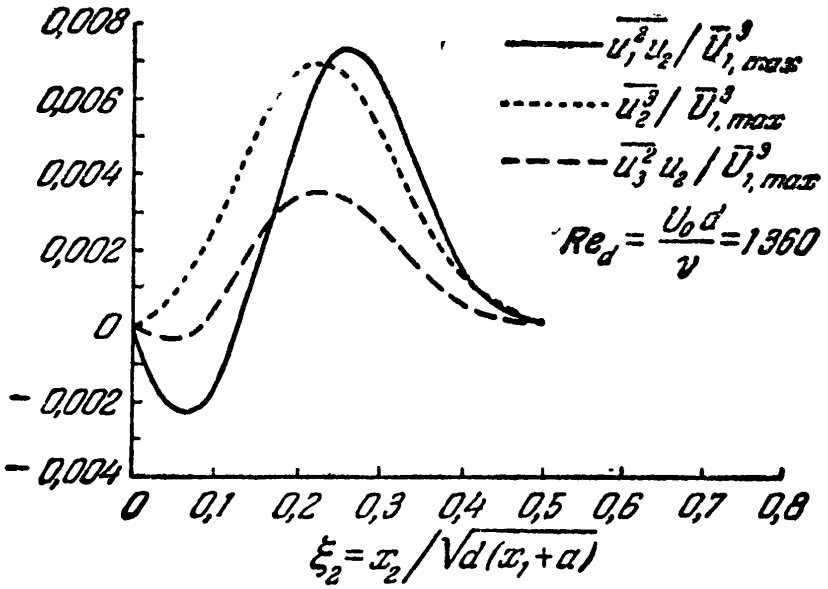



Рис. 6.7. Интенсивность поперечного переноса под действием турбулентности компонент интенсивности турбулентности в поперечных сечениях следа за круглым цилиндром, соответствующих $\xi_1 = 500$; 650; 800 и 950 [6].

можно было пользоваться этой формулой. Таунсенд [8] произвел измерение коэффициентов асимметрии и сплющивания в следе за цилиндром, которые определяются как

$$S = \frac{\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^3}}{[\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}]^{3/2}}, \quad T = \frac{\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}}{[\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}]^2}.$$

При изотропной турбулентности эти коэффициенты принимают соответственно значения $S = -0{,}38$ и $T = 3{,}5$. В случае следа за цилиндром Таунсенд обнаружил, что в центральной области следа (вплоть до $\xi_2 \approx 0{,}2$) эти коэффициенты почти постоянны и их значения весьма близки к указанным выше значениям для изотропной турбулентности. Помимо этого, Таунсенд показал, что следующие

соотношения, справедливые для изотропной турбулентности, приближенно выполняются также и для центральной области следа:

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2}.$$

В соответствии с этим, Таунсенд экспериментально находил диссипацию энергии в следе за цилиндром, пользуясь простым «изотропным» выражением для $\varepsilon$. Результаты этих измерений для поперечного сечения, соответствующего $\xi_1 = 160$, представлены на рис. 6.8.

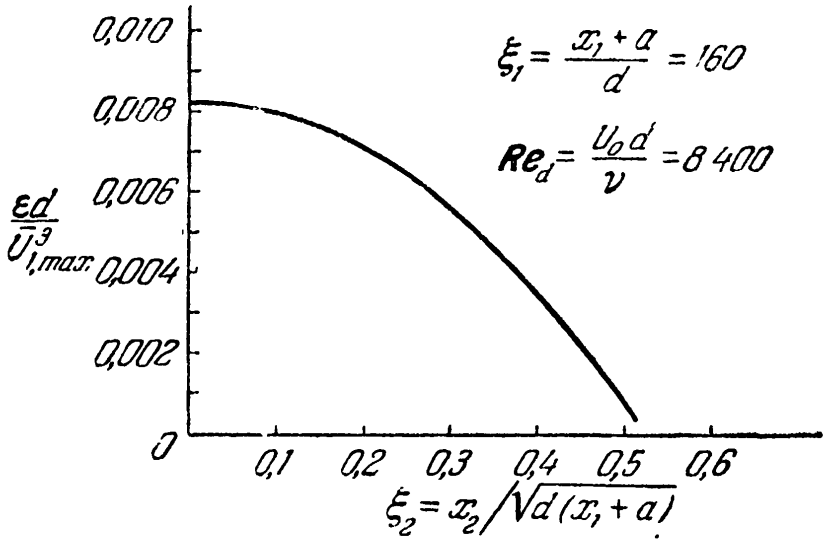



Рис. 6.8. Диссипация энергии в поперечном сечении ($\xi_1 = 160$) следа за круглым цилиндром [9].

С помощью приведенных выше данных о характеристиках турбулентности Таунсенду удалось установить баланс энергии турбулентности, определяемый уравнением (1.98), которое для рассматриваемого здесь течения в следе сводится к следующему приближенному соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1'}\frac{1}{2}\frac{\overline{q^2}}{U_0^2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2'}\frac{1}{U_0^3}\overline{u_2\left(\frac{P}{\rho} + \frac{q^2}{2}\right)} + \frac{\overline{u_1 u_2}}{U_0^2}\frac{\partial}{\partial \xi_2'}\frac{\overline{U}_1}{U_0} + 15\frac{\nu}{U_0 d}\overline{\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1'}\frac{u_1}{U_0}\right)^2} = 0,$$

где $\xi_1' = x_1/d$ и $\xi_2' = x_2/d$.

В этом уравнении были измерены все слагаемые, за исключением $\overline{u_2 p}$. Это слагаемое, которое характеризует турбулентный перенос давления, определялось как разность. Это является слабым местом рассматриваемой методики, так как, если бы это слагаемое тоже удалось определить экспериментально, выписанное выше уравнение можно было бы использовать для проверки надежности измерения

отдельных слагаемых. Именно таким путем пошел Кобаши [44], которому удалось измерить величину слагаемого, характеризующего перенос давления *).

Различные слагаемые уравнения баланса энергии, полученные Таунсендом для сечения $\xi_1 = 160$, изображены на рис. 6.9. Если рассматривать элемент объема в следе, то вклад вязкой диссипации в энергию турбулентности в этом элементе всегда будет отрицательным.

На рис. 6.9 диссипативный член показан как положительный. Значит, положительная величина здесь означает отрицательный вклад,

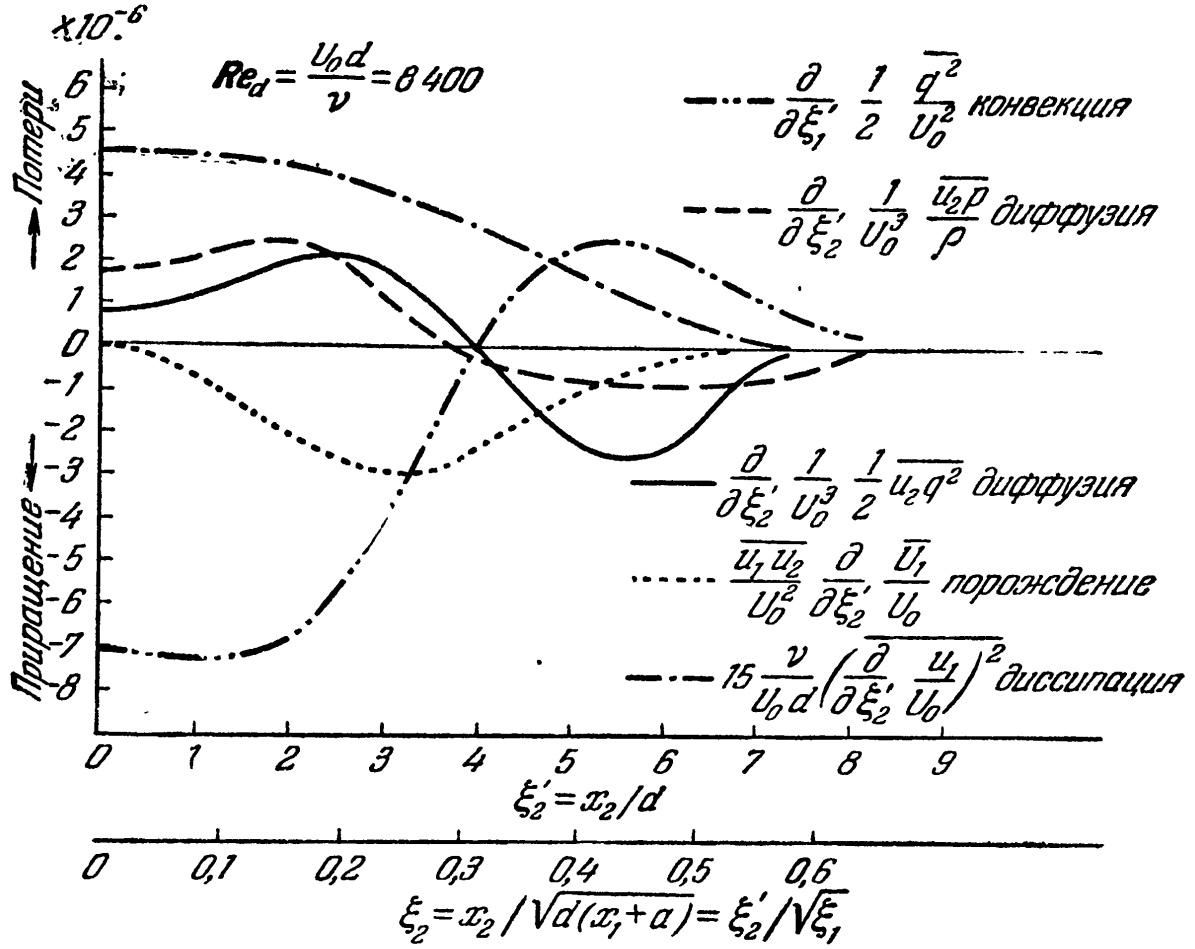



Рис. 6.9. Баланс энергии в следе за круглым цилиндром в сечении $\xi_1 = 160$ [7].

или потерю энергии. И наоборот, отрицательная величина на этом графике означает прирост энергии.

Из рассмотрения рис. 6.9 следует, что в разных частях следа вклады от различных слагаемых неодинаковы. Вблизи центра следа порождение энергии пренебрежимо мало, и главный прирост ее

*) Для этой цели Кобаши в качестве преобразователя для измерения пульсаций статического давления использовал приемник давления с конденсаторным микрофоном вместе с термоанемометром вращательного типа, расположенным вблизи отверстий статического давления в трубке-приемнике давления.

происходит за счет конвекции в осевом направлении через основной поток. Этот прирост уравновешивается диссипацией и турбулентным переносом в наружном направлении (диффузия). Порождение энергии достигает максимума при $\xi_2 \approx 0{,}25$, а максимальное значение напряжения сдвига наблюдается при $(\xi_2)_{\text{опт}} \approx 0{,}18$ (см. рис. 6.6).

В точке $\xi_2 \approx 0{,}325$ диффузия и конвекция пренебрежимо малы, а порождение энергии равняется ее локальной диссипации. Это — единственная точка во всей области следа, где, строго говоря, справедлива гипотеза Прандтля $u_2' \sim l_m \, \partial \overline{U}_1/\partial x_2$ (см. § 5.2).

В области внешней границы следа диффузия кинетической энергии, порождение и диссипация малы. Энергия, которая подводится благодаря поперечному переносу энергии давления, отводится конвекцией в осевом направлении.

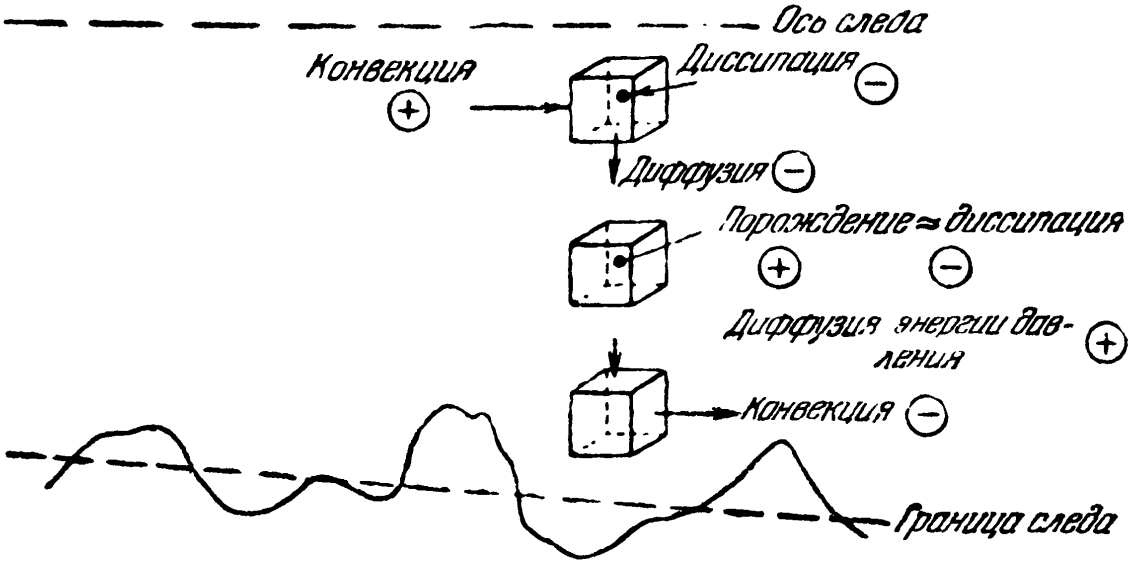



Рис. 6.10. Вклад в энергию турбулентности от различных областей следа за цилиндром.

Эти различия во вкладах в энергию турбулентности на различных участках следа иллюстрируются на рис. 6.10. В центральной области конвекция в осевом направлении $U_0\left(\partial/\partial\xi_1'\right)\frac{1}{2}\overline{q^2}$ дает положительный вклад; это наблюдается до тех пор, пока величина $\left(\partial/\partial\xi_1'\right)\frac{1}{2}\overline{q^2}$ не станет положительной. Однако во внешней области этот вклад оказывается отрицательным, что должно было бы указывать на положительный знак величины $\left(\partial/\partial\xi_1'\right)\frac{1}{2}\overline{q^2}$; но это представляется не очень логичным. Однако следует иметь в виду, что величина $\left(\partial/\partial\xi_1'\right)\frac{1}{2}\overline{q^2}$ берется в направлении, параллельном оси следа, тогда как линии тока становятся расходящимися, а ширина следа в направлении вниз по потоку увеличивается. Следовательно, величина

$(\partial/\partial\xi_1')\frac{1}{2}\overline{q^2}$ может быть положительной, хотя ее градиент вдоль линии $\xi_2 = \text{const}$ является отрицательным.

Если рассмотреть ход изменения различных характеристик турбулентности в поперечном сечении следа, то можно заметить, что некоторые из них, например кинетическая энергия турбулентности, диссипация и коэффициент вихревой вязкости, в центральной области следа изменяются очень слабо, а в направлении к граничной области более или менее быстро уменьшаются. Подобное поведение характеристик турбулентности указывает как бы на определенную однородность турбулентности в центральной части следа. Эта мысль подкрепляется наблюдениями, показавшими, что микро- и интегральный масштабы в поперечном сечении следа тоже изменяются очень слабо.

Но, в то время как в центральной части следа турбулентность практически полностью непрерывна по времени, вблизи границы




Рис. 6.11. Мгновенная картина течения в следе за цилиндром.

следа турбулентность становится все более и более перемежающейся. Этот вывод иллюстрируется на рис. 6.11; можно также сослаться на осциллограммы, приведенные на рис. 1.9.

Таунсенд выдвинул предположение, что турбулентность может быть однородной в области, значительно большей той, которая соответствует зоне центрального непрерывного ядра. Это должно было бы означать, что уменьшение различных параметров турбулентности в направлении к внешней области следа является только кажущимся и связано с перемежающимся характером течения. Анализ осциллограмм скорости, снятых в различных точках следа (типа тех, которые изображены на рис. 1.9), показывает, что пульсации в турбулентных зонах вблизи границы следа имеют такие же черты, как и в области полностью турбулентного ядра. Если это так, то корреляция скорости $\overline{u(t)\,u(t-\tau)}$ должна иметь одну и ту же величину как в области турбулентного ядра, так и в турбулентных областях внутри выпучин («протуберанцев») на границе следа. По-видимому, так оно и есть на самом деле.

В качестве меры перемежаемости турбулентности можно выбрать отношение $\Omega$ интервала времени, в течение которого наблюдается турбулентное движение, к полному промежутку времени. Это отношение, названное Бэтчелором и Таунсендом коэффициентом перемежаемости, в непрерывной турбулентной области равно единице, а по направлению к внешней границе стремится к нулю.

Для определения коэффициента перемежаемости в следе за цилиндром Таунсенд [8] воспользовался двумя методами. Первый из них — косвенный — основан на измерении осредненных по времени степеней производных от скорости. При этом имеем

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}_{\text{перемеж}} = \Omega \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}_{\text{непр}}, \qquad \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}_{\text{перемеж}} = \Omega \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}_{\text{непр}}.$$

Таким образом, коэффициент сплющивания $T$ для $\partial u_1/\partial x_1$ принимает вид

$$T\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^4}_{\text{перемеж}}}{\left[\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}_{\text{перемеж}}\right]^2} = \frac{1}{\Omega} \frac{\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^4}_{\text{непр}}}{\left[\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}_{\text{непр}}\right]^2}.$$

Отсюда следует, что отношение $T_{\text{непр}}/T_{\text{перемеж}} = \Omega$ представляет собой непосредственную меру коэффициента перемежаемости. Этот метод можно применять в том случае, когда микроструктура турбулентности в непрерывной и перемежающейся частях следа обладает достаточной однородностью.

Другой метод основан на использовании такой электрической схемы, которая на выходе термоанемометра создает сигнал, равный нулю, когда $(\partial u_1/\partial x_1)^2 = 0$, и равный единице, когда величина $(\partial u_1/\partial x_1)^2$ превышает соответствующим образом выбранное предельное значение. Средняя величина этого выходного сигнала равна коэффициенту перемежаемости. Этот метод применим только в тех случаях, когда в течение одного периода турбулентного движения происходит большое число полных пульсаций скорости. Это условие обычно удовлетворяется, если число Рейнольдса турбулентного потока велико.

На рис. 6.12 представлены результаты измерений коэффициента перемежаемости $\Omega$. Можно заметить, что коэффициент перемежаемости начинает значительно отличаться от единицы уже на относительно небольших расстояниях от оси следа, т. е. в тех областях, которые принято считать полностью турбулентными.

Если турбулентность почти однородна в турбулентных областях, включая области внутри выпучин («протуберанцев»), то соответствующие характеристики турбулентности в сечении следа после внесения поправки на коэффициент перемежаемости должны иметь практически постоянные значения. Анализ рис. 6.13 показывает, что это почти

так и есть на самом деле. Кинетическая энергия турбулентности, диссипация и коэффициент вихревой вязкости, которые приведены

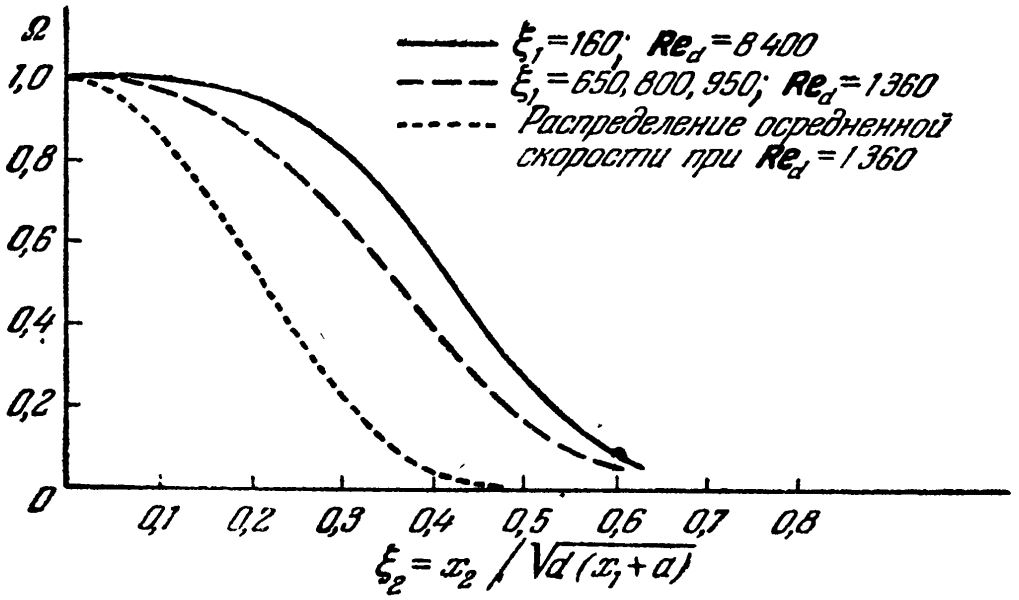



Рис. 6.12. Изменение коэффициента перемежаемости Ω при течении в следе за круглым цилиндром [9].

соответственно на рис. 6.5, 6.8 и 6.6, будучи поделенными на коэффициент перемежаемости, в значительной части поперечного

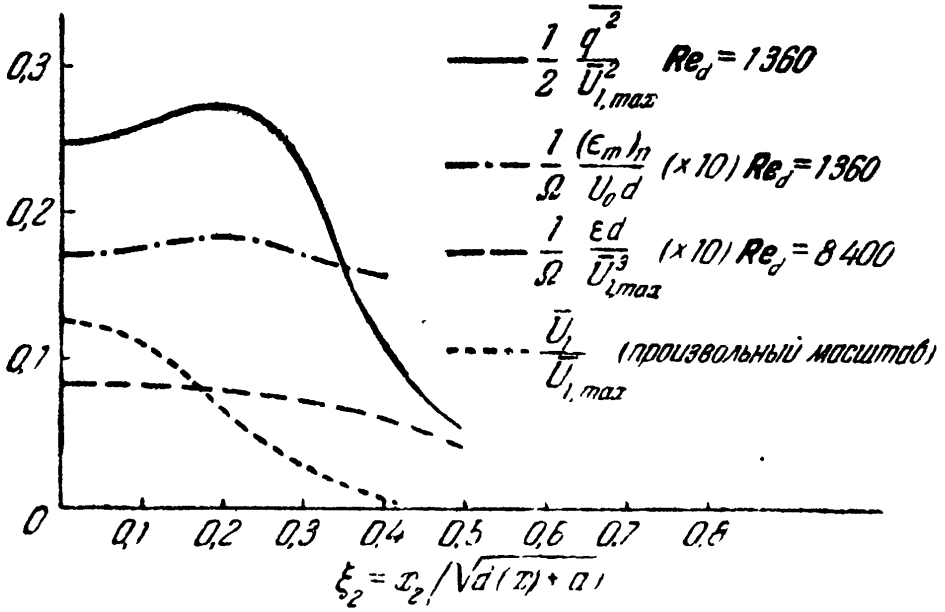



Рис. 6.13. Характеристики турбулентности в турбулентных областях в полном поперечном сечении следа за цилиндром.

сечения следа оказываются практически постоянными (см. рис. 6.12). В частности, заслуживает внимания постоянство коэффициента вихревой вязкости и диссипации в сечении следа..

## § 6.7. Распределение скорости в круглой свободной струе по классическим теориям

Здесь мы рассмотрим применение теорий Буссинеска, Прандтля, Тэйлора и Рейхардта к распределению осредненной скорости в круглой свободной струе.

Представим себе общий случай, когда струя со скоростью $U_p$ вытекает из круглого отверстия диаметром $d$ в поток, скорость $U_s$ которого постоянна (рис. 6.14). Собственно струя и окружающий ее поток обычно называются соответственно первичным и вторичным потоками.

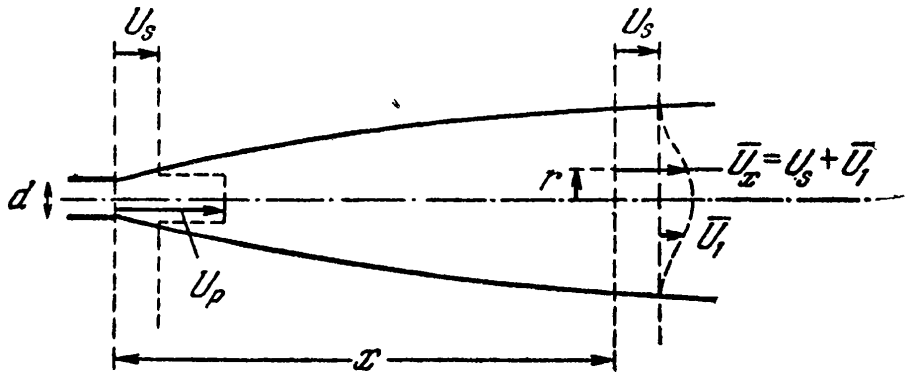



Рис. 6.14. Круглая свободная струя в спутном потоке с постоянной скоростью $U_s$.

Примем, что течение обладает осевой симметрией, а осевая координата $x$ цилиндрической системы координат $(x, r)$ совпадает с осью струи. Начало координат поместим в плоскости отверстия.

В области струи осевая компонента скорости $U_x$ рассматривается как сумма двух слагаемых: скорости вторичного потока $U_s$ и скорости $U_1$, которая представляет собой избыток скорости струи над скоростью $U_s$. Снаружи струи давление постоянно; поэтому

$$\frac{dP_0}{dx} = 0.$$

Если принять допущения, перечисленные в § 6.2, то уравнение движения в проекции на направление оси струи запишется в виде [см. уравнение (6.18)]

$$\rho\left(\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{xr}).$$

Вводя сюда скорость $\bar{U}_x = U_s + \bar{U}_1$ и скорость истечения $U_p$, получаем уравнение для $\bar{U}_1$:

$$\left(\frac{U_s}{U_p} + \frac{\bar{U}_1}{U_p}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\bar{U}_1}{U_p} + \frac{\bar{U}_r}{U_p}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{U}_1}{U_p} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\sigma_{xr}}{\rho U_p^2}\right). \qquad (6.49)$$

Примем, что картины течения в последовательно расположенных сечениях, начиная с некоторого расстояния от отверстия, являются подобными. Тогда, следовательно, можно положить, что

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}} = f(\xi_2), \quad \frac{\overline{U}_r}{\overline{U}_{1,\max}} = g(\xi_2), \quad \frac{\overline{U}_{1,\max}}{U_p} = \psi(\xi_1), \qquad (6.50)$$

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \overline{U}^2_{1,\max}} = h(\xi_2),$$

где

$$\xi_2 = \frac{r}{d}\varphi(\xi_1), \quad \xi_1 = \frac{x+a}{d} \qquad (6.51)$$

и $a$ – расстояние между геометрическим центром подобия и началом системы координат.

Подставим в уравнение (6.49) выражения (6.50), помня при этом, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{d}\frac{\xi_2}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\xi_1}\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{1}{d}\frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{d}\varphi\frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Тогда уравнение (6.49) примет вид

$$(\mu + f\psi)\left(\frac{\psi}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\xi_1}\xi_2\frac{df}{d\xi_2} + \frac{d\psi}{d\xi_1}f\right) + \psi^2\varphi g\frac{df}{d\xi_2} = \psi^2\varphi\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 h), \qquad (6.52)$$

где $\mu = U_s/U_p$ — отношение скорости вторичного и первичного потоков.

Как и в случае следа за телом, функции $\varphi(\xi_1)$ и $\psi(\xi_1)$ не являются независимыми. Это вытекает из граничного условия, получаемого

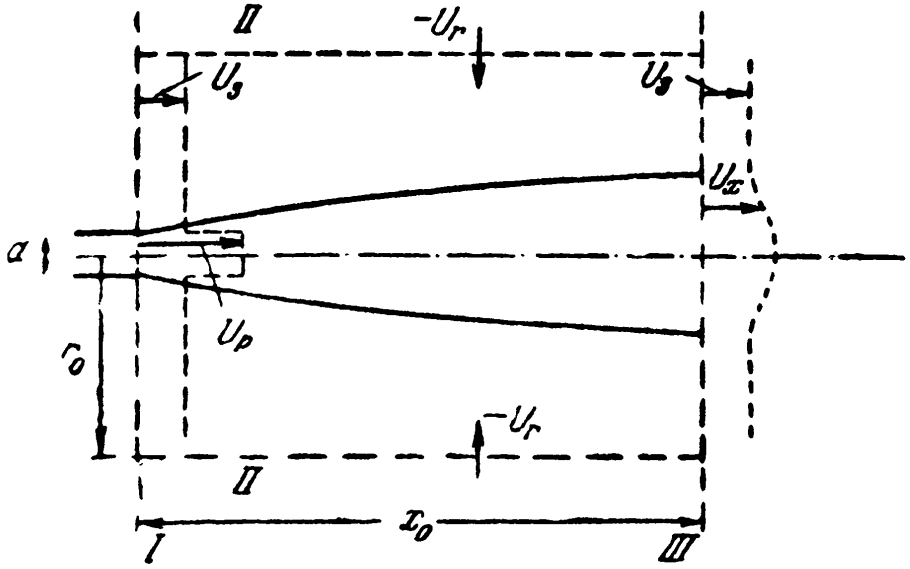



Рис. 6.15. Контрольные поверхности *I*, *II* и *III*, используемые при составлении баланса потока импульса.

путем интегрирования уравнения (6.49) по $r$, т. е. из баланса потока импульса.

Рассмотрим поток импульса через контрольные поверхности *I*, *II* и *III* (рис. 6.15). При этом радиус $r_0$ цилиндрической поверхности *II*

считается настолько большим, что осевая скорость потока в точке, соответствующей этому радиусу, практически равна $U_s$.

Поток импульса через плоскость *I* запишется в виде

$$U_p^2 \frac{\pi}{4} d^2 + U_s^2 \left(\pi r_0^2 - \frac{\pi}{4} d^2\right). \qquad \text{(а)}$$

Через цилиндрическую поверхность *II* происходит перенос жидкости к струе, который определяется уравнением неразрывности:

$$-2\pi r_0 \int_0^{x_0} U_r dx = 2\pi \int_0^{r_0} U_x r\, dr - U_p \frac{\pi}{4} d^2 - U_s \left(\pi r_0^2 - \frac{\pi}{4} d^2\right).$$

Таким образом, поток осевой компоненты импульса через контрольную поверхность *II* представится в виде

$$-2\pi r_0 U_s \int_0^{x_0} U_r\, dx =$$

$$= 2\pi U_s \int_0^{r_0} U_x r\, dr - U_p U_s \frac{\pi}{4} d^2 - U_0^2 \left(\pi r_0^2 - \frac{\pi}{4} d^2\right). \qquad \text{(б)}$$

Поток импульса через плоскость *III* имеет следующее выражение:

$$2\pi \int_0^{r_0} U_x^2 r\, dr. \qquad \text{(в)}$$

Так как течение считается стационарным, а внешними силами, действующими на жидкость, заключенную между контрольными поверхностями, пренебрегается, то полный поток импульса (а) + (б) — (в) должен быть равен нулю. Это дает

$$2\pi \int_0^{\infty} U_x (U_x - U_s) r\, dr = U_p (U_p - U_s) \frac{\pi}{4} d^2,$$

поскольку ради простоты можно принять $r_0 \to \infty$. Правая часть этого уравнения, т. е. поток избыточного импульса жидкости, вытекающей из отверстия, имеет постоянную величину. Если воспользоваться средней по времени величиной и записать

$$U_x = U_s + \overline{U}_1 + u_1,$$

то с той же степенью приближения, с какой справедливо уравнение (6.49), получим

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\overline{U}_1}{U_p} \frac{U_s}{U_p} + \frac{\overline{U}_1^2}{U_p^2}\right) r\, dr = \text{const}.$$

В предположении об автомодельности течения интегральное соотношение импульсов принимает вид

$$\mu \frac{\psi}{\varphi^2} \int_0^\infty f \xi_2 \, d\xi_2 + \frac{\psi^2}{\varphi^2} \int_0^\infty f^2 \xi_2 \, d\xi_2 = \text{const}. \tag{6.53}$$

Теперь рассмотрим более подробно члены, входящие в уравнения (6.52) и (6.53). Как видим, каждый из них представляет собой произведение двух сомножителей, один из которых является функцией только $\xi_1$. Значит, подобие может иметь место лишь в том случае, когда все эти функции $\xi_1$ либо постоянны, либо пропорциональны друг другу. Поэтому они должны удовлетворять условию

$$\frac{d\psi}{d\xi_1} \sim \frac{\psi}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \sim \psi \frac{d\psi}{d\xi_1} \sim \psi^2 \varphi.$$

Легко убедиться в том, что этому условию нельзя удовлетворить, не впав в противоречие; исключение составляет лишь тривиальное нулевое решение.

Поэтому для общего случая, к которому относятся уравнения (6.52) и (6.53), не представляется возможным сохранить предположение о полном подобии в полностью развитой турбулентной части струи во всем диапазоне изменения $\xi_1$. Подобие может сохраняться лишь в следующих двух предельных случаях, а именно:

$$\text{когда либо } \psi f \gg \mu, \quad \text{либо} \quad \psi f \ll \mu,$$

$$\text{т. е. либо } \frac{\bar{U}_1}{U_s} \gg 1, \quad \text{либо} \quad \frac{\bar{U}_1}{U_s} \ll 1.$$

Рассмотрим эти случаи отдельно; в первом из них

$$\frac{\bar{U}_1}{U_s} \gg 1, \quad \text{т. е.} \quad f\psi \gg \mu.$$

Тогда интегральное соотношение импульсов (6.53) принимает вид

$$\frac{\psi^2}{\varphi^2} \int_0^\infty f^2 \xi_2 \, d\xi_2 = \text{const},$$

откуда следует, что

$$\psi = A_1 \varphi,$$

где $A_1$ — численная постоянная.

Уравнение движения (6.52) приводится к следующей форме:

$$\varphi \frac{d\varphi}{d\xi_1} \left( \xi_2 f \frac{df}{d\xi_2} + f^2 \right) + \varphi^3 \left[ g \frac{df}{d\xi_2} - \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h) \right] = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\varphi \frac{d\varphi}{d\xi_1} = \text{const}\, \varphi^3.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\xi_1} = \frac{d}{x+a},$$

и поэтому

$$\psi = \frac{A_1}{\xi_1}.$$

Тогда $\xi_2$ определится формулой

$$\xi_2 = \frac{r}{d}\,\varphi(\xi_1) = \frac{r}{x+a}, \tag{6.54}$$

а выражения (6.50) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{U}_{1,\max}}{U_p} = A_1 \frac{d}{x+a}, \qquad \frac{\overline{U}_1}{U_p} = A_1 \frac{d}{x+a} f(\xi_2), \\ &\frac{\overline{U}_r}{U_p} = A_1 \frac{d}{x+a} g(\xi_2), \quad \frac{\sigma_{xr}}{\rho U_p^2} = A_1^2 \left(\frac{d}{x+a}\right)^2 h(\xi_2). \end{aligned} \tag{6.55}$$

Обратимся теперь ко второму случаю, когда $\overline{U}_1/U_s \ll 1$, т. е. $f\psi \ll \mu$. В этом случае интегральное соотношение импульсов (6.53) приводится к форме

$$\frac{\psi}{\varphi^2} \int_0^\infty f(\xi_2)\, \xi_2\, d\xi_2 = \text{const},$$

откуда следует, что

$$\psi = A_2 \varphi^2.$$

Следовательно, уравнение движения (6.52) сводится к выражению

$$\mu\varphi \frac{d\varphi}{d\xi_1}\left(\xi_2 \frac{df}{d\xi_2} + 2f\right) + A_2\varphi^5\left[g \frac{df}{d\xi_2} - \frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 h)\right] = 0.$$

Это дифференциальное уравнение удовлетворяется при всех значениях $\xi_1$, если

$$\frac{d\varphi}{d\xi_1} = \text{const}\, \varphi^4.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \xi_1^{-1/3} = \left(\frac{d}{x+a}\right)^{1/3},$$

и, следовательно,

$$\psi = A_2 \xi_1^{-2/3} = A_2 \left(\frac{d}{x+a}\right)^{2/3}.$$

Тогда $\xi_2$ описывается соотношением

$$\xi_2 = \frac{r}{d}\varphi(\xi_1) = \frac{r}{d}\left(\frac{d}{x+a}\right)^{1/3} = \frac{r}{[(x+a)\,d^2]^{1/3}}, \tag{6.56}$$

а выражения (6.50) принимают вид

$$\frac{\overline{U}_{1,\max}}{U_p} = A_2\left(\frac{d}{x+a}\right)^{2/3}, \quad \frac{\overline{U}_1}{U_p} = A_2\left(\frac{d}{x+a}\right)^{2/3} f(\xi_2), \tag{6.57}$$

$$\frac{\overline{U}_r}{U_p} = A_2\left(\frac{d}{x+a}\right)^{2/3} g(\xi_2), \quad \frac{\sigma_{xr}}{\rho U_p^2} = A_2^2\left(\frac{d}{x+a}\right)^{4/3} h(\xi_2).$$

Таким образом, можно заключить, что в случае $\overline{U}_1/U_s \gg 1$, который наблюдается, когда скорость $U_s$ мала (или, что возможно, обращается в нуль) по сравнению с $\overline{U}_1$, толщина струи зависит от $(x+a)$ по линейному закону, а скорость струи в осевом направлении с увеличением расстояния $(x+a)$ затухает по гиперболическому закону.

Однако когда $\overline{U}_1/U_s \ll 1$, т. е. если скорость $U_s$ велика по сравнению с $\overline{U}_1$, то толщина струи пропорциональна $(x+a)^{1/3}$, а скорость струи затухает по закону $\overline{U}_{1,\max}/U_p \sim (x+a)^{-2/3}$.

Если струя вытекает в среду, обладающую постоянной скоростью $U_s$ в осевом направлении, которая мала по сравнению со скоростью истечения струи $U_p$, то линейное нарастание толщины слоя в зависимости от $x$ и убывание скорости струи по закону обратной пропорциональности $x$ будет наблюдаться лишь на небольших расстояниях от отверстия. Дело в том, что так как скорость $U_s$ постоянна, а скорость струи убывает с увеличением $x$, то в конце концов наступают такие условия, при которых избыточная скорость струи уже не только не будет большой по сравнению с $U_s$, но даже может стать малой по сравнению с $U_s$. Тогда нарастание толщины струи в этой области будет происходить пропорционально $x^{1/3}$. Между двумя этими областями находится переходная область, распределение скорости в которой уже не может более описываться произведением $\xi_2\psi(\xi_1)$. В этой переходной области наблюдается постепенное ослабление затухания скорости струи, т. е. переход от закона $x^{-1}$ к закону «$x^{-2/3}$».

Попытаемся теперь найти в этих двух предельных случаях решения для $f(\xi_2)$, $g(\xi_2)$ и $h(\xi_2)$. В случае $\overline{U}_1/U_s \gg 1$ для удобства можно принять, что $U_s = 0$ и, следовательно, $\mu = 0$, т. е. рассмотреть распространение струи в неподвижной среде.

*Случай А.* $U_s = 0$. С помощью соотношений (6.55) при $U_s = 0$ уравнение движения (6.49) преобразуется к виду

$$-\left(f^2 + \xi_2 f\frac{df}{d\xi_2}\right) + g\frac{df}{d\xi_2} = \frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 h). \tag{6.58}$$

Использовав уравнение неразрывности, можно исключить отсюда функцию $g(\xi_2)$. Это уравнение, записанное с помощью функций $f(\xi_2)$ и $g(\xi_2)$, выражается следующим образом [см. уравнения (6.50) и (6.51)]:

$$\frac{d\psi}{d\xi_1} f + \frac{\psi}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\xi_1}\frac{df}{d\xi_2} + \varphi\psi\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 g) = 0.$$

При $\psi = A_1\varphi$ и $\varphi = 1/\xi_1$ получаем

$$-\left(f + \xi_2\frac{df}{d\xi_2}\right) + \frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 g) = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 f) = \frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 g).$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$\xi_2 g = \xi_2^2 f - \int_0^{\xi_2} f\xi_2\, d\xi_2.$$

Положим теперь

$$\int_0^{\xi_2} f\xi_2\, d\xi_2 = F(\xi_2),$$

так что

$$f = \frac{1}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2} \quad \text{и} \quad g = \frac{dF}{d\xi_2} - \frac{1}{\xi_2}F. \tag{6.59}$$

Подстановка в уравнение (6.58) дает

$$-\frac{F}{\xi_2}\frac{d^2F}{d\xi_2^2} - \frac{1}{\xi_2}\left(\frac{dF}{d\xi_2}\right)^2 + \frac{F}{\xi_2^2}\frac{dF}{d\xi_2} = \frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 h),$$

или

$$-\frac{d}{d\xi_2}\left(\frac{F}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2}\right) = \frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 h).$$

В результате решения этого дифференциального уравнения получаем

$$\xi_2 h = -\frac{F}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2} = -f\int_0^{\xi_2} f\xi_2\, d\xi_2. \tag{6.60}$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю, так как при $\xi_2 = 0$ величина $h$ должна быть конечной. Из этой формулы, пользуясь выражением (6.50), находим

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho\overline{U}_{1,\max}^2} = -\frac{1}{\xi_2}\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\int_0^{\xi_2}\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\xi_2\, d\xi_2. \tag{6.61}$$

Выражение для коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ получается из определяющего его соотношения

$$\sigma_{xr} = \rho (\epsilon_m)_{xx} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r}$$

или

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}^2_{1,\max}} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}}.$$

Таким образом, с помощью формулы (6.61) получаем

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)} = -\frac{(\bar{U}_1/\bar{U}_{1,\max}) \int_0^{\xi_2} (\bar{U}/\bar{U}_{1,\max}) \xi_2 \, d\xi_2}{\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1/\bar{U}_{1,\max})}. \tag{6.62}$$

Так как $\bar{U}_{1,\max}(x+a) = \text{const}$, то из уравнения (6.62) следует, что величина $(\epsilon_m)_{xx}$ должна зависеть только от $\xi_2$; поэтому можем записать

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d}.$$

Чтобы вычислить распределение скорости, необходимо принять какое-нибудь предположение относительно $(\epsilon_m)_{xx}$. Опять-таки рассмотрим сначала случай, при котором величина $(\epsilon_m)_{xx}$ постоянна:

$$(\epsilon_m)_{xx} = \text{const}.$$

Вводя функцию $F(\xi_2)$, соотношение (6.62) можно записать следующим образом:

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)} = -\frac{(F/\xi_2)(dF/d\xi_2)}{\xi_2 \frac{d}{d\xi_2}\left(\frac{1}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2}\right)}$$

или

$$-F\frac{dF}{d\xi_2} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)} \xi_2^2 \frac{d}{d\xi_2}\left(\frac{1}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2}\right).$$

Это уравнение легко интегрируется; в результате имеем

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)}\left(\xi_2 \frac{dF}{d\xi_2} - 2F\right) = -\frac{1}{2}F^2.$$

Постоянная интегрирования принята здесь равной нулю, так как при $\xi_2 = 0$ функция $F(\xi_2)$ тоже должна обращаться в нуль.

Последующее интегрирование дает

$$F(\xi_2) = \frac{2C\xi_2^2}{1 + [\bar{U}_{1,\max}(x+a)/2(\epsilon_m)_{xx}] C\xi_2^2},$$

откуда

$$f(\xi_2) = \frac{1}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2} = \frac{4C}{\left\{1 + C\left[\bar{U}_{1,\max}(x+a)/2\,(\epsilon_m)_{xx}\right]\xi_2^2\right\}^2}.$$

Постоянная интегрирования $C$ определяется из условия, что $f(0) = 1$; отсюда $C = 1/4$. Следовательно,

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}} = \left[1 + \frac{\bar{U}_{1,\max}(x+a)}{8\,(\epsilon_m)_{xx}}\xi_2^2\right]^{-2}. \tag{6.63}$$

## Теория Прандтля переноса импульса

Положим здесь, что

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)} = \frac{l_m^2}{(x+a)^2}\left|\frac{d}{d\xi_2}\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1,\max}}\right|.$$

Выше уже упоминалось, что член в левой части этого уравнения зависит только от $\xi_2$. Предположим, что путь смешения $l_m$ является функцией лишь $(x+a)$, т. е.

$$l_m = c_m(x+a).$$

Подставляя полученные выше выражения для $(\epsilon_m)_{xx}/\bar{U}_{1,\max}(x+a)$ и $l_m$ в уравнение (6.62) и вводя функцию $F(\xi_2)$, получаем

$$c_m^2\left(\frac{d^2F}{d\xi_2^2} - \frac{1}{\xi_2}\frac{dF}{d\xi_2}\right)^2 = F\frac{dF}{d\xi_2},$$

или, при $\xi_2^* = \xi_2/c_m^{2/3}$,

$$\left(\frac{d^2F}{d\xi_2^{*2}} - \frac{1}{\xi_2^*}\frac{dF}{d\xi_2^*}\right)^2 = F\frac{dF}{d\xi_2^*}.$$

Это уравнение было решено Толмином [10]. Он предположил, что

$$F = \exp\left(\int Z\,d\xi_2^*\right).$$

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{dZ}{d\xi_2^*} = \frac{Z}{\xi_2^*} - Z^2 - \sqrt{Z}.$$

Это уравнение Толмин решал методом разложения в степенной ряд; таким образом, он получил

$$Z = \frac{2}{\xi_2^*} - \frac{2\sqrt{2}}{7}(\xi_2^*)^{1/2} - \frac{1}{245}(\xi_2^*)^2 + \frac{\sqrt{2}}{1715}(\xi_2^*)^{7/2} + \ldots.$$

Распределение скорости, выраженное через $\xi_2^*$, дается формулой

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}} = f(\xi_2^*) = \frac{1}{\xi_2^*}\frac{dF}{d\xi_2^*} =$$

$$= \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{7}(\xi_2^*)^{3/2} - \ldots\right]\exp\left[-\frac{4\sqrt{2}}{21}(\xi_2^*)^{3/2} - \ldots\right]. \quad (6.64)$$

Из этого выражения следует, что при малых $\xi_2^*$ функция $f(\xi_2^*)$ подчиняется приближенной зависимости

$$f(\xi_2^*) \approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}(\xi_2^*)^{3/2} - \ldots \quad (6.64а)$$

Этот результат показывает, что искомая кривая в своей вершине, при $\xi_2^* = 0$, имеет бесконечно большую кривизну.

### Теория Тэйлора переноса завихренности

Начнем с уравнения (5.10), которое в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\overline{U}_1\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x} + \overline{U}_r\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial r} = \epsilon_\omega\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial r}\right). \quad (6.65)$$

Подставляя сюда величины $\xi_2$, $f(\xi_2)$ и $g(\xi_2)$ согласно соотношениям (6.54) и (6.55), получаем уравнение

$$-\left(\xi_2 f\frac{df}{d\xi_2} + f^2\right) + g\frac{df}{d\xi_2} = \frac{\epsilon_\omega}{A_1 U_p d}\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}\left(\xi_2\frac{df}{d\xi_2}\right).$$

Если для коэффициента вихревой диффузии использовать выражение (5.8) $\epsilon_\omega = \frac{1}{2}l_\omega^2\left|\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial r}\right|$, полагая в то же время, что $l_\omega = c_\omega(x + a)$, то отсюда получим

$$f\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 f) - g\frac{df}{d\xi_2} = \frac{c_\omega^2}{2}\frac{1}{\xi_2}\frac{df}{d\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}\left(\xi_2\frac{df}{d\xi_2}\right). \quad (6.66)$$

Решение этого уравнения, полученное Томотика [42] путем разложения в ряд, дает следующее выражение для $\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max}$:

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\xi_2^*)^{3/2} + \frac{11}{81}(\xi_2^*)^3 - \frac{1363\sqrt{2}}{61236\sqrt{3}}(\xi_2^*)^{9/2} + \ldots, \quad (6.67)$$

где $\xi_2^* = \xi_2(c_\omega^2/2)^{-1/3}$.

Это решение, подобно решению Толмина по теории переноса импульса, приводит к бесконечно большой кривизне профиля скорости в его вершине $\xi_2^* = 0$. Однако решение (6.67) для конечных,

но все же малых значений $\xi_2^*$ дает бо́льшую кривизну, нежели решение Толмина.

*Случай В.* $\overline{U}_1/U_s \ll 1$ и $\overline{U}_r/U_s \ll 1$. В этом случае имеем

$$\mu = \frac{U_s}{U_p} \to 1$$

и $\psi \ll 1$. Таким образом, в уравнении (6.52) можно пренебречь величиной $f\psi$ по сравнению с $\mu$, а также последним членом в левой части этого уравнения. Тогда, если возвратиться к уравнению (6.49), замечаем, что оно приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{U}_1}{U_s} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\sigma_{xr}}{\rho U_s^2}\right). \tag{6.68}$$

Вводя переменные $\xi_2$, $f(\xi_2)$ и $h(\xi_2)$ по формулам (6.56) и (6.57), а также пользуясь предположением о том, что $U_p/U_s \to 1$, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$2f + \xi_2\frac{df}{d\xi_2} = -3A_2\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 h). \tag{6.68a}$$

Это уравнение легко интегрируется; в результате имеем

$$\xi_2 f = -3A_2 h.$$

Постоянная интегрирования обращается в нуль вследствие того, что $h(0) = 0$. Таким образом, распределение напряжения сдвига описывается выражением

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho\overline{U}_{1,\max}^2} = -\frac{1}{3A_2}\xi_2\left(\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right). \tag{6.69}$$

Ввиду того, что

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho\overline{U}_{1,\max}^2} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\overline{U}_{1,\max}[(x+a)\,d^2]^{1/3}}\frac{d}{d\xi_2}\left(\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right),$$

для коэффициента вихревой диффузии получаем формулу, аналогичную соотношению (6.28):

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\overline{U}_{1,\max}[(x+a)\,d^2]^{1/3}} = -\frac{1}{3A_2}\frac{\xi_2\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max}}{\frac{d}{d\xi_2}(\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max})}. \tag{6.70}$$

Если $(\epsilon_m)_{xx}$ выразить через $U_s$ вместо $\overline{U}_{1,\max}$, то получится

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\overline{U}_s d} = -\frac{1}{3}\frac{\xi_2\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max}}{\frac{d}{d\xi_2}(\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max})}\left(\frac{d}{x+a}\right)^{1/3} = \chi(\xi_2)\,\xi_1^{-1/3}. \tag{6.70a}$$

В данном случае коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ оказывается функцией не только $\xi_2$, но также и $x+a$. Отличный от этого

результат получается для двумерного случая [см. § 6.3, уравнение (6.28)] и для круглой струи при $\overline{U}_1/U_s \gg 1$ [см. случай А, уравнение (6.62)].

Если в соотношении (6.70а) функцию $\chi(\xi_2)$ положить равной постоянной величине, т. е. принять, что $(\epsilon_m)_{xx}$ зависит лишь от расстояния $x+a$, то интегрирование уравнения (6.70а) приводит к гауссову закону ошибок:

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}} = \exp\left(-\frac{1}{6\chi}\xi_2^2\right) = \exp\left[-\frac{U_s d^{4/3}}{6(\epsilon_m)_{xx}(x+a)^{1/3}}\xi_2^2\right]. \quad (6.71)$$

## Индуктивная теория Рейхардта

Чтобы воспользоваться индуктивной теорией Рейхардта, нам придется обратиться к уравнению импульсов, которое в пренебрежении членами, связанными с давлением и вязкостью, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{U_x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\overline{U_x U_r} = 0. \quad (6.72)$$

Если принять гипотезу Рейхардта

$$\overline{U_x U_r} = -\mathscr{L}\frac{\overline{\partial U_x^2}}{\partial r},$$

то это уравнение преобразуется в уравнение диффузии. Пусть

$$\overline{U_x^2} = U_s^2 + \overline{\mathfrak{V}^2},$$

где

$$\overline{\mathfrak{V}^2} = 2U_s\overline{U}_1 + \overline{U_1^2} + \overline{u_1^2}.$$

Тогда уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\mathfrak{V}^2} = \mathscr{L}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{\mathfrak{V}^2}}{\partial r}\right). \quad (6.73)$$

Мы убедились, что предположение о подобии профилей скорости справедливо только в двух крайних случаях: в случае А, когда $\overline{U}_1/U_s \gg 1$ (например, $U_s = 0$), и в случае В, когда $U_1/\overline{U}_s \ll 1$. Для случая $U_s = 0$ положим, что

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_p^2} = \psi_1(\xi_1) f_1(\xi_2),$$

где $\xi_1$ и $\xi_2$ определяются соотношениями (6.51), а

$$\psi_1(\xi_1) = \frac{B_1}{\xi_1^2}.$$

Это выражение находится в соответствии с экспериментально обнаруженным фактом, что скорость на оси струи затухает с увеличением расстояния от воображаемого источника струи по гиперболическому закону. При этом подобие устанавливается, если

$$\frac{\mathscr{L}}{x+a} = \text{const}. \tag{6.74}$$

Тогда функция $f_1(\xi_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathscr{L}}{x+a}\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}\left(\xi_2\frac{df_1}{d\xi_2}\right)+\xi_2\frac{df_1}{d\xi_2}+2f_1=0. \tag{6.75}$$

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $f_1=1$ при $\xi_2=0$, описывается гауссовым законом ошибок

$$f_1=\exp\left(-\frac{x+a}{2\mathscr{L}}\xi_2^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_p^2}=B_1\left(\frac{d}{x+a}\right)^2\exp\left(-\frac{x+a}{2\mathscr{L}}\xi_2^2\right). \tag{6.76}$$

В случае B, когда $\overline{U}_1/U_s \ll 1$, выражение для $\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_s^2}$ упрощается:

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_s^2}\approx 2\frac{\overline{U}_1}{U_s},$$

и тогда уравнение (6.73) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{U}_1}{U_s}=\mathscr{L}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\overline{U}_1/U_s}{\partial r}\right).$$

Это выражение в точности совпадает с уравнением (6.68), которое при постоянном коэффициенте вихревой диффузии приводит к решению типа кривой Гаусса (6.71). В данном случае решение типа Гаусса записывается в форме

$$\frac{\overline{\mathfrak{V}^2}}{U_s^2}=2\frac{\overline{U}_1}{U_s}=2A_2\left(\frac{d}{x+a}\right)^{2/3}\exp\left[-\frac{d^{4/3}}{6\mathscr{L}(x+a)^{1/3}}\xi_2^2\right],$$

где $\mathscr{L}(x+a)^{1/3}d^{4/3}=\text{const}$. Как было обнаружено выше для случая следа за цилиндром, связь между $\mathscr{L}/d$ и $(\epsilon_m)_{xx}/U_s d$ определяется формулой $\mathscr{L}U_s=(\epsilon_m)_{xx}$.

## Другие теоретические исследования

Общая задача о круглой струе, вытекающей в параллельный поток, была теоретически рассмотрена Сквайром и Траунсером [11], а Бай [12] провел теоретическое исследование этой задачи для предельного случая $\overline{U}_1/\overline{U}_s \ll 1$ в предположении о том, что коэффициент

вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ зависит лишь от $\xi_1$ и постоянен в поперечном сечении струи.

В своей теории Сквайр и Траунсер использовали только интегральное соотношение импульсов. Поскольку для распределения скорости в любом поперечном сечении ими была принята определенная функция (а именно косинусоида), то отпала и необходимость в решении уравнения движения. Таким образом, эти авторы ввели предположение о подобии распределения скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях струи. Однако выше было показано, что это предположение находится в противоречии с уравнением движения, по крайней мере в общем случае, когда скорость струи и скорость окружающей среды одинаковы по порядку величины.

Предположение о том, что профиль скорости описывается косинусоидой, приводит к конечной толщине струи. Эта толщина является неизвестным параметром теории. Второй неизвестный параметр — скорость на оси струи в зависимости от $x$. Если интегральное соотношение импульсов применить не только к полной струе, но и к части струи, заключенной в пределах ее полутолщины, то получается второе уравнение, которое может быть решено относительно двух неизвестных параметров (толщины струи и скорости на оси струи) как функций от $x$. Во второе соотношение импульсов входит напряжение сдвига на расстоянии от оси струи, равном половине ее толщины. Чтобы выразить его через распределение скорости, Сквайр и Траунсер воспользовались прандтлевской гипотезой пути смешения.

## § 6.8. Перенос скалярной субстанции в круглой свободной струе

Уравнение переноса субстанции $\overline{\Gamma}$ в цилиндрических координатах с учетом предположений, принятых для свободных турбулентных потоков, записывается в виде

$$\overline{U}_x \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x} + \overline{U}_r \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u_r\gamma}). \tag{6.77}$$

Будем, как и прежде, считать, что турбулентный перенос субстанции $\Gamma$ можно описать с помощью диффузионного тензора $(\epsilon_\gamma)_{ij}$. Тогда с той же степенью приближения величина $\overline{u_r\gamma}$ выразится формулой

$$-\overline{u_r\gamma} = (\epsilon_\gamma)_{rr}\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial r}. \tag{6.78}$$

Введя обозначения: $\overline{U}_x = U_s + \overline{U}_1$, $\overline{\Gamma} = \Gamma_s + \overline{\Gamma}_1$, $U_p$ — скорость истечения, $\Gamma_p$ — величина $\Gamma$ для вытекающей жидкости, преобразуем

уравнение переноса следующим образом:

$$\left(\frac{U_s}{U_p}+\frac{\overline{U}_1}{U_p}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{\Gamma}_1}{\Gamma_p}+\frac{\overline{U}_r}{U_p}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\overline{\Gamma}_1}{\Gamma_p}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{U_p}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\overline{\Gamma}_1}{\Gamma_p}\right]. \quad (6.79)$$

Если принять предположение о подобии профилей $\overline{\Gamma}_1$ и $\overline{U}_1$ в последовательно расположенных поперечных сечениях, то при решении этого уравнения возникнут те же трудности, что и при решении уравнения для распределения скорости. Решения, основанные на предположении о полном подобии, могут быть получены лишь в случаях

$$\overline{U}_1/U_s \gg 1 \quad \text{и} \quad \overline{U}_1/U_p \ll 1, \quad U_s/U_p \approx 1.$$

В случае $\overline{U}_1/U_p \ll 1$ при условии $\overline{U}_r/U_p \ll 1$ постоянная величина коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ приводит к решению типа Гаусса, аналогичному решению (6.71).

Таким образом, остается рассмотреть лишь случай $\overline{U}_1/U_s \gg 1$, например предельный случай $U_s = 0$. Из требования подобия вытекает, что можно положить

$$\frac{\overline{\Gamma}_{1,\max}}{\Gamma_p} = C_1\frac{d}{x+a}, \quad \frac{\overline{\Gamma}_1}{\Gamma_p} = C_1\frac{d}{x+a}k(\xi_2), \quad (6.80)$$

где $\xi_2 = r/(x+a)$.

Предположим, что кажущийся источник $a$ для субстанции $\Gamma_1$ совпадает с источником для скорости $U_1$. Если, помимо этого, воспользоваться соответствующими соотношениями (6.55) для $\overline{U}_1/U_p$ и $\overline{U}_r/U_p$, то уравнение (6.79) при $U_s = 0$ приведется к виду

$$-f\frac{d}{d\xi_2}(\xi_2 k)+g\frac{dk}{d\xi_2}=\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}\left[\xi_2\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1U_pd}\frac{dk}{d\xi_2}\right]. \quad (6.81)$$

Подставим теперь сюда вместо функций $f(\xi_2)$ и $g(\xi_2)$ их выражения (6.59), содержащие функцию $F(\xi_2)$. Тогда уравнение (6.81) запишется следующим образом:

$$-\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}(Fk)=\frac{1}{\xi_2}\frac{d}{d\xi_2}\left[\xi_2\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1U_pd}\frac{dk}{d\xi_2}\right].$$

Это уравнение поддается интегрированию. Так как постоянная интегрирования в силу граничных условий должна обращаться в нуль, то это решение имеет вид

$$F(\xi_2)\,k(\xi_2) = -\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1U_pd}\xi_2\frac{dk}{d\xi_2}. \quad (6.82)$$

Последующее интегрирование дает

$$k(\xi_2)=\frac{\overline{\Gamma}_1}{\overline{\Gamma}_{1,\max}}=\exp\left[-\int_0^{\xi_2}\frac{A_1U_pd}{(\epsilon_\gamma)_{rr}}F(\xi_2)\frac{d\xi_2}{\xi_2}\right]. \quad (6.83)$$

Таким образом, распределение $\overline{\Gamma}_1$ выражается непосредственно через распределение скорости и может быть вычислено, если известны распределение скорости и коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$.

Преобразуем выражение (6.83), выразив распределение скорости через коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$. Из соотношения (6.62) получается следующий результат:

$$\frac{F(\xi_2)}{\xi_2} = -\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d}\frac{1}{f(\xi_2)}\frac{df}{d\xi_2} = -\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d}\frac{d}{d\xi_2}\left(\ln\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right).$$

Следовательно, выражение (6.83) принимает вид

$$\frac{\overline{\Gamma}_1}{\overline{\Gamma}_{1,\max}} = \exp\left[\int_0^{\xi_2}\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{(\epsilon_\gamma)_{rr}}\frac{d}{d\xi_2}\left(\ln\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right)d\xi_2\right]. \qquad (6.84)$$

Если отношение $(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}$ не зависит от $\xi_2$, то это выражение оказывается идентичным выражению (6.42), полученным для течения в следе за цилиндром.

## Теория Прандтля пути смешения

Постоянство отношения $(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}$, о котором идет речь, принимается, например, при использовании прандтлевской гипотезы пути смешения, ибо в этом случае

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d} = c_m^2\left|\frac{d}{d\xi_2}\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right|, \quad \frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} = c_\gamma^2\left|\frac{d}{d\xi_2}\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right|$$

и, следовательно, $(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr} = c_m^2/c_\gamma^2$.

Тогда соотношение (6.84) преобразуется к форме

$$\frac{\overline{\Gamma}_1}{\overline{\Gamma}_{1,\max}} = \left(\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right)^{c_m^2/c_\gamma^2}. \qquad (6.85)$$

Таким образом, при $c_m = c_\gamma$ распределение $\overline{\Gamma}_1$ одинаково с распределением скорости.

## Теория Тэйлора переноса завихренности

Если распределение скорости вычислять по видоизмененной теории Тэйлора переноса завихренности, то окончательный результат оказывается отличным от выражений (6.84) и (6.85). Введем в выражение (6.83) величину

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} = c_\gamma^2\left|\frac{d}{d\xi_2}\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right|.$$

Тогда (6.83) с помощью соотношения (6.59) преобразуется к виду

$$\frac{\overline{\Gamma}_1}{\overline{\Gamma}_{1,\max}} = \exp\left[\frac{1}{c_\gamma^2}\int_0^{\xi_2}\frac{\xi_2(1/\xi_2)\int_0^{\xi_2}(\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max})\,\xi_2 d\xi_2}{\frac{d}{d\xi_2}(\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max})}d\xi_2\right].$$

Решение (6.67) для распределения скорости, полученное Томотика [42], выражается через переменную $\xi_2^* = \xi_2(c_\omega^2/2)^{-1/3}$. Если ввести эту новую переменную, то выражение для $\overline{\Gamma}_1/\overline{\Gamma}_{1,\max}$ примет вид

$$\frac{\overline{\Gamma}_1}{\overline{\Gamma}_{1,\max}} = \left\{\exp\left[\int_0^{\xi_2^*}\frac{(1/\xi_2^*)\int_0^{\xi_2^*}\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max}\,\xi_2^* d\xi_2^*}{\frac{d}{d\xi_2^*}(\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max})}d\xi_2^*\right]\right\}^{c_\omega^2/2c_\gamma^2}. \qquad (6.86)$$

Этот интеграл был вычислен Хауэртом [13], который для $\overline{U}_1/\overline{U}_{1,\max}$ использовал выражение (6.67), а также принял предположение о том, что $c_\omega^2/2c_\gamma^2 = 1$.

## Индуктивная теория Рейхардта

Наконец, обратимся к индуктивной теории Рейхардта. Если пренебречь молекулярными эффектами, то получается следующее приближенное уравнение переноса субстанции Г:

$$U_x\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x} + U_x\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right) = 0.$$

Если к левой части этого уравнения прибавить величину

$$\Gamma\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r}\right) = 0$$

и произвести осреднение по времени, то получится

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{U_x\Gamma} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{U_r\Gamma}) = 0.$$

Следуя Рейхардту, предположим [см. формулу (5.25)], что

$$\overline{U_r\Gamma} = -\mathscr{L}_\gamma\frac{\partial}{\partial r}\overline{U_x\Gamma}. \qquad (6.87)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{U_x\Gamma} = \mathscr{L}_\gamma\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\overline{U_x\Gamma}\right). \qquad (6.88)$$

Обозначая

$$U_x = U_s + \bar{U}_1 + u_1, \quad \Gamma = \Gamma_s + \bar{\Gamma}_1 + \gamma,$$

имеем

$$\overline{U_x\Gamma} = U_s\Gamma_s + U_s\bar{\Gamma}_1 + \Gamma_s\bar{U}_1 + \bar{U}_1\bar{\Gamma}_1 + \overline{u_1\gamma}. \tag{6.89}$$

Так как величина $U_s\Gamma_s$ постоянна, то остается рассмотреть сумму только последних четырех членов в правой части уравнения (6.89). Использование предположения о подобии в последовательно расположенных сечениях струи применительно к распределениям импульса и $\Gamma$ в тех случаях, для которых это предположение справедливо, приводит к решению типа Гаусса для величины

$$\bar{U}_1\bar{\Gamma}_1 + \overline{u_1\gamma}, \quad \text{если} \quad U_s = \Gamma_s = 0$$

при

$$\frac{\mathscr{L}_\gamma}{x+a} = \text{const},$$

и для величины

$$U_s\bar{\Gamma}_1 + \Gamma_s\bar{U}_1, \quad \text{если} \quad \bar{U}_1/U_s \ll 1 \quad \text{и} \quad \bar{\Gamma}_1/\Gamma_s \ll 1$$

при

$$\mathscr{L}_\gamma \frac{(x+a)^{1/3}}{d^{4/3}} = \text{const}.$$

Следовательно, здесь снова необходимо подчеркнуть, что только во втором случае ($\bar{U}_1/\bar{U}_s \ll 1$; $\bar{\Gamma}_1/\Gamma_s \ll 1$) теория Рейхардта приводит к гауссову распределению для осредненной скорости $\bar{U}_1$ и субстанции $\bar{\Gamma}_1$. Но в другом случае гауссово распределение применимо лишь к потоку импульса $\rho\mathfrak{V}^2$ и к величине $(U_s\bar{\Gamma}_1 + \Gamma_s\bar{U}_1 + \bar{U}_1\bar{\Gamma}_1 + \overline{u_1\gamma})$.

## § 6.9. Измерение распределения осредненной скорости и осредненной температуры в круглой свободной струе

Круглая свободная струя являлась объектом многочисленных экспериментальных исследований. Большинство из них относилось к струе, вытекающей в неподвижную окружающую жидкость, и лишь незначительная часть — к более общему случаю струи в спутном потоке. Пожалуй, впервые систематическое исследование струи в спутном потоке было проведено Форстоллом и Шапиро [14–16]. Аналогичные опыты были несколько позже поставлены Ачария [17], а также Александером, Кивником, Камингсом и Генце [34].

Форстолл и Шапиро получили эмпирические зависимости толщины струи и затухания ее скорости от расстояния до сопла при различных значениях отношения $\mu$ скорости спутного потока $U_s$ к скорости истечения струи $U_p$.

Непосредственно за соплом зона турбулентного смешения имеет нулевую толщину; толщина этой зоны возрастает с увеличением расстояния от сопла вплоть до такого значения $x_c$, при котором зона смешения занимает целиком всю струю (см. рис. 6.16). Если распределение скорости на выходе из сопла равномерно (всегда можно добиться, чтобы действительное распределение было достаточно близко к равномерному), то скорость на оси сохраняет свое постоянное значение $U_p$ вплоть до этого расстояния $x_c$. Поэтому часто говорят, что вплоть до $x_c$ струя имеет в центре потенциальное ядро. Дальше вниз по потоку от сопла скорость на оси струи с увеличением расстояния уменьшается. На некотором расстоянии течение в струе становится полностью развитым и картины течения в последовательно расположенных сечениях оказываются подобными. К этой полностью развитой части струи применимы теории, рассмотренные выше. Переходный участок между ядром и полностью развитой турбулентной областью обычно довольно мал.

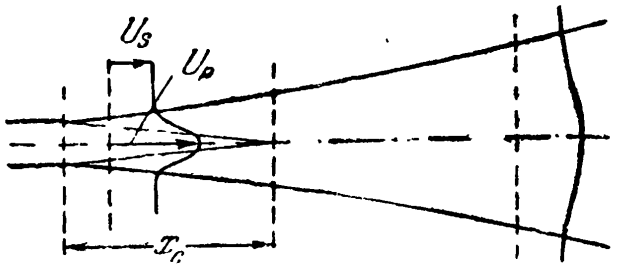



Рис. 6.16. Распределение скорости в области потенциального ядра и дальше вниз по потоку от сопла.

Протяженность области ядра $x_c$ определяется главным образом величиной $\mu = U_s/U_p$; она возрастает с увеличением $\mu$. Согласно Форстоллу [14], справедливо следующее эмпирическое соотношение:

$$\frac{x_c}{d} = 4 + 12\mu. \tag{6.90}$$

В опытах Форстолла измерения производились в диапазоне $\mu \approx 0{,}2 \div 0{,}5$. Очевидно, что в случаях, которые значительно отличаются от рассмотренных в этих опытах, соотношением (6.90) пользоваться нельзя. Из (6.90) следует, что при $\mu = 0$ имеем $x_c = 4d$, однако опыты со свободными струями, вытекающими в неподвижную окружающую жидкость, дают значительно большие величины $x_c$ (см. ниже).

Согласно результатам измерений Форстолла, относительная скорость на оси струи с возрастанием $x$ уменьшается по гиперболическому закону:

$$\frac{\overline{U}_{1,\max}}{U_p - U_s} = \frac{x_c}{x}, \quad x > x_c. \tag{6.91}$$

Для изменения толщины струи («половинного радиуса» $r_{1/2}$) Форстолл получил формулу

$$\frac{2r_{1/2}}{d} = \left(\frac{x}{x_c}\right)^{1-\mu}, \quad x > x_c. \tag{6.92}$$

Эти два результата оказываются не полностью совместимыми друг с другом, если их рассматривать в свете теории, изложенной в предыдущих разделах. Эмпирический гиперболический закон (6.91) затухания осредненной скорости по оси струи, как видим, применяется даже для очень больших расстояний от сопла (при $\mu = 0{,}5$ Форстолл производил измерения в диапазоне изменения $x$ от 0 до $120d$). Но если бы это было так, то толщина струи с увеличением $x$ должна была бы нарастать по линейному закону, а не по соотношению (6.92). Поэтому, исходя из интегрального соотношения импульсов, следует признать, что формула (6.92) не согласуется с (6.91); во всяком случае, это действительно так, если профили скорости в поперечных сечениях струи подобны. Но, согласно измерениям Форстолла, профили скорости практически оказываются подобными, если в каждом сечении скорость относить к $\overline{U}_{1,\max}$, а радиальную координату — к «половинному радиусу».

Форстолл произвел сравнение профилей измеренной скорости с косинусоидой, рекомендованной Сквайром и Траунсером [11], а также с гауссовой кривой ошибок. На основании этого сравнения он пришел к выводу, что для центрального участка струи лучшее согласие с измеренным распределением дает гауссова кривая ошибок.

Для вычисления напряжения сдвига в струе Сквайр и Траунсер воспользовались прандтлевской теорией переноса импульса и приняли, что

$$\sigma_{xr} = \rho c'^2 r_0^2 \left|\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial r}\right| \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial r},$$

где величина $r_0$ — ордината границы струи. Форстолл по своим измерениям получил для случаев $\mu = 0{,}2$ и $\mu = 0{,}5$ значение $c' = 0{,}083$. Постоянная $c'$ не совпадает с постоянной пути смешения $c_m$ в теории Прандтля. Связь между $c'$ и $c_m$ при линейном законе нарастания толщины струи выражается формулой $c_m = c' r_0/(x + a)$. Так как отношение $r_0/(x + a)$ примерно равно 0,2, то для $c_m$ получается значение $\sim 0{,}0165$.

Согласно эмпирической формуле (6.92), струя прекращает утолщаться, когда величина $\mu$ достигает значения 1. Это представляется логичным при условии, что как в первичном, так и во вторичном потоке турбулентность отсутствует вовсе. В то же время, согласно теории возмущений, нарастание толщины струи в предельном случае $\mu \to 1$ оказывается пропорциональным $x^{1/3}$ [см. соотношение (6.56)].

Это кажущееся противоречие можно объяснить следующим образом. Результат Форстолла справедлив только для того предельного случая, когда турбулентность в первичном и вторичном потоках действительно отсутствует, тогда как результат теории возмущений справедлив лишь в том случае, когда для возбуждения турбулентности (обусловливающей турбулентное распространение первичного потока)

вполне достаточно любого малого различия между первичным и вторичным потоками.

Форстолл и Шапиро [15] произвели измерения в струе смеси воздуха с гелием, вытекающей в воздух. Оказалось, что распределение концентрации в поперечном сечении струи удовлетворительно описывается косинусоидой или гауссовой кривой ошибок. Распространение концентрации оказалось больше, нежели распространение осевой компоненты импульса. Применительно к теории Сквайра и Траунсера эти авторы получили для коэффициента $c'_\gamma$, соответствующего коэффициенту $c'$, значение 0,1. Если это значение сравнить с величиной коэффициента $c'$, то получим отношение коэффициентов вихревой диффузии

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{(\epsilon_m)_{xx}} = \frac{c_\gamma'^2}{c'^2} \approx 1{,}4.$$

Это отношение равно обратной величине турбулентного числа Шмидта.

Лэндис и Шапиро [18] аналогичными опытами с нагретой струей, вытекающей в спутный поток, показали, что такие же количественные результаты получаются и для распространения тепла. Александер, Кивник, Камингс и Генце при анализе результатов своих опытов по распространению струи нагретого воздуха в спутном воздушном потоке воспользовались гипотезой Рейхардта. При этом оказалось, что $\mathscr{L}_\gamma/\mathscr{L} \approx 4/3$; это отношение эквивалентно отношению $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$. Ачария [17] получил, в общих чертах, такой же результат, что и Лэндис и Шапиро. По его данным, отношение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$, по-видимому, зависит от $\mu$, но получить какого-либо определенного закона для этой зависимости не удалось, так как значения, найденные для $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ и $(\epsilon_m)_{rr}$ как функций $\mu$, оказались плохо согласующимися друг с другом.

Более многочисленные и широкие исследования были проведены применительно к свободной струе, вытекающей в неподвижную окружающую жидкость. Среди них можно отметить исследования по газовым струям, вытекающим в воздух, которые были выполнены Трюпелем [19], Руденом [20], Рейхардтом [1], Корсином [21], Корсином и Юбероем [22, 23], Альбертсоном, Даем, Йенсоном и Роузом [25], Александером, Бэроном и Камингсом [28] и Хинце и Ван дер Хегге Цийненом [24]. Форстоллом и Гейлордом [26] были проведены опыты по затопленным водяным струям.

Между экспериментальными результатами, полученными различными исследователями, имеется, вообще говоря, удовлетворительное согласие. При $x > x_c$ наблюдается линейное утолщение струи и гиперболический закон затухания осевой скорости струи с увеличением расстояния от некоторого воображаемого источника, а также весьма хорошее подобие распределений скорости в последовательно

расположенных поперечных сечениях. Согласно результатам измерений Ван дер Хегге Цийнена, $x_c \approx (6 \div 8)\, d$. Вообще говоря, эта величина немного зависит от формы насадка (сопло с затупленной или острой кромкой, круглая труба и т. д.). Но при $x > x_c$ форма насадка практически не оказывает влияния на распределение скорости.

Как и следовало ожидать, наблюдается также влияние числа Рейнольдса. Однако, с увеличением числа Рейнольдса это влияние ослабевает, и при значениях $\mathrm{Re}_d = U_p d/\nu$, превышающих $10^5$, им практически можно пренебречь.

Сравнение теоретического радиального распределения осевой компоненты скорости, вычисленного по теории переноса импульса и видоизмененной теории переноса завихренности, с измеренным распределением дает почти такую же картину, как и в случае следа за цилиндром. Обе теории приводят к слишком заостренной вершине кривой распределения скорости на оси струи. Теория переноса импульса дает несколько меньшее отклонение от измеренного распределения, чем видоизмененная теория переноса завихренности. Вблизи границы струи это отклонение, особенно в случае видоизмененной теории переноса завихренности, оказывается весьма ощутимым.

Если вычисленное и измеренное распределения скорости совместить в точке $(\xi_2)_{1/2}$, соответствующей «половинному радиусу» (согласно измерениям Ван дер Хегге Цийнена [24] $(\xi_2)_{1/2} = 0{,}08$), то величина пути смешения в теории переноса импульса будет равна

$$l_m = c_m (x + a) = 0{,}017\,(x + a).$$

Величина, соответствующая видоизмененной теории переноса завихренности, составляет

$$l_\omega = c_\omega (x + a) = 0{,}018\,(x + a).$$

Если сравнить эти величины с «половинным радиусом» $r_{1/2} = 0{,}08 \times \times (x + a)$, то соответственно получится $l_m = 0{,}21 r_{1/2}$ и $l_\omega = 0{,}225 r_{1/2}$. Как и в случае течения в следе, приведенные величины пути смешения отнюдь не малы по сравнению с толщиной зоны смешения.

Гауссова кривая ошибок весьма точно согласуется с опытными данными практически во всем поперечном сечении струи. Правда, вблизи вершины кривой распределения скорости она дает слегка завышенные, а в пограничной зоне — несколько заниженные значения. На рис. 6.17 гауссова кривая ошибок изображена вместе с экспериментальной кривой, полученной Ван дер Хегге Цийненом, который проводил опыты со струей, вытекающей из сопла диаметром 2,5 *см* с начальной скоростью 40 *м/сек*. Осевая компонента скорости измерялась в этих опытах с помощью миниатюрной трубки полного напора. В показания трубки вносились поправки, учитывающие влияние турбулентности; при этом принималось весьма сомни-

тельное допущение о том, что влияние турбулентности определяется только осевой компонентой турбулентных пульсаций скорости (см. § 2.11).

Как уже упоминалось, при $x_c > (6 \div 8)\,d$ распределения скорости в поперечных сечениях струи подобны, а скорость на оси струи убывает обратно пропорционально расстоянию $(x + a)$, т. е.

$$\frac{\bar{U}_{1,\max}}{U_p} = 6{,}4\,\frac{d}{x+a}.$$

Александер, Бэрон и Камингс [28] методом, аналогичным использованному Ван дер Хегге Цийненом, измерили поток импульса $\rho\overline{U_x^2}$ в струе с помощью трубки полного напора. Для радиального распределения этой величины они получили удовлетворительное совпадение с гауссовой кривой ошибок во всем поперечном сечении струи.

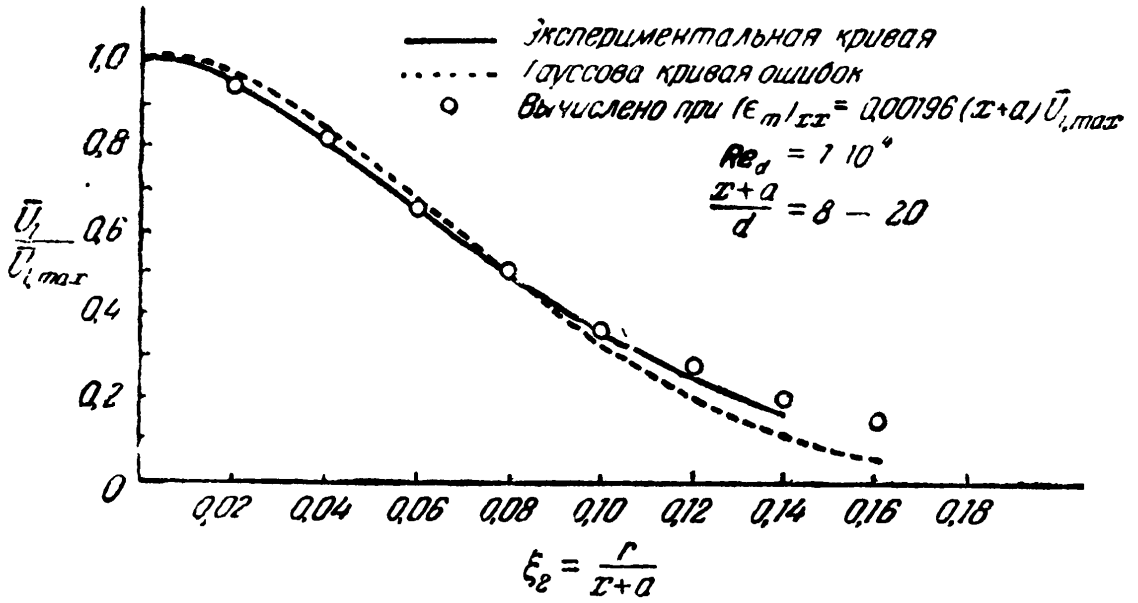



Рис. 6.17. Радиальное распределение скорости в круглой свободной струе.

На рис. 6.17 нанесены также значения, вычисленные в предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ [см. формулу (6.63)]. Эти расчетные значения лучше согласуются с экспериментальной кривой, особенно в центральной части струи; вблизи границ струи эти значения оказываются несколько завышенными. Величина коэффициента вихревой диффузии, использованная в этих расчетах, составляет

$$(\epsilon_m)_{xx} = 0{,}00196\,\bar{U}_{1,\max}\,(x + a),$$

или, будучи выраженной через $U_p d$,

$$(\epsilon_m)_{xx} = 0{,}013\,U_p d$$

(ср. с соответствующей величиной для течения в следе за цилиндром). При скорости истечения $U_p = 40$ *м/сек* и $d = 2{,}5$ *см* получаем $(\epsilon_m)_{xx} = 130$ *см*$^2$*/сек*, что примерно в 1000 раз превышает величину кинематического коэффициента вязкости для воздуха при атмосферных условиях.

Можно отметить, что так как величина $(\epsilon_m)_{xx}$ пропорциональна корню квадратному из потока импульса струи, то процесс смешения в струе в целом определяется величиной потока импульса.

Если величину $(\epsilon_m)_{xx}$ вычислить непосредственно по радиальному распределению скорости, приведенному на рис. 6.17, пользуясь для этого соотношением (6.62), то эта величина, как показано на рис. 6.18, получается почти постоянной в центральной части струи.

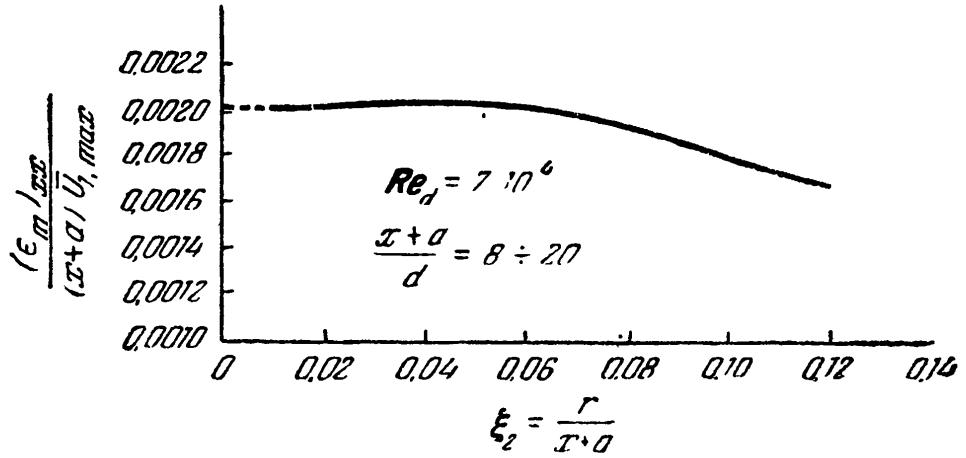



Рис. 6.18. Распределение коэффициента вихревой вязкости, вычисленное по кривой радиального распределения скорости, приведенной на рис. 6.17.

Принимая постоянное значение $(\epsilon_m)_{xx}$ в основной части поперечного сечения струи, и, следовательно, распределение скорости по уравнению (6.63), получаем следующее распределение напряжения сдвига [см. уравнение (6.61)]:

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}^2_{1,\max}} = -\frac{1}{2}\xi_2\left[1 + \frac{\bar{U}_{1,\max}(x+a)}{8(\epsilon_m)_{xx}}\xi_2^2\right]^{-3}. \qquad (6.93)$$

Напряжение сдвига при

$$(\xi_2)_{\text{опт}} = \left[\frac{8(\epsilon_m)_{xx}}{5\bar{U}_{1,\max}(x+a)}\right]^{1/2}$$

принимает максимальное значение. Поскольку

$$(\xi_2)_{1/2} = \left[\frac{8(\sqrt{2}-1)(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1,\max}(x+a)}\right]^{1/2},$$

то, как и в случае следа за цилиндром, величина $(\xi_2)_{\text{опт}}$ меньше, чем $(\xi_2)_{1/2}$. При эмпирическом значении $(\epsilon_m)_{xx}/\bar{U}_{1,\max}(x+a) = 0{,}00196$,

определенном по опытам Ван дер Хегге Цийнена, получаем $(\xi_2)_{\text{опт}} = 0{,}056$ и $(\xi_2)_{1/2} = 0{,}08$.

Опыты с нагретыми струями проводились Руденом [20], Корсином [21], Корсином и Юбероем [22, 23], а также Хинце и Ван дер Хегге Цийненом [24], которые также исследовали распространение трассирующего газа (городского газа, $H_2$, $CO_2$ и $CH_4$) в изотермической струе. Во всех этих опытах разности температур и концентраций были достаточно малы, благодаря чему заметного влияния разницы плотностей не проявлялось. Хинце и Ван дер Хегге Цийнен показали, что в этом случае не наблюдается никакого различия в распространении тепла и вещества; если распространение этих субстанций описывать с помощью коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$, то величины этого коэффциента для тепла и для вещества оказываются одинаковыми.

Распространение тепла и вещества значительно больше, чем распространение импульса. Ван дер Хегге Цийнен получил среднее для поперечного сечения струи значение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx} \approx 1{,}36$. Величина этого отношения, найденная Руденом для нагретой струи, составляет 1,32. Корсин в опытах с нагретыми струями получил для этого отношения величину 1,43, не зависящую от разности температур вплоть до начальной избыточной температуры 300° С. Все значения $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$ примерно совпадают с величиной 1,38, найденной Киджи и Уэллером [27] для изотермической струи чистого азота, вытекающей в неподвижный воздух, и с величиной 1,4, о которой упоминалось выше в связи с опытами Форстолла со струями, вытекающими в движущуюся жидкость.

Заметим, что значение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx} \approx 1{,}4$, полученное для круглой струи, намного ниже соответствующей величины 1,85, найденной для двумерного течения в следе за цилиндром. Величина, приблизительно равная 1,85, была также получена Рейхардтом [1] в случае плоской струи, вытекающей в неподвижную атмосферу *).

Ниже мы рассмотрим лишь результаты опытов Ван дер Хегге Цийнена. На расстояниях, превышающих $x_c$, распределение концентрации вдоль оси струи близко к гиперболической зависимости $\overline{\Gamma}_{1,\max}/\Gamma_p = 5{,}27\,(x + a)$. Величина $a$ здесь несколько выше, чем для распределения скорости, а именно $0{,}8d$ вместо $0{,}6d$.

Однако распределение осевой температуры заметно отклоняется от гиперболической зависимости. Видимо, разница плотностей, обусловленная процессом охлаждения при перемешивании с холодным окружающим воздухом, не оказывая заметного влияния на радиальное

*) Аналогично Ван дер Хегге Цийнен по результатам опытов с плоской свободной струей [Appl. Sci. Res., 7A, 277 (1958)] получил среднее значение, такое же по порядку величины; при этом локальное значение в поперечном сечении струи изменялось от 1,7 до 2,4.

распределение температуры, все же влияет на распределение температуры вдоль оси струи. Как и следовало ожидать, температура струи падает в осевом направлении быстрее, нежели по гиперболическому закону. Когда начальная температура струи превышала температуру окружающего воздуха на 30° С, отклонение от гиперболического закона составляло всего лишь несколько процентов.

Если измеренное радиальное распределение температуры или концентрации сравнивать с распределением $\overline{\Gamma}_1$ по теории переноса импульса и по видоизмененной теории переноса завихренности, то между ними обнаруживаются те же расхождения, что и в случае следа за цилиндром.

По данным Ван дер Хегге Цийнена путь смешения в теории переноса импульса составляет

$$l_\gamma = c_\gamma (x + a) = 0{,}02\,(x + a),$$

а в видоизмененной теории переноса завихренности

$$l_\gamma = 0{,}0234\,(x + a).$$

Распределение субстанции $\overline{\Gamma}_1$, вычисленное в предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ при постоянном коэффициенте вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{xx}$ для распределения скорости, имеет вид

$$\frac{\overline{\Gamma}_1}{\overline{\Gamma}_{1,\max}} = \left(\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\right)^{(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}} =$$

$$= \left[1 + \frac{\overline{U}_{1,\max}(x + a)}{8\,(\epsilon_m)_{xx}}\,\xi_2^2\right]^{-2(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}}. \qquad (6.94)$$

Это выражение лучше всего согласуется с измеренным распределением при $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx} = 1{,}36$. Тогда соответствующая величина $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ выразится соотношением $(\epsilon_\gamma)_{rr} = 0{,}00266\overline{U}_{1,\max}(x + a)$. Однако, как можно заключить из рассмотрения рис. 6.19, это согласование не столь удовлетворительно, как для распределения скорости, вычисленного при постоянном значении $(\epsilon_m)_{xx}$. На рис. 6.19 нанесена также гауссова кривая ошибок; она вполне удовлетворительно описывает действительное экспериментальное распределение во всем поперечном сечении струи.

Из того факта, что постоянная величина коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ в случае распределения $\overline{\Gamma}_1$ не дает такого же результата, как постоянная величина коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{xx}$ для распределения скорости, можно сделать вывод о том, что отношение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$ определенно не сохраняет постоянного значения в поперечном сечении струи, даже в центральной части ее. Это отношение, вычисленное по экспериментальным распределениям $\overline{\Gamma}_1$

и $\overline{U}_1$, показано на рис. 6.20; как видим, по направлению от центра струи к ее границе оно монотонно убывает.

Данные Форстолла и Гейлорда [26] для осевого и радиального распределений скорости в затопленной струе воды хорошо согласуются с данными Хинце и Ван дер Хегге Цийнена. Путем введения

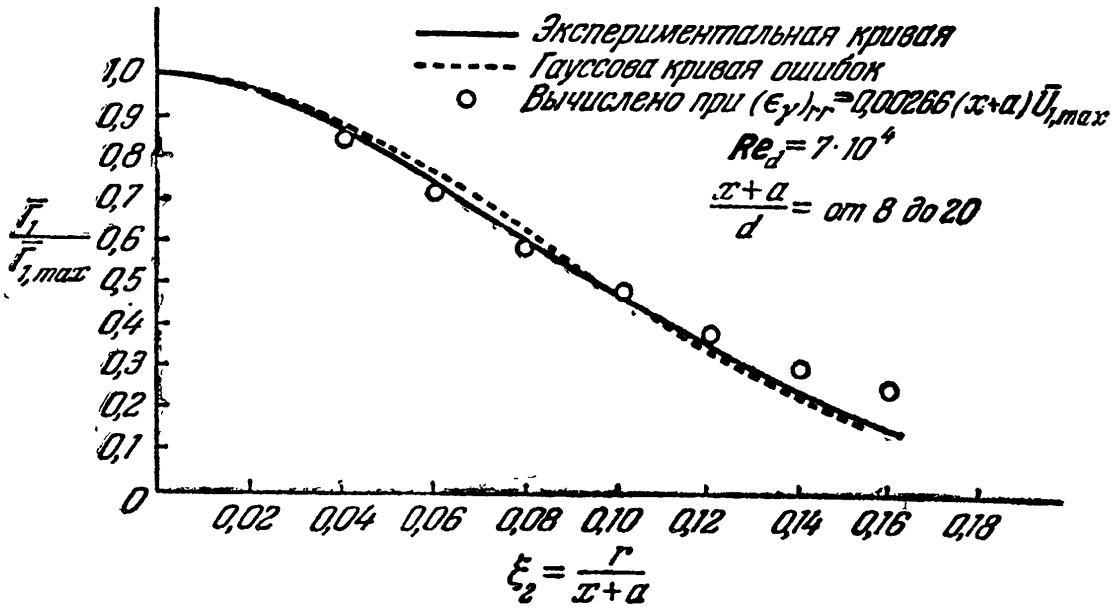



Рис. 6.19. Радиальное распределение $\overline{\Gamma}$ в круглой свободной струе.

в струю жидкости в качестве трассирующего вещества поваренной соли удалось исследовать распространение вещества в струе. Полученные при этом данные об осевом распределении согласуются

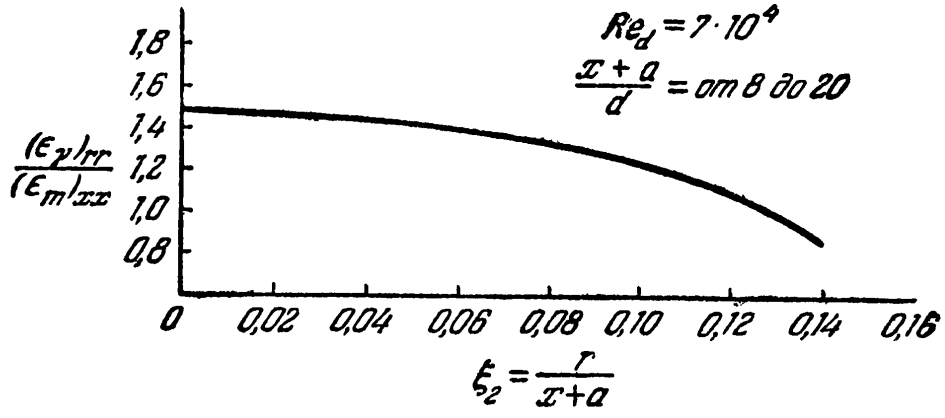



Рис. 6.20. Изменение величины $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$ в круглой свободной струе.

с данными Хинце и Ван дер Хегге Цийнена для газовых струй, однако между результатами этих опытов в отношении радиального распределения имеется некоторое различие. Отношение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$, определенное по опытным данным Форстолла и Гейлорда, лежит в пределах от 1,2 до 1,3.

В теориях свободных турбулентных потоков предполагается, что изменение статического давления в поперечном сечении зоны смешения

пренебрежимо мало. Это предположение основано на том факте, что радиальная компонента осредненной скорости мала по сравнению с осевой. Дополнительным подтверждением этого предположения являются расчеты Толмина [10]. В центральной части струи направление осредненной скорости несколько отклоняется наружу, тогда как во внешней части струи наблюдается течение, направленное к ее оси. Следовательно, во внешней области струи следует ожидать минимума статического давления. На основании своих расчетов для круглой свободной струи Толмин получил следующие соотношения:

$$\overline{P}_c - \overline{P}_{r^*} = +0{,}0012\left(\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2_{1,\max}\right), \quad \overline{P}_c - P_0 = +0{,}00075\left(\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2_{1,\max}\right),$$

где $\overline{P}_c$, $\overline{P}_{r^*}$ и $P_0$ — величины статического давления соответственно в центре струи, на ее средней границе и в невозмущенной наружной области.

Эти соотношения показывают, что изменение статического давления в поперечном сечении струи и в самом деле очень мало.

Однако Толмин не рассматривал влияния турбулентности на изменение статического давления в сечении струи. Приведенные в § 6.2 оценки порядков величин различных членов уравнения движения для радиального направления показывают, что указанные изменения статического давления должны быть по порядку своей величины больше, чем изменения, обусловленные осредненными скоростями. Изменение статического давления под действием турбулентности определяется уравнением (6.16) или его интегральной формой (6.16а). Хотя изменение $u'_r/\overline{U}_{1,\max}$ в сечении струи известно, но никаких данных об изменении $u'_\varphi/\overline{U}_{1,\max}$ не имеется; поэтому вычислить разность статических давлений $\overline{P} - P_0$ по уравнению (6.16а) не представляется возможным. Однако если учитывать лишь влияние $\rho\overline{u^2_r}$, то по величине $u'_r/\overline{U}_{1,\max}$, изображенной на рис. 6.24, можно получить следующую формулу:

$$\overline{P}_c - P_0 \approx -0{,}15\left(\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2_{1,\max}\right),$$

согласно которой разность статических давлений оказывается на два порядка выше, чем по вычислениям Толмина.

Непосредственное экспериментальное определение разности статических давлений было бы весьма желательно. Но из-за высокой относительной интенсивности турбулентности в свободных струях надежное измерение статического давления в струе крайне затруднительно. Однако подобные измерения все же удалось произвести. Измерения в круглой свободной струе ($\mathrm{Re}_d = U_p d/\nu = 400\,000$) вплоть до максимального расстояния $x/d = 10$ были осуществлены Бара [37].

На этом расстоянии минимальное статическое давление на оси струи оказалось равным

$$\overline{P}_c - P_0 \approx -0{,}075\left(\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2_{1,\max}\right).$$

По направлению к краю струи абсолютная разность давлений монотонно убывает до нуля. К сожалению, Бара не указывает, каким методом он пользовался для измерения статического давления в зоне интенсивной турбулентности.

Аналогичные измерения в плоской свободной струе ($\mathrm{Re} = U_p a/\nu = 18\,000$, $a$ — ширина щели) были проведены Миллером и Камингсом [43]. Статическое давление в струе измерялось с помощью диска с диаметром 1,25 *см*, имевшего отверстие 0,05 *см* и расположенного параллельно основному направлению течения. В различных поперечных сечениях струи были получены профили статического давления, подобные профилям, снятым Бара. Относительная отрицательная разность давлений возрастала в направлении вниз по потоку, так и не достигая постоянной величины даже в наиболее удаленном поперечном сечении $x/a = 40$. При $x/a = 10$ Миллер и Камингс получили для отношения $(\overline{P}_c - P_0)\Big/\frac{1}{2}\rho\overline{U}^2_{1,\max}$ значение около $-0{,}052$, а при $x/a = 40$ — значение $-0{,}116$.

Результаты опытов Бара, а также Миллера и Камингса показывают, что разность статических давлений в струе имеет (по крайней мере) такой же порядок, как и величина, вычисленная по относительной интенсивности турбулентности на основании уравнения (6.16а). Разность статических давлений в сечении струи полностью уравновешивается поперечным изменением турбулентных напряжений.

Во всех предшествовавших рассуждениях мы умышленно пренебрегали влиянием изменения плотности. Вообще говоря, это влияние и в самом деле оказывается незначительным, даже при умеренных разницах плотности. Опыты со свободными струями, вытекающими в неподвижный воздух и имеющими существенную начальную разницу плотностей, показали, что общая форма струи подвергается лишь небольшим изменениям. Распределение скорости остается практически таким же, как и в струях с постоянной плотностью. Некоторыми исследователями было показано, что при наличии разности плотностей жидкости в струе и в окружающей среде толщина струи, например величина $(\xi_2)_{1/2}$, изменяется. Согласно результатам этих опытов, с увеличением плотности жидкости в струе по сравнению с плотностью окружающей жидкости толщина струи становится меньше.

В случае струи с постоянной плотностью величина «половинного радиуса» составляет примерно $(\xi_2)_{1/2} \approx 0{,}08$. Согласно данным Корсина и Юбероя [22], когда начальная температура струи превышает

температуру окружающей среды на 300° С (начальное отношение плотностей около 0,5), эта величина возрастает до 0,094. Оказалось, кроме того, что при этом длина «потенциального» ядра значительно уменьшается, а скорость на оси струи убывает с увеличением расстояния от сопла более интенсивно, нежели в случае струи с постоянной плотностью. Шаблевский [38] на основании своих расчетов, проделанных для отношений плотностей $\rho_p/\rho_0 = 0{,}5$, 1 и 2,5, показал, что с увеличением $\rho_p/\rho_0$ длина потенциального ядра возрастает, а толщина струи уменьшается.

Киджи и Уэллер [39], которые проводили опыты с вертикальными струями гелия и углекислого газа, вытекавшими в неподвижный воздух, получили для струи гелия ($\rho_p/\rho_0 = 0{,}14$) значение «половинного радиуса» $(\xi_2)_{1/2} \approx 0{,}1$, а для струи углекислого газа ($\rho_p/\rho_0 = 1{,}5$) значение, примерно равное 0,076. Следует заметить, что при этом не вносилось никаких поправок на влияние архимедовых сил.

В то же время Сунавала, Халс и Тринг [40] обнаружили, что «половинный радиус» составляет $(\xi_2)_{1/2} \approx 0{,}11$ и при этом не зависит от температуры и давления в сопле. Эти авторы экспериментировали с воздушными струями, обладавшими различной начальной температурой (избыток которой над температурой окружающей среды составлял до 320° С) и вытекавшими из сопел с диаметром от 0,47 до 0,95 *см*. Ими же было показано, что затухание скорости вдоль оси струи с увеличением расстояния от сопла при более высокой температуре струи является более интенсивным. При этом кривые затухания скорости удалось совместить с соответствующей кривой для изотермической струи постоянной плотности путем замены диаметра сопла некоторым эквивалентным диаметром

$$d_e = d\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_p}\right)^{1/2} = d\left(\frac{\rho_p}{\rho_0}\right)^{1/2}.$$

Понятие эквивалентного диаметра было введено Трингом и Ньюбаем [41]. Оно основано на предположении о том, что все процессы в струе определяются ее полным импульсом. Уравнение для полного потока импульса (при $U_s = 0$) имеет вид

$$2\pi \int_0^\infty \rho U_1^2 r\,dr = \frac{\pi}{4} d^2 \rho_p U_p^2 = \frac{\pi}{4} d_e^2 \rho_0 U_p^2,$$

откуда следует, что

$$d_e = d\sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_0}}.$$

На достаточно больших расстояниях от сопла, например при $x_1/d > 10$, плотность в струе становится близкой к плотности окру-

жающей жидкости. Если для столь больших расстояний принять, что $\rho \approx \rho_0$, то получится

$$2\pi \int_0^\infty U_1^2 r\,dr = \frac{\pi}{4} d_e^2 U_p^2.$$

В рассматриваемом случае можно воспользоваться тем же методом, что и для струи с постоянной плотностью. Тогда предположение о подобии профилей скорости приводит к прежнему результату [см. уравнение (6.55)]:

$$\frac{\overline{U}_1}{U_p} = A_1 \frac{d_e}{x+a} f(\xi_2).$$

Если $A_1$ и $a$ не зависят от отношения плотностей $\rho_p/\rho_0$, то эта формула показывает, что при $d_e < d$, т. е. при $\rho_p/\rho_0 < 1$, скорость с увеличением расстояния $(x+a)$ падает до меньшей величины. Однако функция распределения $f(\xi_2)$ может при этом оставаться неизменной.

Разница плотностей может быть также обусловлена разностью давлений, что наблюдается, например, в случае струй сжимаемого газа, обладающих большой скоростью. Сведения о турбулентности в подобных струях весьма ограниченны. Бай [12] произвел расчет распространения струи в высокоскоростном потоке при $U_p/U_s = 1$, применив метод малых возмущений в предположении о постоянстве коэффициента вихревой вязкости в поперечном сечении струи. Дифференциальное уравнение для определения скорости оказывается в этом случае идентичным соответствующему уравнению для ламинарной струи, так что при этом получаются и идентичные решения.

Так как на некотором расстоянии от сопла разность плотностей струи и окружающей среды становится малой, то для описания затухания скорости струи с расстоянием от сопла в данном случае также можно воспользоваться понятием эквивалентного диаметра.

## § 6.10. Измерение характеристик турбулентности в круглой свободной струе

Для полностью развитой турбулентной струи интересующие нас экспериментальные результаты содержатся в работах Корсина [21], Корсина и Юбероя [22, 23] и Корсина и Кистлера [29]. В этих опытах применялись струи воздуха с температурой, равной температуре окружающей атмосферы или превышающей ее в начальном сечении на 300° С; несколько раньше подобные измерения были проведены Липманом и Лауфером [30] в зоне смешения между потенциальным ядром и окружающим воздухом в изотермической воздушной струе. Диапазон этих измерений впоследствии был расширен Лауренсом [31].

Во всех перечисленных опытах для измерения характеристик турбулентности применялся термоанемометр. Чин и Риб [32] для определения энергетического спектра и скорости диссипации энергии воспользовались совершенно иным методом, состоявшим в фотографировании траекторий движения частиц корпии в турбулентной струе воздуха, имевшей небольшую скорость. Однако опытные данные этих авторов имеют настолько большой разброс, что полученные результаты следует признать не очень убедительными.

В настоящем параграфе мы будем иметь дело главным образом с результатами, полученными Корсином и его сотрудниками.

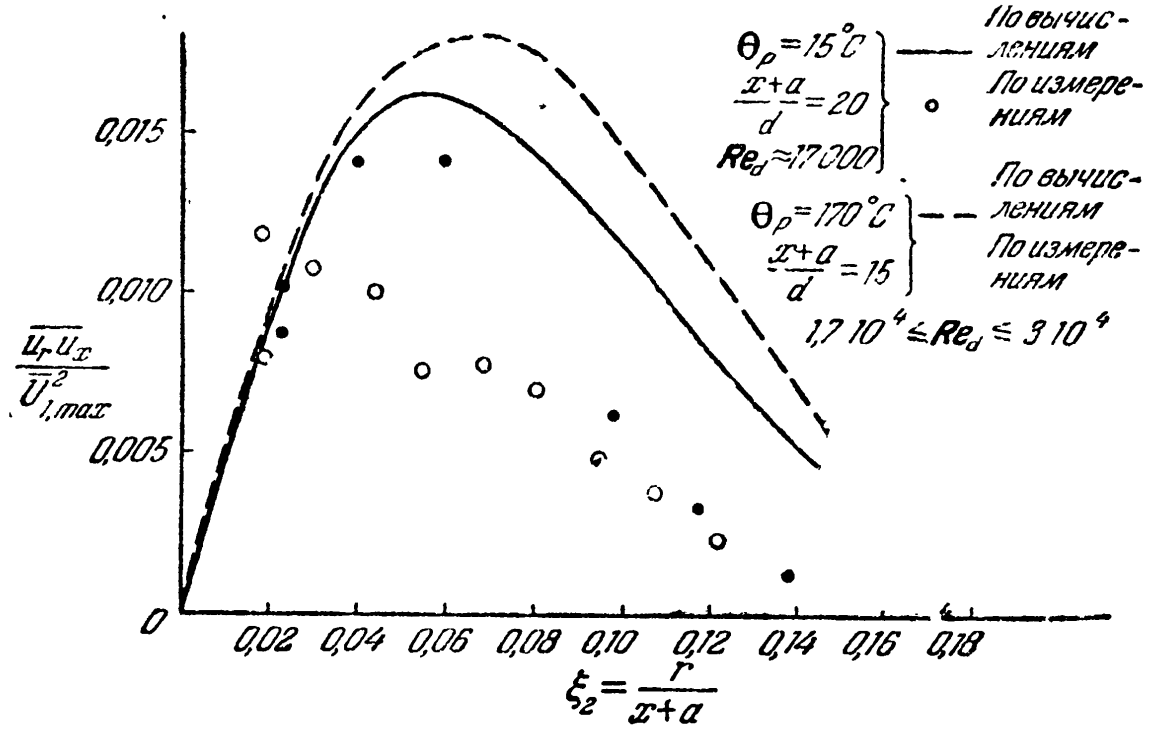



Рис. 6.21. Распределение турбулентного напряжения сдвига в круглой свободной струе. [Корсин С., NACA Wartime Repts. ACR 3L23, рис. 40, 1943.]

На рис. 6.21 показано распределение напряжения сдвига, представленное одноточечной двойной корреляцией $\overline{u_r u_x}$ в холодной и нагретой струях воздуха, вытекающих из сопла с диаметром 2,5 *см*. Кривые относятся к значениям, вычисленным согласно уравнению (6.61) по измеренным распределениям осредненной скорости.

Нагретая струя распространяется шире и соответственно характеризуется более высокими значениями турбулентного напряжения сдвига, чем холодная струя. Согласие между измеренными и вычисленными значениями напряжений сдвига наблюдается лишь вблизи оси струи. Ближе к границе струи измеренные значения намного ниже расчетных. Это расхождение частично может быть обусловлено перемежающимся характером турбулентности вблизи границы струи, но весьма вероятно, что оно в основном является следствием система-

тической ошибки в измерениях, присущей методу термоанемометра. В случае нагретой струи могла вноситься дополнительная ошибка, обусловленная трудностью точного определения сопротивления ненагретой нити при местной повышенной температуре окружающей среды [22].

Корсином и Юбероем была также измерена одноточечная двойная корреляция $\overline{u_r\theta}$, которая для случая нагретой струи вместе с

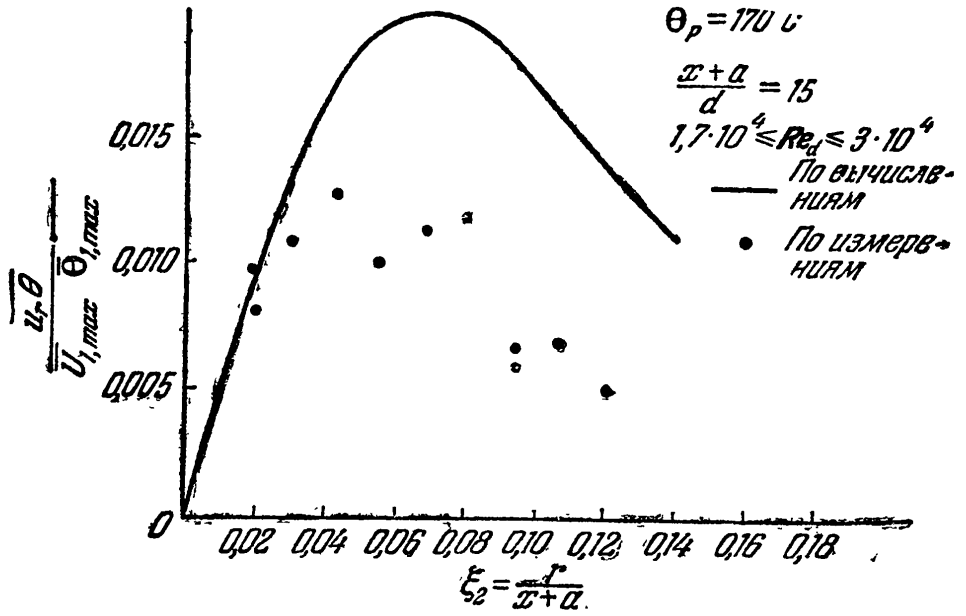



Рис. 6.22. Распределение поперечного турбулентного переноса тепла в круглой свободной струе [22].

кривой, найденной расчетом по распределению осредненной температуры, изображена на рис. 6.22. Из уравнений переноса для $\overline{\Gamma}$, выведенных в § 6.8, получается соотношение

$$\frac{\overline{u_r\theta}}{\overline{U}_{1,\max}\overline{\theta}_{1,\max}} = \frac{1}{\xi_2}\frac{\overline{\theta}_1}{\overline{\theta}_{1,\max}}\int_0^{\xi_2}\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}}\xi_2 d\xi_2, \qquad (6.95)$$

которое и было использовано для вычисления распределения $\overline{u_r\theta}/\overline{U}_{1,\max}\overline{\theta}_{1,\max}$. Хотя распределение измеренных значений по своей форме и сходно с расчетным распределением, измеренные значения оказываются все же значительно ниже расчетных.

Из приведенной выше формулы для $\overline{u_r\theta}/\overline{U}_{1,\max}\overline{\theta}_{1,\max}$ и аналогичного соотношения (6.61) следует, что

$$\frac{\overline{u_r\theta}/\overline{U}_{1,\max}\overline{\theta}_{1,\max}}{\overline{u_r u_x}/\overline{U}^2_{1,\max}} = \frac{\overline{\theta}_1}{\overline{\theta}_{1,\max}}\frac{\overline{U}_{1,\max}}{\overline{U}_1}. \qquad (6.96)$$

Так как распространение тепла превышает распространение импульса, то это отношение больше единицы. Кроме того, с увели-

чением расстояния от оси струи это отношение возрастает. Этот вывод иллюстрируется на рис. 6.23, где помимо экспериментальных результатов представлены также значения, вычисленные по опытным данным, изображенным на рис. 6.21 и 6.22. Как и прежде, экспериментальные значения систематически отклоняются от значений, вычисленных по распределениям осредненной скорости и осредненной температуры, хотя общий характер рассматриваемых зависимостей и одинаков. По-видимому, ошибки измерений, которыми обусловлено

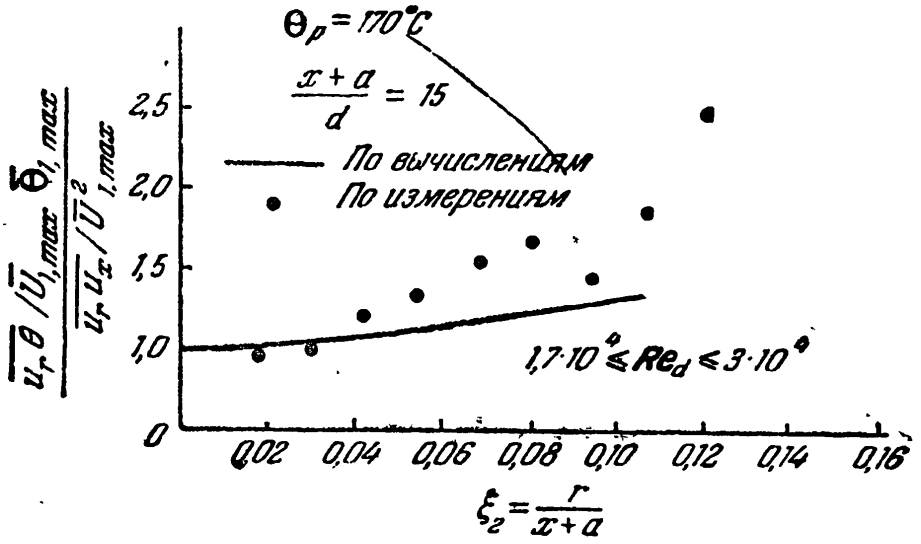



Рис. 6.23. Отношение поперечного турбулентного переноса тепла и импульса в сечении круглой свободной струи.

различие между измеренными и вычисленными значениями, в случае $\overline{u_r\theta}$ и $\overline{u_r u_x}$ неодинаковы, причем на величине $\overline{u_r u_x}$ они сказываются сильнее, чем на $\overline{u_r\theta}$.

Результаты термоанемометрических измерений компонент интенсивности турбулентных пульсаций скорости $u'_x$ и $u'_r$, проведенных Корсином [21], показаны на рис. 6.24 (третья компонента в опытах Корсина не измерялась).

Если сравнивать характер изменения и сами величины относительной интенсивности турбулентности в рассматриваемом случае и для следа за цилиндром (см. рис. 6.5, где показано распределение квадрата относительной интенсивности турбулентности), то между ними обнаруживается большое сходство. Будучи отнесенными к максимальной разности $\overline{U}_{1,\,max}$ на оси потока, компоненты относительной интенсивности турбулентных пульсаций в обоих случаях имеют одинаковую величину.

Однако весьма вероятно, что компоненты относительной интенсивности турбулентности, измеренные в свободной струе, слишком занижены. Это может быть обусловлено той же причиной, по которой получаются и довольно заниженные значения одноточечной двой-

ной корреляции $\overline{u_r u_x}$. Это опасение подтверждается результатами аналогичных измерений, проведенных Ван дер Хегге Цийненом [33] в плоской струе воздуха. Им тоже было обнаружено, что компоненты интенсивности турбулентности и турбулентное напряжение сдвига, измеренные с помощью термоанемометра, получаются заниженными.

Поскольку струя в опытах Корсина и Юбероя вытекала в неподвижный воздух, то величина $u'_x/\bar{U}_1$ является определяющим критерием применимости термоанемометра в качестве надежного измерительного

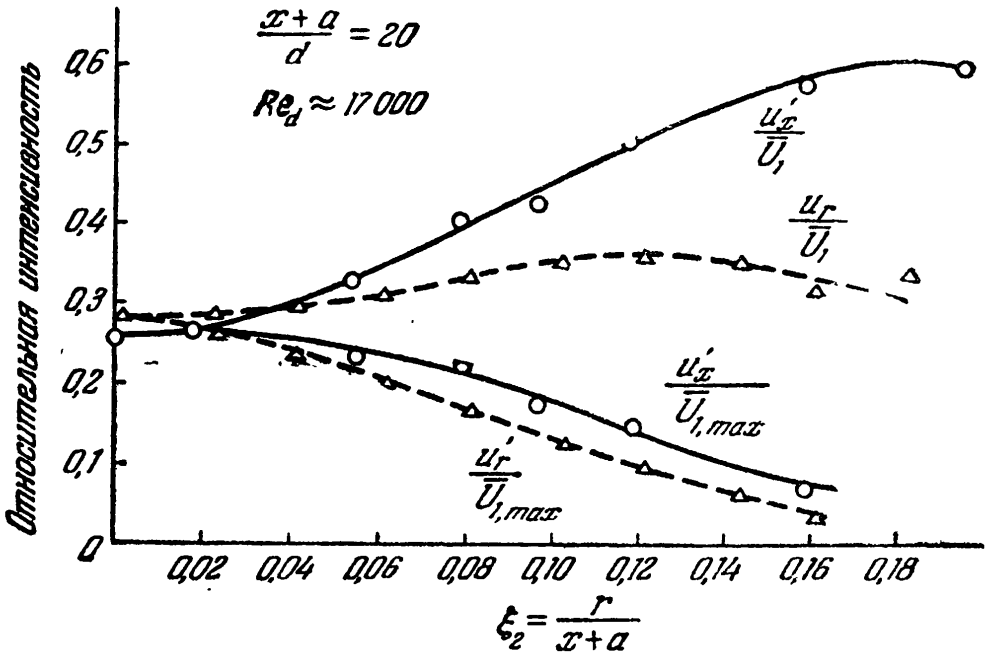



Рис. 6.24. Распределение компонент относительной интенсивности турбулентности в газотермической круглой свободной струе. [Корсин, NACA Wartime Repts. ACR 3L23, рис. 24, 1943.]

прибора, когда используется метод, основанный на предположении о малости пульсаций скорости. При исследовании течения в следе подобным определяющим критерием является величина $u'_x/(U_0 - \bar{U}_1)$. Но так как для следа, исследованного Таунсендом, выполнялось неравенство $U_0 \gg \bar{U}_1$, то величина $u'_x/(U_0 - \bar{U}_1)$ должна была быть очень малой. Поэтому полученные в опытах Таунсенда данные об относительной интенсивности турбулентности должны быть более надежны, чем соответствующие данные Корсина для струи.

Подобно течению в следе, свободные струи характеризуются несколько большими значениями $u'_r$ по сравнению с $u'_x$ вблизи оси струи, но на некотором расстоянии от оси наблюдается обратная картина.

Так как в опытах Корсина величина $u'_\varphi$ не измерялась, то по его данным нельзя вычислить распределение кинетической энергии турбулентности $\overline{q^2}$ в поперечном сечении струи. Но было бы очень

интересно посмотреть, наблюдается ли и при струйном течении приблизительное постоянство этой величины в центральной части потока.

Помимо относительной интенсивности турбулентных пульсаций скорости, Корсин и Юберой измеряли также относительную интенсивность турбулентных пульсаций температуры. Соответствующие результаты для одного поперечного сечения нагретой струи, расположенного на расстоянии $(x+a)/d=20$, представлены на рис. 6.25. Вблизи оси струи относительная и абсолютная интенсивности пульсаций температуры оказались ниже интенсивности осевой компоненты

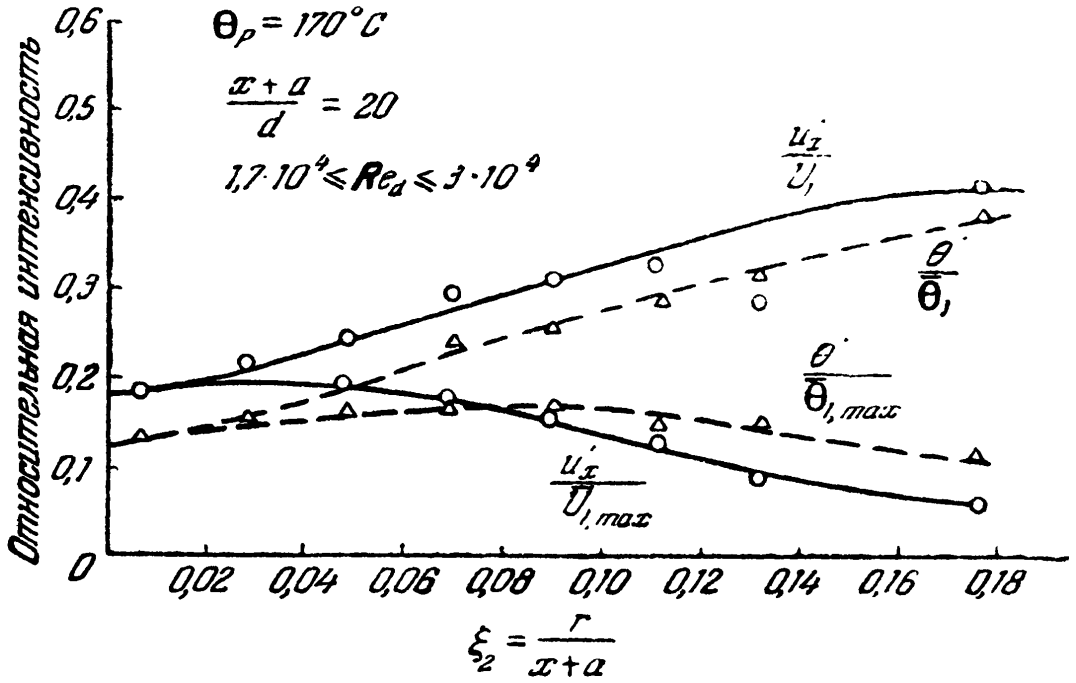



Рис. 6.25. Распределение относительной интенсивности турбулентных пульсаций скорости и температуры в нагретой круглой свободной струе [22].

турбулентных пульсаций скорости. Вблизи края струи для абсолютной интенсивности наблюдается обратная картина.

Корсином и Юбероем были измерены также и одномерные спектры $E_1(k_1)$ и $E_{\gamma 1}(k_1)$ турбулентных пульсаций скорости и температуры. Эти измерения производились в двух точках одного поперечного сечения струи, соответствующего $(x+a)/d=20$: на оси струи и в точке максимального напряжения сдвига.

Измерения спектра пульсаций скорости $u_1$ проводились на холодной струе; при измерении спектра пульсаций температуры $\theta$ струя была нагрета и ее температура на выходе из сопла составляла $\theta_p = 170°$ С. На рис. 6.26 изображены кривые, проведенные в среднем по экспериментальным точкам. Анализ этих кривых показывает, что (1) энергетические спектры турбулентных пульсаций скорости $u_1$ в обеих упомянутых точках практически одинаковы; (2) в случае спектра пульсаций $u_1$ в диапазоне больших волновых чисел наблюдается следующее отличие: спектральное распределение в точке, соот-

ветствующей максимальному напряжению сдвига, убывает быстрее, чем распределение в точке на оси струи; (3) между спектрами пульсаций $u_1$ и $\theta$ не имеется существенного различия, особенно в точке максимального напряжения сдвига; (4) в спектрах пульсаций $u_1$ не наблюдается диапазона, где выполнялся бы закон «$-5/3$». Однако подобный диапазон Колмогорова должен был бы наблюдаться в рассматриваемом случае, так как число Рейнольдса турбулентности было достаточно высоким, примерно $\mathrm{Re}_\lambda \approx 500$. В то же время Корсин

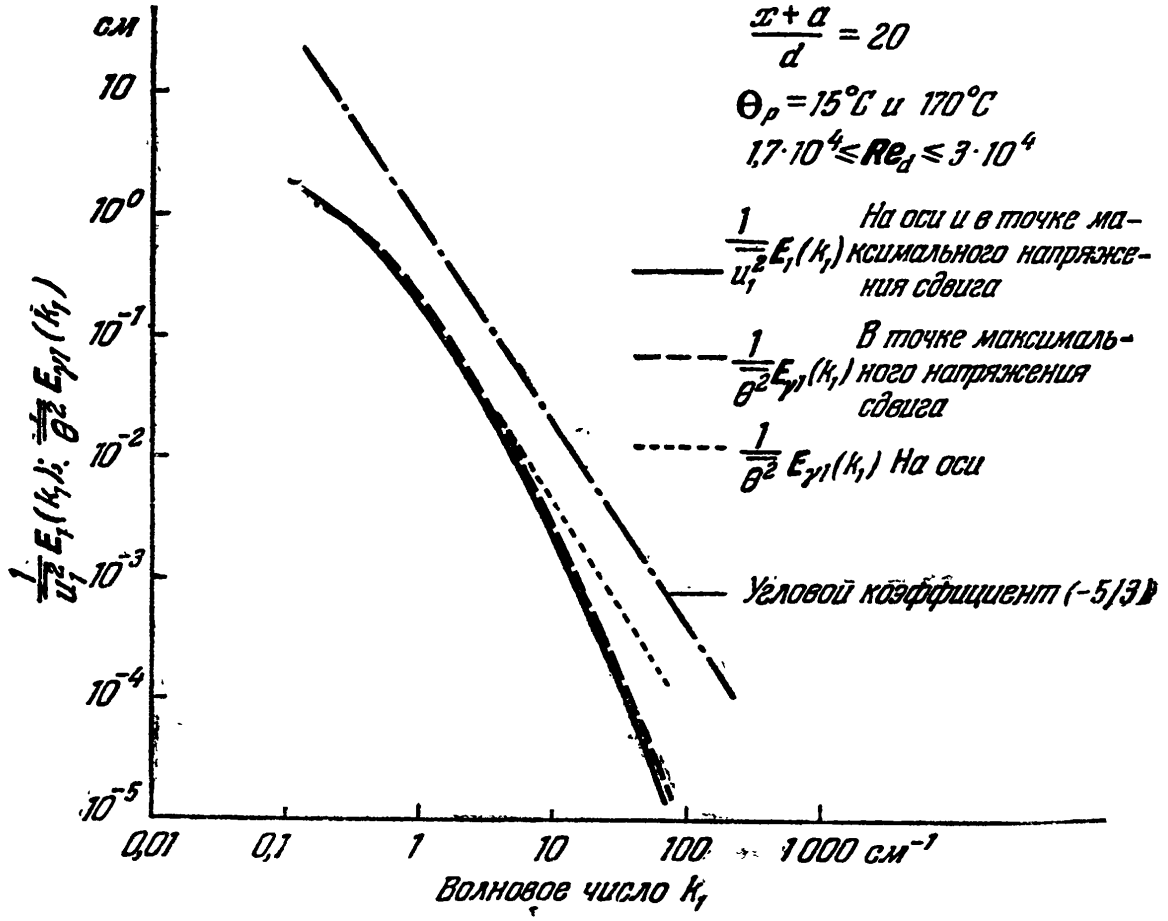



Рис. 6.26. Одномерные спектры пульсаций $u_1$ и $\theta$ на оси и в точке максимального напряжения сдвига в круглой свободной струе [23].

и Юберой обнаружили, что оба энергетических спектра пульсаций скорости могут быть удовлетворительно аппроксимированы интерполяционной формулой Кармана (3.134):

$$E_1(k_1) = \frac{\text{const}}{[1+(k_1/k_e)^2]^{5/6}},$$

правда, лишь в ограниченном диапазоне $0 < k_1 < 1{,}25$. Скорость на оси струи при $(x+a)/d = 20$ составляла в этих опытах около 12 *м/сек*. При такой величине скорости из соотношения $k_1 = 2\pi n_1/\bar{U}_1 = 1{,}25$ получается частота $n_1 \approx 250$ *сек*$^{-1}$. Выше этой частоты функция $E_1(k_1)$ убывает более быстро, чем по закону «$-5/3$».

Экспериментальные данные о распределении напряжения сдвига, переноса тепла в поперечном направлении, интенсивности пульсаций скорости и температуры и их спектрах приводятся здесь, главным образом, для того, чтобы дать общее представление о них. К абсолютным значениям, измеренным в опыте, следует относиться с оговорками. Это объясняется не только тем, что применявшиеся здесь методы измерений не позволяют получить очень надежных значений (этот вопрос рассматривался выше), но также и тем, что условия течения в струе в тех сечениях, где производились измерения, еще не соответствовали полностью развитому равновесному состоянию.

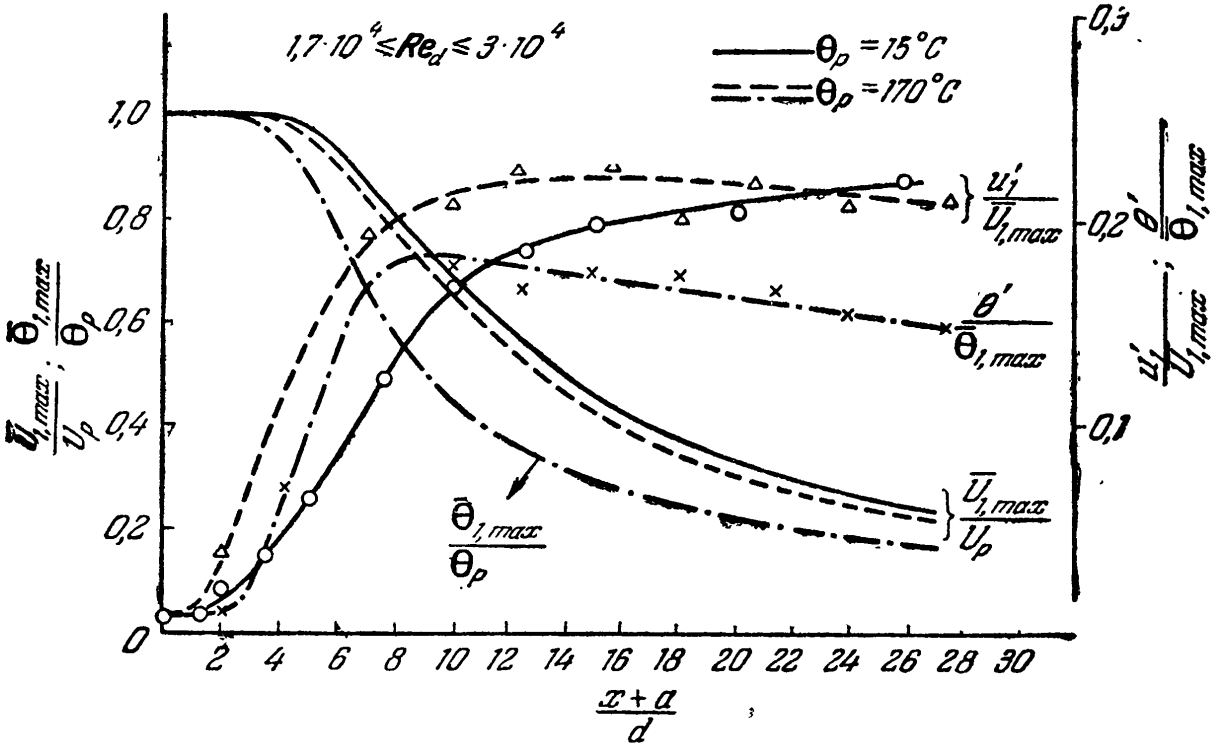



Рис. 6.27. Распределение осредненной скорости, осредненной температуры и относительной интенсивности пульсаций скорости и температуры вдоль оси круглой свободной струи [22].

Измерения, проведенные в сечениях, отличных от тех, к которым относятся результаты, изображенные на рассмотренных рисунках, свидетельствуют о том, что характеристики турбулентности все же изменяются с расстоянием от сопла. На рис. 6.27 показано изменение осредненной скорости и относительной интенсивности $u_1'/\bar{U}_{1,\,max}$ вдоль оси струи, а также соответствующие характеристики распределения температуры. Эти измерения проводились как в холодной, так и в горячей струе воздуха. Из рассмотрения этого рисунка можно заключить, что в сечении $(x+a)/d = 20$ автомодельность распределений интенсивностей турбулентности вряд ли достигается, хотя, как мы убедились выше, радиальные распределения осредненной

скорости и осредненной температуры оказываются подобными уже при $(x+a)/d \geqslant 10$. Отклонения компонент интенсивности турбулентности от автомодельности по направлению к границе струи даже возрастают. Результаты других измерений, проведенных Корсином и Юбероем и относящихся к распределениям компонент интенсивности турбулентности в различных поперечных сечениях струи, показывают, что полная автомодельность не достигается даже при $(x+a)/d = 40$, т. е. на максимальном расстоянии от сопла, где проводились измерения.

В заключение этого параграфа рассмотрим распределение коэффициента перемежаемости $\Omega$ в поперечных сечениях круглой свободной струи. Соответствующие опытные данные, полученные Корсином

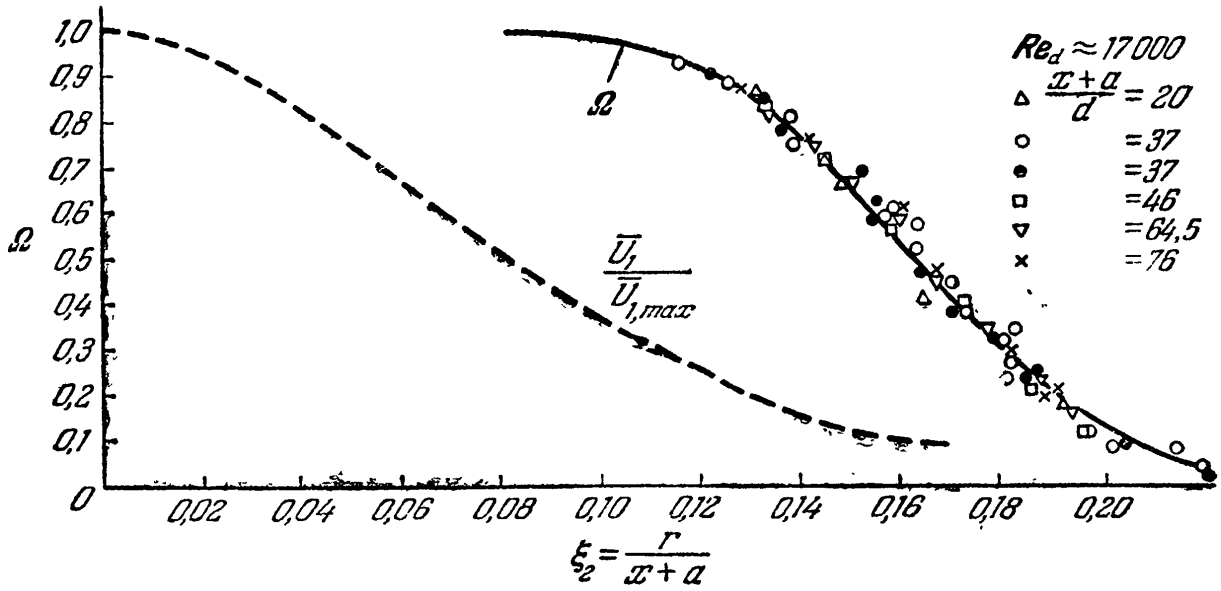



Рис. 6.28. Распределение коэффициента перемежаемости $\Omega$ в круглой свободной струе [29].

и Кистлером [29], приводятся на рис. 6.28. Эти данные показывают, что распределения $\Omega$ в различных поперечных сечениях потока в диапазоне изменения величины $(x+a)/d$ от 20 до 76 являются вполне подобными. Если этот рисунок сравнить с соответствующим рис. 6.12 для следа за круглым цилиндром, то сразу бросится в глаза, что поперечный размер зоны, где $\Omega \approx 1$, в случае круглой свободной струи значительно больше, нежели в случае плоского следа.

Так как измерения характеристик турбулентности, например компонент интенсивности турбулентности и коэффициента вихревой вязкости, относятся практически лишь к той зоне, где коэффициент перемежаемости близок к единице, то поправка на коэффициент перемежаемости, будучи внесена в распределения, изображенные на рис. 6.18, 6.24 и 6.25, едва ли изменит форму этих кривых, хотя, возможно, сделает эти кривые более равномерными.

## § 6.11. Структура свободного турбулентного потока со сдвигом и процессы переноса

Анализируя форму свободных турбулентных потоков со сдвигом (струя и след за телом), явления, сопровождающие эти течения, и распределения различных характеристик турбулентности, можно получить представление о структуре турбулентности и связанных с ней процессах. Вкратце соответствующие эмпирические факты сводятся к следующему.

1. Распространение турбулентной зоны поперек направления основного течения протекает сравнительно медленно.

2. Турбулентная зона отделена от нетурбулентной неупорядоченно возмущенной граничной поверхностью.

3. Турбулентное течение носит перемежающийся характер, особенно вблизи «средней» границы турбулентной зоны.

4. Многие параметры потока, например компоненты интенсивности турбулентности и диссипации, на большей части поперечного сечения области турбулентного течения характеризуются высокой равномерностью, стремясь к нулю лишь в перемежающейся пограничной зоне.

5. Отмеченная равномерность распространяется на еще большую область, если в функцию распределения рассматриваемой величины внести поправку на коэффициент перемежаемости.

6. В центральной части турбулентного потока могут наблюдаться небольшие зоны, поперечный перенос энергии турбулентности в которых оказывается направленным вдоль, а не против градиента ее распределения.

Наиболее полные и, вообще говоря, наиболее надежные экспериментальные данные получены, благодаря систематическим исследованиям Таунсенда, для течения в следе за круглым цилиндром. Хотя многие другие экспериментаторы тоже внесли свой вклад в развитие представлений о явлениях, сопровождающих свободное турбулентное течение с поперечным сдвигом, несомненно, что наиболее важную роль в этом отношении сыграли исследования Таунсенда. Основываясь на собственных экспериментальных данных, а также на работах других авторов по свободным струям, Таунсенд пришел к определенной концепции структуры свободного турбулентного потока со сдвигом. Сущность этой концепции изложена в его книге «Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом» [9] при описании, как он называет, модельной структуры свободного турбулентного потока со сдвигом, хотя это описание, несомненно, применимо в значительной степени и к реальным течениям.

Это описание, если дословно цитировать Таунсенда, сводится к следующему.

1) Полностью турбулизированная жидкость (область, характеризуемая существенными пульсациями завихренности) ограничена искривленными поверхностями, которые в некоторых точках могут достигать центральной плоскости потока. Эти ограничивающие поверхности перемещаются благодаря конвективному воздействию системы крупных вихрей, размеры которых сравнимы с шириной той части потока, в которой осредненный сдвиг повсюду имеет один и тот же знак, а также благодаря описанному выше процессу захвата невозмущенной жидкости.

2) Невозмущенная жидкость снаружи от ограничивающих поверхностей не турбулизирована, и ее движение является безвихревым и складывается из поступательного движения (если оно существует) с осредненной скоростью и потенциального течения, обусловленного движением на границе.

3) За исключением непосредственной окрестности границ, где происходит процесс захвата неподвижной жидкости, интенсивность турбулентности распределена почти равномерно. Это оказывается возможным, поскольку масштаб турбулентности мал, а его временные масштабы для порождения и диссипации энергии турбулентности сравнимы со временем существенного развития течения.

4) Крупные вихри, которые искривляют ограничивающую поверхность, представляют собой вытянутые в направлении течения простые вихри с центральной завихренностью, направленной вдоль главной оси положительной осредненной скорости деформации; центры их расположены вблизи плоскости максимальной интенсивности сдвига. Время жизни этих вихрей сравнимо с временем существенного развития течения, однако они не представляют собой перманентных структур, так как новые вихри возникают по мере исчезновения старых.

Таким образом, течение в следе, например, представляет собой ядро полностью развитой непрерывной турбулентности, из которого образуются выпучины, перемещаемые в наружном направлении движением крупных вихрей, причем их масштаб сравним с шириной следа. Крупные вихри и выпучины состоят из мелкомасштабных вихрей, по крайней мере на порядок меньших, чем крупные вихри. Эти мелкомасштабные вихри, которые зарождаются, главным образом, в зоне ядра, вовлекаются в крупномасштабные движения выпучин.

Исходя из этих представлений, можно сразу же объяснить, почему возмущения энергии турбулентности и диссипации в зоне ядра и внутри выпучин пограничной зоны примерно постоянны; эти представления приводят также к равномерной внутренней мелкомасштабной структуре турбулентности по всей турбулентной зоне. И в самом деле, пространственные интегральные масштабы $\Lambda_g$ [определяемые коэффициентами корреляции $R_{2,2}(x_1, 0, 0)$ и $R_{3,3}(x_1, 0, 0)$] приблизительно

постоянны в поперечном сечении следа, а их величины составляют от $^1/_4$ до $^1/_2$ ширины следа.

Рассмотрим теперь более подробно перенос различных субстанций, опираясь при этом на изложенные выше представления о структуре турбулентности. В этом отношении следует иметь в виду существование, наряду с медленными крупномасштабными движениями, высокоинтенсивных мелкомасштабных турбулентных движений, иными словами, двойственную структуру турбулентности.

Субстанции, которые мы рассмотрим, включают в себя осевой импульс, тепло и энергию турбулентности. Турбулентный перенос этих субстанций обусловливается только что упомянутыми двумя типами турбулентного движения. Если мелкомасштабная турбулентность обладает настолько малым масштабом, что осредненная величина рассматриваемой субстанции на расстояниях, равных этому масштабу, практически равномерна, то логично предположить, что перенос, обусловленный мелкомасштабной турбулентностью, можно описать как диффузию градиентного типа. В то же время перенос посредством крупномасштабной турбулентности может рассматриваться как чисто конвективное явление.

Пусть $\mathscr{P}$ — рассматриваемая транспортабельная субстанция; тогда можно записать

$$\overline{u_j\mathscr{P}} = \overline{u_j^*\mathscr{P}} + \overline{\mathscr{V}_j\mathscr{P}} = -\Omega(\varepsilon_{\mathscr{P}})_{ji}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x_j} + \overline{\mathscr{V}_j\mathscr{P}}. \qquad (6.97)$$

Здесь $u_j^*$ и $\mathscr{V}_j$ — соответственно мелко- и крупномасштабная составляющие турбулентной пульсации скорости $u_j$.

Результаты действия диффузии градиентного типа и конвективного переноса нельзя считать независимыми от природы транспортабельной субстанции. В самом деле, они различны для импульса, тепла и энергии турбулентности; это следует хотя бы из различия распределений их осредненных величин. Какова степень этого различия, сказать еще очень затруднительно. Но о чем говорит форма кривых этих распределений?

Если, с одной стороны, перенос был бы полностью связан с конвективным движением со скоростью $\mathscr{V}_j$ больших масс, то величина этой субстанции (при условии, что эффекты, вызывающие локальные изменения переносимой субстанции, невелики и, стало быть, эти изменения малы по сравнению с абсолютной величиной этой субстанции) в области ядра изменялась бы лишь немного, а в пограничной зоне быстро уменьшалась бы до нуля. Таким образом, в том случае, когда переносимой субстанцией является энергия турбулентности, изменения этой энергии, обусловленные порождением и диссипацией, должны быть малы по сравнению с уровнем энергии.

Если, с другой стороны, перенос происходил бы лишь вследствие диффузии градиентного типа, обусловленной мелкомасштаб-

ной турбулентностью, то по направлению от центра турбулентной зоны к ее наружной границе наблюдалось бы постепенное уменьшение данной субстанции.

Рассмотрим в свете этих представлений кривые распределения осредненной осевой скорости (характеризующей распределение осредненного осевого импульса), тепла и кинетической энергии турбулентности, которые изображены соответственно на рис. 6.3, 6.4 и 6.5.

Из анализа этих рисунков вытекает, что осредненный осевой импульс распределяется как при диффузии градиентного типа, а кинетическая энергия турбулентности — как при конвективном переносе; распределение тепла следует некоторым промежуточным путем. Конечно, было бы большим преувеличением делать вывод о том, что распределение импульса определяется лишь диффузией градиентного типа, а распределение энергии турбулентности — лишь конвекцией, хотя тем не менее при этом получается вполне удовлетворительное описание распределения этих субстанций.

Однако имеются аргументы против концепции доминирующего переноса импульса посредством диффузии градиентного типа. Один из таких аргументов основан на экспериментальном факте, состоящем в том, что в зоне максимального сдвига отношение $\overline{u_1 u_2}/\overline{q^2}$ распределено почти равномерно. Этот факт, по-видимому, указывает на независимость переноса импульса от градиента осредненного импульса (градиента осредненной скорости). Кроме того, экспериментально обнаруженное влияние градиента давления на перенос импульса свидетельствует о том, что возможность диффузии чисто градиентного типа не очень велика.

Но в то же время экспериментальные наблюдения показывают, что распределение осредненного импульса описывается с поразительной точностью, если принять предположение о постоянстве коэффициента вихревой вязкости. Если коэффициент вихревой вязкости определяется локальными условиями турбулентного движения [что предполагается, например, гипотезой Кармана (5.14) или эквивалентным ей соотношением (5.16)], то это должно быть совместимо с равномерностью мелкомасштабной структуры турбулентности в турбулентных зонах. Однако если постоянный коэффициент вихревой вязкости определяется крупномасштабными движениями [см., например, предположение Прандтля (5.15)], то описание переноса импульса с помощью этого коэффициента вихревой вязкости и локального градиента осредненного импульса привело бы к противоречию.

Таким образом, учитывая все изложенное, в настоящее время с уверенностью можно принять лишь вывод о том, что процессы переноса в свободных турбулентных потоках тесно связаны с двойственной структурой турбулентности и могут быть описаны с помощью соотношений типа (6.97), в которых составляющие,

обусловленные обоими процессами [например, величина $(\epsilon_{\mathscr{P}})_{ij}$], различны для разных транспортабельных субстанций.

Хотя концепция переноса с помощью диффузии градиентного типа в совокупности с предположением о постоянстве коэффициента вихревой вязкости общепринята и дает вполне приемлемое описание распределения осредненного импульса, тем не менее она имеет лишь очень отдаленное отношение к реальным физическим процессам (Таунсенд [9]). Можно также отметить, что та же концепция, примененная к распределению тепла и энергии турбулентности, не приводит к эквивалентным результатам (см. § 6.9). Весьма вероятно, что роль конвективного переноса этих субстанций, особенно в случае энергии турбулентности, отнюдь не является малой.

В предыдущих параграфах мы пытались описать перенос тепла под воздействием одной лишь диффузии с помощью коэффициента вихревой диффузии $\epsilon_\gamma$. В таком случае этот коэффициент включает влияние конвекции при крупномасштабных движениях. При этом оказалось, что $\epsilon_\gamma/\epsilon_n > 1$ и что это отношение в случае плоской зоны смешения больше, нежели в случае осесимметричной. Если конвективный перенос не вносит существенного вклада в величину $\epsilon_\gamma$, то это различие можно объяснить следующим образом.

Таунсенд произвел оценку скорости крупномасштабного движения по распределению кинетической энергии турбулентности в следе за цилиндром, приняв, что

$$\overline{q^2\mathscr{V}} = \overline{q^2}\mathscr{V}^*.$$

Им было обнаружено, что эта кажущаяся скорость $\mathscr{V}$ направлена наружу и по мере приближения к границе следа быстро возрастает до своего максимального значения при $\xi_2 = 0{,}4$, а затем очень быстро уменьшается до нуля в пограничной зоне. Указанное максимальное значение составляет примерно $\mathscr{V}^*/\overline{U}_{1,\,\max} \approx 0{,}15$. Следовательно, скорость этого направленного наружу крупномасштабного движения является величиной такого же порядка, как и относительная интенсивность турбулентности (хотя и несколько меньшей ее), что представляется вполне логичным.

Можно ожидать, что характер этого направленного наружу течения будет в осесимметричной зоне смешения (например, в круглой свободной струе) иным по сравнению со случаем плоской зоны смешения; в осесимметричной зоне смешения скорость $\mathscr{V}$ будет изменяться в наружном направлении с меньшей быстротой благодаря тому, что в зоне с осевой симметрией направленное наружу течение носит расходящийся характер. Таким образом, влияние конвективного течения со скоростью $\mathscr{V}$ на полный перенос в наружном направлении в круглой струе или круглом следе будет меньше, чем в плоской струе или плоском следе.

Это движение в наружном направлении, связанное с крупными вихрями, обусловливает выпученный характер границы и вызывает расширение турбулентной зоны в направлении вниз по потоку. Движение в турбулентной зоне является существенно вихревым, тогда как снаружи этой зоны движение оказывается безвихревым. Каким образом происходит упомянутое увеличение турбулентной зоны? Медленные крупномасштабные движения в турбулентной зоне через посредство сил давления индуцируют эквивалентные движения в безвихревой области; благодаря этому амплитуда выпучин возрастает. Но в ходе этого процесса полный объем жидкости, охваченной турбулентным движением, должен оставаться неизменным, если не возникнут другие (пока еще не рассмотренные нами) эффекты, которые будут вызывать одновременное увеличение объема жидкости, охваченной турбулентным движением. Но единственным путем, которым безвихревая жидкость может превратиться в вихревую, является воздействие вязких сил сдвига, т. е. «непосредственный контакт» между вихревой и безвихревой жидкостью. При достаточно больших числах Рейнольдса влияние вязкости жидкости, охваченной турбулентным движением, ограничено мелкомасштабными движениями, т. е. наиболее мелкими вихрями. Следовательно, распространение «фронта» турбулентности под действием вязких сил сдвига может быть обусловлено лишь этими наиболее мелкими вихрями, а действительная граница между вихревой и безвихревой жидкостью должна носить характер поверхности раздела; иными словами, воздействие вязкости должно быть ограничено очень тонким слоем. Еще одно вытекающее отсюда следствие состоит в том, что фронт турбулентности должен быть неразрывным и что в безвихревом поле, расположенном снаружи турбулентного, не может образоваться каких бы то ни было изолированных областей турбулентности (Корсин и Кистлер [29]).

Толщина поверхности раздела, где сосредоточены вязкие силы сдвига, должна быть величиной того же порядка, что и размер наиболее мелких вихрей. Корсин и Кистлер показали, что эта толщина по порядку своей величины должна быть, вероятно, одинакова с колмогоровским масштабом длины $\eta$, который имеет порядок $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ [см. уравнение (3.102а)]. Они очень удачно назвали этот тонкий слой вязким надслоем, ввиду его сходства с вязким подслоем на твердой стенке, где, как и в данном случае, сконцентрированы вязкие напряжения сдвига. Однако между этими двумя слоями существует и различие, которое заключается в том, что вязкий подслой, если исключить обмен с жидкостью в полностью турбулентной зоне, состоит в основном из одних и тех же жидких частиц, тогда как в вязкий надслой из безвихревого поля, благодаря диффузионному распространению турбулентности в направлении этого поля, непрерывно вносятся новые жидкие частицы. Корсин и Кистлер [29]

произвели оценку скорости этого распространения; из соображений размерности она принята пропорциональной величине $(\nu\omega')^{1/2}$, где $\omega'$ — среднеквадратичное значение завихренности турбулентности.

Таким образом, распространение фронта турбулентности вызывает увеличение объема жидкости, охваченной турбулентным движением. В то же время более крупные вихри обусловливают крупномасштабную деформацию поверхности раздела, и в конечном счете медленные, наиболее крупные вихри вызывают образование больших выпучин. Эти крупные вихри определяют скорость распространения турбулентной зоны как целого (Таунсенд [9]). Как указывалось, снаружи турбулентной зоны индуцируется потенциальное течение. Скорость этого течения является величиной того же порядка, что и скорость крупномасштабного движения на другой стороне поверхности раздела; эта поверхность не создает разрыва скорости мелкого или крупного масштаба (Таунсенд [9], Филлипс [35], Стюарт [36]). Движение в безвихревом поле, вызванное полем неупорядоченно распределенной скорости вблизи поверхности раздела, было специально исследовано Филлипсом и Стюартом. Они обнаружили, что в непосредственной окрестности поверхности раздела пульсации скорости должны быть существенно анизотропными и следовать соотношению

$$\overline{u_2^2} = \overline{u_1^2} + \overline{u_3^2},$$

где $u_2$ — скорость, направленная по нормали к поверхности раздела. Стюарт показал, что это соотношение является прямым следствием требования безвихренности течения, когда пульсации в направлении осей $x_1$ и $x_3$ носят стационарный характер. Результаты измерений Таунсенда величин $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ в следе за цилиндром, по-видимому, удовлетворяют записанному выше соотношению в области малых значений коэффициента перемежаемости, а именно при $\Omega < 0{,}1$. Это также следует и из рис. 6.5. Однако относительно турбулентных пульсаций скорости, измеренных Корсином в круглой свободной струе, такого вывода сделать нельзя. Но можно заметить, что результаты этих измерений в наружной пограничной области струи являются не очень надежными.

Стюартом был получен интересный результат, который состоит в том, что в случае плоского следа в безвихревой зоне не наблюдается осредненного течения в направлении оси $x_2$ внутрь следа, когда условия течения в пределах следа являются автомодельными. Однако в случае круглой струи имеется осредненное безвихревое течение, направленное внутрь струи, по существу, перпендикулярно к ее оси.

Безвихревое течение между выпучинами жидкости, охваченной турбулентным движением, благодаря действию сил давления имеет тенденцию принимать то же осредненное направление, что и сами

выпучины. Основываясь на том, что уравнения, определяющие поведение пульсационных скоростей $u_1$, $u_2$ и $u_3$, имеют точно такой же вид, как и уравнения классической теории распространения гравитационных волн на поверхности воды, Стюарт пришел к выводу, что картина течения в области безвихревого движения вблизи границы турбулентности имеет тесное сходство с картиной течения при распространении гравитационных волн в воде.

Исходя из приведенных выше рассуждений о явлениях, наблюдающихся в перемежающейся пограничной зоне свободного турбулентного потока, можно представить себе картину этого течения, которая для случая плоского следа изображена на рис. 6.29.

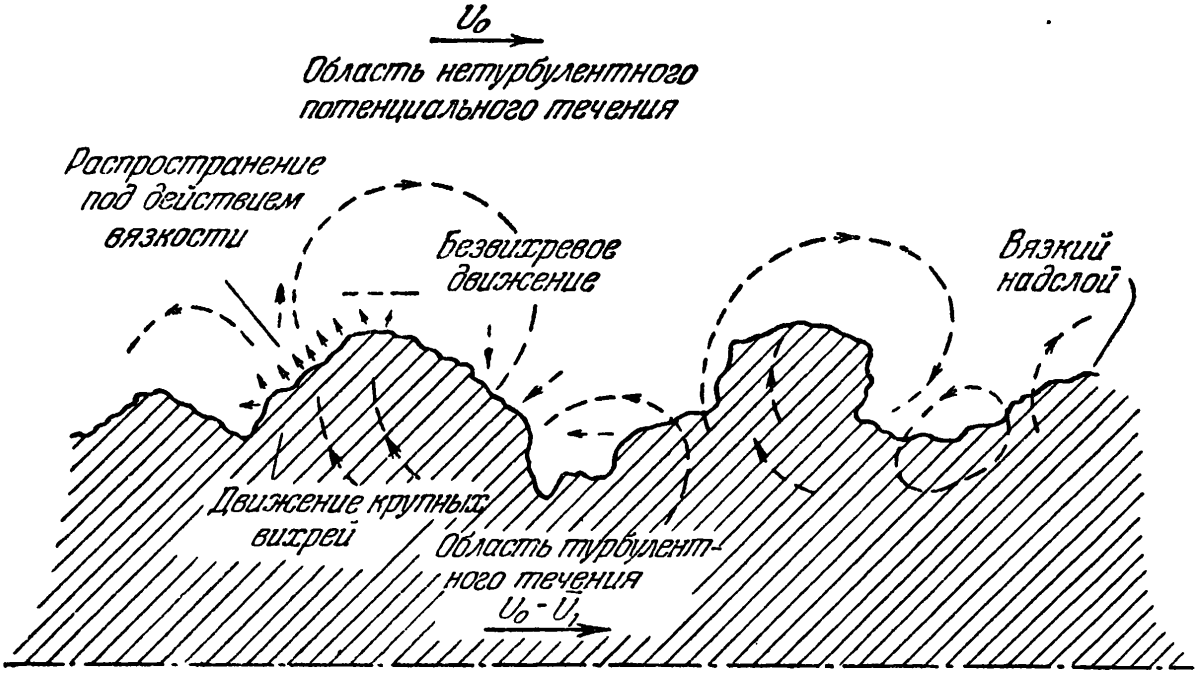



Рис. 6.29. Предполагаемая картина течения в перемежающейся пограничной зоне плоского следа.

Поскольку расширение турбулентной зоны в направлении вниз по потоку является преимущественно результатом крупномасштабных движений в турбулентной зоне, то логично ожидать, что это распространение представляет собой статистический процесс, определяемый статистическими законами турбулентности в турбулентной зоне. Корсином и Кистлером [29] было показано, что процесс этого распространения можно описать, как процесс лагранжевой диффузии, пользуясь при этом статистическими свойствами турбулентности в полностью турбулентной зоне. Изменение высоты выпучин носит статистический характер; с увеличением расстояния вниз по потоку эта высота, как и среднее положение поверхности раздела между турбулентным и нетурбулентным течениями, в среднем возрастает. Корсин и Кистлер определили нарастание среднеквадратичной высоты выпучин и среднее положение поверхности раздела (т. е. среднюю ширину турбулентной зоны) с увеличением расстояния от сопла для

случая круглой свободной струи. Зависимость величин $\overline{[(r^* - \bar{r}^*)^2]}^{1/2}/d$ и $\bar{r}^*/d$, а также $r_{1/2}/d$ от $x/d$, где $r^*$ — радиальное положение поверхности раздела в данный момент, изображена на рис. 6.30. В то время как изменение величины $r_{1/2}/d$ в зависимости от расстояния $(x/d - 3)$ до кажущегося источника носит строго линейный характер, данные о величинах $\bar{r}^*/d$ и $(r^* - \bar{r}^*)'/d$ свидетельствуют, как видим, об ином виде этой зависимости, если в качестве начала координат выбрать тот же кажущийся источник. Однако, учитывая экспериментальные

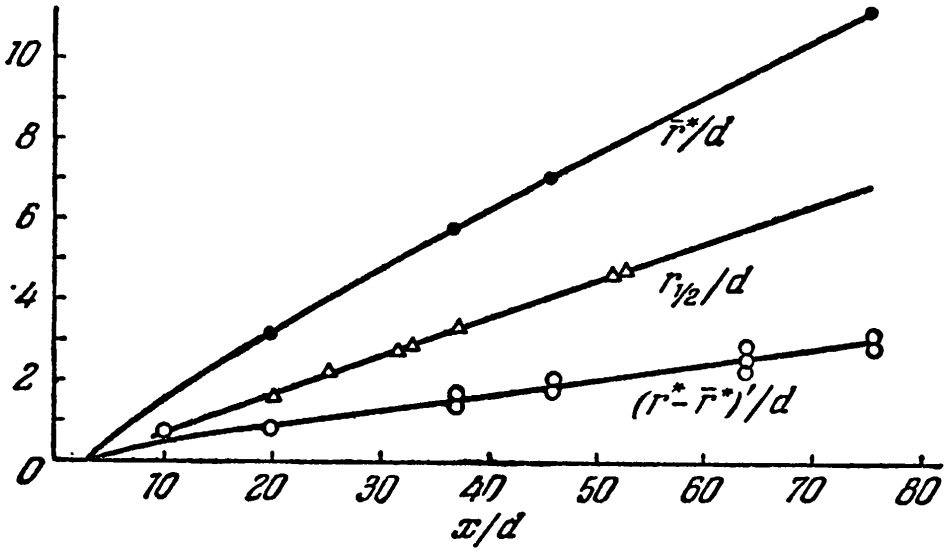



Рис. 6.30. Среднее положение фронта турбулентности и среднеквадратичная высота выпучин в круглой свободной струе в зависимости от $x/d$ [29].

погрешности, эти относительные величины тоже можно приближенно рассматривать как линейные функции $x/d$.

При автомодельной турбулентности эти величины в случае плоского следа должны изменяться пропорционально $[(x + a)/d]^{1/2}$. Немногочисленных данных, полученных в опытах Таунсенда, к сожалению, недостаточно, чтобы проверить, выполнялась ли эта зависимость в его экспериментах, но данные этих измерений, во всяком случае, не противоречат этой зависимости.

Ввиду статистического характера изменения высоты выпучин становится понятным и гауссово распределение коэффициента перемежаемости $\Omega$. Согласно данным Корсина и Кистлера [29], экспериментальные зависимости для $\Omega$ в случаях круглой свободной струи и плоского следа близки к гауссову распределению. Кривые, изображенные на рис. 6.12 и 6.28, описываются следующей функцией распределения:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha\xi_2+\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz,$$

где $\alpha\xi_2 + \beta = (r - \bar{r}^*)/(r^* - \bar{r}^*)'$, а $\alpha$ и $\beta$ — постоянные.

Выше неоднократно указывалось на близкое совпадение между распределениями измеренной и вычисленной скорости в том случае, когда расчет производился на основании предположений о диффузии градиентного типа для импульса и о постоянстве коэффициента вихревой диффузии, а также с учетом, помимо этого, поправки на перемежаемость.

Вычисление распределения скорости по уравнениям (6.29) или (6.62), в которые вместо величин $(\epsilon_m)_{11}$ и $(\epsilon_m)_{xx}$ подставляются $\Omega(\epsilon_m)_{11}$ и $\Omega(\epsilon_m)_{xx}$, а для $\Omega$ принимается записанное выше гауссово

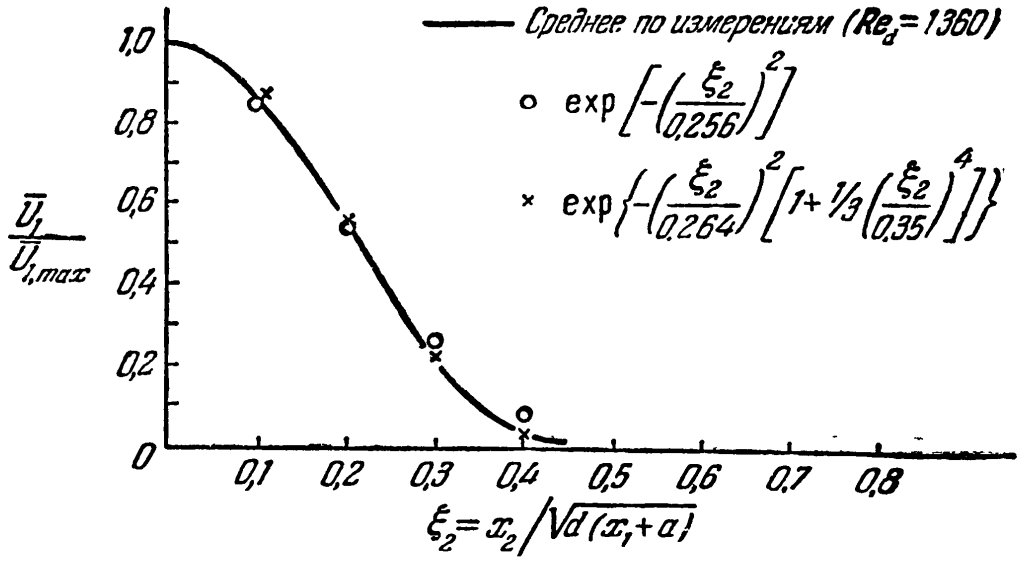



Рис. 6.31. Сравнение распределения измеренной осредненной скорости в следе за цилиндром с распределением, вычисленным при постоянном коэффициенте вихревой вязкости с поправкой и без поправки на влияние коэффициента перемежаемости [9].

распределение, является весьма трудоемким. Чтобы упростить процесс вычисления, Таунсенд в случае плоского следа аппроксимировал гауссово распределение для $\Omega$ функцией

$$\Omega \approx [1 + \text{const}\,\xi_2^4]^{-1}.$$

При этом интеграл в уравнении (6.29) берется без труда, и окончательный результат имеет вид

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}} = \exp\left[-\frac{U_0\, d\xi_2^2}{4(\epsilon_m)_{11}}\left(1 + \frac{1}{3}\,\text{const}\,\xi_2^4\right)\right].$$

Рис. 6.31 показывает, какое улучшение получается в том случае, когда вместо простого гауссова решения (6.29а) используется решение с поправкой на перемежаемость, а для $(\epsilon_m)_{11}$ при этом принимается несколько измененное значение; соответствующая кривая, изображенная на рис. 6.31, описывается формулой

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_{1,\max}} = \exp\left\{-\left(\frac{\xi_2}{0{,}264}\right)^2\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\xi_2}{0{,}35}\right)^4\right]\right\}.$$

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

$a$ — расстояние от кажущегося источника следа или струи до начала координат.

$c$ — $1/\sqrt{d(x_1+a)}$ — для следа за цилиндром; $1/(x+a)$ — для струи; $c_m$ — для импульса; $c_\gamma$ — для скалярной субстанции; $c_\omega$ — для завихренности.

$d$ — диаметр цилиндра или сопла.

$E_1(k_1)$ — одномерный энергетический спектр.

$k_1$ — $2\pi n/\bar{U}_1$, волновое число.

$L_i$ — масштаб длины в направлении оси $x_i$.

$n$ — частота.

$P$ — статическое давление; $\bar{P}$ — осредненная по времени величина; $p$ — турбулентная пульсация; $P_0$ — давление в окружающей среде; $P_s$ — давление во вторичном потоке.

$\overline{q^2}$ — $\overline{u_i u_i}$, удвоенная кинетическая энергия турбулентности.

$R_{ij}$ — коэффициент тензора пространственной корреляции скорости второго ранга.

$\mathrm{Re}_d$ — $U_p d/\nu$.

$r$ — цилиндрическая полярная координата в радиальном направлении.

$t$ — время.

$U_i$ — эйлерова скорость; $\bar{U}_i$ — осредненная по времени величина; $u_i$ — компонента турбулентной пульсации; $u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}}$, $U_p$ — скорость первичного потока; $U_s$ — скорость вторичного потока; индексы $r$, $\varphi$, $x$ соответствуют системе цилиндрических полярных координат.

$x$ — цилиндрическая полярная координата в осевом направлении; $x_i$ — декартова координата.

$\varepsilon$ — диссипация под действием турбулентности, отнесенная к единице массы.

$\epsilon_{ij}$ — тензор вихревой диффузии; $(\epsilon_{\mathscr{P}})_{ij}$ — для произвольной транспортабельной субстанции; $(\epsilon_m)_{ij}$ — для импульса; $(\epsilon_\gamma)_{ij}$ — для скалярной субстанции.

$\eta$ — $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$.

$\varphi$ — цилиндрическая полярная координата в окружном направлении.

$\Gamma$ — скалярная субстанция; $\bar{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; $\gamma$ — турбулентная пульсация.

$\Lambda_g$ — пространственный поперечный интегральный масштаб.

$\mathscr{L}$ — коэффициент в «диффузионном» уравнении Рейхардта; $\mathscr{L}_\gamma$ — для скалярной субстанции.

$l$ — путь смешения Прандтля; $l_m$ — для импульса; $l_\gamma$ — для скалярной субстанции; $l_\omega$ — для завихренности.

$\mu$ — $U_s/U_p$.

$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

$\Omega$ — коэффициент перемежаемости.

$\mathscr{P}$ — транспортабельная субстанция.

$\rho$ — плотность.

$\sigma_{ij}$ — тензор напряжений.

$\tau$ — время.

$\Theta$ — температура; $\overline{\Theta}$ — осредненная по времени величина; $\theta$ — турбулентная пульсация.

$\mathscr{U}_i$ — масштаб скорости в направлении оси $x_i$.

$\mathscr{V}$ — скорость крупномасштабных турбулентных движений.

$\mathscr{V}^*$ — кажущаяся скорость в наружном направлении для течения в следе.

$\overline{\mathfrak{V}^2} = 2U_0\overline{U}_1 + \overline{U}_1^2 + \overline{u_1^2}$.

$\mathfrak{v}$ — масштаб турбулентной пульсации скорости.

$\xi_1 = (x_1 + a)/d$; $\xi_2$, $x_2/\sqrt{d(x_1 + a)}$ — для течения в следе за цилиндром.

$\xi_2 = r/(x + a)$ — для струи; $\xi_1'$, $x_1/d$; $\xi_2'$, $x_2/d$.

# ГЛАВА 7

# НЕИЗОТРОПНАЯ «ПРИСТЕНОЧНАЯ» ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

## § 7.1. Введение

Термин «пристеночная» турбулентность соответствует турбулентности, на структуру которой непосредственное влияние оказывает наличие твердой границы. В зависимости от характера и конфигурации этой границы существуют разнообразные виды пристеночной турбулентности.

В последующем рассмотрении ограничимся, во-первых, случаем непроницаемой и негибкой, или жесткой, стенки. Даже на стенках этого ограниченного класса возможно существование многих типов турбулентных течений, однако все они могут быть разбиты на две основные группы. Одна из групп включает обтекание твердых тел, а другая объединяет течения в пространстве, ограниченном твердыми стенками.

Основное различие между этими двумя группами течений состоит в том, что в первом случае область существования пристеночной турбулентности увеличивается вдоль тела, в направлении вниз по потоку, в то время как во втором случае эта область пристеночной турбулентности остается в пределах пространства, ограниченного твердыми стенками.

Более определенно первую группу течений принято называть «течениями в пограничном слое», так как область пристеночной турбулентности остается в этом случае ограниченной относительно тонким слоем, находящимся на поверхности тела, хотя обычно толщина этого слоя и нарастает в направлении вниз по потоку; снаружи этого пограничного слоя существует невозмущенный свободный поток.

Простейшими типами течений, принадлежащих к каждой из этих двух групп, являются соответственно двумерное течение вдоль плоской пластины с нулевым градиентом давления в направлении вниз по потоку и течение в прямом двумерном канале или в круглой трубе с постоянным поперечным сечением. В последнем случае течение

в направлении вниз по потоку остается однородным по своей осредненной по времени структуре, за исключением некоторого входного участка.

Во-вторых, мы ограничимся здесь рассмотрением только двух простейших типов течения: течения «с постоянным давлением» вдоль плоской пластины и течения в прямой трубе с постоянным круглым поперечным сечением.

Причина выбора такого круга проблем состоит не только в том, что эти типы течений являются простейшими, но, главным образом, в том, что большинство имеющихся экспериментальных данных о пристеночной турбулентности ограничено именно этими случаями.

Третье ограничение, которое мы примем, — и оно тоже является довольно сильным — состоит в том, что мы будем рассматривать, в основном, полностью развитое турбулентное течение несжимаемой жидкости. Ни явление перехода, как таковое, ни влияние сжимаемости на структуру турбулентности не будут подвергнуты здесь исчерпывающему анализу.

Здесь, как и прежде, мы преследуем цель подробно, насколько это позволяют имеющиеся результаты экспериментальных исследований, рассмотреть механизм турбулентности и присущие ей процессы переноса. Современный уровень наших знаний об этом механизме в случае пристеночной турбулентности еще недостаточен для того, чтобы стать основой для создания строгой и законченной теории. Известные теории, которые описывают распределение осредненной по времени скорости и скалярной субстанции, а также соответствующие коэффициенты сопротивления все же являются по своей природе полуэмпирическими. На раннем этапе изучения турбулентности много пользы принесли различные теории пути смешения. Однако мы не будем заниматься подробным анализом этих теорий; исчерпывающие сведения о применении прандтлевской теории переноса импульса и тэйлоровской теории переноса завихренности к течениям в пограничном слое и в трубе можно найти в [1], а также и в других работах.

При турбулентном течении вдоль твердых стенок турбулентность находится под непосредственным влиянием стенки, по крайней мере в зоне, очень близкой к ней. В случае гладкой стенки это влияние проявляется через воздействие вязких напряжений, а в случае шероховатой стенки — через воздействие сил, возникающих при обтекании элементов шероховатости.

Для свободной турбулентности при достаточно больших числах Рейнольдса влиянием вязкости на общий характер и макроструктуру потока можно пренебречь. В случае же пристеночной турбулентности при любом числе Рейнольдса вблизи стенки всегда существует такая зона, характер течения в которой определяется вязкостью жидкости и, стало быть, числом Рейнольдса, если стенка является гладкой.

На некотором расстоянии от стенки непосредственное влияние вязкости жидкости на макроструктуру турбулентности может сильно ослабнуть и стать пренебрежимо малым; таким образом, при этом может наблюдаться некоторое сходство со свободным турбулентным течением.

Это сходство, действительно, может стать весьма тесным, особенно в случае течения в пограничном слое. Во внешней области этого течения, вблизи границы с невозмущенным свободным потоком, существует такое же взаимодействие между областью турбулентного течения и областью свободного потока, как и при свободной турбулентности. Как будет показано в § 7.7, это сходство послужило основой для одной из современных феноменологических теорий турбулентного течения в пограничном слое.

Близкое сходство со свободной турбулентностью наблюдается только для течения в пограничном слое; при течении в трубе, в котором нет границы с невозмущенным свободным потоком, оно намного слабее. Этот факт указывает на существенное различие между течениями в пограничном слое и в трубе.

Таким образом, в турбулентном потоке около гладкой твердой границы можно выделить три области: 1) прилегающую к стенке, крайне узкую область, течение в которой является преимущественно вязким; 2) область, также довольно ограниченную, в которой течение является турбулентным, но находится под непосредственным влиянием вязкости; это — область реального течения с пристеночной турбулентностью; 3) остальную область течения, содержащую обычно наибольшую часть течения, где непосредственное влияние вязкости пренебрежимо мало и наблюдается сходство со свободной турбулентностью. Течение в первых двух областях одинаково для пограничного слоя и потока в трубе и определяется только вязкостью и характером стенки. Свойства потока в третьей, наиболее удаленной от стенки области различны для этих двух типов течения.

В последующих параграфах мы рассмотрим сначала течение в пограничном слое, а затем течение в трубе.

## § 7.2. Приближенные уравнения движения и соответствующие интегральные соотношения

У этих двух типов течения имеется еще одно сходство со свободными турбулентными потоками, рассмотренными в главе 6, а именно: можно выделить основное направление течения, поперек которого область турбулентного течения является относительно очень узкой. Следовательно, для упрощения уравнений движения можно воспользоваться таким же способом, как и в случае свободного турбулентного потока.

Обратимся сначала к двумерному течению в пограничном слое на плоской пластине. Выберем такую систему координат, в которой ось $x_1$ направлена вдоль пластины, ось $x_2$ перпендикулярна к ней, а начало координат находится на поверхности пластины; его положение в направлении оси $x_1$ будем считать пока произвольным. Соответствующие компоненты скорости обозначим через $U_1$ и $U_2$.

Если для осей $x_1$ и $x_2$ ввести соответственно масштабы длины $L_1$ и $L_2$, то вследствие того, что область пограничного слоя является узкой, получим

$$\frac{L_2}{L_1} \ll 1.$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x_2} = 0 \tag{7.1}$$

следует, что масштабы скорости $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, а также компоненты осредненной скорости $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} = \frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \frac{L_2}{L_1} \ll 1.$$

Хотя вблизи стенки степень неизотропности компонент турбулентных пульсаций скорости значительно выше, чем при свободной турбулентности (см. § 7.6), интенсивность турбулентности в различных направлениях все-таки одинакова по порядку величины; в соответствии с этим вполне допустимо ввести для пульсационных компонент $u_1'$, $u_2'$, $u_3'$ один и тот же масштаб скорости $\mathfrak{v}$.

Уравнение движения для несжимаемой жидкости в проекции на ось $x_1$ запишется так:

$$\overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1 u_2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial x_2^2}\right).$$

$$1 \qquad 1 \qquad \frac{\Delta P_1}{\rho \mathcal{U}_1^2} \qquad \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \qquad \boldsymbol{R}_{12}\frac{\mathfrak{v}^2 L_1}{\mathcal{U}_1^2 L_2} \qquad \frac{L_1}{L_2}\frac{\nu}{\mathcal{U}_1 L_2}\left(\frac{L_2^2}{L_1^2} \qquad 1\right)$$

Как и раньше, порядок величин отдельных членов указан под соответствующими слагаемыми.

Отсюда можно сделать вывод, что вязкие члены существенны лишь в том случае, когда число Рейнольдса $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$, самое большее, порядка $L_1/L_2$. Кроме того, порядок $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$, самое большее, может быть равен $L_2/L_1$.

Уравнение движения в проекции на ось $x_2$ имеет вид

$$\bar{U}_1\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_1}+\bar{U}_2\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2u_1}\quad-\frac{\partial}{\partial x_2}\quad\overline{u_2^2}+\nu\left(\frac{\partial^2\bar{U}_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar{U}_2}{\partial x_2^2}\right).$$

$$1\qquad 1\qquad\frac{\Delta P_2L_1^2}{\rho\mathcal{U}_1^2L_2^2}\quad\boldsymbol{R}_{12}\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1}{L_2}\quad\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\frac{L_1^2}{L_2^2}\quad\frac{L_1}{L_2}\quad\frac{\nu}{\mathcal{U}_1L_2}\left(\frac{L_2^2}{L_1^2}\quad 1\right)$$

Как было указано выше, величина $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$, самое большее, может иметь порядок $L_2/L_1$, а чтобы вязкий член в уравнении движения в проекции на ось $x_1$ играл существенную роль, величина $\nu/\mathcal{U}_1L_2$ должна быть, по меньшей мере, порядка $L_2/L_1$. Следовательно, если величина $\nu/\mathcal{U}_1L_2$ имеет порядок $L_2/L_1$, то вязким членом во втором уравнении можно пренебречь, так как он на один порядок ниже, чем турбулентный член $\frac{\partial\overline{u_2^2}}{\partial x_2}$. Однако когда величина $\mathcal{U}_1L_2/\nu$ становится по порядку равной единице, то вязкий член необходимо учитывать. Но тогда из первого уравнения движения следует, что вязкий член становится в нем доминирующим, а все течение становится вязким. Это может наблюдаться в вязком слое, прилегающем к стенке.

В соседней турбулентной области, где вязкость все еще играет некоторую роль, число Рейнольдса $\mathcal{U}_1L_2/\nu$ должно быть порядка $L_1/L_2$. Тогда второе уравнение движения при сохранении только членов, наибольших по порядку величины, сводится к уравнению

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_2}+\rho\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2^2}=0$$

или, после интегрирования,

$$\bar{P}+\rho\overline{u_2^2}=P_0, \tag{7.2}$$

где $P_0$ — давление в том же сечении снаружи турбулентной области.

Поскольку

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_1}=\frac{dP_0}{dx_1}-\rho\frac{\partial\overline{u_2^2}}{\partial x_1},$$

а величина $\frac{\partial\overline{u_2^2}}{\partial x_1}$ имеет тот же порядок, что и $\frac{\partial\overline{u_1^2}}{\partial x_1}$, и ею, следовательно, можно пренебречь, то первое уравнение движения упрощается:

$$\bar{U}_1\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_1}+\bar{U}_2\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dx_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}+\nu\frac{\partial^2\bar{U}_1}{\partial x_2^2}. \tag{7.3}$$

В области, наиболее удаленной от стенки, число Рейнольдса $\frac{\mathcal{U}_1L_2}{\nu}$ может стать по порядку величины больше, чем $L_1/L_2$, и тогда

вязким членом в уравнении (7.3) можно будет пренебречь; в этом случае уравнение движения идентично уравнению (6.13), которое было получено для свободного турбулентного потока.

Аналогичные упрощения могут быть внесены и в уравнение энергии. Рассмотрим вначале уравнение энергии для осредненного движения. В этом уравнении содержится член

$$\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{1}{2}(\bar{U}_1^2+\bar{U}_2^2)\approx\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{1}{2}\bar{U}_1^2,$$

так как $\bar{U}_2/\bar{U}_1\ll 1$. Тогда это уравнение имеет вид (см. § 1.13)

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{U}_1\left(\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{\bar{U}_1^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\bar{U}_2\left(\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{\bar{U}_1^2}{2}\right)=$$

$$\frac{\Delta P_1}{\rho\mathcal{U}_1^2}\quad 1\qquad\qquad \frac{\Delta P_2}{\rho\mathcal{U}_1^2}\quad 1$$

$$=-\bar{U}_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}\right)-\bar{U}_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2u_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2^2}\right)+$$

$$\frac{\mathcal{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\qquad\frac{L_1}{L_2}\frac{\mathcal{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\boldsymbol{R}_{12}\qquad\qquad\frac{L_2}{L_1}\frac{\mathcal{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}\boldsymbol{R}_{12}\qquad\frac{\mathcal{v}^2}{\mathcal{U}_1^2}$$

$$+\nu\left\{\bar{U}_1\left[2\frac{\partial^2\bar{U}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_1}\right)\right]+\right.$$

$$\frac{\nu}{\mathcal{U}_1L_2}\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{L_2}{L_1} & \dfrac{L_1}{L_2} & \dfrac{L_2}{L_1}\\ \dfrac{L_2^3}{L_1^3} & \dfrac{L_2}{L_1} & \dfrac{L_2}{L_1}\end{array}\right.$$

$$\left.\left.+\bar{U}_2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\right)+2\frac{\partial^2\bar{U}_2}{\partial x_2^2}\right]\right\}.\right\}$$

Выше уже было показано, что величина $\Delta P_2/\rho\mathcal{U}_1^2$ имеет порядок $\mathcal{v}^2/\mathcal{U}_1^2$, а порядок этой величины равен, в свою очередь, $L_2/L_1$. Если число Рейнольдса $\mathcal{U}_1L_2/\nu$ имеет порядок $L_1/L_2$ [в этом случае вязкий член в уравнении (7.3) сохраняется], то, удерживая лишь члены наивысшего порядка, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{U}_1\left(\frac{P_0}{\rho}+\frac{\bar{U}_1^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\bar{U}_2\left(\frac{P_0}{\rho}+\frac{\bar{U}_1^2}{2}\right)=-\bar{U}_1\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}+\nu\bar{U}_1\frac{\partial^2\bar{U}_1}{\partial x_2^2}. \tag{7.4}$$

Для области, удаленной от стенки, где величина $\mathcal{U}_1L_2/\nu$ может стать намного больше, чем $L_1/L_2$, вязким членом в уравнении (7.4), как и раньше, можно пренебречь.

Уравнение турбулентной энергии (1.98) в первом приближении записывается следующим образом:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\overline{q^2}}{2} + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\overline{q^2}}{2} = -\overline{u_1 u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)} +$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & R_{12}\dfrac{L_1}{L_2} & \dfrac{L_1}{L_2}\dfrac{\mathfrak{v}}{\mathcal{U}_1} \\ & & + \nu \dfrac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_j\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_2}\right)} - \nu\overline{\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}}, & (7.5) \\ & & \dfrac{\nu}{\mathcal{U}_1 L_2}\dfrac{L_1}{l} & \dfrac{\nu}{\mathcal{U}_1 L_2}\dfrac{L_1 L_2}{l^2} \end{array}$$

где длина $l$ — соответствующий масштаб изменений турбулентных пульсаций скорости в пространстве. Можно полагать, что, за исключением зоны, расположенной очень близко к стенке, этот масштаб будет значительно меньше масштаба длины $L_2$ и поэтому член, определяющий работу, совершаемую над единицей массы в единицу времени вязкими напряжениями сдвига при турбулентном движении, будет мал по сравнению с членом, характеризующим вязкую диссипацию.

Из приведенной выше оценки порядков величин различных членов можно сделать следующие интересные выводы.

Если коэффициент корреляции $R_{12}$, характеризующий напряжения сдвига, имеет порядок единицы, то порождение турбулентной энергии будет велико по сравнению с конвекцией турбулентной энергии осредненным движением; когда величина $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$ имеет порядок $L_2/L_1$, конвективная диффузия под действием турбулентности мала. Указанные значения $R_{12}$ наблюдаются в зоне, расположенной вблизи стенки, где, кроме того, величина $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ имеет, самое большее, порядок $L_1/L_2$. Следовательно, в зоне, расположенной очень близко к стенке, где проявляется значительное влияние вязкости, а величина $\mathfrak{v}/\mathcal{U}_1$ не мала, масштабы длины $L_2$ и $l$ одинаковы по порядку величины и влиянием конвекции под действием осредненного движения можно пренебречь; все остальные члены одинаковы по порядку величины при условии, что число Рейнольдса $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ достаточно мало. Тогда уравнение энергии принимает вид

$$\overline{u_1 u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)} =$$

$$= \nu \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_j\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_2}\right)} - \nu\overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \qquad (7.5a)$$

Правая часть этого уравнения может быть преобразована так, чтобы образовались члены, величина которых легко поддается измерению

[см. уравнение (1.99)]; при этом получаем

$$-\overline{u_1u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}=\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\bar{q}^2}{2}-\nu\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \qquad (7.5б)$$

С удалением от стенки отношение масштабов длины $l/L_2$ уменьшается, а величина $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$ становится порядка $L_2/L_1$. В этом случае конвективная диффузия под действием турбулентности и работа, совершаемая вязкими напряжениями сдвига при турбулентном движении, тоже становятся малыми по сравнению с другими членами. Уравнение энергии при этом дополнительно упрощается:

$$-\overline{u_1u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}+\varepsilon=0, \qquad (7.6)$$

где с той же степенью приближения

$$\varepsilon\approx\varepsilon'=\nu\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}},$$

а отношение $l/L_2$ должно быть порядка $(L_2/L_1)^{1/2}$.

С другой стороны, в турбулентной области, удаленной от стенки, коэффициент корреляции $R_{12}$ становится малым и уменьшается с возрастанием расстояния от стенки. В то же время число Рейнольдса $\mathcal{U}_1L_2/\nu$ по порядку величины может стать больше, чем $L_1/L_2$. В этой области пренебрежение ролью конвективных членов в общем балансе турбулентной энергии больше уже не является оправданным; поэтому в данном случае следует пользоваться более полным уравнением

$$\bar{U}_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}\bar{q}^2+\bar{U}_2\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}\bar{q}^2=-\overline{u_1u_2}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_2\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}-\varepsilon'. \qquad (7.7)$$

В этом балансе энергии роль членов, определяющих порождение энергии и ее вязкую диссипацию, с возрастанием расстояния от стенки и с увеличением числа Рейнольдса ослабевает. В предельном случае это уравнение сводится лишь к балансу конвективного переноса турбулентной энергии под действием осредненного и турбулентного движений.

## Интегральные соотношения

Интегрируя уравнения неразрывности (7.1), движения (7.3) и энергии (7.4) и (7.5) по $x_2$ поперек всего пограничного слоя, можно получить интересные и простые соотношения. Мы проделаем это для случая течения с нулевым градиентом давления, т. е. считая давление $P_0$ независимым от $x_1$.

Проинтегрируем сначала уравнение неразрывности по $x_2$ от 0 до $\infty$. Соответственно переменим при этом порядок интегрирования по $x_2$ и дифференцирования по $x_1$. Таким образом, получим

$$\frac{d}{dx_1}\int_{\infty}^{\infty} \bar{U}_1\, dx_2 + \bar{U}_2\Big|_0^{\infty} = 0,$$

откуда

$$(\bar{U}_2)_\infty = -\frac{d}{dx_1}\int_0^{\infty} \bar{U}_1\, dx_2. \tag{7.8}$$

Обозначим через $\delta$ толщину пограничного слоя, т. е. то значение $x_2$, при котором величина $\bar{U}_1$ практически равна скорости невозмущенного потока $U_0$ снаружи пограничного слоя.

Тогда интеграл

$$\int_0^{\delta} \bar{U}_1\, dx_2$$

представляет собой полный расход жидкости через пограничный слой в направлении оси $x_1$. Введем, помимо этого, длину $\delta'$ так, чтобы

$$U_0\delta' = \int_0^{\delta} \bar{U}_1\, dx_2.$$

Очевидно, что $\delta' < \delta$, и, следовательно, из-за торможения течения в пограничном слое линии тока в невозмущенном потоке снаружи пограничного слоя смещаются в положительном направлении оси $x_2$ на расстояние $\delta_d = \delta - \delta'$. Поскольку с увеличением $x_2$ скорость $\bar{U}_1$ стремится к скорости невозмущенного потока более или менее асимптотически, точное определение величины $\delta$ встречает затруднения. В этом отношении толщина $\delta_d$ является значительно более подходящим параметром, так как ее величина может быть определена совершенно точно. Из равенства

$$\delta_d U_0 = \delta U_0 - \delta' U_0 = \delta U_0 - \int_0^{\delta} \bar{U}_1\, dx_2 = \int_0^{\delta} (U_0 - \bar{U}_1)\, dx_2$$

следует, что

$$\delta_d = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0}\right) dx_2 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0}\right) dx_2. \tag{7.9}$$

Величину $\delta_d$ по вполне очевидным причинам принято называть толщиной вытеснения пограничного слоя.

Интегрируя уравнение движения (7.3) и пользуясь при этом уравнением неразрывности, получаем

$$\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty \bar{U}_1^2\,dx_2 + \bar{U}_1\bar{U}_2\Big|_0^\infty = -\overline{u_1u_2}\Big|_0^\infty + \nu\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\Big|_0^\infty$$

или, поскольку $\overline{u_1u_2}=0$ при $x_2=0$ и при $x_2=\infty$,

$$\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty \bar{U}_1^2\,dx_2 + U_0(\bar{U}_2)_\infty = -\nu\left(\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\right)_0.$$

С помощью соотношения (7.8) после некоторых преобразований окончательно получаем

$$\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty \frac{\bar{U}_1}{U_0}\left(1-\frac{\bar{U}_1}{U_0}\right)dx_2 = \frac{\sigma_w}{\rho U_0^2}, \tag{7.10}$$

где $\sigma_w$ — вязкое напряжение сдвига на стенке:

$$\sigma_w = \mu\left(\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\right)_0.$$

Введем теперь новую длину $\delta_m$, определяемую выражением

$$\delta_m = \int_0^\infty \frac{\bar{U}_1}{U_0}\left(1-\frac{\bar{U}_1}{U_0}\right)dx_2. \tag{7.11}$$

Тогда соотношение (7.10) может быть переписано так:

$$\frac{d\delta_m}{dx_1} = \frac{\sigma_w}{\rho U_0^2}. \tag{7.10a}$$

Длина $\delta_m$ называется толщиной потери импульса пограничного слоя, так как величина $\rho U_0^2\delta_m$ представляет собой полную потерю импульса жидкости в пограничном слое в сечении, соответствующем $x_1$, которая компенсируется силой трения о стенку на всей длине $x_1$.

Аналогично интегрирование уравнения энергии (7.4) приводит к определению еще двух параметров с размерностью длины, которые также можно рассматривать как характеристики пограничного слоя, а именно: толщины потери энергии $\delta_e$,

$$\delta_e = \int_0^\infty \frac{\bar{U}_1}{U_0}\left(1-\frac{\bar{U}_1^2}{U_0^2}\right)dx_2, \tag{7.12}$$

и толщины диссипации $\Delta$,

$$\Delta = \left[\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\bar{U}_1}{U_0}\right)^2 dx_2\right]^{-1}. \tag{7.13}$$

В уравнении энергии (7.4) члены с постоянным давлением $P_0$ выпадают в силу уравнения неразрывности. Тогда интегрирование по $x_2$ дает

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty \bar{U}_1^3\,dx_2 + \frac{1}{2}(\bar{U}_2)_\infty U_0^2 =$$

$$= -\int_0^\infty \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1u_2}\,dx_2 + \nu\int_0^\infty \bar{U}_1\frac{\partial^2\bar{U}_1}{\partial x_2^2}\,dx_2.$$

Интегрируя по частям оба члена в правой части этого уравнения и пользуясь при этом соотношением (7.8), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty (\bar{U}_1^3 - \bar{U}_1U_0^2)\,dx_2 = \int_0^\infty \overline{u_1u_2}\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\,dx_2 - \nu\int_0^\infty \left(\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_2,$$

откуда, вводя толщину потери энергии (7.12) и толщину диссипации (7.13), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta_e}{dx_1} = -\frac{1}{U_0^3}\int_0^\infty \overline{u_1u_2}\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\nu}{U_0\Delta}. \tag{7.14}$$

Толщина потери энергии $\delta_e$ и толщина диссипации $\Delta$ впервые были введены Вигхардтом [2] для случая ламинарного пограничного слоя, когда турбулентный член в правой части уравнения (7.14) равен нулю. С другой стороны, при больших числах Рейнольдса последний член в правой части уравнения (7.14) становится пренебрежимо малым, и толщина потери энергии определяется только турбулентным членом; в этом случае энергия турбулентности порождается за счет кинетической энергии осредненного движения.

Порождение энергии турбулентности можно при помощи интегральной формы уравнения (7.5) связать с вязкой диссипацией под действием турбулентности и с конвекцией турбулентной энергии под действием осредненного движения.

Интегрируя уравнение (7.5) и вновь используя уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty \frac{\overline{q^2}}{2}\bar{U}_1\,dx_2 = -\int_0^\infty \overline{u_1u_2}\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\,dx_1 - \int_0^\infty \varepsilon\,dx_2. \tag{7.15}$$

Объединение уравнений (7.14) и (7.15) приводит к уравнению, которое дает баланс полной энергии в турбулентном пограничном слое:

$$\frac{d}{dx_1}\left[\frac{\delta_e}{2}-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\overline{q^2}\,\overline{U_1}}{U_0^3}\,dx_2\right]=\frac{\nu}{U_0\Delta}+\int_0^\infty \frac{\varepsilon}{U_0^3}\,dx_2. \qquad (7.16)$$

При больших числах Рейнольдса членом $\nu/U_0\Delta$, характеризующим вязкую диссипацию под действием осредненного движения, можно пренебречь.

Рассмотрим теперь течение в прямой круглой трубе с постоянным поперечным сечением. При этом осредненное по времени течение будем считать осесимметричным. Воспользуемся цилиндрической системой координат, начало которой расположено в некоторой точке на оси трубы, а ось $x$ совпадает с направлением осредненного потока.

Предположим, что осредненное течение является однородным и, стало быть, осевая компонента скорости $\overline{U}_x$ не зависит от $x$. Тогда из уравнения неразрывности следует, что радиальная компонента $\overline{U}_r=0$. Следовательно, уравнения движения для осевого и радиального направлений запишутся соответственно следующим образом:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\overline{u_r u_x})+\nu\left(\frac{d^2\overline{U}_x}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\overline{U}_x}{dr}\right)$$

и

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\overline{u_r^2})+\frac{\overline{u_\varphi^2}}{r}.$$

Интегрирование второго уравнения дает

$$\overline{P}(x,\,r)+\rho\overline{u_r^2}-\rho\int_r^{\frac{1}{2}D}\frac{\overline{u_r^2}-\overline{u_\varphi^2}}{r}\,dr=\overline{P}_0(x), \qquad (7.17)$$

где $\overline{P}_0$ — зависящее от $x$ статическое давление на стенке, а $D$ — диаметр поперечного сечения трубы. Тогда первое уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{P}_0}{dx}=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\overline{u_r u_x})+\nu\left(\frac{d^2\overline{U}_x}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\overline{U}_x}{dr}\right)$$

или, после умножения на $r$ и интегрирования по $r$,

$$\frac{r}{2}\frac{d\overline{P}_0}{dx}=-\rho\overline{u_r u_x}+\mu\frac{d\overline{U}_x}{dr}. \qquad (7.18)$$

В силу предположения об однородности условий осредненного течения в осевом направлении, оба члена в правой части уравнения (7.18)

зависят только от $r$. Следовательно, давление $\overline{P}_0(x)$ должно быть линейной функцией $x$, что вполне очевидно. Таким образом, если положить $r = \frac{1}{2} D$ и проинтегрировать уравнение (7.18) по $x$, то получим

$$\overline{P}_0(x) - \overline{P}_0(0) = \frac{4}{D} \mu \left[\frac{d\overline{U}_x}{dr}\right]_{r=1/2D} x = -\frac{4}{D} \sigma_w x. \qquad (7.19)$$

После введения этого выражения для $\overline{P}_0(x)$ в уравнение (7.17) оно принимает вид

$$\overline{P}(x, r) - \overline{P}_0(0) = -\frac{4\sigma_w}{D} x - \rho\overline{u_r^2} + \rho \int_r^{\frac{1}{2}D} \frac{\overline{u_r^2} - \overline{u_\varphi^2}}{r} dr. \qquad (7.17a)$$

Уравнение турбулентной энергии, как и соответствующее уравнение для течения в пограничном слое, можно сильно упростить. В области, расположенной очень близко к стенке, течение является практически двумерным и не отличается от течения в пограничном слое. Значит, для этой области может быть применено то же приближенное уравнение энергии (7.5а). Для области, более удаленной от стенки, но все же достаточно близкой к ней, чтобы течение можно было приблизительно считать двумерным, следует ожидать аналогичного результата, но с меньшей степенью сходства. К этой последней области в пограничном слое применимо упрощенное уравнение энергии (7.6).

Для основной части турбулентной области течения в трубе должно выполняться уравнение, аналогичное уравнению (7.7), а именно:

$$\overline{u_x u_r} \frac{d\overline{U}_x}{dr} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\overline{u_r \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}\right)}\right] + \varepsilon' = 0, \qquad (7.20)$$

где

$$\varepsilon' = \nu \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} =$$

$$= \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_x}{r\,\partial \varphi}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_r}{r\,\partial \varphi}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{r\,\partial \varphi}\right)^2}\right]. \qquad (7.21)$$

## § 7.3. Ламинарный пограничный слой и явление перехода

Прежде чем рассматривать турбулентный пограничный слой на плоской пластине, целесообразно сделать несколько общих замечаний о пограничных слоях и дать распределение скорости в ламинарном пограничном слое на плоской пластине при отсутствии градиента давления.

Если обратиться к пограничному слою на твердом теле, то в направлении вниз по потоку в нем можно выделить несколько областей. Начиная от критической точки, толщина пограничного слоя в направлении вниз по потоку увеличивается. Течение в пограничном слое вначале является ламинарным, но, начиная с некоторой точки, оно становится неустойчивым и при наличии возмущений может перейти в турбулентное. Положение этой точки на теле зависит от скорости потока, от кривизны поверхности и от степени турбулентности в свободном потоке снаружи пограничного слоя. После перехода течения в турбулентное толщина пограничного слоя нарастает более интенсивно, чем прежде.

Если поверхность тела является по отношению к невозмущенному потоку выпуклой либо если в направлении течения существует неблагоприятный положительный градиент давления, то возникает возможность «отрыва» пограничного слоя от этой поверхности. При этом наблюдается переход в третью область.

Когда тело представляет собой плоскую пластину, помещенную в равномерный параллельный поток, то градиент давления в направлении течения отсутствует и отрыва пограничного слоя не наблюдается; толщина пограничного слоя при этом неограниченно возрастает. В этом случае имеются только ламинарная и турбулентная области, разделенные относительно короткой переходной зоной.

Как уже указывалось во введении к этой главе, мы не намереваемся рассматривать теорию устойчивости ламинарного пограничного слоя и перехода течения в турбулентное. Мы ограничимся лишь тем, что приведем эмпирическую формулу для определения расстояния от критической точки до той точки, в которой в пограничном слое наблюдается переход к турбулентности. Поскольку процессы переноса в ламинарной и турбулентной областях пограничного слоя различны, то для изучения переноса необходимо знать, в какой точке наступает переход к турбулентному течению.

Явление перехода может наступить в том случае, когда число Рейнольдса для течения в пограничном слое превысит некоторое критическое значение. Общеприняты следующие два определения числа Рейнольдса для течения в пограничном слое: (1) по толщине пограничного слоя, т. е.

$$\mathrm{Re}_{\delta} = \frac{U_0 \delta}{\nu}, \quad \mathrm{Re}_{\delta_d} = \frac{U_0 \delta_d}{\nu}, \quad \mathrm{Re}_{\delta_m} = \frac{U_0 \delta_m}{\nu}$$

и т. д., и (2) по расстоянию $x_1$ от критической точки, т. е.

$$\mathrm{Re}_{x_1} = \frac{U_0 x_1}{\nu}.$$

Критическое значение $\mathrm{Re}_{x_1}$ для возникновения турбулентности в ламинарном пограничном слое на плоской пластине, помещенной

в аэродинамической трубе, было определено Шубауэром и Скрэмстедом [3]. Они проделали этот опыт при различных условиях состояния турбулентности в невозмущенном потоке, которые характеризовались только относительной интенсивностью турбулентности, определенной как отношение $(1/3\overline{q^2})^{1/2}/U_0$, где $\overline{q^2} = \overline{u_i u_i}$.

Эти результаты показаны на рис. 7.1. Критическое значение $\mathrm{Re}_{x_1}$, соответствующее наступлению перехода, по-видимому, уже перестает зависеть от относительной интенсивности турбулентности невозмущенного потока, когда эта интенсивность становится меньше приблизительно 0,1%. Данные, представленные на рис. 7.1, указывают на то, что, когда турбулентность невозмущенного потока

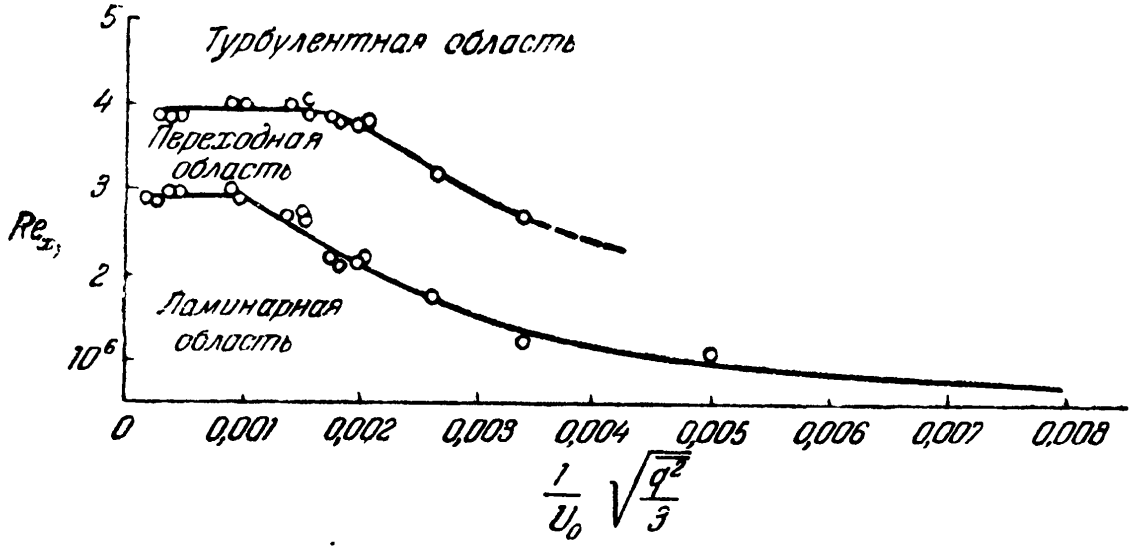



Рис. 7.1. Влияние турбулентности невозмущенного потока на переход ламинарного пограничного слоя на плоской пластине в турбулентный при отсутствии градиента давления [3].

начинает способствовать переходу ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное, относительная интенсивность турбулентности свободного потока должна составлять, по меньшей мере, 0,2%.

Когда относительная интенсивность турбулентного свободного потока составляет 0,5%, критическое значение $\mathrm{Re}_{x_1}$ уменьшается от $3 \cdot 10^6$ до $\approx 10^6$. По данным Драйдена [4], эта величина уменьшается приблизительно до $10^5$, когда относительная интенсивность турбулентности возрастает до 3%.

Зная критическое значение $\mathrm{Re}_{x_1}$, можно вычислить критическую длину $x_{\text{крит}}$:

$$(x_1)_{\text{крит}} = \frac{\nu}{U_0}(\mathrm{Re}_{x_1})_{\text{крит}}.$$

В случае ламинарного пограничного слоя величины $\mathrm{Re}_\delta$ и $\mathrm{Re}_{x_1}$ не являются независимыми. Чтобы установить связь между ними, требуется знать распределение скорости в пограничном слое как функции от $x_1$ и $x_2$, что позволило бы получить соотношение между $\delta$ и $x_1$.

Согласно приближенной теории пограничного слоя, уравнение движения в проекции на ось $x_1$ записывается в виде

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}.$$

Блазиусу [5, 14] удалось получить из этого уравнения и соответствующих граничных условий решение для $U_1$. Это решение, которое выражается через независимую переменную

$$\eta = \frac{1}{2} x_2 \left(\frac{U_0}{\nu x_1}\right)^{1/2},$$

состоит из двух частей: решения в виде степенного ряда для малых значений $\eta$ и асимптотического решения для больших значений $\eta$.

Степенной ряд для малых $\eta$ имеет вид

$$U_1 = \frac{U_0}{2}\left(\frac{\alpha\eta}{1!} - \frac{\alpha^2\eta^4}{4!} + 11\,\frac{\alpha^3\eta^7}{7!} - 375\,\frac{\alpha^4\eta^{10}}{10!} + \ldots\right), \quad (7.22а)$$

где $\alpha = 1{,}328$.

Асимптотическое решение для больших $\eta$ записывается в форме

$$U_1 = U_0\left\{1 + \nu \int_{\infty}^{\eta} \exp[-(\eta - \beta)^2]\, d\eta\right\}. \quad (7.22б)$$

При $\beta = 0{,}865$ и $\nu = 0{,}461$ эти два решения дают одинаковые значения $U_1$ и $\partial U_1/\partial x_2$ в некоторой точке, где оба они еще применимы.

Согласно решению Блазиуса, скорость $U_0$ достигается асимптотически. Поэтому при определении толщины $\delta$ необходимо условиться о той величине отклонения от постоянной скорости свободного потока, которую следует принять, когда хотят получить конечное значение этой толщины.

Для $\eta = 2{,}75$ Блазиус получил значение $U_1 = 0{,}997 U_0$. Таким образом, когда допустимое отклонение принимается равным 0,3%, получаем

$$\delta = 5{,}5 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}. \quad (7.23)$$

Вместо трудно определяемой толщины $\delta$ лучше пользоваться толщиной вытеснения $\delta_d$ или толщиной потери импульса $\delta_m$. Для этих параметров пограничного слоя в случае распределения скорости по Блазиусу получаются следующие формулы:

$$\delta_d = 1{,}731 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}} \quad (7.24)$$

и

$$\delta_m = 0{,}664 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}, \quad (7.25)$$

откуда вытекает, что

$$\delta_d = 0{,}31\delta, \quad \delta_m = 0{,}12\delta, \quad \delta_d = 2{,}6\delta_m.$$

Отношение $H = \frac{\delta_d}{\delta_m}$ обычно рассматривается как параметр, характеризующий распределение скорости в пограничном слое; оно называется формпараметром.

Любая из формул (7.23) — (7.25) показывает, что толщина пограничного слоя при увеличении $x_1$ возрастает по параболическому закону.

Соотношение между $\mathrm{Re}_{x_1}$ и, например, $\mathrm{Re}_\delta$ находится без труда и имеет вид

$$\mathrm{Re}_\delta = 5{,}5\,(\mathrm{Re}_{x_1})^{1/2}. \tag{7.26}$$

Следовательно, критическая величина $\mathrm{Re}_\delta$ при переходе ламинарного течения в турбулентное при относительной интенсивности турбулентности свободного потока, равной нулю и 3%, составляет соответственно 11 000 и 1700.

## § 7.4. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Классические теории

Из анализа, изложенного в § 7.2, следует, что в пограничном слое можно выделить определенные области течения. Этот факт был установлен сравнительно давно Прандтлем, Карманом и другими исследователями; при этом было проведено много экспериментальных работ, из которых наиболее существенные принадлежат Никурадзе [6].

Течение жидкости, прилегающей к стенке, должно быть в основном вязким, ибо у стенки все скорости, в том числе и турбулентные пульсации, обращаются в нуль; то же самое можно сказать и о числе Рейнольдса, отнесенном к местной скорости и расстоянию от стенки. Эта область преимущественно вязкого течения не обладает равномерностью ни по времени, ни по расстоянию вдоль стенки. Однако в любом сечении можно выделить осредненную по времени толщину этой области. Область, о которой идет речь, называется вязким подслоем, а ее осредненная толщина обозначается обычно через $\delta_l$ *). Таким образом, при $x_2 < \delta_l$ течение можно полагать вязким.

В области $x_2 > \delta_l$ влияние вязкости на течение с увеличением расстояния от стенки будет постепенно ослабляться. В конце концов достигается область, течение в которой является полностью турбу-

*) Индекс $l$ соответствует ламинарному течению, так как этот слой первоначально называли ламинарным подслоем. Как будет показано ниже, течение в этом слое является не ламинарным в строгом смысле этого слова, а лишь вязким. Поэтому термин «ламинарный подслой» оказывается не очень подходящим.

лентным, а влияние вязкости — пренебрежимо малым. Промежуточная область, где течение не является ни полностью вязким, ни полностью турбулентным, называется переходной. Обозначим через $\delta_t$ среднее расстояние от стенки, вне которого течение является полностью турбулентным; тогда протяженность переходной области определится неравенством

$$\delta_l < x_2 < \delta_t.$$

Средняя толщина вязкого подслоя $\delta_l$ может быть меньше или больше средней высоты элементов шероховатости стенки $k$. Распределение скорости вблизи стенки будет зависеть от этой шероховатости, особенно когда средняя высота $k$ больше толщины вязкого подслоя. Следовательно, при анализе распределения скорости в турбулентном пограничном слое необходимо проводить различие между пограничными слоями на гладкой и на шероховатой стенках.

Рассмотрим сначала пограничный слой на гладкой стенке. Логично предположить, что течение вблизи стенки будет определяться главным образом напряжением сдвига на стенке $\sigma_w$, расстоянием от стенки $x_2$ и коэффициентом вязкости жидкости $\mu$. Помимо этого считается, что, так как область, близкая к стенке, является очень тонкой, напряжение сдвига в потоке можно полагать приблизительно постоянным и равным напряжению сдвига на стенке.

В вязком подслое, где течение является полностью вязким, распределение скорости в первом приближении определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \sigma_{12} \approx \sigma_w,$$

откуда следует, что это распределение описывается линейной зависимостью от расстояния до стенки:

$$U_1 = \frac{\sigma_w}{\mu} x_2$$

или

$$\frac{U_1}{u^*} = \frac{u^* x_2}{\nu}, \tag{7.27}$$

где

$$u^* = \left(\frac{\sigma_w}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{7.28}$$

Величина $u^*$, которая имеет размерность скорости, называется динамической скоростью *).

Для турбулентной области пограничного слоя, т. е. для $x_2 > \delta_t$, но в достаточной близости от стенки, так, чтобы выполнялось

*) Этот термин принят в отечественной литературе. По терминологии автора величина $u^*$ называется «скоростью трения о стенку» (wall-friction velocity). (*Прим. перев.*)

предположение о постоянстве напряжения сдвига, можно записать

$$(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}=\frac{\tau_w}{\rho}.$$

Очевидно, что предположение о постоянстве коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$, которое, как и прежде, привело бы к линейному распределению скорости, является неудовлетворительным, ибо такое распределение противоречило бы экспериментальным результатам.

Но коэффициент вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ связан с переносом импульса от одного слоя к другому. Этот перенос определяется диффузией жидких частиц под действием турбулентности. В главе 5 было показано, что при малых расстояниях диффузии, т. е. при непродолжительном времени диффузии, диффузия развивается пропорционально времени и, если ввести коэффициент вихревой диффузии, его зависимость от расстояния оказывается линейной [см., например, уравнение (5.56)]. Поскольку мы имеем здесь дело с областью, находящейся на небольшом расстоянии от стенки, так что диффузия жидких частиц внутри этой области ограничена малыми расстояниями, то можно воспользоваться предположением о пропорциональности коэффициента вихревой диффузии расстоянию $x_2$, надеясь получить при этом результат лучше, нежели в предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии.

Эквивалентный результат получается, если предположить, что в этой близкой к стенке области размер крупных вихрей, которыми как раз и обусловлена вихревая вязкость, изменяется пропорционально расстоянию от стенки. При этом следует отметить, что механизмы течения, с которыми связаны это и первое предположения, отличаются друг от друга.

Таким образом, будем полагать, что

$$(\epsilon_m)_{11}=\varkappa u^* x_2. \tag{7.29}$$

Тогда уравнение для распределения скорости запишется так:

$$\varkappa u^* x_2\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}=\frac{\tau_w}{\rho}=u^{*2}$$

или, в безразмерных величинах,

$$\varkappa x_2^+\frac{\partial \bar{U}_1^+}{\partial x_2^+}=1, \tag{7.30}$$

где

$$\bar{U}_1^+=\frac{\bar{U}_1}{u^*},\quad x_2^+=\frac{u^* x_2}{\nu}. \tag{7.31}$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\bar{U}_1^+=\frac{1}{\varkappa}\ln x_2^+ + \text{const} \quad \text{при} \quad x_2>\delta_t. \tag{7.32}$$

Аналогичное решение было получено Прандтлем, который, однако, воспользовался для этой цели своей теорией переноса импульса. Согласно этой теории,

$$\sigma_{12} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Далее, Прандтль принял основанное на интуитивных соображениях предположение о том, что путь смешения $l_m$ на столь малых расстояниях от стенки должен быть пропорционален расстоянию. Соотношения $l_m = \varkappa x_2$ и $\sigma_{12} \approx \sigma_w = \rho u^{*2}$ приводят к тому же дифференциальному уравнению (7.30) и, следовательно, к такому же логарифмическому распределению скорости (7.32). Если вместо предположения Прандтля о пути смешения $l_m$ принять выражение для этого пути смешения (5.12), предложенное Карманом, то мы вновь получим логарифмическое распределение скорости.

Предположение Прандтля, по существу, одинаково с предположением (7.29), ибо

$$(\epsilon_m)_{11} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| = \varkappa^2 x_2^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|,$$

откуда при распределении скорости вида (7.32) получается соотношение (7.29).

Для турбулентного пограничного слоя на шероховатой стенке опять-таки можно воспользоваться аналогичным предположением относительно коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ или пути смешения $l_m$. Но если средняя высота элементов шероховатости значительно больше толщины вязкого подслоя, т. е. $k > \delta_l$, то логично ожидать, что влияние вязкости будет отсутствовать; поэтому выражение для распределения скорости не должно содержать коэффициента вязкости жидкости, но в него должен входить параметр шероховатости $k$. Следовательно, в этом случае логарифмическое распределение скорости должно записываться в виде

$$\bar{U}_1^+ = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{x_2}{k} + \text{const}. \tag{7.33}$$

Когда стенка является шероховатой, то в определении местоположения плоскости $x_2 = 0$ имеется неопределенность. Если не оговаривается какой-либо иной способ, то будет предполагаться, что элементы шероховатости «присоединены» к воображаемой гладкой стенке, поверхность которой располагается на линии $x_2 = 0$. Это предположение не приводит ни к каким осложнениям, коль скоро элементы шероховатости не обладают слишком неправильной формой и не являются чересчур крупными.

Согласно решениям (7.32) и (7.33), распределения скорости в последовательно расположенных сечениях пограничного слоя

подобны, по крайней мере в области, близкой к стенке, где напряжение сдвига приблизительно постоянно. Поэтому указанную область часто называют слоем постоянного напряжения. Этот слой относительно тонок; остальная, вернее сказать, основная часть турбулентного пограничного слоя может иметь распределение скорости, отличное от логарифмического. Никакой эквивалентной теории для этой части пограничного слоя Прандтлю предложить не удалось; однако экспериментальные данные позволили обнаружить, что распределение скорости в последовательных сечениях и в этом случае обладает близким подобием, если в качестве характеристики скорости выбрать разность между местной осредненной скоростью и скоростью свободного потока (а не их отношение), т. е.

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = \Psi\left(\frac{x_2}{\delta}\right). \tag{7.34}$$

Эта формула подобия известна как закон избыточной скорости. Заметим, что это соотношение вытекает также и из уравнений (7.32) и (7.33), хотя эти уравнения, строго говоря, несправедливы для внешней области пограничного слоя.

Во введении к этой главе, а также в § 7.2 упоминалось о сходстве условий течения во внешней области пограничного слоя и в свободном турбулентном потоке. Поэтому можно ожидать, что если принять предположение о постоянстве коэффициента вихревой диффузии, то полученное при этом решение для распределения скорости будет вполне удовлетворительным. В этом случае следует пользоваться уравнением (7.3), в котором опущены члены, связанные с давлением и вязкостью; при этом в уравнение целесообразно вместо $\bar{U}_1/U_0$ ввести величину $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0$. Анализ, основанный на этих предположениях, будет дан ниже, в § 7.6, посвященном более поздним теориям турбулентного пограничного слоя.

Как уже отмечалось, до сих пор отсутствуют теории, эквивалентные теориям для слоя постоянного напряжения, которые позволяли бы найти распределение скорости в области, где справедлив закон избыточной скорости. По всей вероятности, в этом и не чувствовалось прямой необходимости, ибо с практической, инженерной точки зрения логарифмическое распределение скорости дает, по-видимому, вполне удовлетворительные результаты, даже применительно к области с непостоянным напряжением сдвига. Как будет показано в следующем параграфе, наблюдающиеся при этом отклонения от действительного распределения скорости малы, а получающееся в результате среднее значение скорости в поперечном сечении пограничного слоя, которым пользуются при инженерных расчетах, оказывается достаточно близким к действительной величине.

Логарифмические распределения скорости (7.32) и (7.33) носят универсальный характер, будучи зависимыми лишь от условий на

стенке и от расстояния до стенки. Постоянные, содержащиеся в выражениях (7.32) и (7.33), являются числами. В самом деле, эти выражения можно получить общеизвестным методом из соображений размерности на основании некоторых предположений общего характера, не вдаваясь в подробности структуры течения. Подобные соображения были высказаны Милликеном [7].

Милликен постулировал универсальное распределение скорости, определяемое лишь числом Рейнольдса, относительным расстоянием от стенки и относительной шероховатостью стенки. Общее выражение для такого универсального распределения скорости записывается в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = f\left(\delta^+, \xi_2, \frac{k}{\delta}\right), \tag{7.35}$$

где $\delta^+ = u^*\delta/\nu$ и $\xi_2 = x_2/\delta$. Это универсальное распределение скорости должно наблюдаться в той области, где влияние вязкости пренебрежимо мало, т. е. при $x_2 > \delta_t$.

В случае гладкой стенки это общее выражение упрощается:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = f(\delta^+, \xi_2). \tag{7.36}$$

Таким образом, для $\xi_2 = 1$ отсюда следует, что

$$\frac{U_0}{u^*} = f\sqrt{\delta^+}. \tag{7.37}$$

Это соотношение определяет закон сопротивления стенки, так как

$$u^* = \left(\frac{\sigma_w}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Дадим теперь точное определение соотношения (7.36) для области, прилегающей к стенке, и для области, расположенной вдали от нее.

Для области, близкой к стенке, воспользуемся предположением Прандтля о том, что условия течения вблизи стенки определяются лишь местным значением числа Рейнольдса $\frac{u^*x_2}{\nu}$. Ввиду того, что $u^*x_2/\nu = \delta^+\xi_2$, то, согласно этому предположению, для течения вблизи стенки должно выполняться соотношение

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \varphi(\delta^+\xi_2). \tag{7.38}$$

Для области, удаленной от стенки, Милликен принял закон избыточной скорости (7.34), в выражение которого не входит $\delta^+$.

Предположим, далее, что для области $x_2 > \delta_t$ справедливы оба соотношения (7.34) и (7.38), вытекающие из общей формулы (7.36), причем первое из них соответствует той части этой области, которая

удалена от стенки, а второе — части, прилегающей к стенке. Поскольку функция, описывающая распределение скорости, должна быть непрерывна, то необходимо, чтобы существовала некоторая зона, которая может быть малой, но все же конечной, где соотношения (7.34) и (7.38) дают одинаковые результаты. Общее соотношение (7.36) в этой зоне должно иметь такую форму, чтобы быть совместимым с обеими формулами (7.38) и (7.34). Это условие, по-видимому, полностью определяет форму зависимости (7.36). Таким образом, поскольку соотношения (7.36) или (7.37), (7.38) и (7.34) одновременно должны выполняться в одной и той же области, то из формулы (7.34) следует, что

$$f(\delta^+) - \varphi(\delta^+\xi_2) = \Psi(\xi_2).$$

Но первый член в левой части этого уравнения зависит только от $\delta^+$, а член в правой части — только от $\xi_2$. Если это уравнение продифференцировать сначала по $\delta^+$, а затем по $\xi_2$, то получим два соотношения:

$$f'(\delta^+) = \xi_2\varphi'(\delta^+\xi_2)$$

и

$$\Psi'(\xi_2) = -\delta^+\varphi'(\delta^+\xi_2).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\xi_2\Psi'(\xi_2) = -\delta^+ f'(\delta^+),$$

которое может выполняться лишь в том случае, когда каждая из его частей представляет собой численную постоянную. Таким образом, $\Psi'(\xi_2) = \frac{\text{const}}{\xi_2}$ и $f'(\delta^+) = \frac{\text{const}}{\delta^+}$; следовательно,

$$\varphi'(\delta^+\xi_2) = \frac{\text{const}}{\delta^+\xi_2},$$

откуда

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = \varphi(\delta^+\xi_2) = A\ln(\delta^+\xi_2) + B,$$

или

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = A\ln\left(\frac{u^*x_2}{\nu}\right) + B, \qquad (7.32a)$$

что в точности совпадает с уравнением (7.32).

Аналогичные соображения могут быть применены и в отношении распределе́ния скорости в пограничном слое на шероховатой стенке. Если обратиться к случаю шероховатой стенки, у которой эффективный вязкий подслой отсутствует и распределение скорости, стало

быть, не зависит от числа Рейнольдса, то можно записать

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = f\left(\frac{k}{\delta},\ \xi_2\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{U_0}{u^*} = f\left(\frac{k}{\delta}\right).$$

Для области вблизи стенки распределение скорости определяется главным образом ее шероховатостью; поэтому можно положить

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = \varphi\left(\frac{x_2}{k}\right) = \varphi\left(\xi_2 \frac{\delta}{k}\right).$$

Из этих соотношений и закона избыточной скорости (7.34), применяя такие же рассуждения, что и использованные выше в отношении распределения скорости на гладкой стенке, получаем

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = A_1 \ln\left(\frac{x_2}{k}\right) + B_1. \tag{7.39}$$

По смыслу вывода этого уравнения очевидно, что универсальное логарифмическое распределение скорости справедливо лишь в малой области, близкой к стенке. Более того, согласно выводу, это распределение ограничено областью слоя с постоянным напряжением. Но даже и здесь оно становится несправедливым при $x_2 < \delta_l$, т. е. в области, наиболее близкой к стенке, где существует непосредственное влияние вязкости на распределение скорости.

В прошлом было выдвинуто немало предположений о распределении скорости в области $x_2 < \delta_l$. При расчете теплообмена в пограничном слое на гладкой стенке Карман [8] аппроксимировал распределение скорости в переходной области $\delta_l < x_2 < \delta_t$ прямой линией в координатах $(\overline{U}_1^+,\ \ln x_2^+)$, считая, таким образом, что скорость $\overline{U}_1^+$ просто пропорциональна $\ln x_2^+$. Гофман [9] и Рейхардт [10] предложили иные функции для определения $\overline{U}_1^+$ в переходной области, а именно полином третьей степени от переменной $(x_2^+ - \delta_l^+)$ и экспоненту; однако это не привело к существенному прогрессу.

Ротта [11] высказал предположение, что в переходной области полное напряжение сдвига определяется совместным влиянием вязкости и турбулентности. Для описания влияния турбулентности он воспользовался прандтлевской гипотезой пути смешения и принял, что

$$\sigma_{12} = \rho\left[\nu + l_m^2 \left|\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}\right|\right] \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \approx \sigma_w, \tag{7.40}$$

где $l_m = \varkappa(x_2 - \delta_l)$. Таким образом, при $x_2 \leqslant \delta_l$ течение считается полностью вязким. Тогда решение для $\overline{U}_1$ записывается в виде

$$\overline{U}_1^+ = \frac{1}{2\varkappa l_m^+}\left(1 - \sqrt{1 + 4l_m^{+2}}\right) + \frac{1}{\varkappa}\ln\left(2l_m^+ + \sqrt{1 + 4l_m^{+2}}\right) + \delta_l^+, \tag{7.41}$$

где $l_m^+ = u^* l_m/\nu$ и $\delta_l^+ = u^* \delta_l/\nu$. Аналогичное решение, основанное на том же предположении, что и принятое Ротта, было дано позднее Майлсом [24].

До сих пор предполагалось, что толщина вязкого подслоя $\delta_l$ имеет определенную величину; в соответствии с этим предположением, турбулентное движение при $x_2 < \delta_l$ должно отсутствовать вовсе. Однако давно известно, что подобное представление неверно отражает действительную картину течения вблизи стенки, ибо турбулентные пульсации продолжают существовать в пределах этого слоя, даже когда они сильно демпфируются под влиянием вязкости. Поэтому при построении функции, описывающей распределение осредненной скорости, было бы более логично не проводить резкого различия между вязким подслоем и переходным слоем.

При изучении влияния турбулентности, исчезающей при приближении к стенке, на перенос тепла Гофман [9] принял для распределения скорости другую функцию, а именно полином третьей степени от $x_2^+$. В более поздних работах Рейхардт [12] и Элрод [25] показали, что поскольку компоненты турбулентных пульсаций скорости должны удовлетворять уравнению неразрывности, то коэффициент вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ при $x_2^+ \to 0$ должен возрастать, как $(x_2^+)^3$, когда в направлении потока существует градиент $\partial/\partial x_1$ осредненных по времени характеристик турбулентности, в то время как при отсутствии каких-либо изменений в направлении течения величина $(\epsilon_m)_{11}$ при $x_2^+ \to 0$ должна возрастать пропорционально $(x_2^+)^4$. При больших значениях $x_2^+$ изменение величины $(\epsilon_m)_{11}$ по мере приближения к области вне переходного слоя должно монотонно переходить в линейную зависимость от $x_2^+$. Таким образом, Рейхардтом была принята следующая функция:

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{\nu} = \varkappa\left(x_2^+ - \delta_l^+ \operatorname{th}\frac{x_2^+}{\delta_l^+}\right). \tag{7.42}$$

Распределение скорости получается из формулы

$$\sigma_{12} = [\mu + \rho(\epsilon_m)_{11}]\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \approx \sigma_w. \tag{7.43}$$

Интеграл, получающийся при решении этого дифференциального уравнения, не удается выразить в замкнутой форме. Чтобы преодолеть это затруднение, Рейхардт аппроксимировал подынтегральное выражение функцией, представляющей собой сумму экспонент от $x_2^+$ и легко поддающейся интегрированию. Полученное им окончательное

выражение для распределения скорости имеет вид

$$\overline{U}_1^+ = \frac{1}{\varkappa}\ln\left(1+\varkappa x_2^+\right)+c\left[1-\exp\left(-\frac{x_2^+}{\delta_l^+}\right)-\frac{x_2^+}{\delta_l^+}\exp\left(-0{,}33x_2^+\right)\right], \tag{7.44}$$

где $c$ — численная постоянная.

Несколько иная формула для коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ была предложена Дайслером [13], который тоже попытался учесть влияние турбулентности, затухающей в направлении к стенке. Дайслер принял, что

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{\nu} = a\overline{U}_1^+ x_2^+\left[1-\exp\left(-a\overline{U}_1^+ x_2^+\right)\right], \tag{7.45}$$

где $a$ — численная постоянная. Это выражение показывает, что при $x_2^+ \to 0$ величина $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ должна изменяться пропорционально $\left(x_2^+\right)^4$, в отличие от предложенного Рейхардтом выражения (7.42), согласно которому величина $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ должна изменяться пропорционально $\left(x_2^+\right)^3$. Распределение скорости получается при этом из уравнения (7.43) численным интегрированием.

Еще одно решение было предложено Ван Драйстом [26], который принял видоизмененное выражение для пути смешения $l_m$ в прандтлевской теории пути смешения:

$$l_m = \varkappa x_2\left[1-\exp\left(-\frac{x_2^+}{A}\right)\right],$$

откуда

$$(\epsilon_m)_{11} = \varkappa^2 x_2^2\left[1-\exp\left(-\frac{x_2^+}{A}\right)\right]^2\left|\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}\right|.$$

В этом случае величина $(\epsilon_m)_{11}$ при $x_2 \to 0$ тоже пропорциональна $x_2^4$, что совпадает с результатом, полученным Рейхардтом и Элродом для тех условий, когда изменения осредненных по времени характеристик турбулентности в направлении осредненного течения либо вообще отсутствуют, либо ими можно пренебречь. Решение, полученное на основании предположения Ван Драйста, записывается в виде

$$\overline{U}_1^+ = 2\int_0^{x_2^+}\frac{dx_2^+}{1+\left\{1+4\varkappa^2 x_2^{+2}\left[1-\exp\left(-\frac{x_2^+}{A}\right)\right]^2\right\}^{1/2}}.$$

Распределение скорости в переходной области в случае пограничного слоя на шероховатой стенке рассматривалось лишь в работе Ротта [11]. Он предположил, что вследствие шероховатости

путь смешения, содержащийся в выражении (7.40), при $x_2 = 0$ не обращается в нуль, а имеет некоторую конечную величину $l_0$, т. е.

$$l_m = l_0 + \varkappa x_2.$$

Тогда решение уравнения (7.40), если $\overline{U}_1^+ = 0$ при $x_2 = 0$, имеет вид

$$\overline{U}_1^+ = \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{1}{l_m^+} - \frac{1}{l_0^+}\right) - \frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{\left(1+4l_m^{+2}\right)^{1/2}}{l_m^+} - \frac{\left(1+4l_0^{+2}\right)^{1/2}}{l_0^+}\right] + \\ + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{2l_m^+ + \left(1+4l_m^{+2}\right)^{1/2}}{2l_0^+ + \left(1+4l_0^{+2}\right)^{1/2}}. \qquad (7.46)$$

Сравнение логарифмического распределения скорости, а также различных распределений скорости, полученных для переходной области, с экспериментальным распределением скорости будет дано в следующем параграфе. Здесь следует упомянуть лишь об одном из результатов этого сравнения, а именно о том, что логарифмическое распределение скорости вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальным распределением в областях, удаленных от стенки на расстояния значительно большие, нежели те, для которых оно должно быть строго справедливо, т. е. в областях, где предположение о постоянстве касательного напряжения, несомненно, уже неприменимо. Отклонения, наблюдающиеся даже на очень больших расстояниях от стенки, все же довольно малы, и поэтому в практических случаях обычно считают, что логарифмическое распределение скорости справедливо для всего пограничного слоя, за исключением переходной области.

При логарифмическом распределении скорости (7.32а) соотношение (7.37), определяющее сопротивление стенки, принимает вид

$$\frac{U_0}{u^*} = A\ln\left(\delta^+\right) + B. \qquad (7.47)$$

Сопротивление стенки обычно выражают через коэффициент трения $c_f$, определяемый формулой

$$\sigma_w = c_f \frac{1}{2}\rho U_0^2. \qquad (7.48)$$

Между $c_f$ и $u^*/U_0$ существует следующая связь:

$$c_f = 2\left(\frac{u^*}{U_0}\right)^2. \qquad (7.49)$$

Поскольку

$$\delta^+ = \frac{u^*}{U_0}\frac{U_0\delta}{\nu} = \frac{u^*}{U_0}\mathrm{Re}_\delta,$$

то из соотношений (7.49) и (7.47) следует, что

$$\frac{c_f}{2}=\left[\frac{A}{2}\ln\left(\frac{c_f}{2}\right)+A\ln \mathrm{Re}_\delta+B\right]^{-2}. \tag{7.50}$$

В случае пограничного слоя на шероховатой стенке соотношения, соответствующие (7.47) и (7.50), выражаются соответственно формулами

$$\frac{U_0}{u^*}=A\ln\left(\frac{\delta}{k}\right)+B_1 \tag{7.51}$$

и

$$\frac{c_f}{2}=\left[A\ln\left(\frac{\delta}{k}+B_1\right)\right]^{-2}. \tag{7.52}$$

Численную постоянную $A_1$, содержащуюся в соотношении (7.39), положим теперь равной $A$, так как, согласно закону избыточной скорости, величина $(U_0-\overline{U}_1)/u^*$ не должна зависеть от свойств стенки. Далее, можно получить выражения для среднего значения осредненной скорости в поперечном сечении пограничного слоя $\overline{U}_{1,\,\mathrm{ср}}$, толщины вытеснения $\delta_d$, толщины потери импульса $\delta_m$ и формпараметра $H$. Они записываются так:

а) для гладкой стенки

$$\frac{\overline{U}_{1,\,\mathrm{ср}}}{u^*}=A\ln\delta^+ +B-A=\frac{U_0}{u^*}-A; \tag{7.53а}$$

б) для шероховатой стенки

$$\frac{\overline{U}_{1,\,\mathrm{ср}}}{u^*}=A\ln\frac{\delta}{k}+B_1-A=\frac{U_0}{u^*}-A. \tag{7.53б}$$

Отсюда следует, что для гладкой стенки, как и для шероховатой,

$$\frac{\overline{U}_{1,\,\mathrm{ср}}}{U_0}=1-A\frac{u^*}{U_0}=1-A\sqrt{\frac{c_f}{2}}. \tag{7.54}$$

Еще одно следствие закона избыточной скорости состоит в том, что выражения для толщины вытеснения и толщины потери импульса одинаковы для гладкой и шероховатой стенок:

$$\frac{\delta_d}{\delta}=\int_0^1\left(1-\frac{\overline{U}_1}{U_0}\right)d\xi_2=A\frac{u^*}{U_0}, \tag{7.55}$$

$$\frac{\delta_m}{\delta}=\int_0^1\frac{\overline{U}_1}{U_0}\left(1-\frac{\overline{U}_1}{U_0}\right)d\xi_2=A\frac{u^*}{U_0}\left(1-2A\frac{u^*}{U_0}\right)=\frac{\delta_d}{\delta}\left(1-2\frac{\delta_d}{\delta}\right). \tag{7.56}$$

Формпараметр $H$ принимает вид

$$H=\frac{\delta_d}{\delta_m}=\left(1-2A\frac{u^*}{U_0}\right)^{-1}=\left(1-2\frac{\delta_d}{\delta}\right)^{-1}. \qquad (7.57)$$

В случае гладкой стенки отношение $\frac{u^*}{U_0}$ зависит от $\mathrm{Re}_\delta$, а в случае шероховатой стенки — от $\frac{\delta}{k}$. Следовательно, величины $\delta_d/\delta$, $\delta_m/\delta$ и $H$ для гладкой и шероховатой стенок являются функциями соответственно $\mathrm{Re}_\delta$ и $\delta/k$.

Согласно соотношению (7.56), динамическую скорость $u^*/U_0$ можно выразить через $\delta_m/\delta$. Тогда при помощи уравнений (7.10а) и (7.47) можно получить дифференциальное уравнение для $\delta$, которое могло бы дать решение для $\delta$ как функции $x_1$. Однако решения в замкнутой форме получить не удается, иными словами, логарифмическое распределение скорости не приводит к простой связи между $\delta$ и $x_1$.

Однако такую простую связь удается установить, если воспользоваться старым предположением относительно распределения скорости, а именно, что оно может быть представлено простым степенным законом (см., например, [14], стр. 404):

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*}=C\left(\frac{u^*x_2}{\nu}\right)^{1/n}=C\,(\delta^+\xi_2)^{1/n}. \qquad (7.58)$$

При этом показатель степени $1/n$ может, однако, зависеть от числа Рейнольдса. Логарифмическое распределение скорости можно, по-видимому, аппроксимировать подобным степенным законом на большей части поперечного сечения пограничного слоя. Однако распределение скорости вида (7.58) не позволяет получить закон избыточной скорости, который был бы независим от условий на стенке.

Из уравнения (7.58) имеем

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0}=\xi_2^{1/n} \qquad (7.59)$$

и

$$\frac{\bar{U}_{1,\,\mathrm{ср}}}{U_0}=\frac{n}{n+1}. \qquad (7.60)$$

Кроме того,

$$\frac{U_0}{u^*}=C_1\,\mathrm{Re}_\delta^{1/(n+1)},$$

так что соотношение для коэффициента трения о стенку принимает вид

$$\frac{c_f}{2}=C_1^{-2}\,\mathrm{Re}_\delta^{-2/(n+1)}. \qquad (7.61)$$

Для толщины вытеснения $\delta_d$ и толщины потери импульса $\delta_m$ получаем следующие формулы:

$$\frac{\delta_d}{\delta} = \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \frac{\delta_m}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \tag{7.62}$$

откуда

$$H = \frac{\delta_d}{\delta_m} = \frac{n+2}{n}.$$

Увеличение $\delta_d$ и $\delta_m$ при возрастании $x_1$ можно вычислить из уравнения (7.10а):

$$\frac{d\delta_m}{dx_1} = C_1^{-2}\mathrm{Re}_\delta^{-2/(n+1)} = C_1^{-2}\left[\frac{n}{(n+1)(n+2)}\right]^{2/(n+1)}\left(\frac{U_0\delta_m}{\nu}\right)^{-2/(n+1)}.$$

Однако величина $n$ в этом уравнении зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, от $x_1$. Но эта зависимость оказывается настолько слабой, что уравнение можно проинтегрировать, как если бы величина $n$ была постоянной. В результате интегрирования получаем

$$\left(\frac{U_0\delta_m}{\nu}\right)^{(n+3)/(n+1)} = \left(\frac{U_0\delta_{m0}}{\nu}\right)^{(n+3)/(n+1)} + C_2\frac{U_0}{\nu}(x_1 - x_{10}), \tag{7.63}$$

где

$$C_2 = C_1^{-2}\frac{n+3}{n+1}\left[\frac{n}{(n+1)(n+3)}\right]^{2/(n+1)}.$$

Если $\delta_{m0} = 0$ при $x_{10} = 0$, то уравнение (7.63) можно записать следующим образом:

$$\frac{U_0\delta_m}{\nu} = \left(C_2\frac{U_0}{\nu}x_1\right)^{(n+1)/(n+3)}. \tag{7.63а}$$

Точно такие же выражения, но с другими значениями постоянной $C_2$ получаются для $\delta$ и $\delta_d$.

## § 7.5. Экспериментальные данные о распределении осредненной скорости

В ходе многолетних исследований было собрано очень много данных о распределении осредненной скорости в турбулентном пограничном слое. Для пограничного слоя на гладкой пластине при отсутствии градиента давления имеются экспериментальные данные, полученные Людвигом и Тилманом [15], Шубауэром и Клебановым [16], Клебановым и Дилем [17], Шульц-Груновым [18], Алленом и Катлендом [19] и Хама [20]. За исключением Людвига и Тилмана, которые в своих опытах сумели осуществить измерения настолько близко от стенки, что получили данные для переходной области, все

остальные экспериментаторы производили измерения лишь в полностью турбулентной области пограничного слоя.

Результаты измерений, проведенных Людвигом и Тилманом, Клебановым и Дилем, а также Шульц-Груновым и относящихся к расположенной вблизи стенки области «постоянного напряжения», показаны на рис. 7.2. В полностью турбулентной области экспериментальные точки тесно группируются вблизи универсального логарифмического распределения скорости (7.32) или (7.32а), по

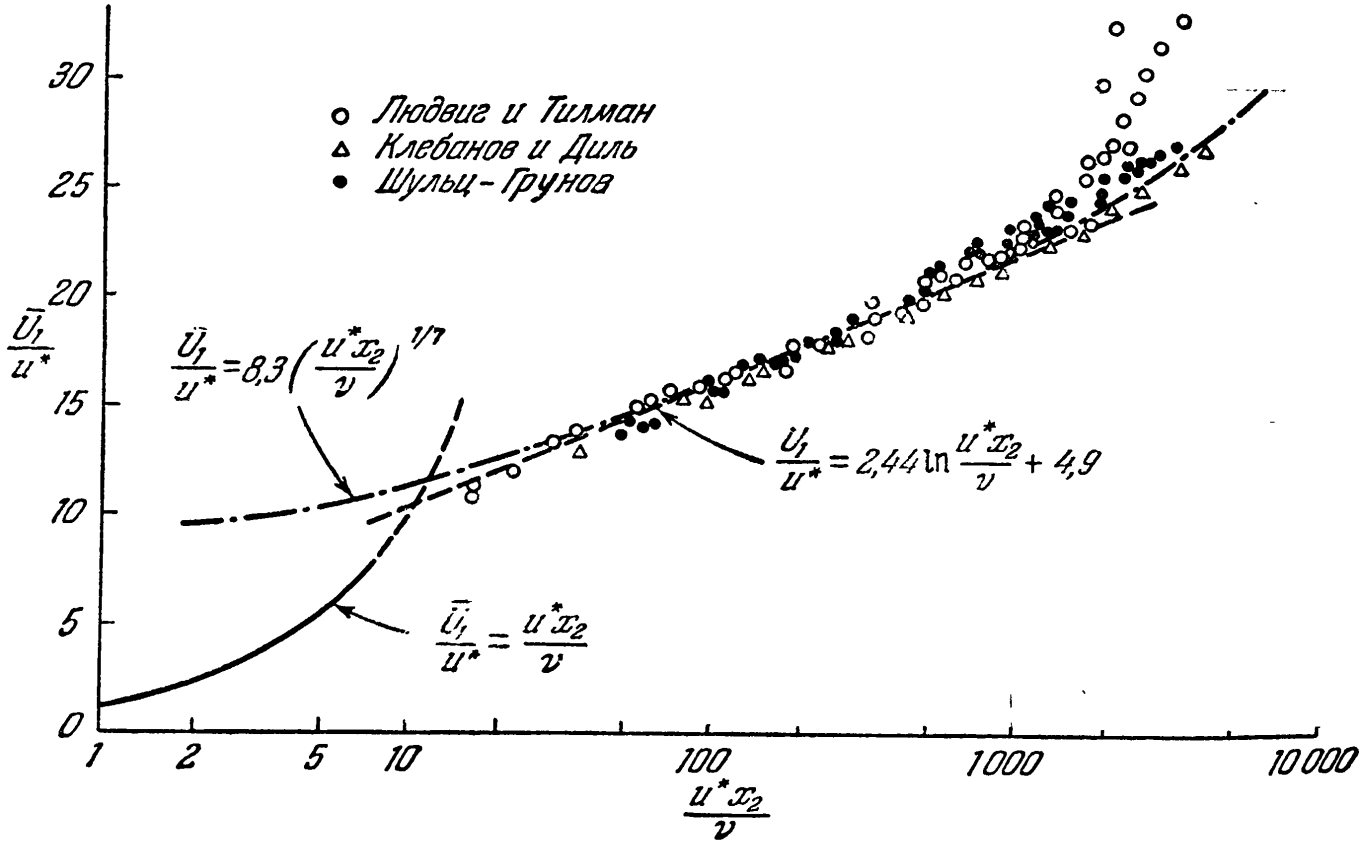



Рис. 7.2. Распределение осредненной скорости вблизи гладкой стенки.

крайней мере при не слишком больших значениях $u^*x_2/\nu$. Использованные при построении теоретического распределения скорости по уравнению (7.32а) значения постоянных $A$ и $B$ взяты по Клаузеру [21]; они представляют собой результат осреднения по экспериментальным данным различных исследователей. В этом случае уравнение (7.32а) имеет вид

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*}=2{,}44\ln\frac{u^*x_2}{\nu}+4{,}9. \tag{7.64}$$

Однако другие авторы отдают предпочтение другим значениям этих постоянных, которые лучше соответствуют их собственным экспериментальным данным. В этом и состоит причина заметного разброса значений $A$ и $B$. Согласно Таунсенду [31], многие из результатов наблюдений указывают на то, что значение $B$, по-видимому, ближе к 7, нежели к 4,9. Мнения о величине постоянной $A$

или «универсальной» постоянной $\varkappa$ в уравнении (7.32) менее разноречивы. В более ранних исследованиях обычно принималось значение $A = 2{,}5$ или $\varkappa = 0{,}4$, полученное на основании опытов Никурадзе [6] для течения в трубе.

Величина $B$, по-видимому, связана с толщиной вязкого подслоя. Это становится особенно очевидным в свете теории Ротта распределения скорости вблизи стенки. При больших значениях $u^* x_2/\nu$ формула (7.41) упрощается:

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + \frac{1}{\varkappa} (\ln 4\varkappa - 1) + \frac{u^* \delta_l}{\nu}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что постоянная $B$ в идентичном уравнении (7.32а) должна записываться как

$$B = \frac{1}{\varkappa} (\ln 4\varkappa - 1) + \frac{u^* \delta_l}{\nu}.$$

Ротта на основании опытных данных Никурадзе принял значения $\varkappa = 0{,}4$ и $u^* \delta_l/\nu = 6{,}7$; тогда $B = 5{,}37$. Но в то же время сам Никурадзе для характеристики средней толщины вязкого подслоя предложил значение $u^* \delta_l/\nu = 5$. В этом случае, опять-таки при $\varkappa = 0{,}4$, получается $B = 3{,}68$. При $\varkappa = 0{,}41$ и предложенном Клаузером значении $B = 4{,}9$ соответствующая величина $u^* \delta_l/\nu$, согласно теории Ротта, составляет 6,2.

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 7.2, соответствуют различным значениям числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\delta$. По-видимому, никакого иного влияния числа Рейнольдса, кроме его воздействия на $u^*$, не проявляется, как это и должно быть согласно представлениям, на основании которых получено логарифмическое распределение скорости.

На рис. 7.3 показано распределение скорости в вязком подслое и в прилегающей к нему переходной области. Поскольку каких-либо опытных данных для пограничного слоя на плоской пластине в этом случае не имеется, то вместо них здесь приводятся данные для течения в гладком двумерном канале и в гладкой круглой трубе, полученные соответственно Рейхардтом [12] и Лауфером [41]. Согласно современным представлениям, при этом не должно наблюдаться никакого отличия.

Рассмотрение этого рисунка позволяет сделать вывод о том, что ввиду разброса экспериментальных точек можно принять любое значение $u^* \delta_l/\nu$ из диапазона от 5 до 6,7. Этот же вывод, по-видимому, справедлив и в отношении теоретических кривых, предложенных Рейхардтом, Ротта и Дайслером, ибо ни одна из этих кривых не имеет большого расхождения с экспериментальными данными. Насколько можно судить, кривая Дайслера несколько лучше

согласуется с данными Рейхардта, а кривая Рейхардта — с данными Лауфера.

Толщина переходной области обычно принимается равной $u^*\delta_t/\nu \approx 30$; следовательно, при $u^*x_2/\nu > 30$ течение считается полностью турбулентным.

Как показывает рис. 7.2, за пределами значений $u^*x_2/\nu$ от 500 до 1000 экспериментальные данные начинают отклоняться от логарифмического распределения скорости; действительные значения

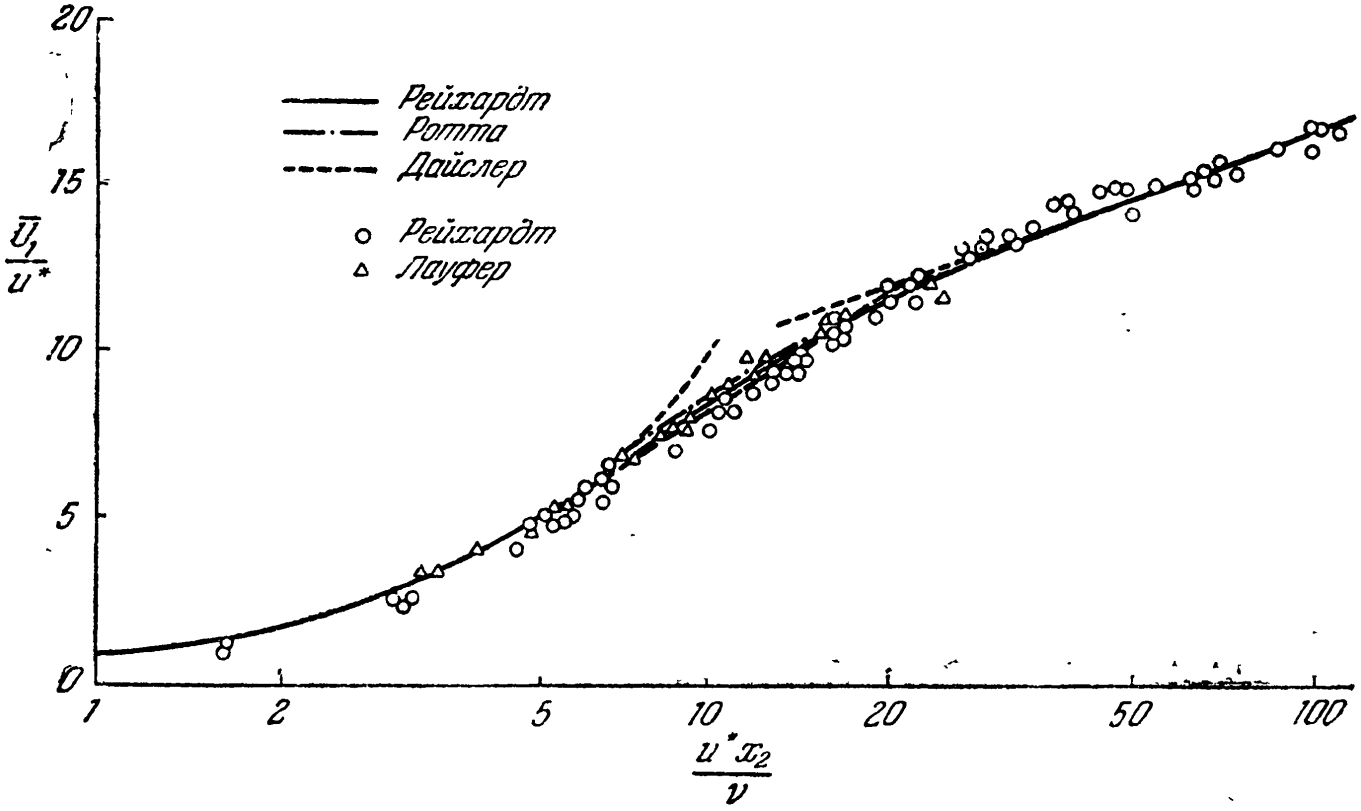



Рис. 7.3. Сравнение теоретических распределений скорости в переходной области турбулентного пограничного слоя с экспериментальными данными Рейхардта [12] для течения в канале и Лауфера [41] для течения в трубе.

скорости становятся здесь выше, чем они должны быть по логарифмическому распределению скорости. На том же рисунке нанесена также кривая, соответствующая простому степенному закону (7.58), а именно:

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = 8{,}3\left(\frac{u^*x_2}{\nu}\right)^{1/7}. \tag{7.65}$$

Значение $C = 8{,}3$ получается в том случае, если совместить распределение скорости, соответствующее степенному закону, с логарифмическим распределением скорости в диапазоне значений $u^*x_2/\nu$ от 100 до 1000, частично перекрывающем различные области течения. Величина $n = 7$ получается в случае закона сопротивления Блазиуса для течения вдоль гладкой пластины [см. уравнение (7.61)]:

$$c_f \sim \left(\frac{U_0\delta}{\nu}\right)^{-1/4}.$$

Из анализа рис. 7.2 можно заключить, что выписанный выше степенной закон распределения скорости не только дает такие же удовлетворительные результаты в диапазоне изменения $u^*x_2/\nu$ от 100 до 1000, но в области, где $u^*x_2/\nu > 1000$, приводит даже к несколько лучшему соответствию с опытными данными. В указанной области степенной закон, как видим, дает результаты, весьма близкие к опытным данным Клебанова и Диля.

Встречающиеся в литературе значения постоянных $C$ и $n$ в уравнении (7.58) опять-таки значительно отличаются друг от друга. Приняв, что закон сопротивления Блазиуса для гладких труб справедлив и для течения вдоль гладкой пластины, Шлихтинг [14] получил значение $C = 8{,}74$; Клебанов и Диль рекомендуют величину $C = 8{,}16$. Постоянные $C$ и $n$ должны зависеть от числа Рейнольдса. Закон сопротивления Блазиуса лишь в первом приближении не зависит от числа Рейнольдса, и то лишь в определенном диапазоне его изменения. Согласно Вигхардту [22], при возрастании числа Рейнольдса происходит существенное увеличение значений $C$ и $n$. Однако для небольших величин $u^*x_2/\nu$ Вигхардт рекомендует одно и то же значение $n = 7{,}7$ для течения вдоль плоской пластины с положительным, отрицательным и нулевым градиентами давления. Клаузер [21] пришел к выводу, что для $C$ и $n$ нельзя предложить универсальных значений, так как для различных распределений скорости, рассмотренных им, величина $n$, например, может изменяться от 3 до 10.

При больших значениях $u^*x_2/\nu$ логарифмическое распределение скорости отклоняется от действительного; во внешней области пограничного слоя оно, по-видимому, уже несправедливо. Для этой области, вероятно, целесообразнее ввести в рассмотрение избыточную скорость $(U_0 - \overline{U}_1)/u^*$, а не отношение $\overline{U}_1/u^*$. Для промежуточной области, где справедливо логарифмическое распределение скорости, из соотношения (7.32а) также имеем

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = -A \ln \frac{x_2}{\delta}. \tag{7.66}$$

Но поскольку величина $U_0/u^*$, полученная из уравнения (7.32а), при $x_2 = \delta$ не равна действительному значению $U_0/u^*$, то и нельзя ожидать хорошего согласия логарифмического распределения скорости с экспериментальным, если в уравнение (7.66) подставить действительные значения $U_0/u^*$. Чтобы учесть различие между действительной величиной $U_0/u^*$ и величиной, соответствующей уравнению (7.66), надо дополнить это уравнение некоторым поправочным членом. Таким образом, вместо уравнения (7.66) следует записать

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = -A \ln \frac{x_2}{\delta} + B^*. \tag{7.66а}$$

На рис. 7.4 в полулогарифмическом масштабе показаны универсальные распределения скорости, которые были получены Клаузером [21] по данным Клебанова и Диля, Шульц-Грунова, Хама и других авторов как для гладких, так и для шероховатых пластин.

При $x_2/\delta < 0{,}15$ экспериментальные значения тесно группируются (область, занимаемая опытными точками, представлена штриховой полосой) около кривой, представляющей логарифмическое распределение вида

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = -2{,}44 \ln \frac{x_2}{\delta} + 2{,}5. \tag{7.67}$$

Значение $x_2/\delta \approx 0{,}15$, выше которого это логарифмическое распределение скорости отклоняется от действительного, соответствует

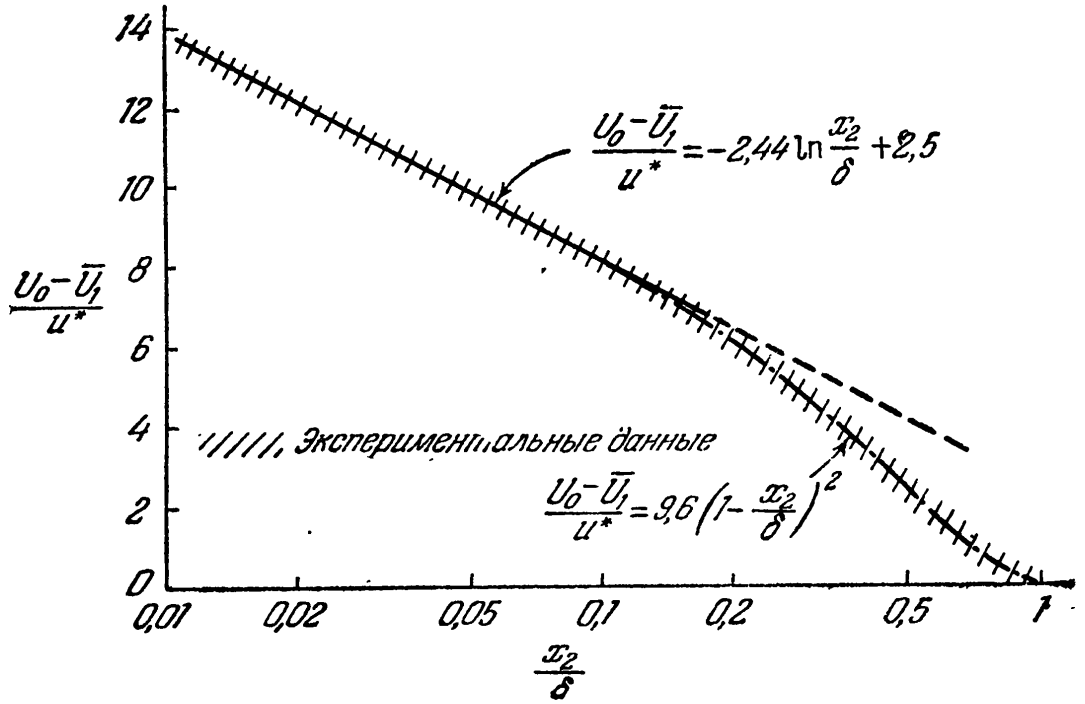



Рис. 7.4. Распределение скорости во внешней части турбулентного пограничного слоя в полулогарифмическом масштабе [21].

приближенному значению $u^* x_2/\nu = 750$ (см. рис. 7.2). Эта величина $x_2/\delta$, по-видимому, характеризует в первом приближении границу между пристеночной и внешней областями.

Хама [20] предложил следующую простую эмпирическую формулу для распределения осредненной скорости в диапазоне $x_2/\delta > 0{,}15$:

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = 9{,}6 \left(1 - \frac{x_2}{\delta}\right)^2. \tag{7.68}$$

Это распределение скорости тоже показано на рис. 7.4, из рассмотрения которого можно сделать вывод, что в этом случае действительно получается весьма удовлетворительное, во всяком случае для практических целей, соответствие с экспериментальными данными.

Если к распределению избыточной скорости мы теперь захотим применить степенной закон (7.59), то следует предварительно учесть влияние числа Рейнольдса на величину показателя степени $n$, которое проявляется в других соотношениях через динамическую скорость $u^*$. На рис. 7.2 подобная кривая показана для $n = 7$; как видим, она удовлетворительно согласуется с опытными данными Клебанова и Диля. Эти данные относятся к числу Рейнольдса $\mathrm{Re}_\delta = 152\,000$, которое приблизительно соответствует $\mathrm{Re}_{x_1} = 10^7$.

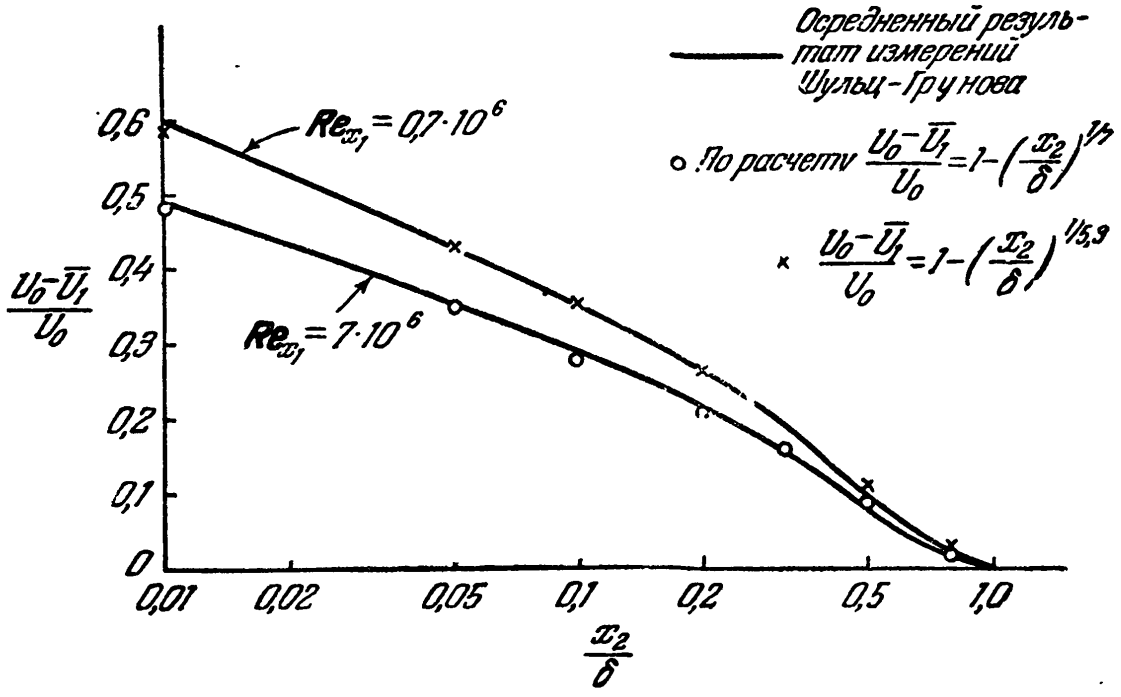



Рис. 7.5. Сравнение распределения скорости, соответствующего степенному закону, с результатами опытов Шульц-Грунова [18].

На рис. 7.5 в полулогарифмическом масштабе представлены кривые, аналогичные изображенным на рис. 7.4 и построенные по экспериментальным данным Шульц-Грунова при $\mathrm{Re}_{x_1} = 0{,}7 \cdot 10^6$ и $\mathrm{Re}_{x_1} = 7 \cdot 10^6$. Совпадение с распределением скорости по степенному закону при $n = 7$ наблюдается только в случае данных, соответствующих $\mathrm{Re}_{x_1} = 7 \cdot 10^6$; для данных, соответствующих $\mathrm{Re}_{x_1} = 0{,}7 \cdot 10^6$, необходимо брать величину $n = 5{,}3$. Этот результат наглядно демонстрирует влияние числа Рейнольдса на величину показателя степени $n$. В самом деле, любое влияние, оказываемое на $u^*/U_0$, должно проявляться в изменении показателя $n$; поэтому в действительности распределение скорости по степенному закону нельзя рассматривать как универсальное.

С другой стороны, поскольку экспериментальные данные, представленные на рис. 7.4, относятся к различным значениям числа Рейнольдса, а также к гладкой и шероховатой стенкам, то относительная избыточная скорость $(U_0 - \overline{U}_1)/u^*$, очевидно, является

универсальной функцией от $\xi_2 = \frac{x_2}{\delta}$:

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = f(\xi_2). \tag{7.69}$$

Но отношение

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{U_0} = \frac{u^*}{U_0} f(\xi_2) \tag{7.70}$$

уже не представляет собой универсальной функции от $\xi_2$.

Тогда для толщины вытеснения $\delta_d$ и толщины потери импульса $\delta_m$ получим [ср. уравнения (7.55)—(7.57)]

$$\frac{\delta_d}{\delta} = \frac{u^*}{U_0} \int_0^1 f(\xi_2)\, d\xi_2 = I_1 \frac{u^*}{U_0} \tag{7.71}$$

и

$$\frac{\delta_m}{\delta} = \frac{u^*}{U_0} \int_0^1 f(\xi_2) \left[1 - \frac{u^*}{U_0} f(\xi_2)\right] d\xi_2 = I_1 \frac{u^*}{U_0} - I_2 \frac{u^{*2}}{U_0^2}. \tag{7.72}$$

Отсюда следует, что выражение

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{U_0} \frac{\delta}{\delta_d} = \frac{1}{I_1} f(\xi_2) \tag{7.73}$$

должно быть универсальной функцией $\xi_2$, в то время как формпараметр

$$H = \frac{\delta_d}{\delta_m} = \left(1 - \frac{u^*}{U_0} \frac{I_2}{I_1}\right)^{-1} \tag{7.74}$$

зависит еще и от условий на стенке. В связи с тем, что величины $I_1$ и $I_2$ представляют собой универсальные постоянные, их отношение $I_2/I_1$ также является универсальной постоянной для течений без градиента давления.

Гёталс [23] определил функцию $(1 - \overline{U}_1/U_0)(\delta/\delta_d)$ для потоков различного типа, включая течения с положительным и отрицательным градиентами давления. Отличия между функциями, соответствующими различным типам течения, лежат в пределах разброса экспериментальных точек, относящихся к каждому из этих типов течения.

Хама [20] построил кривую зависимости формпараметра $H$ от $u^*/U_0$, использовав при этом данные для гладкой и шероховатой пластин. Эта кривая изображена на рис. 7.6; при построении этой кривой величина $I_2/I_1$ принималась равной 6,1.

Можно заметить, что если пользоваться логарифмическим распределением скорости вида (7.66), то получается $I_2/I_1 = 2A = 4{,}88$

[ср. с уравнением (7.57)], а если использовать логарифмическое распределение скорости вида (7.66а), то

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2A^2 + 2AB^* + B^*}{A + B^*} = 5{,}4.$$

Выше отмечалось, что при $x_2/\delta > 0{,}15$ логарифмическое распределение скорости (7.67) отклоняется от действительного. Для

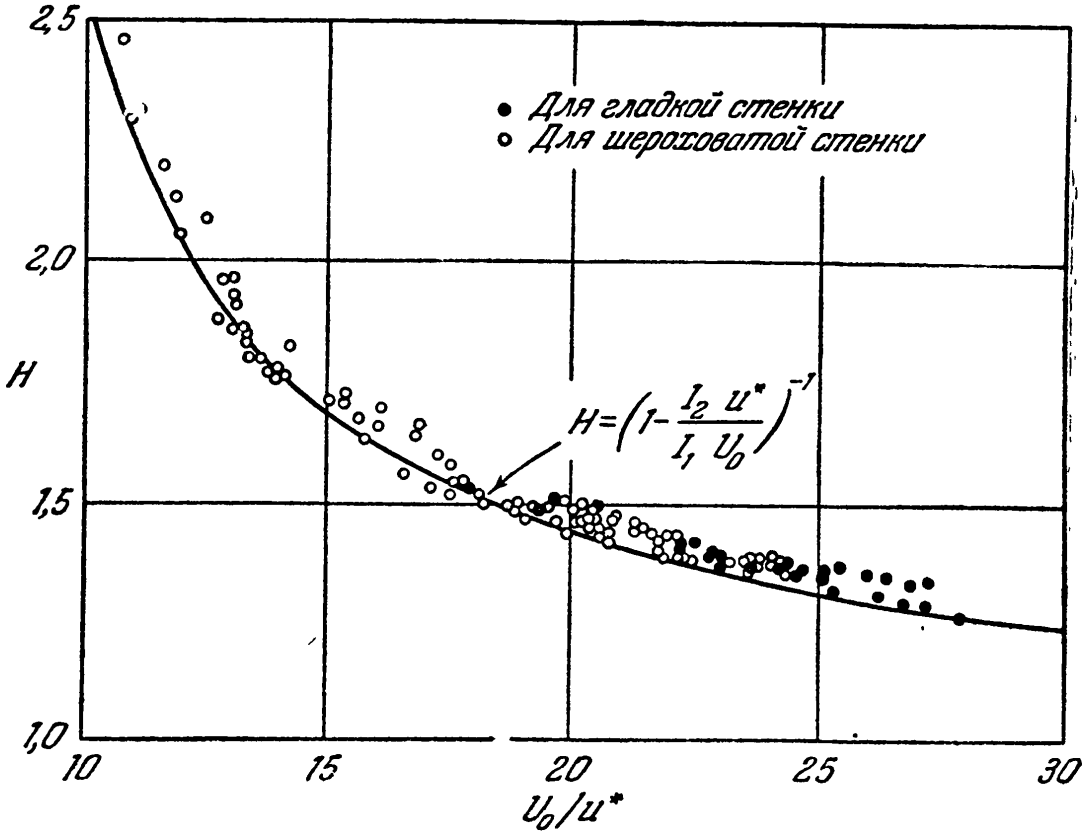



Рис. 7.6. Зависимость формпараметра $H$ от $u^*/U_0$. [Хама Ф. Р., Advances in Applied Mechanics 4, стр. 28, New York, 1956.]

исключения этого расхождения можно ввести поправочную функцию $h(\xi_2)$, такую, чтобы выражение

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = -A \ln \xi_2 + B^* + h(\xi_2) \qquad (7.75)$$

представляло собой действительное распределение скорости $f(\xi_2)$. Поправочная функция $h(\xi_2)$ изображена на рис. 7.7. Подобная поправочная функция была введена ранее Милликеном [7], однако с той разницей, что он применил ее к логарифмическому распределению скорости (7.32а) для гладкой стенки и к распределению (7.39) для шероховатой стенки. Таким образом, для случая гладкой стенки Милликен принял, что

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = A \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + B + h_1(\xi_2) \qquad (7.76)$$

и по экспериментальным данным Людвига и Тилмана, а также других исследователей получил функцию $h_1(\xi_2)$. Хотя использованные данные имеют значительный разброс, эта функция по форме оказалась подобной функции $h(\xi_2)$.

Выше уже было показано, что закон избыточной скорости выполняется как для гладкой, так и для шероховатой стенки. Влияние условий на стенке отражается лишь на величине $u^*$. Однако вблизи стенки распределение скорости непосредственно связано с видом и величиной шероховатости стенки. Помимо этого имеется еще неопределенность в оценке того значения $x_2$, при котором скорость $\overline{U}_1$

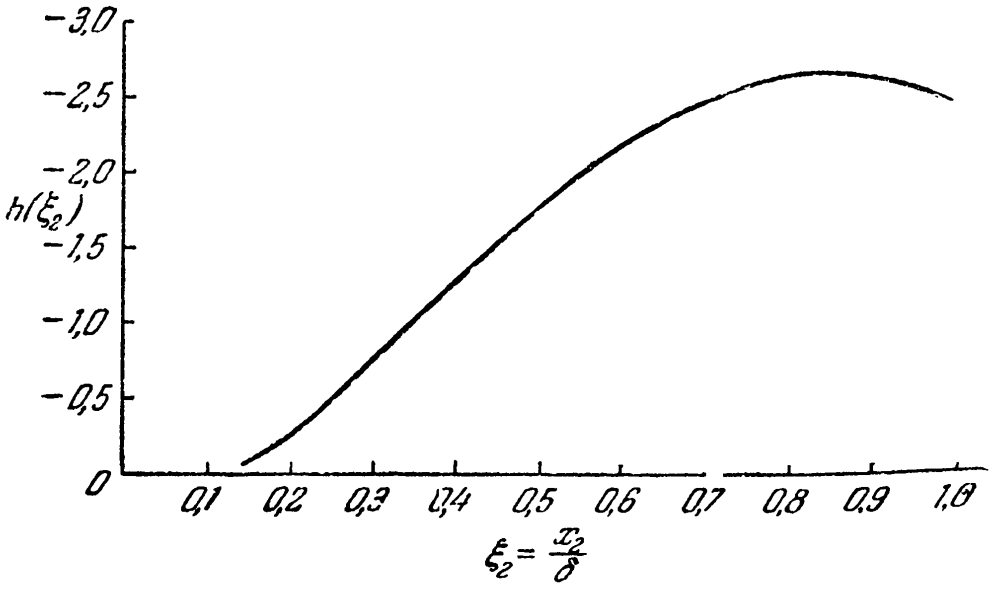



Рис. 7.7. Поправочная функция $h(\xi_2)$ для логарифмического распределения избыточной скорости.

в среднем вдоль стенки равна нулю. Хотя обычно и принято считать, что $\overline{U}_1 = 0$ при $x_2 = 0$, действительная точка, в которой $\overline{U}_1 = 0$, может находиться где-то между $x_2 = 0$ и $x_2 = k$, где $k$ — средняя высота элементов шероховатости. Коль скоро толщина вязкого подслоя $\delta_l \gg k$, отклонение от распределения скорости, справедливого для гладкой стенки, будет мало. Влияние элементов шероховатости, проявляющееся в уменьшении величины $\delta_l$ с ростом шероховатости $k$, обусловлено тем, что эта шероховатость создает возмущения в потоке, которые вызывают расширение переходной области в направлении меньших значений $x_2$.

Основываясь на опытах Никурадзе по исследованию течения в круглых трубах со стенками, имеющими равномерную песочную шероховатость, Ротта [11] нашел связь между $\delta_l$ и $k$, графически изображенную на рис. 7.8. Из рассмотрения этого рисунка можно сделать вывод, что при $u^*k/\nu < 5$ влияние шероховатости на $u^*\delta_l/\nu$ мало, а при $u^*k/\nu > 55$ достигаются условия вполне шероховатой стенки, при которых эффективный вязкий подслой отсутствует. Обе

эти величины, 5 и 55, относятся к опытам Никурадзе. При шероховатости иного типа они могут иметь значения, весьма отличные от этих. Но, во всяком случае, можно ожидать, что имеется определенное наименьшее значение $u^*k/\nu$, ниже которого стенка является как бы гидравлически гладкой и никакого отклонения от условий идеально гладкой стенки не наблюдается. Тогда выражение для распределения скорости (7.39), в котором можно положить $A_1 = A$, переходит в выражение (7.32а).

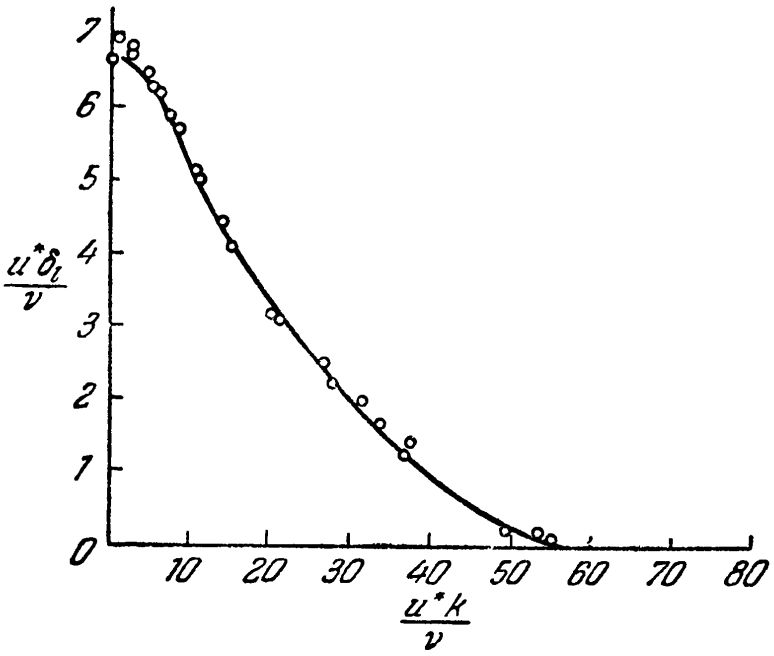



Рис. 7.8. Влияние шероховатости стенки на величину $\delta_l$ по опытам Никурадзе для случая равномерной песочной шероховатости [11].

Этот факт привел Хама [20] к мысли записать уравнение (7.39) в виде

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = A \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + B - \left( A \ln \frac{u^* k}{\nu} + B - B_1 \right).$$

Эта формула показывает, что влияние шероховатости стенки проявляется через вертикальное смещение распределения скорости для гладкой стенки на величину

$$\frac{\Delta \overline{U}_1}{u^*} = A \ln \frac{u^* k}{\nu} + B - B_1, \tag{7.77}$$

зависящую от типа и величины шероховатости. При больших значениях $u^*k/\nu$ первый член в правой части этого выражения приобретает определяющую роль, а величина $\Delta \overline{U}_1/u^*$ становится пропорциональной $\ln(u^*k/\nu)$ с коэффициентом пропорциональности, равным $A$. В этом случае достигается условие вполне шероховатой стенки.

Клаузер [21] и Хама [20] определили величину $\Delta \overline{U}_1/u^*$ для совершенно различных типов шероховатости; эти результаты представлены на рис. 7.9. Можно заметить, что упомянутые выше значения $u^*k/\nu = 5$ и 55 справедливы лишь для равномерной песочной шероховатости и что величина $\Delta \overline{U}_1/u^*$ ни в коем случае не является универсальной функцией $u^*k/\nu$. При больших значениях $u^*k/\nu$ угловой коэффициент прямых линий равен $A = 2{,}44$, однако значения разности $B - B_1$, содержащейся в выражении для $\Delta \overline{U}_1/u^*$, для различных типов шероховатости могут все же заметно отличаться. В области промежуточной шероховатости, где условия не соответствуют

ни гидравлически гладкой, ни вполне шероховатой стенке, ход кривых $\Delta\overline{U}_1/u^*$ в зависимости от характера шероховатости совершенно различен.

Отсюда следует, что в настоящее время попытки отыскать распределение скорости вблизи шероховатой стенки еще не вышли за рамки чистого эмпиризма и что до сих пор не имеется какого-либо

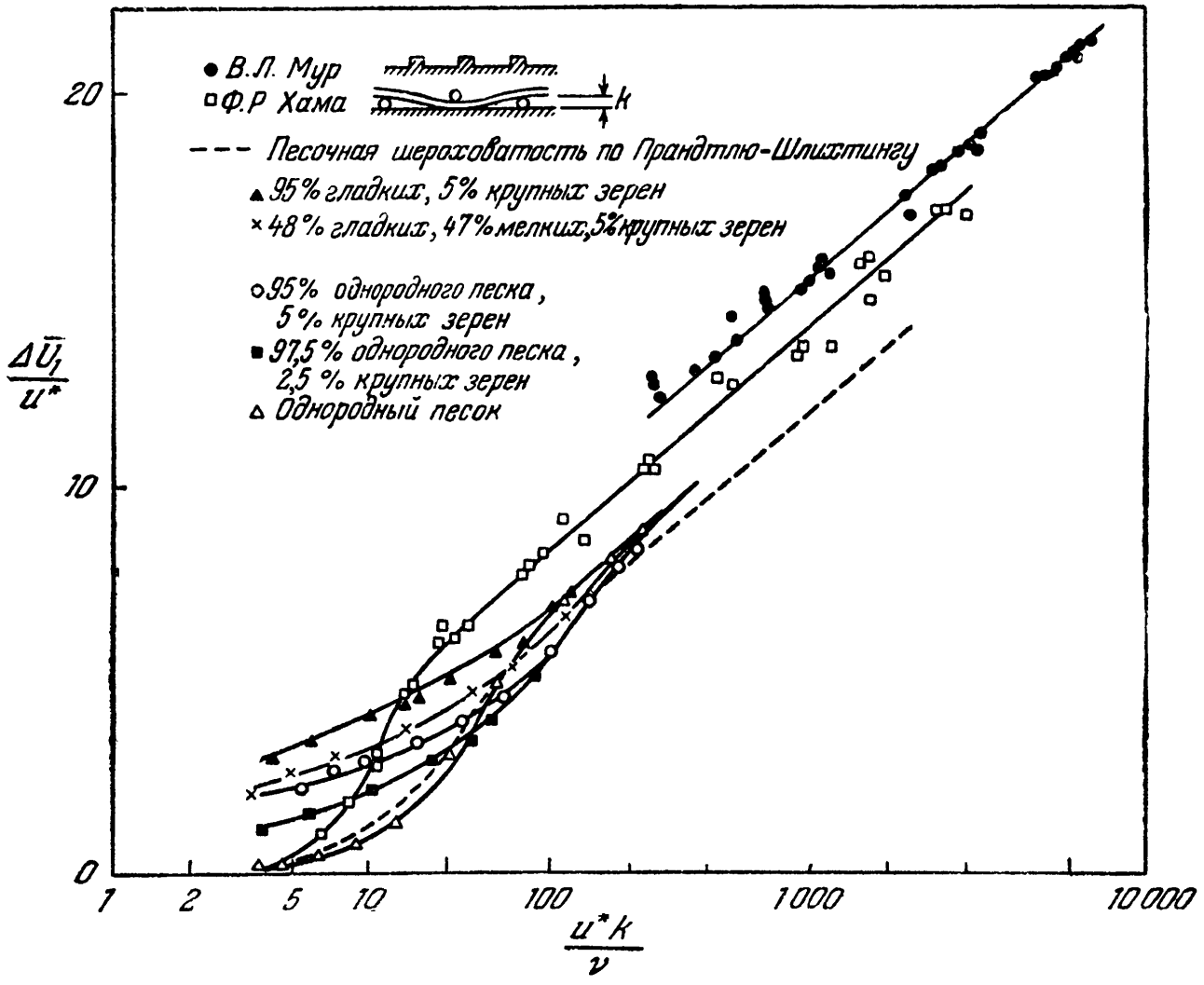



Рис. 7.9. Влияние шероховатости стенки на смещение $\Delta\overline{U}_1/u^*$ кривой распределения скорости [21].

способа расчета этого распределения для шероховатости произвольного типа; во всяком случае, описать влияние типа шероховатости с помощью единственного параметра шероховатости $k$ не представляется возможным.

В предыдущем параграфе было показано, что закон нарастания толщины пограничного слоя с увеличением $x_1$ можно получить, если известно отношение $u^*/U_0$ или величина $c_f$. Людвигу и Тилману [15] удалось, основываясь на точных измерениях местного напряжения сдвига на стенке $\sigma_w$ при обтекании гладкой пластины, получить сле-

дующее эмпирическое соотношение:

$$c_f = 0{,}246 \cdot 10^{-0{,}678H}\left(\frac{U_0\delta_m}{\nu}\right)^{-0{,}268}, \qquad (7.78)$$

справедливое в диапазоне $U_0\delta_m/\nu$ от $10^3$ до $10^4$.

В связи с тем, что формпараметр $H$ зависит от $u^*/U_0$, т. е. от $c_f$, это соотношение слишком сложно, чтоб его можно было использовать для расчета зависимости $\delta_m$ от $x_1$ в явном виде. Однако в рассматриваемом диапазоне изменения $U_0\delta_m/\nu$ формпараметр $H$ изменяется весьма мало и может быть аппроксимирован некоторой средней величиной. В качестве этой средней величины возьмем $H \approx 1{,}36$; тогда выражение для $c_f$ примет вид

$$c_f \approx 0{,}03\left(\frac{U_0\delta_m}{\nu}\right)^{-0{,}268}. \qquad (7.79)$$

Если для распределения скорости принимается степенной закон, то эта зависимость соответствует величине $n = 6{,}45$ [см. уравнение (7.61)].

При таком значении $n$ упрощенное соотношение (7.63а) записывается как

$$\frac{U_0\delta_m}{\nu} = 0{,}045\left(\frac{U_0x_1}{\nu}\right)^{0{,}79}. \qquad (7.80)$$

Следует особо подчеркнуть, что это соотношение выполняется, и то лишь приближенно, только в диапазоне изменения $U_0\delta_m/\nu$ от $10^3$ до $10^4$. Однако им можно пользоваться для оценки увеличения толщины пограничного слоя в направлении вниз по потоку. Поскольку величина $n$ зависит от числа Рейнольдса, то и постоянная $C_2$ и показатель степени при $U_0x_1/\nu$ в уравнении (7.63а) тоже при этом изменяются. При $n = 5$ этот показатель составляет 0,75, а при $n = 7$ он становится равным 0,80; отсюда следует, что влияние числа Рейнольдса на показатель степени при $U_0x_1/\nu$ оказывается очень слабым.

## § 7.6. Измерение характеристик турбулентности в пограничном слое

К настоящему времени опубликовано много результатов измерений интенсивности турбулентности в пограничном слое, однако экспериментальные данные о других характеристиках турбулентности, например турбулентном напряжении сдвига, пространственных корреляциях, турбулентной диссипации и т. п., намного беднее. Систематические измерения характеристик турбулентности были проведены совсем недавно Таунсендом, Шубауэром и его сотрудниками, а также Корсином и Кистлером, причем результаты этих измерений имеют значительно меньший разброс, нежели в более ранних работах.

В опытах Таунсенда измерения проводились в пограничном слое на стенке аэродинамической трубы с поперечным сечением $38 \times 38$ *см*$^2$; при этом пограничный слой немного утолщался и стабилизировался посредством расположенной на входе в рабочую часть вставки высотой 0,2 *см* и длиной в направлении вниз по потоку 5 *см*. Поверхность стенки покрывалась гладкой пленкой бакелита. Измерения производились на достаточном расстоянии от входа, чтобы обеспечить условия равновесия в пограничном слое. Скорость свободного потока $U_0$ составляла 1280 *см/сек*, а турбулентность в свободном потоке имела относительную интенсивность $u_1'/U_0 = 0{,}06\%$, причем во входном сечении $u_2'/U_0 = u_3'/U_0 = 0{,}15\%$. Число Рейнольдса пограничного слоя, отнесенное к толщине вытеснения $\delta_d$, изменялось от 3630 до 5080, будучи зависимым от расстояния до входного сечения.

Шубауэр и его сотрудники [16, 17, 27] провели большинство своих опытов по измерениям в пограничном слое на гладкой плоской алюминиевой пластине толщиной 0,6 *см* при симметричной и заостренной передней кромке, установленной в восьмиугольной рабочей части, расстояние между стенками которой составляло 136 *см*. Здесь пограничный слой тоже искусственно утолщался при помощи покрытия первых 60 *см* этой пластины наждачной бумагой. Интенсивность турбулентности свободного потока составляла примерно 0,03%. Наибольшая часть измерений осуществлялась в сечении, где пограничный слой имел толщину 7,5 *см*, при скорости свободного потока 1500 *см/сек*. Можно считать, что в этом сечении в пограничном слое достигались условия равновесия.

Подобно Таунсенду, Корсин и Кистлер [29] использовали в своих опытах одну из стенок аэродинамической трубы с рабочей частью $60 \times 60$ *см*$^2$, которой по всей длине была придана шероховатость при помощи гофрированной бумаги. Гофры, расположенные перпендикулярно к направлению потока, имели форму, близкую к синусоиде с длиной волны около 0,8 *см* и амплитудой 0,2 *см*. Скорость свободного потока составляла 1120 *см/сек*, а относительная интенсивность его турбулентности была около 0,06%. Течение в пограничном слое соответствовало условию «вполне шероховатой» стенки. В конце рабочей части толщина пограничного слоя составляла примерно 9 *см*.

На рис. 7.10 представлены три компоненты интенсивности турбулентности, отнесенной к скорости свободного потока, которые были получены в опытах Клебанова [27] с пограничным слоем на гладкой стенке. Можно заметить, что интенсивности этих трех компонент турбулентной пульсации скорости почти по всей внутренней части пограничного слоя значительно отличаются друг от друга. По направлению к стенке степень анизотропности возрастает. Интен-

сивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости имеет наибольшую величину, а интенсивность поперечной компоненты, перпендикулярной к стенке, — наименьшую. Осевая компонента достигает своего максимального значения в области, очень близкой к стенке, а именно в слое постоянного напряжения. Это следует из анализа рис. 7.11, на котором изображены результаты измерений Клебанова в этом слое.

На этом рисунке показана также интенсивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости, отнесенная к местной осредненной скорости. Эта относительная интенсивность достигает

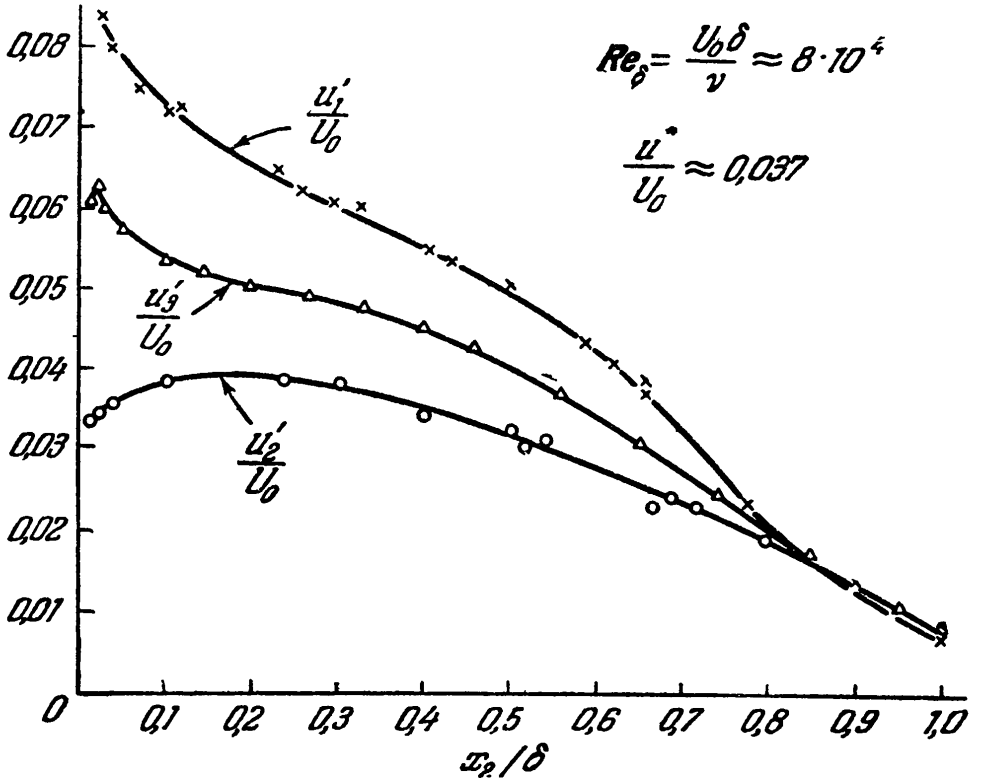



Рис. 7.10. Относительная интенсивность турбулентности в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [27].

в вязком подслое некоторой постоянной величины. Отсюда можно сделать вывод, что течение в этом слое, будучи вязким, по своему характеру все еще является турбулентно-пульсационным и что скорости изменяются пропорционально расстоянию от стенки.

Подобное распределение компонент интенсивности турбулентности в пограничном слое было получено Корсином и Кистлером [29] в случае шероховатой стенки. Однако эти измерения производились снаружи пристеночной области, т. е. вне слоя постоянного напряжения. Сравнение результатов этих измерений, которые изображены на рис. 7.12, с данными рис. 7.10 показывает, что компоненты относительной интенсивности турбулентности, измеренные Корсином и Кистлером, значительно больше тех, которые были получены в опытах Клебанова. Однако отношение относительных интенсивностей

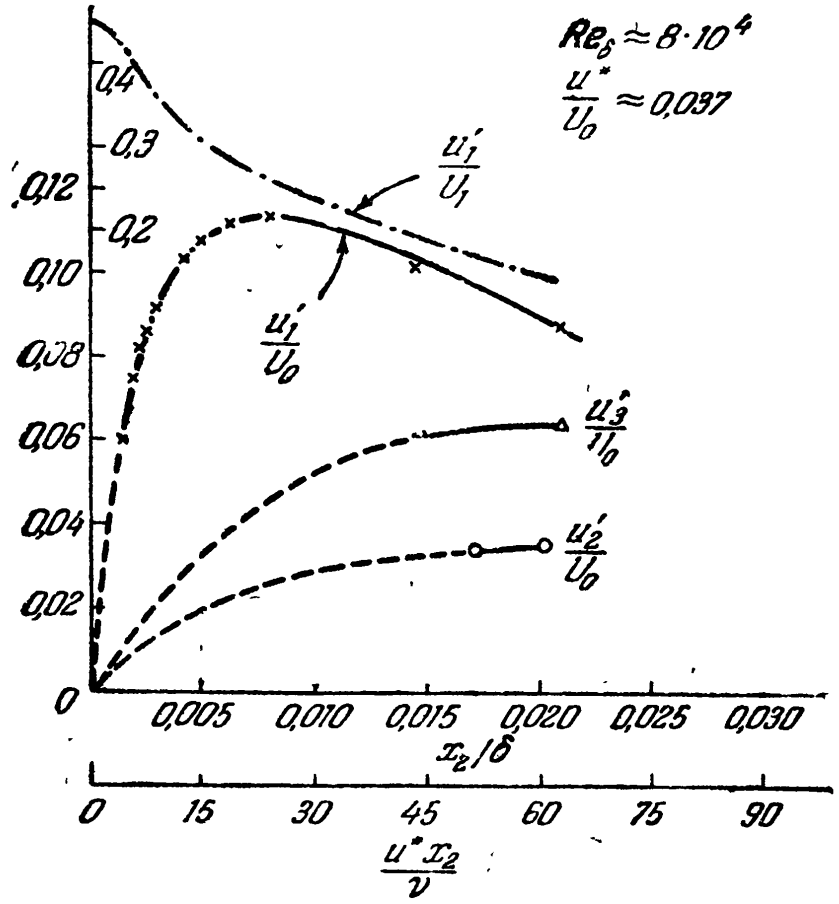



Рис. 7.11. Относительная интенсивность турбулентности в слое постоянного напряжения в пограничном слое на гладкой стенке [27].

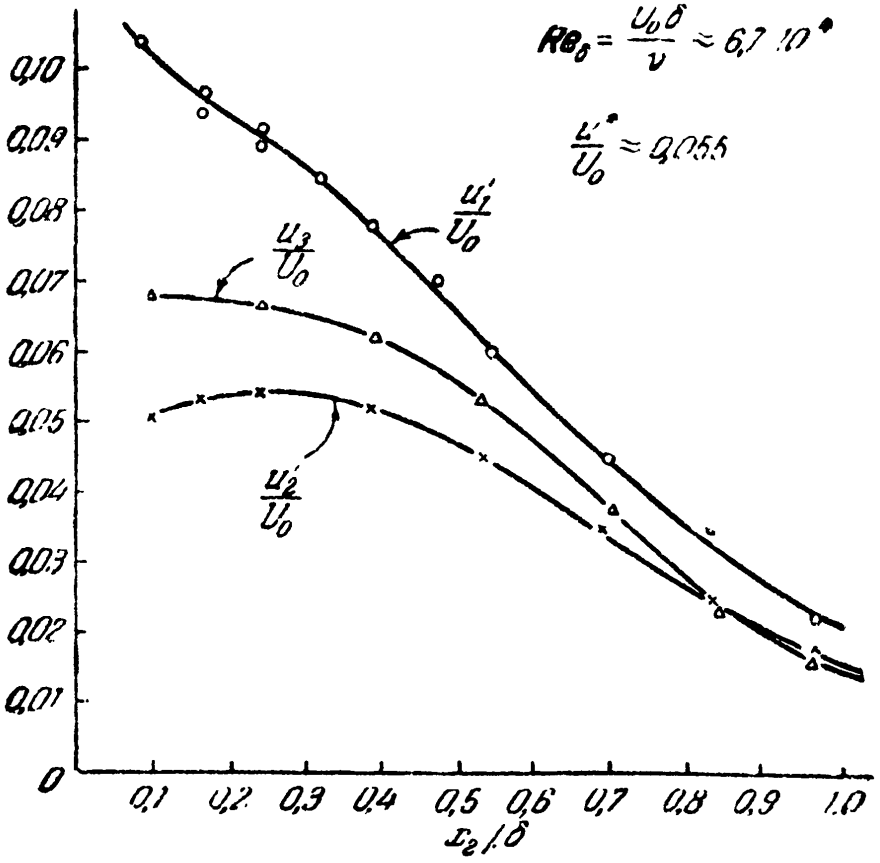



Рис. 7.12. Относительная интенсивность турбулентности в пограничном слое на шероховатой стенке при отсутствии градиента давления [29].

турбулентности для пограничного слоя на шероховатой и гладкой стенке примерно равно отношению соответствующих напряжений сдвига на стенке. Следовательно, если интенсивность турбулентности относить к соответствующему напряжению сдвига на стенке, то для пограничного слоя как на гладкой, так и на шероховатой стенке получаются практически одинаковые результаты.

По данным Клебанова о компонентах относительной интенсивности турбулентности было вычислено распределение кинетической энергии турбулентности $\overline{q^2}/U_0^2$ в пограничном слое. Результаты этих расчетов

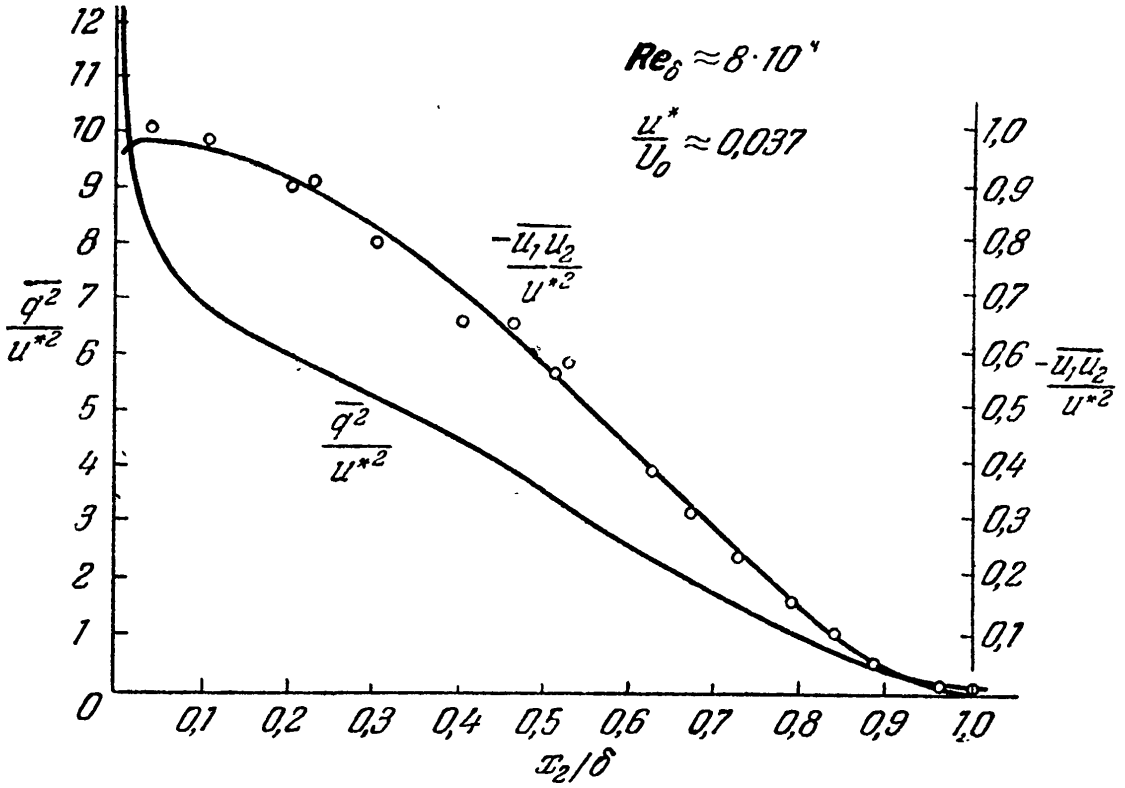



Рис. 7.13. Распределение кинетической энергии турбулентности и турбулентного напряжения сдвига в поперечном сечении пограничного слоя [27].

показаны на рис. 7.13 вместе с распределением турбулентного напряжения сдвига, непосредственно измеренного Клебановым [27]. Можно заметить, что в пристеночной области $x_2/\delta < 0{,}1$ напряжение сдвига практически постоянно (см. также рис. 7.14, на котором изображено распределение $-\overline{u_1 u_2}/u^{*2}$ в этой области). Значит, предположение о постоянстве напряжения сдвига в этой области, очевидно, оправдано.

Если рассматривать только область, не слишком близкую к стенке, то можно наблюдать подобие между распределением турбулентного напряжения сдвига и распределением кинетической энергии турбулентности. Полное подобие между этими распределениями, т. е. постоянство отношения этих величин, должно было бы наблюдаться

в том случае, когда была бы справедлива гипотеза подобия Кармана относительно структуры турбулентности. Распределение отношения $-\overline{u_1u_2}/\overline{q^2}$ дано на рис. 7.15; в большей части пограничного слоя оно почти постоянно.

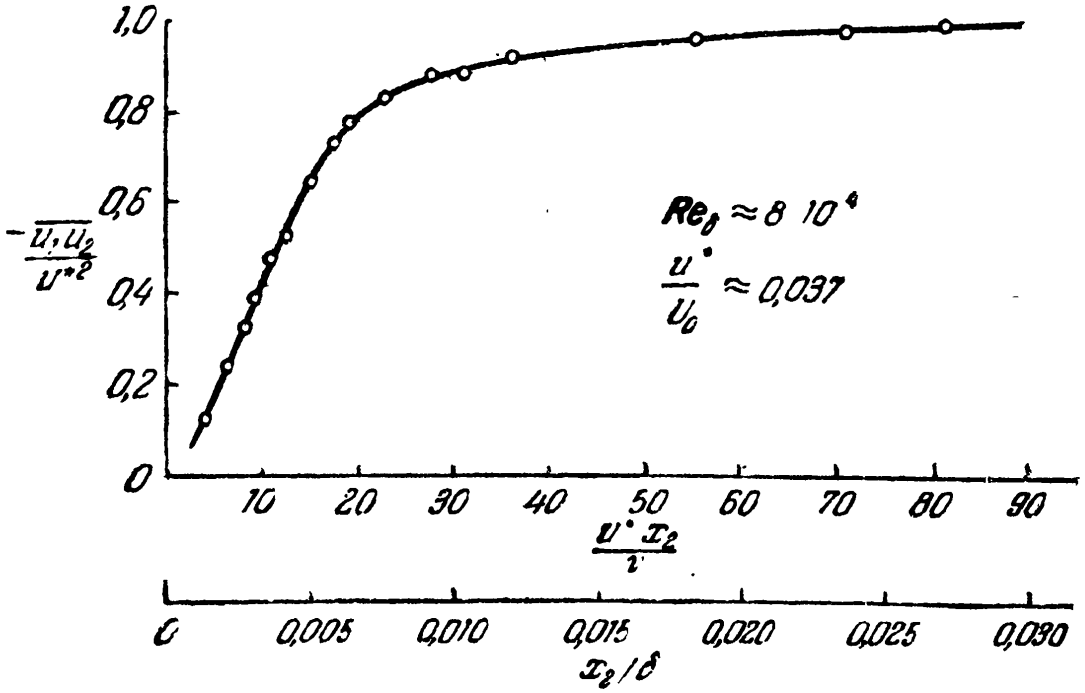



Рис. 7.14. Распределение турбулентного напряжения сдвига в пристеночной области пограничного слоя [30].

Некоторые из предположений Прандтля тоже приводят к результатам, согласующимся с изложенными выше. Если ввести коэффициент корреляции $R_{1,2} = \dfrac{\overline{u_1u_2}}{u_1'u_2'}$, то отношение $\dfrac{\overline{u_1u_2}}{\overline{q^2}}$ можно записать

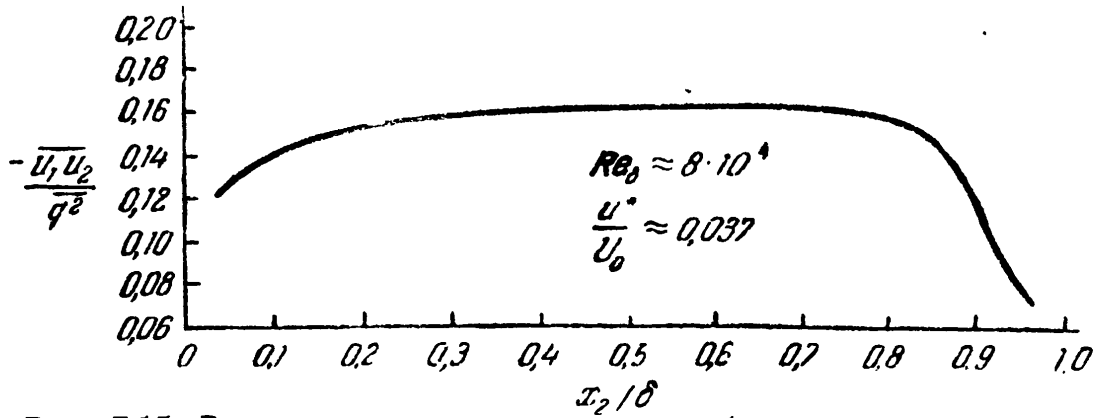



Рис. 7.15. Распределение отношения турбулентного напряжения сдвига к кинетической энергии турбулентности в поперечном сечении пограничного слоя.

так: $R_{1,2}u_1'u_2'/\overline{q^2}$. Поскольку Прандтль принимал $R_{1,2} = \text{const}$, а $u_1' \sim u_2' \sim q' \sim l_m \partial\overline{U}_1/\partial x_2$, то отношение $\overline{u_1u_2}/\overline{q^2}$ должно быть постоянно. Однако обратный вывод о том, что из постоянства этого

отношения должна следовать справедливость предположения Прандтля, является неверным. Например, кривые распределения компонент относительной интенсивности турбулентности, приведенные на рис. 7.10 и рис. 7.12, показывают, что отношение $u_1'/u_2'$, в противоположность предположению Прандтля, не сохраняет в пограничном слое постоянного значения.

Распределение коэффициента вихревой вязкости $\epsilon_m$ может быть получено из распределений турбулентного напряжения сдвига и осредненной скорости из отношения

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{U_0^2} = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 \delta} \frac{\partial \bar{U}_1/U_0}{\partial \xi_2}$$

или

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{u^* \delta} \frac{\partial \bar{U}_1/u^*}{\partial \xi_2}. \tag{7.81}$$

На рис. 7.16 приводится распределение величины $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$, вычисленное по данным Шубауэра [30] для слоя постоянного напряжения. Как видим, ход этого распределения вблизи стенки указывает

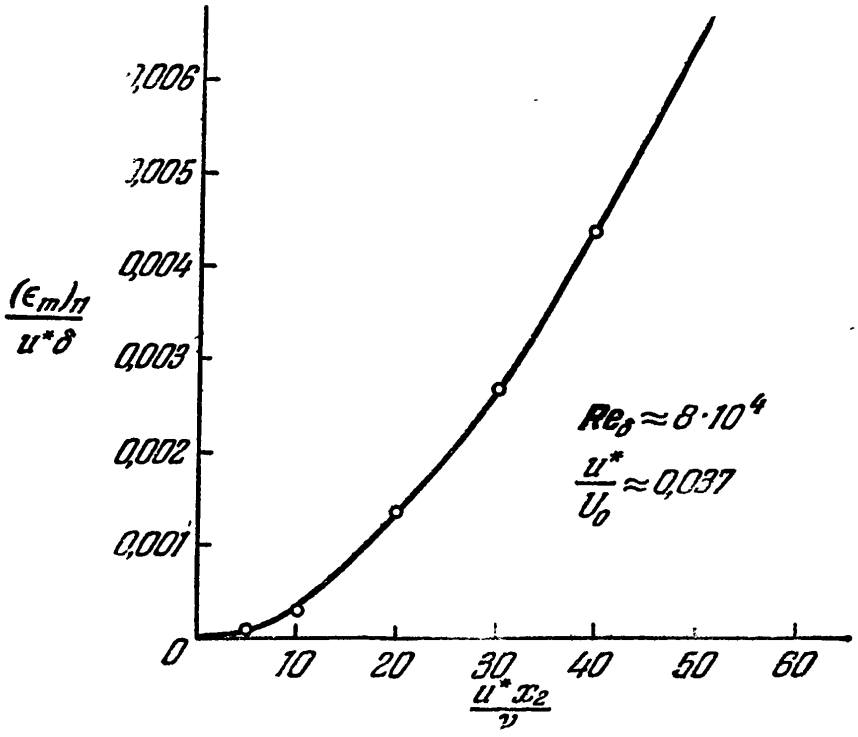



Рис. 7.16. Распределение коэффициента вихревой вязкости в пристеночной области пограничного слоя, вычисленное по данным Шубауэра [30].

на то, что в этой области величина $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ изменяется пропорционально $(x_2^+)^n$, где $n \approx 2$, хотя следует отметить, что это значение $n$ не очень надежно, так как оно получено на основании слишком ограниченного количества данных.

С увеличением расстояния от стенки, по мере приближения к полностью турбулентной области, распределение коэффициента вихревой вязкости должно стремиться к линейной зависимости от расстояния до стенки. Вид кривой, изображающей зависимость $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ от этого расстояния, которая показана на рис. 7.17 и

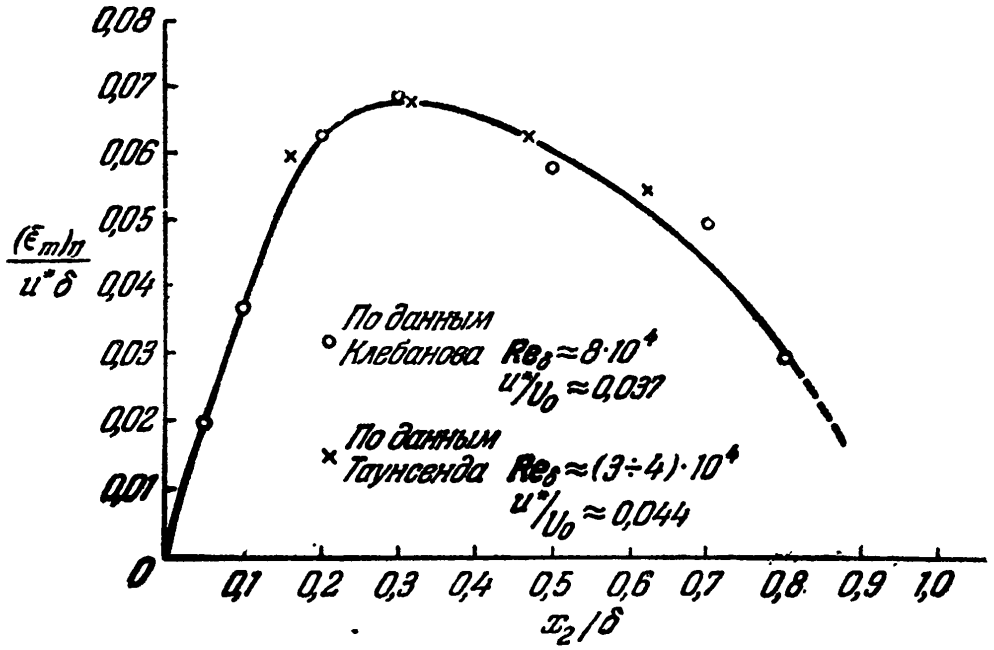



Рис. 7.17. Распределение коэффициента вихревой вязкости в поперечном сечении пограничного слоя, вычисленное по данным Клебанова [27] и Таунсенда [28].

получена по опытным данным Клебанова [27], по-видимому, свидетельствует в пользу подобной линейной зависимости в пристеночной области. Как можно заметить, коэффициент вихревой вязкости достигает своего максимального значения примерно при $x_2/\delta = 0{,}3$. На том же рисунке представлены также значения $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$, вычисленные по данным Таунсенда [28]; соответствие их со значениями, полученными по данным Клебанова, можно считать удовлетворительным.

В § 7.1 упоминалось о сходстве между условиями течения во внешней части пограничного слоя и в свободном турбулентном потоке; кроме того, отмеченное подобие проявляется также и во взаимодействии между турбулентным течением и свободным потоком вблизи внешней границы пограничного слоя. Такого рода взаимодействие находит свое выражение, например, в перемежающемся характере течения. Коэффициенты перемежаемости были определены Клебановым [27], а также Корсином и Кистлером [29].

Клебанов находил коэффициенты перемежаемости по измеренным коэффициентам сплющивания (см. главу 6). Корсин и Кистлер пользовались для этой цели иным методом, который состоял в измерении среднеквадратичной величины прерывистого импульса, упра-

вляемого перемежающимся сигналом от термоанемометра, подаваемым на вход.

Распределение коэффициента перемежаемости $\Omega$ в рассматриваемом случае не отличается от того, которое было получено для свободных турбулентных потоков. Это распределение очень хорошо описывается гауссовой функцией ошибок

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha\xi_2+\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz, \tag{7.82}$$

где $\alpha\xi_2 + \beta = (x_2 - \overline{x_2^*})/(x_2^* - \overline{x_2^*})'$, $\overline{x_2^*}$ — среднее положение поверхности раздела между областями турбулентного и нетурбулентного движений жидкости, а $(x_2^* - \overline{x_2^*})'$ — корень квадратный из среднеквадратичной величины разности между мгновенным и средним положениями этой поверхности. Кривые, изображенные на рис. 7.18,

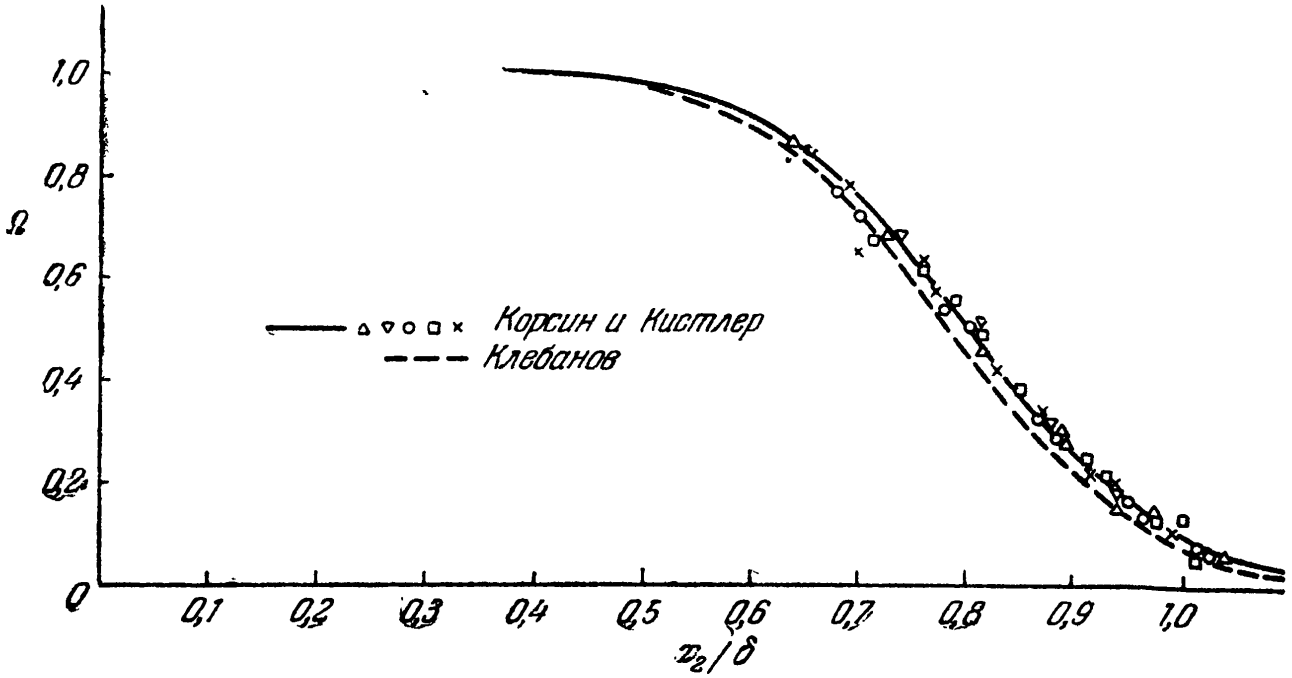



Рис. 7.18. Распределение коэффициента перемежаемости в поперечном сечении пограничного слоя по опытам Клебанова [27] и Корсина и Кистлера [29].

представляют собой гауссовы функции ошибок подобного типа применительно к данным соответственно Корсина и Кистлера и Клебанова. Между этими двумя кривыми имеется небольшое смещение. Корсином и Кистлером было получено при этом значение $\overline{x_2^*}/\delta = 0{,}8$, а Клебановым — 0,78. Различие между этими значениями довольно невелико и может быть объяснено некоторым произволом в определении величины толщины пограничного слоя $\delta$. Корсин и Кистлер, как и Клебанов, нашли, что величина стандартного отклонения составляет примерно $(x_2^* - \overline{x_2^*})' = 0{,}14\delta$. Поскольку в

опытах Корсина и Кистлера измерения проводились в различных сечениях пограничного слоя, то разные точки на рис. 7.18 относятся именно к этим различным сечениям, а полученные экспериментальные величины $\overline{x_2^*}/\delta = 0{,}8$ и $(x_2^* - \overline{x_2^*})'/\delta = 0{,}14$ представляют собой средние значения.

Аналогично тому, как это делалось в случае свободных турбулентных потоков, в распределения различных характеристик турбулентности можно внести поправку, учитывающую влияние перемежаемости, с тем чтобы получить представление о распределении этих

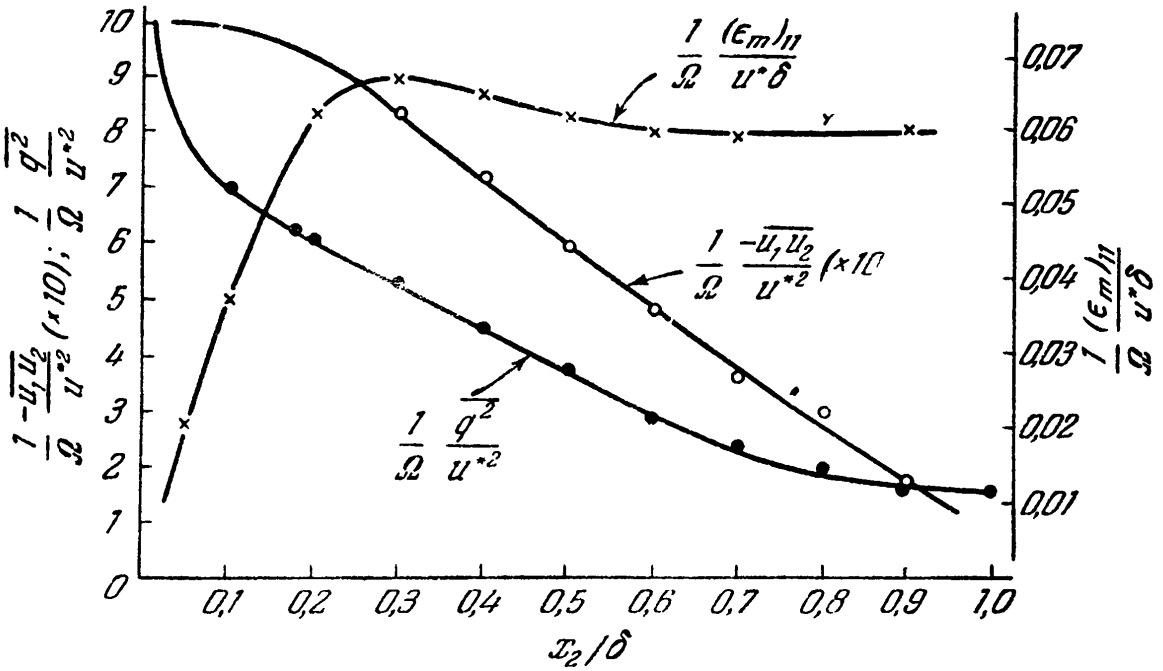



Рис. 7.19. Распределение кинетической энергии турбулентности, турбулентного напряжения сдвига и коэффициента вихревой вязкости в пограничном слое после внесения поправки на перемежаемость.

характеристик в тех областях, где движение жидкости является полностью турбулентным. На рис. 7.19 изображены распределения величин кинетической энергии, турбулентного напряжения сдвига и коэффициента вихревой вязкости, каждая из которых умножена на $\Omega^{-1}$. При этом получается поразительный результат: величина $-\overline{u_1u_2}/\Omega u^{*2}$ изменяется в зависимости от $x_2/\delta$ почти по линейному закону, а величина $(\epsilon_m)_{11}/\Omega u^*\delta$ почти постоянна на значительном протяжении внешней части пограничного слоя (область, где справедлив закон избыточной скорости). Последний результат полностью аналогичен тому, который был получен для течения в следе за цилиндром (см. рис. 6.13), что, по-видимому, снова указывает на подобие между картинами турбулентного течения в следе и во внешней части пограничного слоя. В то же время в отношении диссипации турбулентности такого вывода сделать нельзя. Тогда как в случае следа это распределение после внесения поправки на перемежаемость

является почти равномерным (см. рис. 6.13), для течения в пограничном слое это отнюдь не так. На рис. 7.20 показано распределение диссипации энергии турбулентности по измерениям Клебанова [27]. В этом случае наблюдается постепенное уменьшение диссипации в направлении к внешней границе пограничного слоя даже после внесения поправки на перемежаемость.

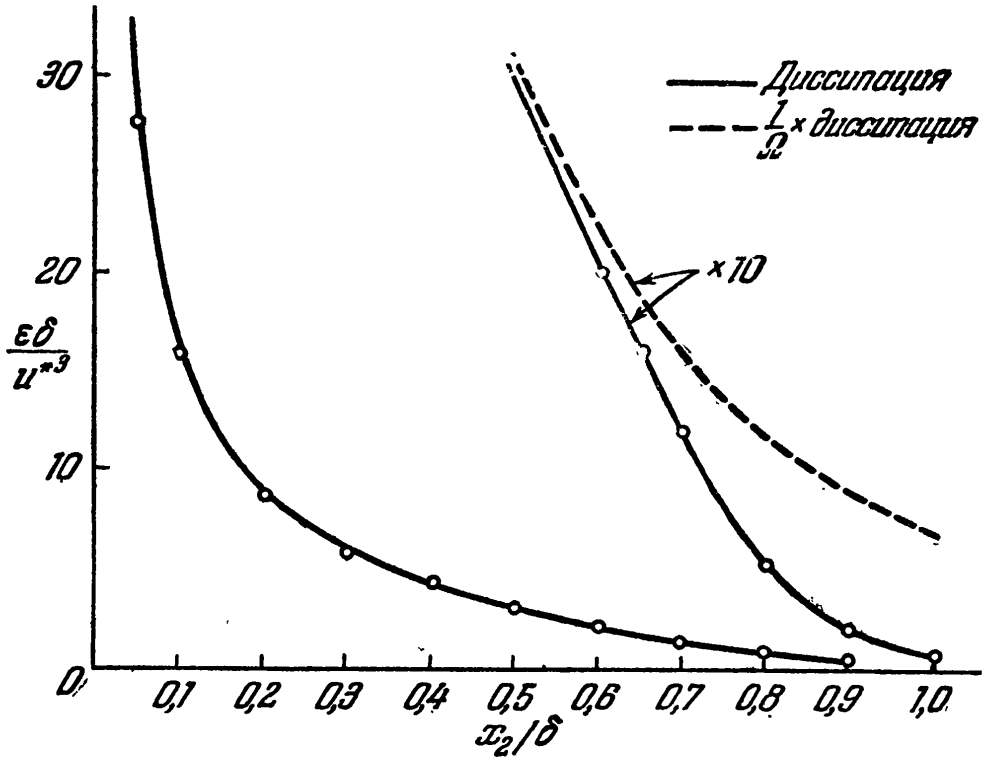



Рис. 7.20. Распределение турбулентной диссипации в поперечном сечении пограничного слоя [27].

Для определения диссипации энергии турбулентности необходимо измерить величину всех членов диссипативной функции, которая, будучи записана в безразмерной форме, имеет вид

$$\frac{\varepsilon\delta}{u^{*3}} = \frac{\nu}{u^*\delta}\overline{\left(\frac{\partial u_j/u^*}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_i/u^*}{\partial \xi_j}\right)\frac{\partial u_j/u^*}{\partial \xi_i}}.$$

Поскольку, однако, не все члены в правой части этого выражения поддаются непосредственному измерению, Клебанов вместо этого выражения проанализировал полный вязкий член в уравнении энергии турбулентности, записанный в форме (7.5б), т. е.

$$\frac{\nu}{u^*\delta}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\frac{\overline{q^2}}{2u^{*2}} - \overline{\frac{\partial u_j/u^*}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_j/u^*}{\partial \xi_i}}\right),$$

включив, таким образом, в рассмотрение работу, совершаемую вязкими напряжениями сдвига. В том случае, когда отклонение от однородности не слишком велико, что можно считать справедливым для пограничного слоя, за исключением слоя постоянного напряжения

и области, прилегающей к нему, записанный выше полный вязкий член приблизительно равен диссипации при однородной турбулентности.

Из всех девяти компонент типа $\overline{(\partial u_j/\partial x_i)(\partial u_j/\partial x_i)}$ Клебанов измерил лишь $\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}$, $\overline{(\partial u_2/\partial x_1)^2}$, $\overline{(\partial u_3/\partial x_1)^2}$, $\overline{(\partial u_1/\partial x_2)^2}$ и $\overline{(\partial u_1/\partial x_3)^2}$, а в отношении остальных компонент принял соотношения изотропности

$$\overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2}=\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2}, \qquad \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2}=\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2},$$

$$\overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2}=\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2}, \qquad \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2}=\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2}.$$

Таким образом, хотя Клебанов и не провел совершенно точного измерения диссипации энергии турбулентности, ему все же удалось добиться заметного успеха по сравнению с методом, ранее применявшимся для исследования турбулентности, при использовании которого предполагалось, что степень локальной изотропности является достаточно высокой, чтобы диссипацию энергии турбулентности можно было полагать равной $-15\nu\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}$. Это предположение могло быть принято в случае свободных турбулентных потоков, но в случае пристеночной турбулентности оно привело бы к неприемлемым ошибкам. Клебанов показал, что соотношение изотропности $\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}=\frac{1}{2}\overline{(\partial u_2/\partial x_1)^2}=\ldots$ лишь приближенно выполняется во внешней области пограничного слоя $x_2/\delta > 0{,}7$ и что отклонение от этого соотношения с приближением к стенке становится все более и более сильным.

По измеренным распределениям кинетической энергии турбулентности, турбулентного напряжения сдвига и диссипации можно получить баланс энергии турбулентности, пользуясь для этого уравнением (7.5) или (7.7), в которых неизвестной величиной остается турбулентная диффузия. Составление такого баланса было осуществлено Клебановым. Поскольку Таунсенд [28] в аналогичных опытах производил также и отдельное измерение распределения величины $\overline{u_2q^2}$, он имел возможность составить более точный баланс, в котором неизвестной величиной является только диффузия энергии давления $\overline{u_2p}/\rho$. Баланс энергии, составленный Таунсендом [31], изображен на рис. 7.21. Баланс энергии, полученный по измерениям Клебанова, хотя и имеет некоторые количественные отличия, характеризуется такими же общими свойствами различных слагаемых уравнения баланса энергии.

Положительная величина какого-либо слагаемого в балансе энергии означает отрицательный вклад в кинетическую энергию турбу-

лентности некоторого элементарного объема, иначе говоря, потерю энергии. Рассмотрим, например, диффузионный член

$$\frac{1}{u^{*3}}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\overline{u_2\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}.$$

Если этот член является положительным, то из данного элементарного объема турбулентной пульсацией скорости $u_2$ отводится энергии турбулентности больше, нежели вносится в этот объем, в результате

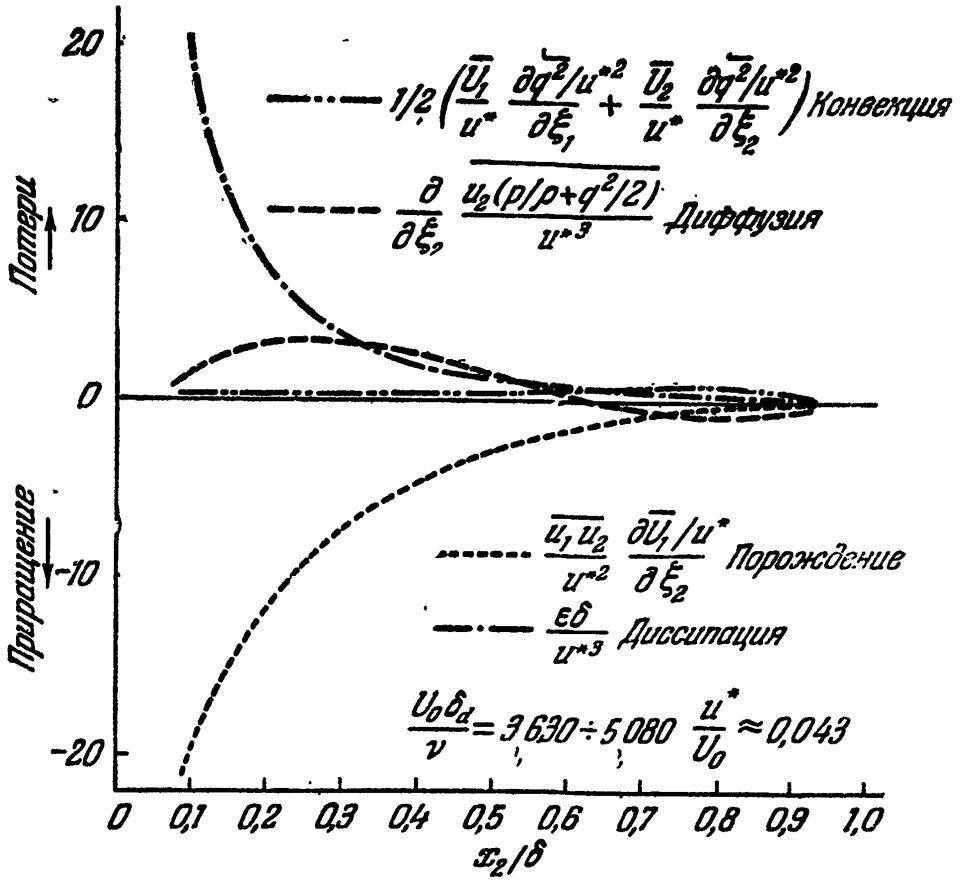



Рис. 7.21. Баланс энергии в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [31].

чего внутри этого элементарного объема происходит потеря энергии турбулентности.

Если провести сравнение этого баланса энергии с соответствующим балансом энергии для течения в следе за цилиндром (см. рис. 6.9), то наряду со сходством можно заметить и поразительное различие. Основной вклад в баланс энергии, если исключить из рассмотрения область вблизи внешней границы пограничного слоя, приходится на долю членов, характеризующих порождение и диссипацию энергии. Порождение и диссипация почти уравновешивают друг друга, и при этом тем больше, чем ближе стенка. Вкладом конвекции под действием осредненного движения практически можно пренебречь, за исключением области вблизи внешней границы пограничного слоя. Соответствующий член уравнения является существенно положительным,

что означает потерю энергии. Вблизи внешней границы пограничного слоя диссипация энергии превышает ее порождение. Эта разница в сумме с потерей энергии из-за диффузии под действием осредненного движения уравновешивается приращением за счет турбулентной диффузии. При углублении в пограничный слой турбулентная диффузия изменяет знак, достигает максимума (потери энергии) как раз снаружи слоя постоянного напряжения и в этом слое, по-видимому, вновь изменяет свой знак, давая при этом приращение энергии турбулентности. Очевидно, благодаря турбулентной диффузии происходит перенос энергии от внутренней части пограничного слоя к его внешней части. В пристеночной области, внутри слоя постоянного напряжения и вблизи вязкого подслоя, диссипация, по-видимому, преобладает над порождением энергии, а турбулентная диффузия, очевидно, дает приращение энергии. Так как вблизи вязкого подслоя кинетическая энергия турбулентности имеет отрицательный градиент (см. рис. 7.13), то, по всей видимости, в направлении, противоположном этому градиенту, имеется перенос энергии. Это можно было бы объяснить воздействием диффузии энергии давления. Однако недостаток непосредственных данных об изменении различных слагаемых уравнения энергии в слое постоянного напряжения заставляет относиться к сделанному выше заключению с некоторой осторожностью.

Таунсенд [31] также определил баланс энергии для осредненного движения в том виде, как он дается уравнением (7.4). Пренебрегая в этом уравнении вязким членом и записывая его в безразмерной форме, имеем

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{\bar{U}_1^3}{u^{*3}}+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{\bar{U}_2\bar{U}_1^2}{u^{*3}}\right]+\frac{\bar{U}_1}{u^*}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{\overline{u_1u_2}}{u^{*2}}=0.$$

Последнее слагаемое можно записать следующим образом:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{\overline{u_1u_2}}{u^{*2}}=\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{\overline{u_1u_2}\bar{U}_1}{u^{*3}}-\frac{\overline{u_1u_2}}{u^{*2}}\frac{\partial\bar{U}_1/u^*}{\partial\xi_2}.$$

Первый член в правой части этого выражения означает работу, совершаемую турбулентным напряжением сдвига. Второй член можно интерпретировать либо как работу деформации, совершаемую турбулентным напряжением сдвига, либо как «диссипацию» кинетической энергии осредненного движения, ибо можно записать

$$-\overline{u_1u_2}=(\epsilon_m)_{11}\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Таким образом, уравнение баланса энергии для осредненного движения принимает вид

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{\bar{U}_1^3}{u^{*3}}+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{\bar{U}_2\bar{U}_1^2}{u^{*3}}\right]-\frac{\overline{u_1u_2}}{u^{*2}}\frac{\partial\bar{U}_1/u^*}{\partial\xi_2}+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{\overline{u_1u_2}\bar{U}_1}{u^{*3}}=0. \quad (7.83)$$

Распределение входящих в это уравнение величин в поперечном сечении пограничного слоя изображено на рис. 7.22. Потери кинетической энергии осредненного движения благодаря «диссипации» в турбулентность, а значит и в порождение энергии турбулентности, сильно возрастают по направлению к стенке. Во внешней области

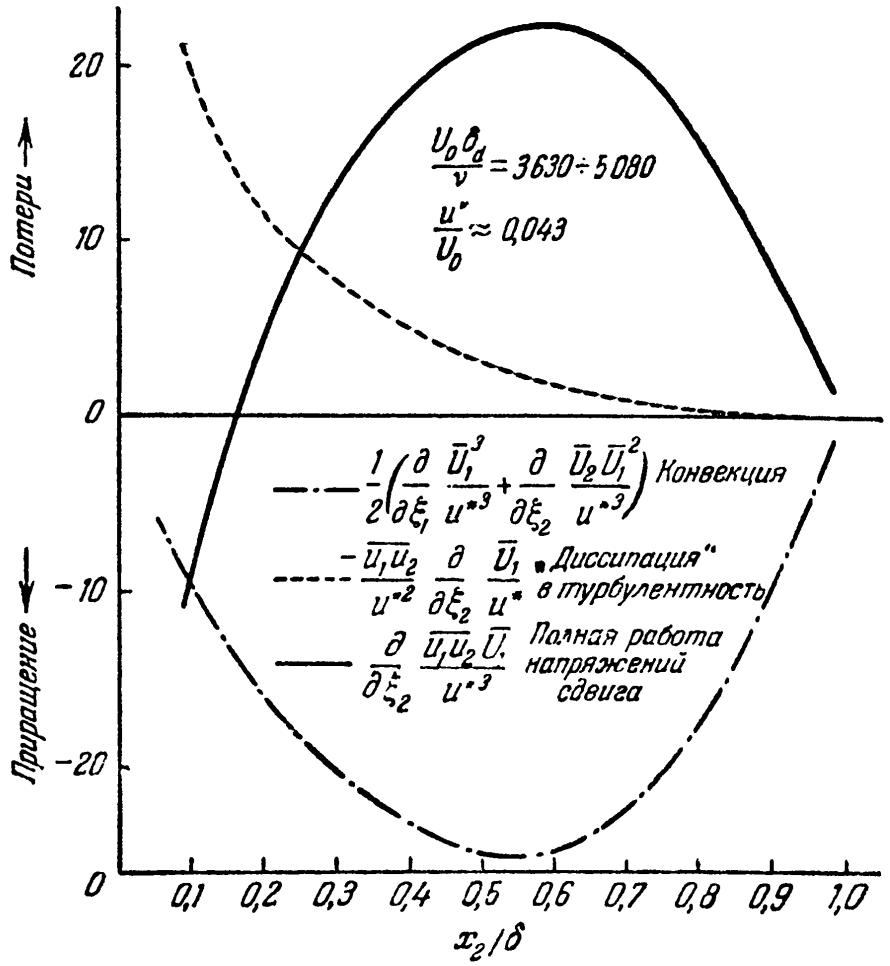



Рис. 7.22. Баланс энергии осредненного движения в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [31].

приращение энергии, обусловленное конвекцией под действием осредненного движения, практически равно потерям при работе турбулентных напряжений сдвига. В пристеночной области порождение энергии турбулентности превосходит подвод энергии непосредственно за счет конвекции при осредненном движении. Эта разница получается благодаря полной работе, совершаемой турбулентными напряжениями сдвига. По-видимому, в направлении к стенке имеется поток энергии, который «преобразуется» там в энергию турбулентного движения.

Если объединить результаты, полученные из балансов энергии для осредненного и турбулентного движений, то можно прийти к интересному и весьма важному выводу о том, что между течением во внутренней части пограничного слоя, или в пристеночной области, и течением во внешней его части должно существовать

сильное взаимодействие. Эти две части пограничного слоя характеризуются различными механизмами турбулентного течения, и между ними идет интенсивный обмен энергией.

Во внешней области наблюдается приток кинетической энергии осредненного течения от расположенных выше по потоку частей пограничного слоя. Эта энергия через работу, совершаемую турбулентными напряжениями сдвига, преобразуется во внутренней части пограничного слоя и порождает энергию турбулентности. Иначе говоря, осредненный поток замедляется под воздействием турбулентных напряжений сдвига, теряя за счет этого некоторую долю своей кинетической энергии.

Во внутренней части пограничного слоя наибольшая доля порожденной энергии турбулентности под действием турбулентной диссипации преобразуется непосредственно в тепло. Однако часть этой энергии турбулентности переносится посредством турбулентной диффузии по направлению к внешней области пограничного слоя, где происходит ее диссипация. Таким образом, по направлению к стенке имеется приток энергии, берущий свое начало в осредненном потоке, который преобразуется в энергию турбулентности, а она, в свою очередь, частично подвергается непосредственной диссипации и частично диффундирует благодаря турбулентности обратно во внешнюю область.

Из-за того, что никаких измерений в расположенной наиболее близко к стенке части пограничного слоя, т. е. в слое постоянного напряжения, до сих пор не производилось, едва ли можно сказать что-нибудь еще о процессах, происходящих там в действительности. Правда, такие измерения осуществлялись в случае течения в круглых трубах и каналах; они будут рассмотрены ниже, в § 7.9.

Некоторые дополнительные сведения можно получить из результатов измерения энергетического спектра и пространственных корреляций скорости в пограничном слое. Измерения спектра осевой и поперечной компонент турбулентных пульсаций $\overline{u_1^2}$ и $\overline{u_2^2}$, а также турбулентного напряжения сдвига $-\rho\overline{u_1 u_2}$ были проведены Клебановым [27]. На рис. 7.23, аналогичном рис. 4.5, представлены результаты измерений Клебанова для осевой компоненты турбулентных пульсаций, полученные при относительных расстояниях от стенки $x_2/\delta$, равных 0,0011, 0,05 и 0,80. Рассматривая эти результаты, можно заметить, что спектр, снятый в точке $x_2/\delta = 0{,}80$, т. е. во внешней части пограничного слоя, в диапазоне волновых чисел $k_1$ от 0,5 до 5 $см^{-1}$ ближе соответствует закону «$-5/3$». Спектр, снятый в точке $x_2/\delta = 0{,}05$, характеризуется тем, что в некотором диапазоне функция $E_1(k_1)$ изменяется приблизительно по закону «$k_1^{-1}$», указывая, таким образом, на сильное взаимодействие между осредненным и турбулентным течениями. В этой точке наблюдается интенсивное

порождение энергии турбулентности (см. рис. 7.21). Спектры, приведенные на рис. 7.23, показывают также, что вклад в энергию турбулентности в диапазоне малых волновых чисел, принадлежащий, стало быть, крупным вихрям, уменьшается по мере приближения к стенке, а вклад в эту энергию в диапазоне больших волновых чисел при этом, наоборот, возрастает.

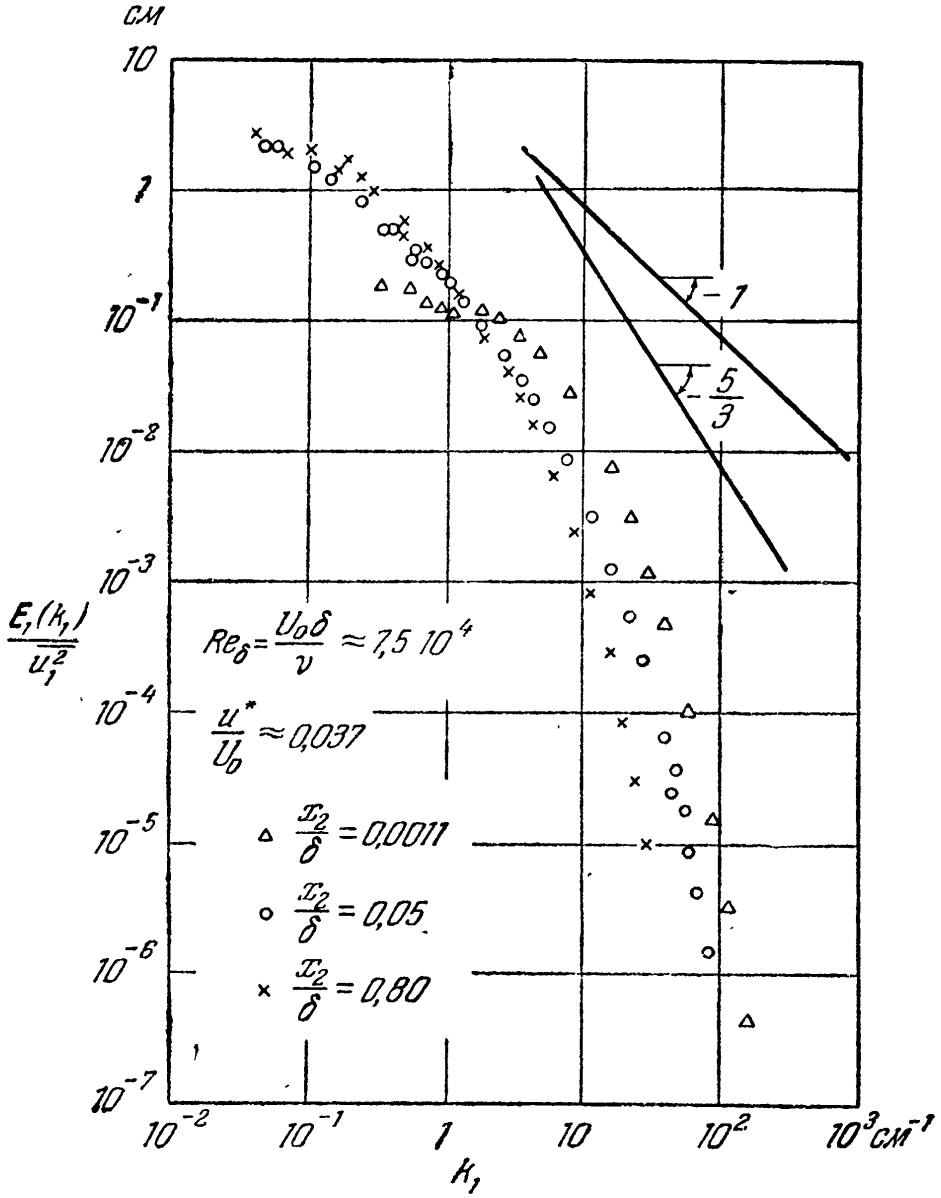



Рис. 7.23. Спектры величины $\overline{u_1^2}$ в пограничном слое на гладкой плоской пластине при отсутствии градиента давления [27].

Аналогичный вывод о диапазоне больших волновых чисел можно сделать и на основании рис. 7.24, где изображены спектры турбулентного напряжения сдвига $-\rho\overline{u_1 u_2}$ в точках $x_2/\delta = 0{,}05$ и $x_2/\delta = 0{,}80$. Сравнение с рис. 7.23 показывает, что спектр $E_{1,2}(k_1)$ в диапазоне больших волновых чисел затухает с увеличением волнового числа быстрее, чем спектр $E_1(k_1)$. Это означает, что выше определенного волнового числа вклад в напряжение сдвига становится пренебрежимо

малым. Однако при этом все еще наблюдается вклад в энергетический спектр $\overline{u_1^2}$. Этот факт указывает на наличие некоторой локальной изотропности в диапазоне наиболее высоких волновых чисел.

Спектр поперечной компоненты турбулентных пульсаций $\overline{u_2^2}$ ведет себя по сравнению со спектром $\overline{u_1^2}$ иначе, нежели это должно было бы быть, если бы турбулентность была изотропной. Это отличие заметно в диапазоне малых волновых чисел, особенно в точке $x_2/\delta = 0{,}05$,

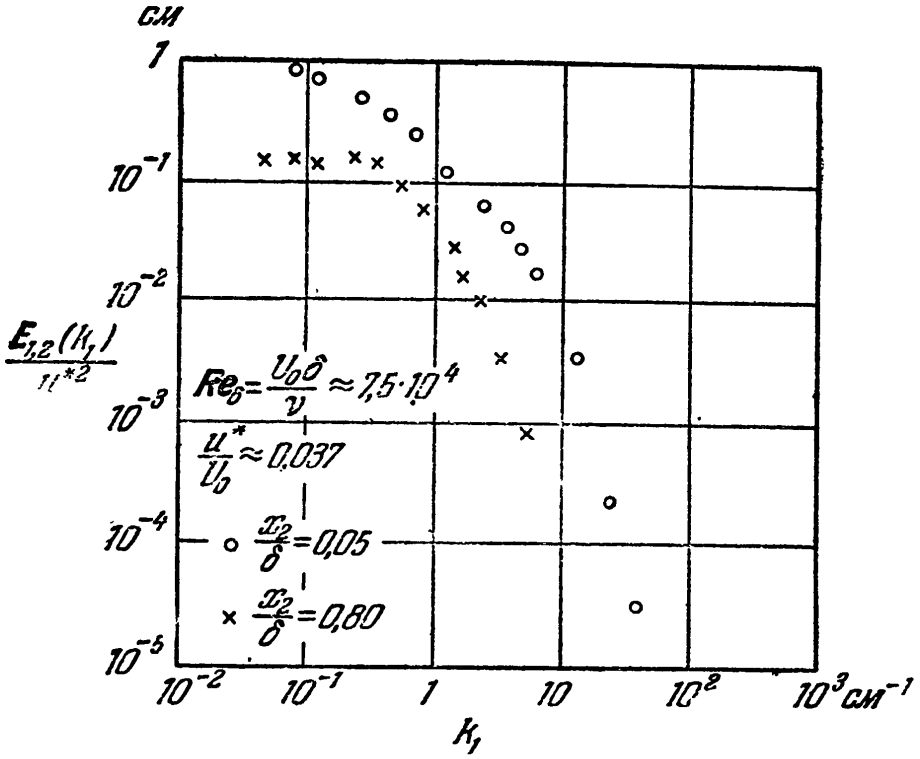



Рис. 7.24. Спектры турбулентного напряжения сдвига $\overline{u_1 u_2}$ в пограничном слое на гладкой плоской пластине при отсутствии градиента давления [27].

расположенной очень близко к стенке. В диапазоне больших волновых чисел можно наблюдать определенную локальную изотропность.

Отмеченная выше анизотропность обнаруживается также в пространственных корреляциях $f(r)$ и $g(r)$ и в соответствующих им интегральных масштабах $\Lambda_f$ и $\Lambda_g$. В качестве продольной корреляции Шубауэр и Клебанов [16] измеряли корреляцию между осевыми компонентами турбулентных пульсаций $u_1$ в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние $x_1$, но расположенных в одной плоскости $x_2$; а в качестве поперечной корреляции они измеряли корреляцию между компонентами $u_1$ в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние $x_2$, но расположенных в одном и том же поперечном сечении $x_1$. В случае изотропной турбулентности должно было бы выполняться равенство $\Lambda_f = 2\Lambda_g$. Измерения Шубауэра и Клебанова во внешней области пограничного слоя ($x_2/\delta > 0{,}15$) по-

казывают, что отношение $\Lambda_f/\Lambda_g$ принимает значение 3 и выше. Более того, оказывается, что величина $\Lambda_f$ может стать того же порядка, как и $\delta$. Отсюда можно сделать вывод, что турбулентность во внешней области пограничного слоя содержит вихри такого же размера, как и толщина пограничного слоя. Эти вихри очень сильно вытянуты в направлении вниз по потоку, и поэтому корреляции существуют на довольно протяженных продольных расстояниях. Такой вывод подтверждается измерениями Фавра, Гавильо и Дюма [33] пространственно-временных корреляций в пограничном слое. Эти исследователи делают вывод, что крупномасштабное движение характеризуется корреляциями, которые существуют в течение продолжительного времени в направлении как вверх, так и вниз по потоку.

## § 7.7. Сводка результатов и новые формулы для распределений осредненной скорости и напряжения сдвига

Измерения в турбулентном пограничном слое, результаты которых были рассмотрены в предыдущих параграфах, показали, что для адекватного описания течения в турбулентном пограничном слое необходимо проводить различие между внутренней и внешней областями, существенно отличающимися друг от друга происходящими в них явлениями.

Во внутренней, или пристеночной, области, толщина которой составляет примерно от 0,1 до 0,2$\delta$, течение определяется напряжением сдвига на стенке и вязкостью жидкости, а распределение скорости может быть описано так называемым «законом стенки»:

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = f\left(\frac{x_2 u^*}{\nu}\right). \tag{7.84}$$

Изменение напряжения сдвига в этой области весьма мало, и оно в первом приближении может считаться постоянным; поэтому данную область называют также слоем постоянного напряжения.

В случае гладкой стенки эта область включает в себя прилегающий к стенке слой жидкости, где течение является, в основном, вязким, а осредненная скорость линейно возрастает с расстоянием от стенки. Эта область называется вязким подслоем и имеет толщину порядка $(0{,}001 \div 0{,}01)\,\delta$. Остальную часть слоя постоянного напряжения занимают полностью турбулентная область и небольшая переходная область на границе с вязким подслоем. В полностью турбулентной области масштаб крупных вихрей определяется расстоянием от стенки. Если ввести коэффициент вихревой вязкости $\epsilon_m$, то он с расстоянием от стенки будет изменяться по линейному закону; результатом этого является логарифмическое распределение осредненной скорости. Турбулентность здесь характеризуется сильной

анизотропностью. По-видимому, она находится в состоянии энергетического равновесия, так как порождение кинетической энергии турбулентности приблизительно равняется вязкой диссипации этой энергии, за исключением зоны, очень близкой к стенке, где диссипация оказывается значительно больше порождения энергии. Очевидно, что по направлению к стенке имеется поток энергии, обусловленный, по всей вероятности, силами давления.

Ввиду того, что как порождение, так и диссипация энергии турбулентности достигают во внутренней области довольно резкого максимума. Эту зону можно также рассматривать как такую область пограничного слоя, в которой имеется наибольшее порождение и диссипация энергии турбулентности.

Течение в этой внутренней области не испытывает прямого воздействия внешних условий, как, например, изменений градиента осредненного давления в направлении потока.

Во внешней области, которая занимает от 80 до 90% всего пограничного слоя, течение не зависит от вязкости жидкости, однако на него оказывает влияние напряжение сдвига на стенке. Здесь наблюдается также и сильное влияние внешних условий. Осредненную скорость в этой области удобно выразить в виде избытка над скоростью свободного потока; такое распределение называется законом избыточной скорости

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = \Psi\left(\frac{x_2}{\delta}\right). \tag{7.34}$$

Течение в данном случае обнаруживает некоторое сходство с течением в следе. Вблизи внешней границы оно, подобно свободному турбулентному течению, носит перемежающийся характер. Турбулентность здесь характеризуется крупными вихрями, вытянутыми в направлении потока. Если ввести коэффициент вихревой вязкости, то в поперечном сечении этой области он оказывается почти постоянным. Турбулентность черпает свою энергию главным образом за счет диффузии из внутренней области. Следствием этого является тот факт, что турбулентность определяется условиями во внутренней области далеко вверх по течению, т. е. распределением напряжения сдвига на стенке выше по течению. Соответственно величина $\overline{u_1 u_2}/\overline{q^2}$ имеет в этой области почти постоянное значение; по-видимому, турбулентно движущаяся жидкость достаточно долго подвергается воздействию напряжений сдвига, прежде чем достигнет своей равновесной структуры (Таунсенд [31]).

Выше уже упоминалось, что течение во внешней области испытывает сильное влияние внешних условий. Более того, наличие в этой области крупных вытянутых вихрей затрудняет быстрое восстановление картины течения после воздействия какого-либо возмущения, так как можно наблюдать, что для полного восстановления

от возмущения каким-либо турбулентным воздействием требуются в общем случае расстояния, во много раз превышающие масштаб турбулентности. Другими словами, течение во внешней области имеет «долгую память». В отличие от этого, внутренняя область должна иметь «короткую память», т. е. быстрое восстановление от возмущений, ибо вихри в этой области чрезвычайно малы.

Эти представления основаны на опытах Клаузера [21], который исследовал затухание возмущения, созданного стержнем с диаметром 1,25 *см*, располагавшимся на расстояниях 3,8 и 14 *см* от стенки в пограничном слое, толщина которого в этом сечении составляла

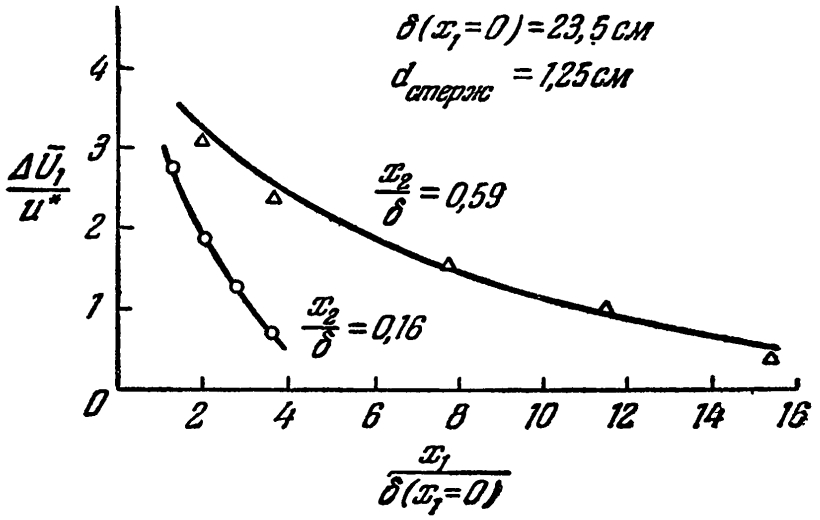



Рис. 7.25. Вырождение возмущения осредненной скорости в турбулентном пограничном слое [21].

23,5 *см*. Затухание максимальных отклонений $\Delta\overline{U}_1$ возмущенного профиля осредненной скорости от равновесного профиля изображено на рис. 7.25.

На основании этих экспериментальных фактов можно сделать общее заключение, что, в принципе, течение во всем пограничном слое описать с помощью лишь одного семейства параметров невозможно. Следовательно, если мы хотим использовать соображения подобия, то следует отличать друг от друга рассмотренные выше области, приписывая им разные масштабы скорости и длины.

Для внутренней области в качестве масштаба скорости можно было бы выбрать динамическую скорость $u^*$, а в качестве масштаба длины $\nu/u^*$; при таком подходе для распределения осредненной скорости получается закон стенки (7.84). Еще одним подходящим масштабом длины могла бы быть величина $\delta_{log}$, предложенная Таунсендом [31]; она представляет собой толщину, которую имел бы пограничный слой, если бы логарифмическое распределение осредненной скорости (7.32а) было справедливо для всей турбулентной части пограничного слоя. Тогда общее выражение для распределения

осредненной скорости описывалось бы формулой (7.36), в которую следовало бы подставить величины $\delta^+_{\log}$ и $\xi_2 = x_2/\delta_{\log}$.

Мы видели, что логарифмическое распределение осредненной скорости дает хорошее совпадение с экспериментально определенными распределениями в полностью турбулентной части внутренней области и что последние исследования не привели к сколько-нибудь лучшим результатам.

Однако для переходной области на границе вязкого подслоя исследования турбулентных характеристик позволяют значительно улучшить достигнутые результаты. Один из главных вскрытых при этом фактов состоит в том, что вязкий подслой не является непрерывным слоем, в котором не наблюдается турбулентности и осредненная скорость представляет собой непульсирующую стационарную величину, как это принималось в ранних исследованиях. Наоборот, турбулентные движения проникают внутрь этого подслоя почти до стенки, хотя эти движения и являются по своей природе полностью вязкими.

Но это непрерывное возмущение вязкого подслоя наружной турбулентностью представляет собой не единственный вид турбулентных движений в этом слое, как это было бы в случае, если бы поведение вязкого подслоя было полностью «пассивным». Изменения скорости вблизи стенки в пространстве и во времени и связанные с ними неблагоприятные градиенты давления вместе с пульсациями давления из-за турбулентных движений этого подслоя обусловливают локальную неустойчивость, которая приводит к созданию турбулентности вблизи стенки. Таким образом, вязкий подслой тоже является «активным». Если мы хотим представить действительную картину явлений, сопровождающих течение в этом слое, то нам следует рассматривать подслой как периодически нарастающий и разрушающийся, а не как квазистационарный (Эйнштейн и Ли [34]). В частности, если мы рассматриваем процессы переноса в этом подслое, то это специфическое поведение следует обязательно учитывать, ибо оно обусловливает непрерывный обмен жидкими частицами между вязким подслоем и областью, расположенной снаружи него. Следовательно, представление о квазистационарном вязком подслое, состоящем всегда из одних и тех же жидких частиц, является неверным.

Эйнштейн и Ли [34] и Хенретти [35] выдвинули теорию обмена веществом и импульсом в вязком подслое, основываясь на модели «прерывистой пленки». В этой теории принимается, что жидкие частицы в вязком подслое, прилегающем к стенке, уже не находятся в непрерывном контакте со стенкой, а соприкасаются с ней лишь в течение конечного промежутка времени. Предполагая, что обмен импульсом со стенкой в течение времени соприкосновения $t_c$ можно рассматривать как нестационарный процесс молекулярной диффузии (закон Фика) а также считая, что для величины $t_c$ и скорости $v_1$

жидких частиц непосредственно перед соприкосновением со стенкой можно принять некоторые средние значения, получаем следующее распределение осредненной скорости вблизи стенки:

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = \frac{v_1}{u^*} \int_0^1 \operatorname{erf}\left(\frac{x_2^+ u^* \sqrt{\pi}}{4 v_1 \sqrt{\tau}}\right) d\tau,$$

где

$$\tau = \frac{t}{t_c}, \quad x_2^+ = \frac{x_2 u^*}{\nu}, \quad u^{*2} = 2 v_1 \sqrt{\frac{\nu}{\pi t_c}}.$$

Множитель $v_1/u^*$ можно рассматривать как произвольную постоянную, которая должна быть определена опытным путем. При $v_1/u^* = 13{,}5$ Хенретти получил кривую распределения осредненной скорости, немного отклоняющуюся от линейного профиля скорости $\overline{U}_1^+ = x_2^+$ уже при $x_2^+ = 3$, но весьма близко согласующуюся с данными Рейхардта (см. рис. 7.3) в первой части переходной области.

Несмотря на удовлетворительное соответствие с измеренным распределением осредненной скорости, коэффициент вихревой диффузии, соответствующий распределению скорости Хенретти, оказывается линейно зависящим от $x_2$ при $x_2 \to 0$. Это лишний раз указывает на нечувствительность расчетного распределения осредненной скорости к исходным предположениям, а также на неточность измерений скорости вблизи стенки посредством существующих методов измерения.

Удовлетворительного решения для распределения осредненной скорости во внешней области пограничного слоя получить пока не удалось, если не считать приближенной эмпирической формулы (7.68), предложенной Хама. Обнаружив подобие между течением в этой области и течением в следе, которое состоит в том, что процессы крупномасштабного перемешивания в обоих случаях определяются главным образом влиянием инерции, а не вязкости, Коулс [36] предложил чисто эмпирическую поправочную функцию $w(\xi_2)$, аналогичную поправочной функции Милликена $h_1(\xi_2)$. Коулс полагает, что $h_1(\xi_2) = (\Pi/\varkappa)\, w(\xi_2)$; тогда уравнение (7.76) принимает вид

$$\frac{\overline{U}_1}{u^*} = \frac{1}{\varkappa} \ln\left(\frac{u^* x_2}{\nu}\right) + B + \frac{\Pi}{\varkappa} w(\xi_2). \tag{7.85}$$

Поправочная функция $w(\xi_2)$, которая в отличие от $h(\xi_2)$ всюду положительна, имеет в общих чертах такую же форму, как и функция $h(\xi_2)$, изображенная на рис. 7.7. Коулс назвал выражение для функции $w(\xi_2)$ законом следа, стремясь, таким образом, подчеркнуть сходство с течением в следе, которое и отражает этот закон. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что этот закон носит универсальный характер.

Величина $\Pi$ представляет собой параметр профиля и не зависит ни от $x_1$, ни от $x_2$. Она связана с местным коэффициентом трения $c_f = 2u^{*2}/U_0^2$ соотношением

$$\frac{U_0}{u^*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\left(\frac{u^*\delta}{\nu}\right) + B + \frac{\Pi}{\varkappa}w(1).$$

Для пограничного слоя с нулевым градиентом давления Коулс получил значение $\Pi = 0{,}55$ (приняв $\varkappa = 0{,}40$ и $B = 5{,}1$). Определенная

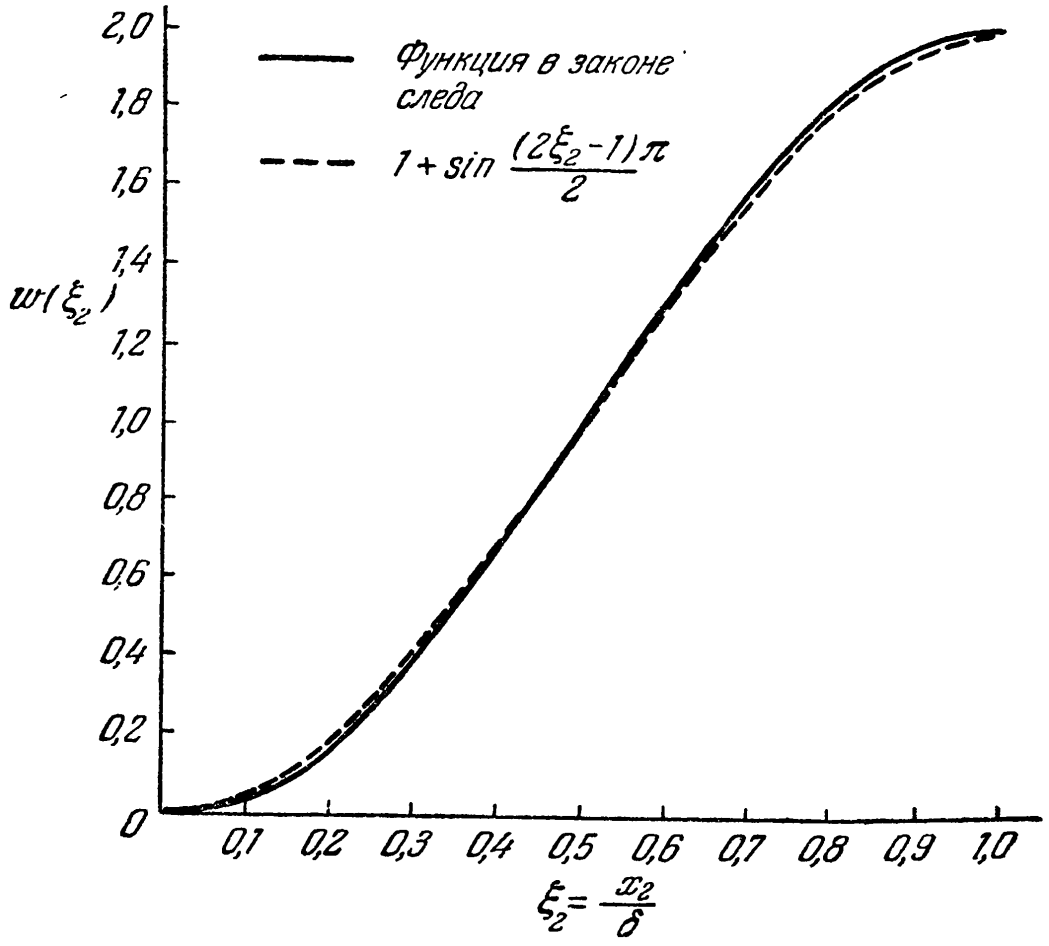



Рис. 7.26. Универсальная функция $w(\xi_2)$ в законе следа по Коулсу [36].

по опытным данным универсальная функция $w(\xi_2)$ дана в таблице, а также на рис. 7.26.

**Функция $w(\xi_2)$ в законе следа**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi_2$ . . . . . | 0 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
| $w(\xi_2)$ . . . . | 0 | 0,004 | 0,029 | 0,084 | 0,168 | 0,272 | 0,396 | 0,535 | 0,685 | 0,838 | 0,994 |
| $\xi_2$ . . . . . | | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 1,00 |
| $w(\xi_2)$ . . . . | | 1,152 | 1,307 | 1,458 | 1,600 | 1,729 | 1,840 | 1,926 | 1,980 | 1,999 | 2,00 |

При $\xi_2 = 1$ эта функция достигает значения $w(1) = 2$, выбранного в качестве условия нормировки. В качестве второго условия

нормировки Коулс предложил

$$\int_0^2 \xi_2\, dw = 1 \quad \text{или} \quad \int_0^1 w\, d\xi_2 = 1.$$

Анализ эмпирической кривой $w(\xi_2)$ показывает, что эта функция не является строго антисимметричной относительно линии $\xi_2 = 0{,}5$, однако наблюдающиеся при этом отклонения весьма малы. Действительно функция $w(\xi_2)$ в законе следа может быть аппроксимирована антисимметричной функцией

$$w(\xi_2) = 1 + \sin\frac{(2\xi_2 - 1)\,\pi}{2},$$

которая для многих практических приложений является достаточно близким приближением. Как видно из рис. 7.26, различие между синусоидой и эмпирической кривой $w(\xi_2)$ заметно лишь вблизи $\xi_2 = 0{,}1$ и $\xi_2 = 0{,}9$.

Таким образом, для пограничного слоя с нулевым градиентом давления, следуя Коулсу, при $\varkappa = 0{,}40$ и $\Pi = 0{,}55$ имеем

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -2{,}50 \ln\frac{x_2}{\delta} + 1{,}38\left[2 - w\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right]. \qquad (7.85a)$$

На рис. 7.27 дается сравнение этого распределения осредненной скорости с экспериментальным распределением, полученным

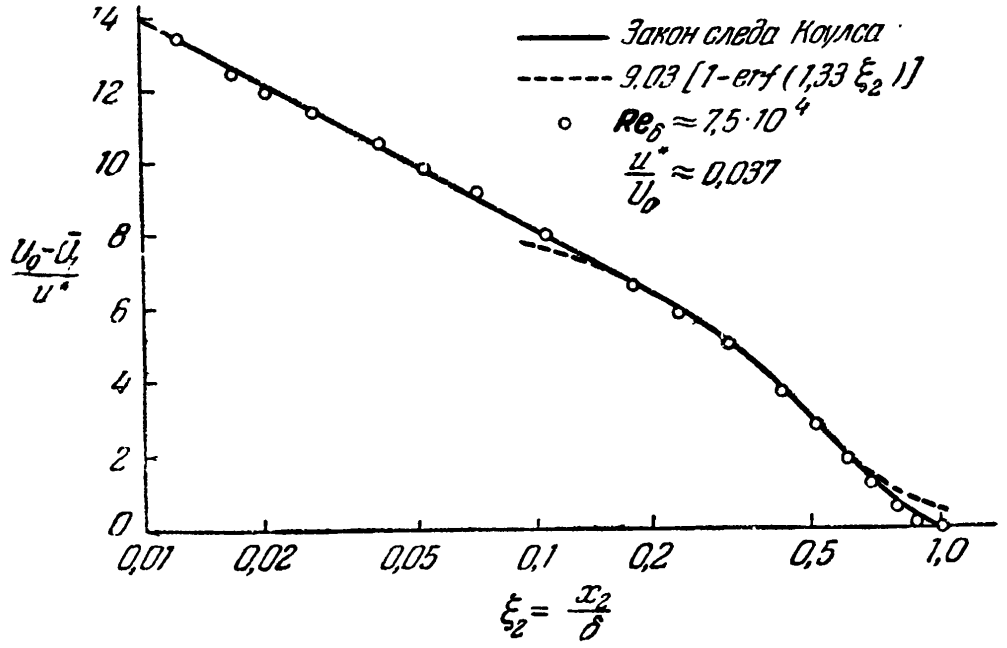



Рис. 7.27. Сравнение вычисленной избыточной скорости с экспериментальными данными Клебанова [27].

Клебановым [27]. Сплошная кривая на этом рисунке соответствует эмпирической функции $w(\xi_2)$, предложенной Коулсом. Практически такая же кривая получается, если в качестве $w(\xi_2)$ выбрать синусоиду;

исключение составляет лишь небольшой участок вблизи $\xi_2 = 0{,}9$, где синусоида приводит к несколько завышенным значениям $(U_0 - \overline{U}_1)/u^*$.

При помощи уравнения (7.85) или (7.85а) можно, пользуясь уравнением неразрывности, вычислить распределение поперечной компоненты осредненной скорости $\overline{U}_2$. Тогда по известным компонентам осредненной скорости $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ оказывается возможным рассчитать распределение напряжения сдвига. При этом из уравнения (7.3) следует, что для внешней области

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = 1 + \frac{1}{u^{*2}} \int_0^{x_2} \left( \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \right) d\dot{x}_2. \qquad (7.86)$$

Коулс, исходя из уравнения (7.85), произвел подобные расчеты для поперечного сечения пограничного слоя, исследованного Клебановым, экспериментальные данные которого представлены на рис. 7.28. Согласие между измеренными и вычисленными значениями является

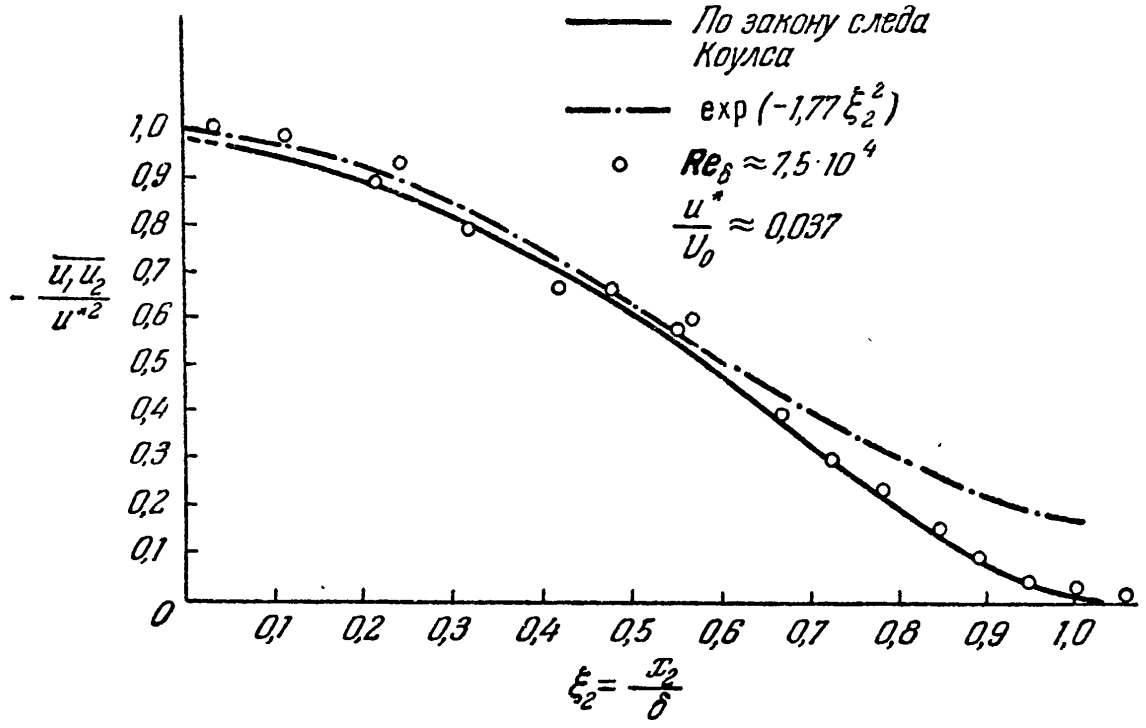



Рис. 7.28. Расчетные распределения напряжения сдвига и экспериментальные значения, измеренные Клебановым [27].

вполне удовлетворительным. Отмеченное совпадение не представляется удивительным, поскольку результаты расчета являются следствием только уравнений движения и неразрывности при хорошо подобранном распределении осредненной скорости. Его следует рассматривать скорее как доказательство надежности измерений Клебанова. Приведенные здесь экспериментальные данные, которые одинаковы с изображенными на рис. 7.13, отличаются от них неболь-

шим смещением по оси $\xi_2$, так как в расчетах Коулса взято меньшее значение местной толщины пограничного слоя, а именно $\delta = 7{,}2$ *см*, по сравнению со значением $\delta = 7{,}6$ *см*, принятым Клебановым.

В то время как закон избыточной скорости приводит к полному подобию профилей скорости в различных поперечных сечениях полностью развитого турбулентного пограничного слоя, этого нельзя сказать о распределении величины $\overline{U}_2/u^*$ и напряжения сдвига. Тот факт, что одновременно получить подобие и распределений напряжений сдвига, и распределений скорости невозможно, следует непосредственно из уравнения движения

$$\overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}, \tag{7.87}$$

если применить к нему те же преобразования, которые были использованы в главе 6, выбрав в качестве масштабов скорости и длины соответственно $u^*$ и $\delta$. Строго говоря, масштаб скорости в этом случае должен, по-видимому, отличаться от того, который использовался для внутренней, пристеночной, области пограничного слоя. Таунсендом [31] было показано, что для конечных чисел Рейнольдса распределение осредненной скорости зависит от числа Рейнольдса, а отношения масштабов скорости и длины для внешней области к соответствующим масштабам для внутренней области не сохраняют постоянных значений, но что разность между масштабом скорости и $u^*$ меньше произведения величин $u^*/U_0$ и $u^*$, т. е. пренебрежимо мала.

В предшествующем анализе предполагалось подобие профилей $(U_0 - \overline{U}_1)/u^*$, в результате чего профили напряжения сдвига оказались неподобными.

С другой стороны, можно также исходить из предположения о подобии профилей напряжения сдвига; тогда профили скорости уже не будут подобными. При изменении числа Рейнольдса меняется диапазон волновых чисел турбулентности. Однако картина движения крупных вихрей не претерпевает значительных изменений в зависимости от числа Рейнольдса, и поскольку кинетическая энергия турбулентности и турбулентное напряжение сдвига определяются главным образом движением именно этих крупных вихрей, то это говорит в пользу предположения об универсальности распределения напряжения сдвига. Хотя получающиеся при этом профили скорости и не обладают строгим подобием, различия между ними вряд ли выходят за рамки разброса экспериментальных точек. Если в отличие от этого принять предположение о подобии профилей скорости, а затем, пользуясь указанным выше методом, вычислить соответствующие распределения напряжения сдвига, то эти распределения окажутся неподобными, как этого и следовало ожидать. Однако расхождения между профилями напряжения сдвига больше, чем отклонения,

обнаруженные для профилей скорости; на фоне разброса экспериментальных точек они все же различимы. Тем не менее Клаузер пришел к выводу, что, хотя турбулентный пограничный слой никогда не обладает строгой универсальностью одновременно в отношении распределений осредненной скорости, напряжения сдвига или энергии турбулентности, все же отклонения от универсальности малы и во многих практических случаях ими даже можно пренебречь.

В соответствии с этим, если одновременно принять предположения о подобии как профилей осредненной скорости, так и профилей напряжения сдвига, то можно сделать еще один шаг вперед и предположить, что течение во внешней области является автомодельным, когда турбулентное течение порождается осредненным движением с относительно большой скоростью, не очень сильно отличающейся от скорости свободного потока. В то же время можно воспользоваться следующими двумя эмпирическими фактами: (1) подобием картин течения во внешней области турбулентного пограничного слоя и в следе, а также (2) приблизительным постоянством коэффициента вихревой вязкости в этой области. В этом случае можно ожидать, что решение для распределения осредненной скорости будет подобно решению для течения в следе. Это возможно, если дифференциальные уравнения в обоих этих случаях одинаковы. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение движения (7.87) в следующем виде:

$$U_0\left(1-\frac{U_0-\overline{U}_1}{U_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(U_0-\overline{U}_1)+\overline{U}_2\frac{\partial}{\partial x_2}(U_0-\overline{U}_1)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12}.$$

Когда

$$\frac{U_0-\overline{U}_1}{U_0}\ll 1$$

и если воспользоваться тем же методом оценки порядков величин, что и в § 6.2, то в результате получим

$$U_0\frac{\partial}{\partial x_1}(U_0-\overline{U}_1)\approx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12}.$$

Это приближенное уравнение, которое имеет такой же вид, как и в случае течения в следе за цилиндром, было использовано Таунсендом [31] для расчета распределения осредненной скорости во внешней области при одновременном предположении об автомодельности картины течения (по крайней мере движения крупных вихрей) в этой области. Однако условие $(U_0-\overline{U}_1)/U_0\ll 1$ показывает, что использованное приближенное дифференциальное уравнение справедливо лишь для наиболее удаленной от стенки части рассматриваемой области. Размеры этой наиболее удаленной части внешней области с повышением числа Рейнольдса увеличиваются (Таунсенд [31]), так что при предельно больших числах Рейнольдса предположение

об автомодельности течения может быть распространено на довольно значительную часть пограничного слоя. Далее, Таунсенд ввел предположение о том, что

$$\sigma_{12} = -\rho (\epsilon_m)_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} (U_0 - \overline{U}_1), \tag{7.88}$$

где величина $(\epsilon_m)_{11}$ может пока считаться функцией $x_1$.

Положим теперь

$$U_0 - \overline{U}_1 = u^* f(\xi_2), \tag{7.70}$$

где $\xi_2 = x_2/\delta$. Динамическая скорость $u^*$ может зависеть от $x_1$. Если учесть, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\delta}\frac{d\delta}{dx_1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)_{x_1}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)_{x_1},$$

то уравнение движения преобразуется к виду

$$U_0 \left[\frac{du^*}{dx_1} f(\xi_2) - \frac{u^*}{\delta}\frac{d\delta}{dx_1}\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2)\right] = (\epsilon_m)_{11} \frac{u^*}{\delta^2}\frac{d^2}{d\xi_2^2} f(\xi_2)$$

или

$$-\frac{d\delta}{dx_1}\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2) + \delta \frac{U_0}{u^*}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u^*}{U_0}\right) f(\xi_2) = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 \delta}\frac{d^2}{d\xi_2^2} f(\xi_2). \tag{7.89}$$

За исключением окрестности точки $\xi_2 = 1$, функции $f(\xi_2)$ и $\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2)$ одинаковы по порядку величины.

Но поскольку

$$\frac{U_0}{u^*}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u^*}{U_0}\right) \ll \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dx_1},$$

то при больших числах Рейнольдса второй член в левой части уравнения (7.89) становится малым по сравнению с первым членом. Это можно показать, воспользовавшись, например, соотношением (7.47). При больших числах Рейнольдса коэффициент трения $c_f$ и относительная динамическая скорость $u^*/U_0$ становятся весьма малыми. Дифференцируя уравнение (7.47) по $x_1$, получаем

$$-\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dx_1} = \left[\frac{1}{A}\left(\frac{U_0}{u^*}\right)^2 + \frac{U_0}{u^*}\right]\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u^*}{U_0}\right),$$

откуда следует, что величина

$$\frac{U_0}{u^*}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u^*}{U_0}\right)$$

при больших числах Рейнольдса оказывается малой по сравнению с $(1/\delta)(d\delta/dx_1)$. Это позволяет пренебречь вторым членом в левой части уравнения (7.89), которое в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2}{d\xi_2^2} f(\xi_2) + \frac{U_0\delta}{(\epsilon_m)_{11}} \frac{d\delta}{dx_1} \xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2) = 0. \tag{7.90}$$

Поскольку первый член здесь зависит только от $\xi_2$, то уравнение может выполняться, лишь если

$$\frac{U_0\delta}{(\epsilon_m)_{11}} \frac{d\delta}{dx_1} = a^2, \tag{7.91}$$

т. е. если эта величина является постоянной и не зависит от $x_1$.

Решение дифференциального уравнения (7.90) записывается в форме

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = f(\xi_2) = C \int_{\xi_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} a^2 \xi_2^2\right) d\xi_2$$

или

$$\frac{U_0 - \overline{U}_1}{u^*} = \frac{C}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \xi_2\right)\right], \tag{7.92}$$

где

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} \operatorname{erf}(-u^2)\, du.$$

Тогда на основании соотношения (7.88) получаем следующую формулу для распределения напряжения сдвига:

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = \exp\left(-\frac{1}{2} a^2 \xi_2^2\right) \tag{7.93}$$

и

$$C \frac{(\epsilon_m)_{11}}{u^*\delta} = 1.$$

Полученные здесь решения для распределений избыточной скорости и напряжения сдвига были использованы для сравнения с измерениями Клебанова. На рис. 7.27 представлены результаты расчета распределения скорости, полученные при $a^2 = 3{,}54$ и $C = 13{,}5$. Совпадение с экспериментальными данными наблюдается лишь в ограниченном диапазоне. Заметные отклонения от измеренных значений имеют место при $\xi_2 < 0{,}2$ и $\xi_2 > 0{,}7$.

На рис. 7.28 изображено распределение напряжения сдвига, соответствующее уравнению (7.93). В диапазоне $\xi_2 < 0{,}6$ наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментальными значениями, но выше значения $\xi_2 = 0{,}7$ расчетные величины, как и в случае распре-

деления скорости, лежат значительно выше экспериментальных. Этих слишком высоких значений в диапазоне $\xi_2 > 0{,}7$ и следовало ожидать, так как при предположении о постоянстве величины коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ в поперечном сечении пограничного слоя не учитывается влияние перемежаемости в этой области. Как показывает рис. 7.18, коэффициент перемежаемости $\Omega$ при $\xi_2 = 0{,}7$ становится значительно меньше единицы. Следовательно, если вместо величины $(\epsilon_m)_{11}$ в соотношение (7.88) подставить $(\epsilon_m)_{11}\,\Omega$, то можно ожидать лучшего совпадения. В то же время любопытно заметить, что весьма удовлетворительное согласие с данными измерений наблюдается в диапазоне $\xi_2 < 0{,}5$ (в случае распределения напряжения сдвига даже вплоть до $\xi_2 \to 0$), где упрощенное дифференциальное уравнение (7.90), строго говоря, уже несправедливо, так как предположение, что $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0 \ll 1$, здесь не выполняется. С практической точки зрения это можно рассматривать как счастливую случайность, однако с теоретической точки зрения этот факт является весьма неудовлетворительным.

## § 7.8. Турбулентное течение в прямой круглой трубе. Распределение осредненной скорости

Как указывалось в § 7.1, мы рассмотрим лишь течение в условиях полностью турбулентного движения. Для осуществления этих условий требуется определенный входной участок. Из опытов с потоками в гладких круглых трубах следует, что при свободном от возмущений входе жидкости в трубу переход к турбулентному течению происходит при $U_0 x/\nu \geqslant 10^5$; здесь $U_0$ — скорость равномерного потока на входе в трубу. Эта величина примерно совпадает с соответствующей величиной для течения в пограничном слое на плоской гладкой пластине (см. § 7.3). Этому критическому значению числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{x_1}$ должна соответствовать критическая длина входного участка:

$$\left(\frac{x}{D}\right)_{\text{крит}} \geqslant \frac{10^5}{\mathrm{Re}_D},$$

где $\mathrm{Re}_D = \bar{U}_{\text{ср}} D/\nu$, $\bar{U}_{\text{ср}}$ — средняя скорость в поперечном сечении трубы, принятая равной $U_0$, а $D$ — диаметр трубы.

При наличии возмущений потока на входе в трубу для перехода течения в турбулентное требуется меньшая длина. Однако, чтобы выполнялось условие полностью развитого турбулентного течения, требуется значительно большая длина.

Для случая, когда течение жидкости на входе в трубу уже является турбулентным, Лацко [37] вычислил расстояние от входа, на котором распределение скорости по всему поперечному сечению

трубы принимает форму профиля, соответствующего закону «$^1/_7$». При этом оказалось, что

$$\frac{x}{D} = 0{,}693\,\mathrm{Re}_D^{1/4}.$$

Эта формула дает значительно более короткие входные участки, нежели когда-либо найденные экспериментально. По измерениям Кирстена [38] длина входного участка составляет в зависимости от числа Рейнольдса от 50 до 100 диаметров трубы. Но в то же время Никурадзе [39] для случая возмущенного на входе в трубу потока получил полностью турбулентное течение на расстоянии от $x/D = 25$ до 40, причем значение в 40 калибров было получено при $\mathrm{Re}_D = 9 \cdot 10^5$. Теоретическая формула Лацко дает в этом случае длину входного участка, равную 21 диаметру трубы.

Для практических целей в качестве минимальной длины входного участка можно рекомендовать величину, равную 40 диаметрам, которая была получена Никурадзе.

В § 7.1 мы анализировали сходство и различие между турбулентными течениями в пограничном слое и в трубе. Как и в случае пограничного слоя, при течении в трубе можно выделить «внутреннюю», пристеночную, область и «внешнюю», удаленную от стенки, область, причем последняя занимает наибольшую часть поперечного сечения трубы. Пристеночная область включает в себя вязкий подслой вблизи стенки и турбулентный слой с переходной областью между ними. Течение в пристеночной области не зависит от условий течения вдали от стенки, и поэтому его можно считать одинаковым для пограничного слоя и для течения в трубе. Течение во внешней области может быть в этих двух случаях неодинаковым. В самом деле, при течении в трубе взаимодействие с нетурбулентным потоком отсутствует и перемежаемости турбулентности не наблюдается; в этом заключается одно из отличий течения в трубе от течения в пограничном слое. Другое отличие состоит в том, что условия течения в трубе не зависят от $x$, следствием чего является отсутствие радиальной скорости $\overline{U}_2$ или $\overline{U}_r$ и равномерность распределения статического давления в поперечном сечении трубы. Из условия равновесия между силами напряжения сдвига и силами давления следует, что распределение напряжения сдвига должно строго подчиняться линейной зависимости

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} = \frac{2r}{D} = 1 - \frac{2x_2}{D} = 1 - \xi_2, \tag{7.94}$$

где $r$ — расстояние от оси трубы, а $x_2$ — расстояние от стенки.

Мы уже видели, что в турбулентном пограничном слое распределение напряжения сдвига является линейным только во внешней области, и то лишь приближенно (см. рис. 7.19), в то время как в пристеночной области напряжение сдвига примерно постоянно,

В пристеночной области течения в трубе напряжение сдвига существенно непостоянно, хотя отличие его от напряжения сдвига у стенки $\sigma_w$ может быть очень малым из-за того, что пристеночная область является относительно тонкой. По этой причине пристеночную область течения в трубе тоже обычно принято считать слоем постоянного напряжения, несмотря на некорректность этого предположения. Принятое предположение о подобии течений в пристеночных областях в этих двух случаях по меньшей мере не противоречит тому небольшому количеству экспериментальных данных, которые получены до настоящего времени.

Таким образом, в пристеночной области распределение осредненной скорости для гладкой стенки подчиняется соотношению (7.38):

$$\frac{\overline{U}_x}{u^*} = \varphi(\delta^+ \xi_2), \tag{7.38}$$

где в выражение для $\delta^+$ подставлена величина $\delta = D/2$, т. е.

$$\delta^+ = \frac{u^* D}{2\nu}.$$

Для вязкого подслоя имеем специальное соотношение

$$\frac{\overline{U}_x}{u^*} = \frac{u^* x_2}{\nu}, \tag{7.27}$$

а для полностью турбулентной части пристеночной области — выражение

$$\frac{\overline{U}_x}{u^*} = A \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + B. \tag{7.32а}$$

Для переходной области можно использовать выражения, принятые в случае пограничного слоя.

Обратимся вновь к рис. 7.3, на котором изображены результаты измерений, проведенных Лауфером [41] и Рейхардтом [12], в пристеночной области. Сравнение с рис. 7.2 показывает, что в промежуточном диапазоне вблизи $u^* x_2/\nu = 100$ наблюдается удовлетворительное совпадение между результатами измерений при течении в трубе и в пограничном слое.

Таким образом, для полностью турбулентной части пристеночной области, где справедливо универсальное логарифмическое распределение осредненной скорости (7.32а), должны применяться те же значения постоянных, а именно: $A = 2{,}44$ и $B = 4{,}9$, хотя следует заметить, что, как и в случае пограничного слоя, различные экспериментаторы использовали другие значения этих постоянных. Например, Таунсенд [31] предлагает такое же значение для $A$, а для $B$ — величину 5,85.

Как уже упоминалось при рассмотрении течения в пограничном слое, «толщина» вязкого подслоя определяется величиной $u^* \delta_l/\nu =$

$= 5 \div 7$, а «толщина» переходной области, за пределами которой течение является полностью турбулентным, — величиной $u^* \delta_t/\nu \approx 30$. Чтобы дать представление о толщине $\delta_t$, приведем расчетные значения $\delta_t/D$ при различных значениях $\mathrm{Re}_D = \overline{U}_{\text{ср}} D/\nu$. Результаты этого расчета показаны в приведенной ниже таблице.

| $\mathrm{Re}_D$ | $5 \cdot 10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\delta_t}{D}$ | 0,1 | 0,05 | 0,006 | 0,0008 |

Для «внешней» (относительно стенки) области, которую в случае течения в трубе следует называть областью «ядра», осредненную скорость, как и прежде, удобно представить в виде избытка над

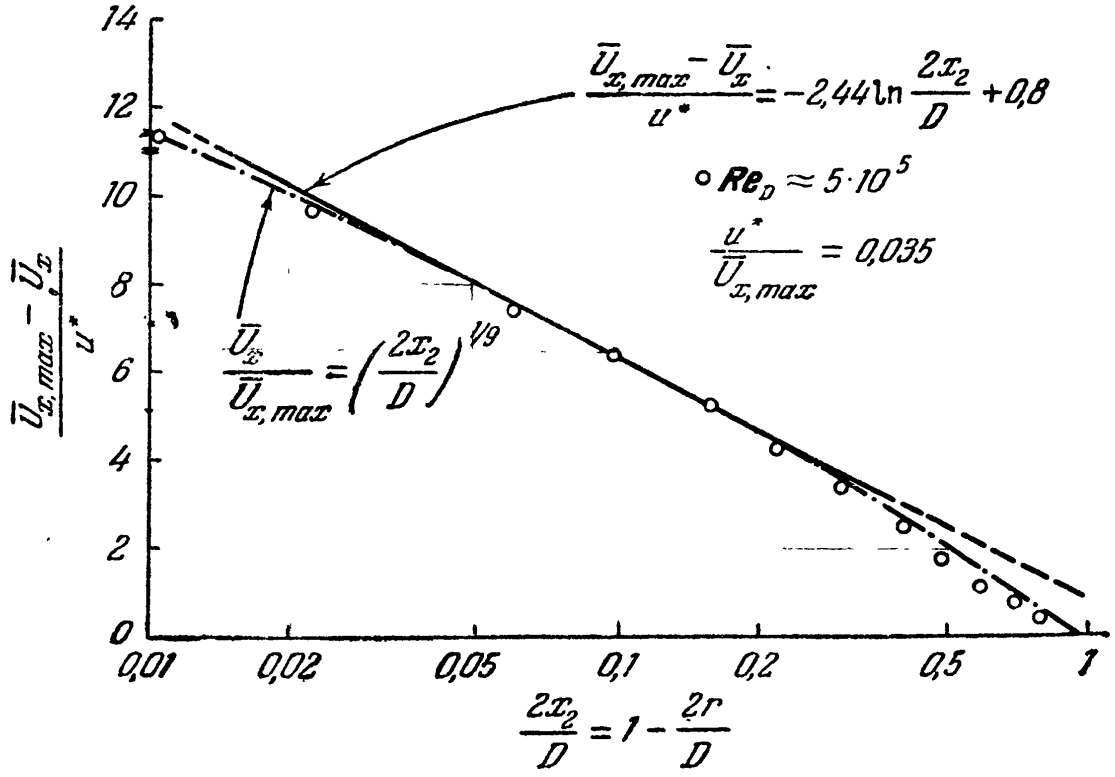



Рис. 7.29. Распределение осредненной скорости в ядре турбулентного потока в трубе, изображенное в полулогарифмическом масштабе [41].

максимальной скоростью в центре трубы. По аналогии с соответствующим выражением (7.66а) для течения в пограничном слое распределение скорости в пристеночной области запишем следующим образом:

$$\frac{\overline{U}_{x,\max} - \overline{U}_x}{u^*} = -A \ln \xi_2 + B^*,$$

где $\xi_2 = 2x_2/D = 1 - 2r/D$.

На рис. 7.29 в полулогарифмическом масштабе изображен график распределения избыточной скорости в зависимости от $\xi_2$ по данным Лауфера [41] для $\bar{U}_{x,\max} D/\nu = 5 \cdot 10^5$; здесь же представлена кривая логарифмического распределения при $A = 2{,}44$ и $B^* = 0{,}8$.

Если сравнить эти величины с соответствующими значениями для течения в пограничном слое (см. рис. 7.4), то можно заметить, что величина $B^*$ для течения в трубе значительно меньше. Это означает, что отклонение действительного распределения скорости от логарифмического при течении в трубе слабее. Однако отсюда не следует, что пристеночная область, для которой справедливо логарифмическое распределение скорости, при течении в трубе по своим размерам больше. Как можно видеть из рис. 7.29, отклонения от логарифмического распределения скорости становятся заметными примерно при $\xi_2 > 0{,}15$, точно так же, как и в случае течения в пограничном слое. Однако величина этих отклонений в данном случае значительно меньше.

Следовательно, если и здесь ввести поправочную функцию $h(\xi_2)$ по формуле

$$\frac{\bar{U}_{x,\max} - \bar{U}_x}{u^*} = -2{,}44 \ln \xi_2 + 0{,}8 + h(\xi_2), \qquad (7.95)$$

то эта поправочная функция $h(\xi_2)$ будет иметь намного меньшие значения, чем соответствующая функция для течения в пограничном

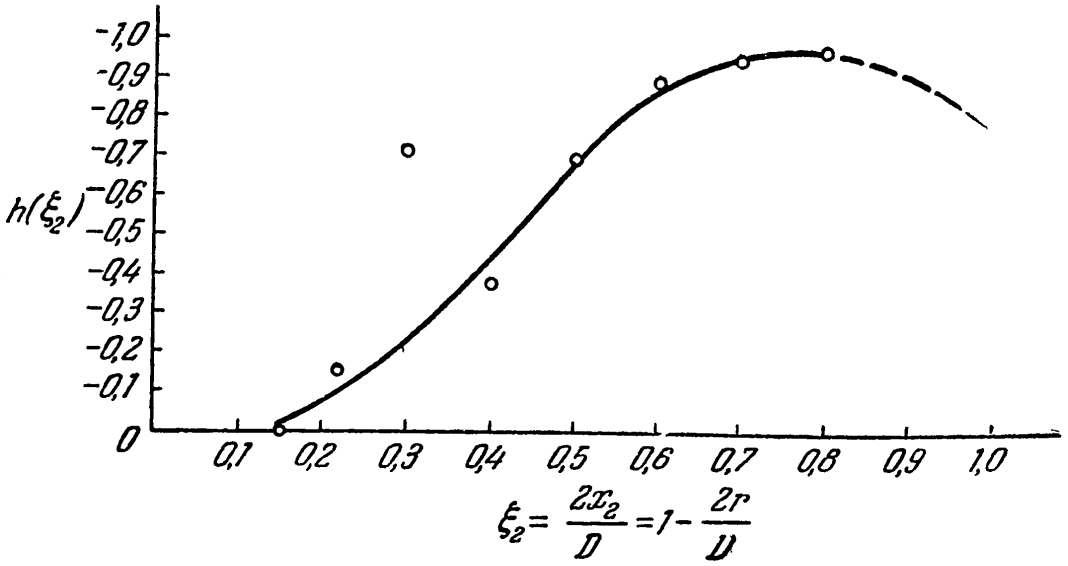



Рис. 7.30. Поправочная функция $h(\xi_2)$ для логарифмического распределения избыточной скорости при течении в трубе.

слое. На рис. 7.30 изображена поправочная функция, полученная на основании опытных данных Лауфера; этот рисунок интересно сравнить с рис. 7.7.

Милликен [7] тоже сделал попытку найти поправочную функцию $h_1(\xi_2)$, определяемую соотношением (7.76), воспользовавшись для

этой цели данными измерений Никурадзе [39, 40] для распределения осредненной скорости при течении в трубе; полученные им величины в случае трубы значительно меньше, чем для пограничного слоя.

Это относительно малое отклонение действительного распределения скорости от логарифмического вблизи центра трубы позволяет понять, почему как раньше, так и теперь для практических приложений используется логарифмическое распределение скорости, распространенное на всю область течения в трубе.

Никурадзе [39, 40], основываясь на своих опытах по течению в круглых трубах с гладкими и шероховатыми стенками, получил следующие логарифмические распределения скорости:

для гладкой трубы

$$\frac{\overline{U}_x}{u^*} = 2{,}5 \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + 5{,}5;$$

для шероховатой трубы

$$\frac{\overline{U}_x}{u^*} = 2{,}5 \ln \frac{x_2}{k} + 8{,}48. \tag{7.96}$$

Тогда для средней скорости $\overline{U}_{ср}$ имеем:

для гладкой трубы

$$\frac{\overline{U}_{ср}}{u^*} = 2{,}5 \ln \frac{u^* D}{2\nu} + 1{,}75;$$

для шероховатой трубы

$$\frac{\overline{U}_{ср}}{u^*} = 2{,}5 \ln \frac{D}{2k} + 4{,}73. \tag{7.97}$$

Динамическую скорость $u^*$ можно выразить через напряжение сдвига на стенке или через градиент давления по формуле

$$\frac{d\overline{P}}{dx} = -\frac{4}{D}\sigma_w = -\frac{4}{D}\rho u^{*2}.$$

Непосредственное определение величины $\overline{U}_{ср}/u^*$ по данным Никурадзе о градиенте давления позволяет получить следующие зависимости:

для гладкой трубы

$$\frac{\overline{U}_{ср}}{u^*} = 2{,}44 \ln \frac{u^* D}{2\nu} + 2{,}0;$$

для шероховатой трубы

$$\frac{\overline{U}_{ср}}{u^*} = 2{,}44 \ln \frac{D}{2k} + 4{,}9. \tag{7.98}$$

Значения постоянных здесь и в приведенных выше выражениях, полученных из распределений скорости, несколько отличаются; это различие можно объяснить небольшими отклонениями логарифмического распределения скорости от действительного.

Следует еще раз напомнить, что численные постоянные в уравнениях для шероховатой трубы соответствуют более или менее равномерной песочной шероховатости. Для других типов шероховатости эти постоянные будут иметь иные значения в зависимости от способа определения параметра шероховатости $k$. Представляется возможным и обычно принято определять эквивалентную песочную шероховатость, что позволяет пользоваться теми же уравнениями (7.97) или (7.98).

При анализе течения в трубах градиент давления в потоке принято выражать вместо динамической скорости $u^*$ через коэффициент трения $\lambda$, который определяется формулой

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{\lambda}{D}\frac{1}{2}\rho\bar{U}_{\text{ср}}^2,$$

откуда

$$\lambda = 8\left(\frac{u^*}{\bar{U}_{\text{ср}}}\right)^2. \tag{7.99}$$

В соответствии с этим распределение скорости можно выразить через $\lambda$ вместо $u^*$. Уравнения (7.98) дают следующие соотношения между $\lambda$ и $\mathrm{Re}_D$, а также между $\lambda$ и $k/D$:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2{,}44\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{32}}\,\mathrm{Re}_D\right) + 2{,}0$$

и

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2{,}44\ln\frac{D}{2k} + 4{,}9. \tag{7.98а}$$

Если распределение скорости выразить теперь через $\lambda$, то придем к выводу, что отношение $\bar{U}_x/\bar{U}_{x,\,\max}$ зависит только от $2x_2/D$ и $\lambda$:

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x,\,\max}} = f\left(\frac{2x_2}{D},\ \lambda\right).$$

Этот результат справедлив как для гладких, так и для шероховатых труб.

В § 7.5 было уже показано, что распределение осредненной скорости в турбулентном пограничном слое удается хорошо аппроксимировать простым степенным законом при условии, что показатель степени зависит все же от числа Рейнольдса.

Такая же аппроксимация может быть применена к распределению скорости при течении в трубе. Следовательно, можно воспользоваться

уравнением (7.58) или вместо него уравнением

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x,\max}} = \left(\frac{2x_2}{D}\right)^{1/n}.$$

Поскольку это распределение скорости зависит лишь от коэффициента трения $\lambda$, то отсюда следует, что как для гладких, так и для шероховатых труб показатель $n$ является функцией только $\lambda$.

Нуннер [42] определил зависимость $n$ от $\lambda$, использовав для этой цели результаты собственных измерений в гладких и шероховатых

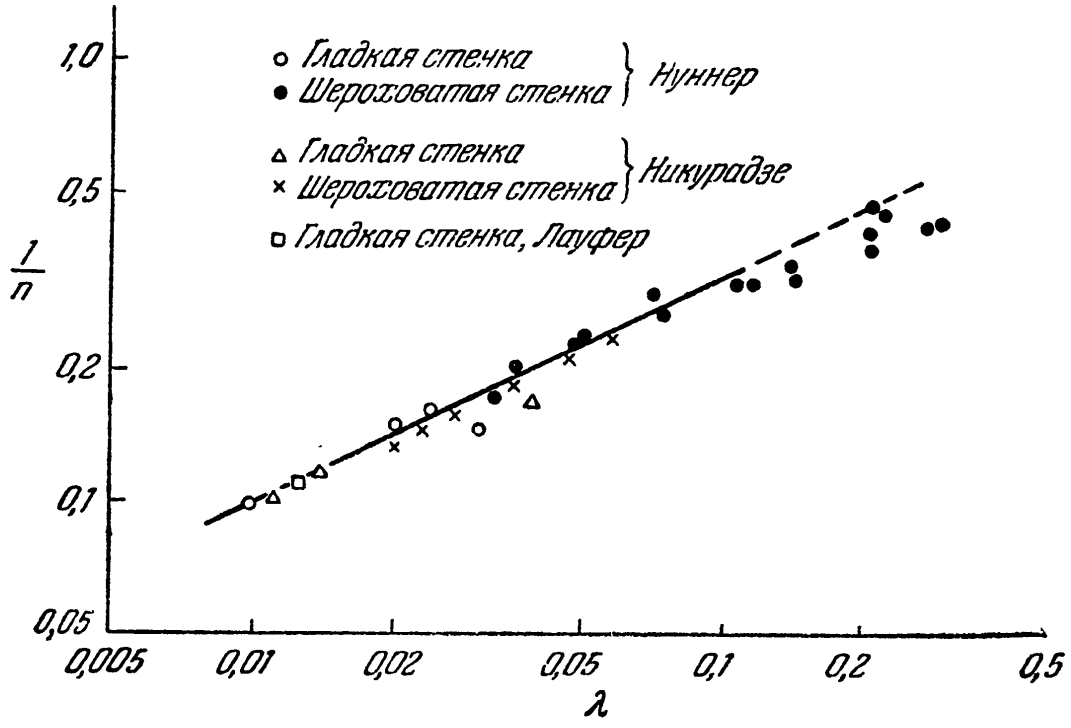



Рис. 7.31. Связь между показателем степени $1/n$ в степенном распределении скорости и коэффициентом трения $\lambda$ [42].

трубах, а также данные Никурадзе [39, 40]. Как показывает рис. 7.31, эта зависимость в первом приближении выражается простой формулой

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\lambda}, \tag{7.100}$$

справедливой в диапазоне $\lambda < 0{,}1$. При $\lambda > 0{,}1$ значения $n$ получаются несколько выше.

Степенной закон распределения скорости был использован также применительно к данным Лауфера. Результаты расчета при значении $n = 9$, соответствующем $\lambda = 0{,}013$ для гладкой трубы, и $\mathrm{Re}_D \approx \approx 5 \cdot 10^5$ изображены на рис. 7.29; отсюда видно, что согласие между расчетным и измеренным распределениями скорости в самом деле является вполне удовлетворительным.

## § 7.9. Измерение характеристик турбулентности при течении в трубе

Наиболее надежные и наиболее исчерпывающие измерения характеристик турбулентности при течении в трубе были произведены Лауфером [41]. Эти опыты проводились на прямой цельнотянутой медной трубе длиной около 500 *см* с внутренним диаметром 24,7 *см*. Скорость воздушного потока составляла в этих опытах два значения: одно, соответствующее максимальной осредненной скорости

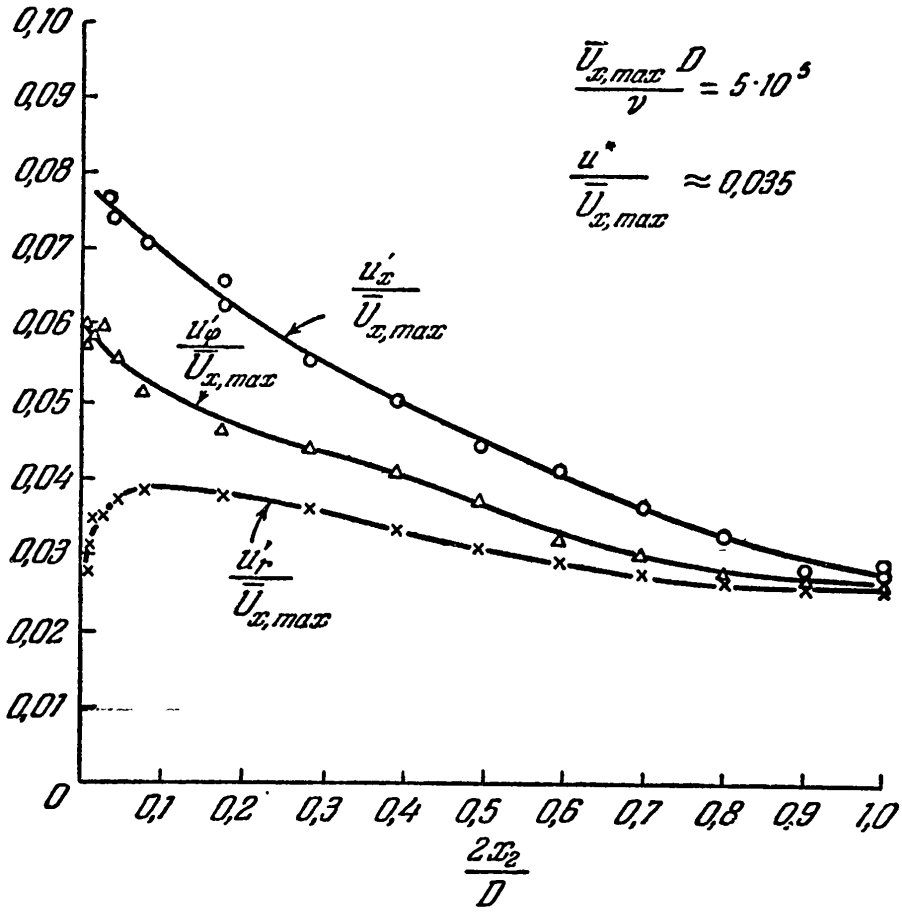



Рис. 7.32. Относительная интенсивность турбулентности потока в трубе [41].

$\overline{U}_{x,\,max} \approx 3$ *м/сек*, и другое, соответствующее $\overline{U}_{x,\,max} \approx 30$ *м/сек*. Числа Рейнольдса $\overline{U}_{x,\,max}D/\nu$, соответствующие этим скоростям, составляют 50 000 и 500 000. Распределения осредненной скорости и характеристик турбулентности измерялись в этих опытах даже в вязком подслое. По измеренному градиенту осредненной скорости вблизи стенки, а также по измеренному градиенту давления на оси можно было определить напряжение сдвига на стенке. Для указанных выше двух значений числа Рейнольдса динамическая скорость $u^*/\overline{U}_{x,\,max}$ составляла соответственно $\sim 0{,}046$ и $0{,}035$.

Распределения компонент относительной интенсивности турбулентности $u'_x/\overline{U}_{x,\,max}$, $u'_r/\overline{U}_{x,\,max}$ и $u'_\varphi/\overline{U}_{x,\,max}$ изображены на рис. 7.32.

Сравнение с рис. 7.10 показывает, что эти характеристики практически имеют ту же величину, как и в пограничном слое (динамические скорости в обоих случаях примерно одинаковы). Условия изотропности, как и в пограничном слое, достигаются в области, значительно удаленной от стенки. Вблизи стенки поперечная компонента интенсивности турбулентности $u'_r$ по своей величине близка

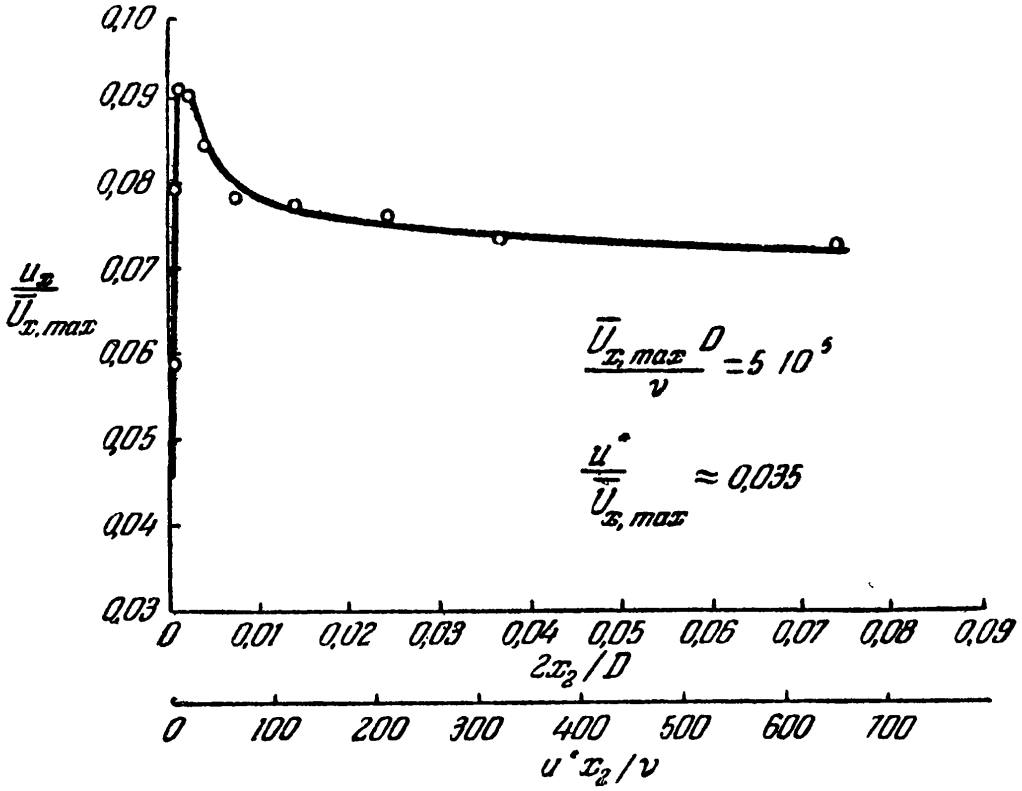



Рис. 7.33. Относительная интенсивность турбулентности $u'_x/\overline{U}_{x,\max}$ вблизи стенки при течении в трубе [41].

к динамической скорости $u^*$, а осевая компонента интенсивности турбулентности $u'_x$ превышает динамическую скорость более чем в два раза.

На рис. 7.32 осевая компонента $u'_x$ не имеет максимума; он достигается в области, очень близкой к стенке. Величина $u'_x/\overline{U}_{x,\max}$ в этой области изображена на рис. 7.33, а отношение $u'_x/u^*$ вместе с $u'_r/u^*$ и $u'_\varphi/u^*$ — на рис. 7.34. Из рассмотрения этих рисунков можно сделать вывод, что величина $u'_x$ достигает своего максимального значения в окрестности $u^*x_2/\nu = 15$, т. е. приблизительно при том же значении этого параметра, как и в случае течения в пограничном слое, исследованного Клебановым (см. рис. 7.12). Измерения Лауфера при $\overline{U}_{x,\max}D/\nu = 5\cdot10^4$ приводят к такому же результату. Если вместо $u^*x_2/\nu$ пользоваться величиной $2x_2/D$, то максимальное значение $u'_x/\overline{U}_{r,\max}$ получается при $2x_2/D \approx 0{,}0017$.

Распределение компонент интенсивности турбулентности, отнесенных к местной осредненной скорости $\overline{U}_x$, в пристеночной области изображено на рис. 7.35. Как и при течении в пограничном слое (см. рис. 7.12), компонента интенсивности турбулентности $u'_x/\overline{U}_x$ достигает постоянного (и в то же время максимального) значения в вязком подслое. В противоположность этому, компоненты $u'_\varphi/\overline{U}_x$ и $u'_r/\overline{U}_x$ вблизи стенки стремятся, по-видимому, к нулю.

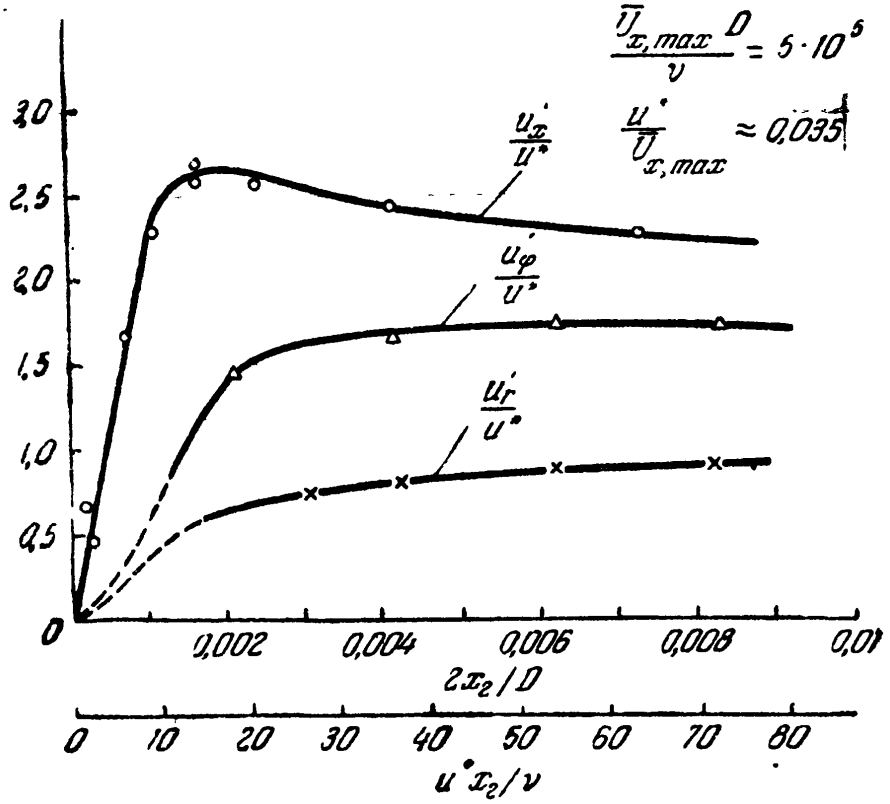



Рис. 7.34. Относительная интенсивность турбулентности вблизи стенки при течении в трубе [41].

По данным Лауфера о величинах $u'_x/\overline{U}_{x,\,max}$, $u'_r/\overline{U}_{x,\,max}$ и $u'_\varphi/\overline{U}_{x,\,max}$ была вычислена кинетическая энергия турбулентности $\overline{q^2}/u^{*2}$; ее распределение в поперечном сечении трубы изображено на рис. 7.36, где приводится также распределение турбулентного напряжения сдвига $-\overline{u_x u_r}/u^{*2}$, измеренное Лауфером. Следует обратить внимание на близкое сходство их с соответствующими результатами для течения в пограничном слое, изображенными на рис. 7.19, где кривые содержат поправку на перемежаемость. Таким образом, если учесть влияние перемежаемости течения в пограничном слое вблизи внешней границы, то станет ясно, что между крупномасштабными движениями при течении в трубе и в полностью турбулентной области пограничного слоя существует тесное сходство. Именно с этими движениями и связаны в основном кинетическая энергия турбулентности и турбулентное напряжение сдвига. Следовательно, аналогичный результат получится и для отношения $-\overline{u_x u_r}/\overline{q^2}$, которое

для случая течения в трубе показано на рис. 7.37, а для течения в пограничном слое — на рис. 7.15.

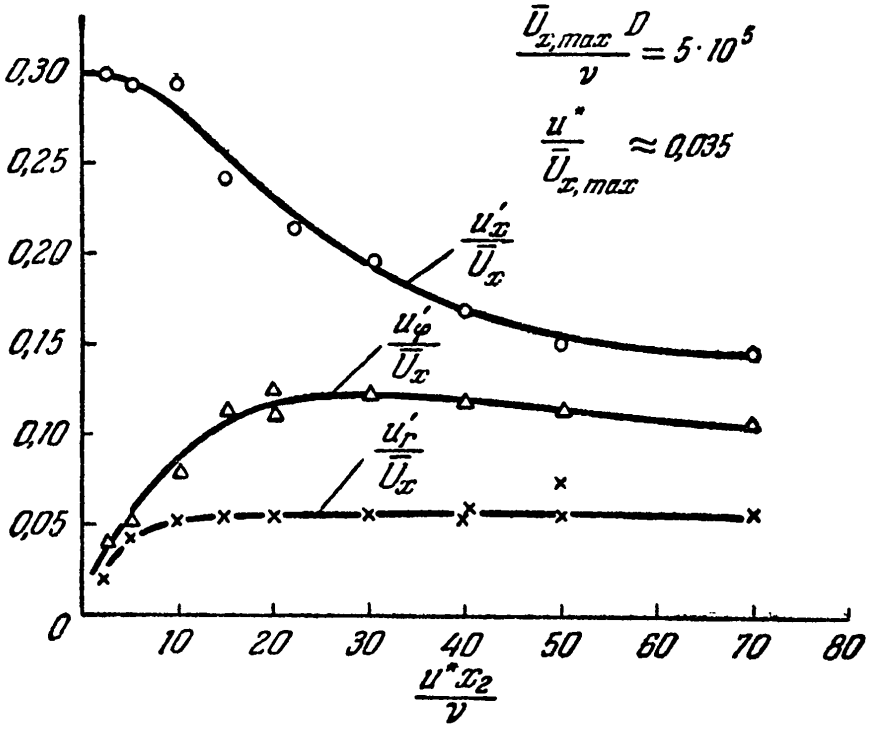



Рис. 7.35. Распределение интенсивности турбулентности, отнесенной к местной осредненной скорости, вблизи стенки при течении в трубе [41].

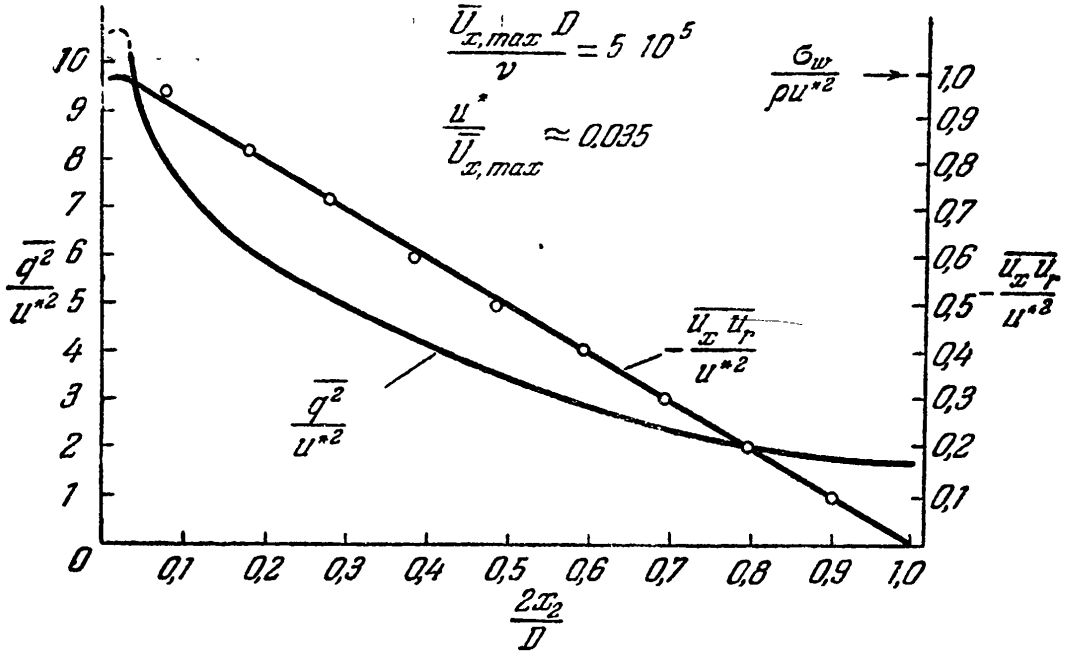



Рис. 7.36. Распределение кинетической энергии турбулентности и турбулентного напряжения сдвига при течении в трубе [41].

Распределение турбулентного напряжения сдвига в пристеночной области при течении в трубе показано на рис. 7.38. Из сравнения этого рисунка с рис. 7.14 для течения в пограничном слое можно сделать

вывод о качественном и количественном совпадении между двумя этими кривыми.

По распределениям осредненной скорости и турбулентного напряжения сдвига был вычислен коэффициент вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{xx}$.

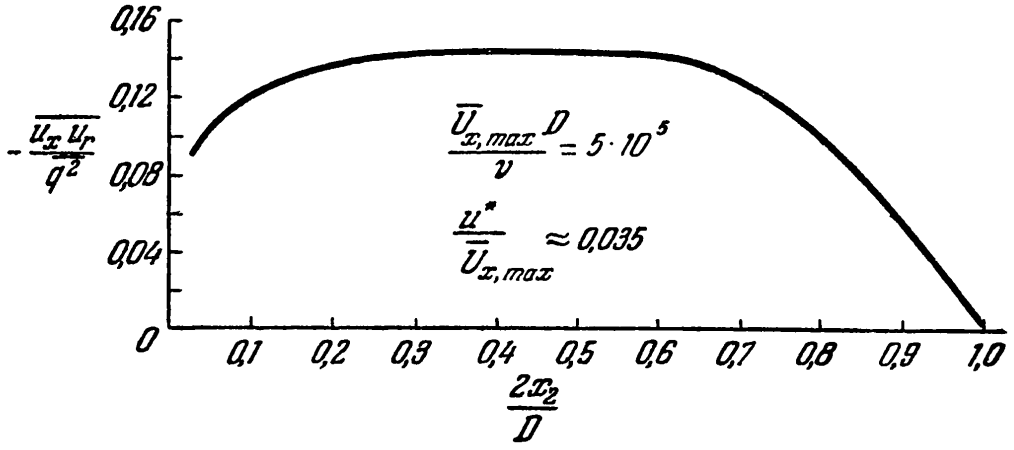



Рис. 7.37. Распределение отношения турбулентного напряжения трения к кинетической энергии турбулентности при течении в трубе [41].

Турбулентное напряжение сдвига, за исключением области вблизи стенки, где существенную роль приобретают вязкие напряжения сдвига, практически равно полному напряжению сдвига, распределение

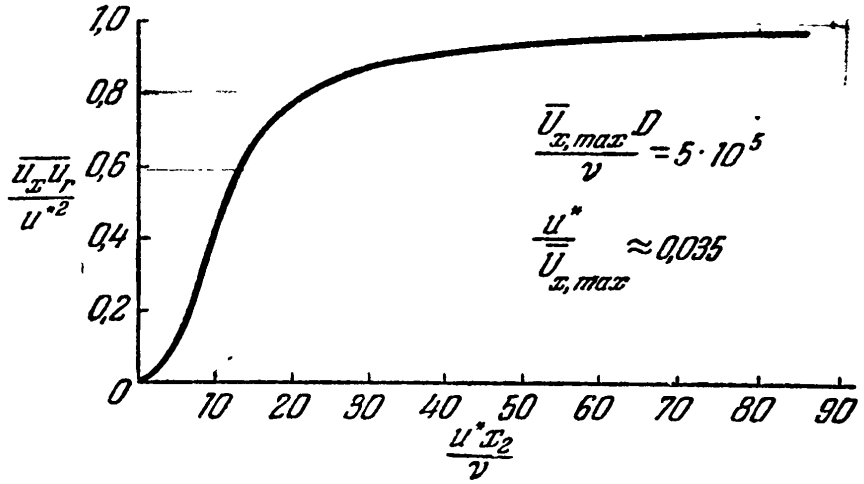



Рис. 7.38. Распределение турбулентного напряжения сдвига вблизи стенки при течении в трубе [41].

которого, согласно уравнению (7.94), подчиняется линейному закону. Из этого уравнения получаем

$$\frac{2(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{x,\max} D} = \frac{u^{*2}}{\bar{U}^2_{x,\max}} \frac{1-\xi_2}{\dfrac{d}{d\xi_2}\left(\dfrac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x,\max}}\right)}. \qquad (7.101)$$

В пристеночной области, где турбулентное напряжение сдвига вблизи стенки составляет лишь часть полного напряжения сдвига,

коэффициент вихревой вязкости может быть получен непосредственно из распределения напряжения сдвига. Тогда вместо соотношения (7.101) следует использовать формулу

$$\frac{2(\epsilon_m)_{xx}}{u^* D} = \frac{\bar{U}_{x,\max}}{u^*} \frac{2\nu}{\bar{U}_{x,\max} D} \frac{-\overline{u_x u_r}/u^{*2}}{\frac{d}{dx_2^+}\left(\frac{\bar{U}_x}{u^*}\right)}, \qquad (7.102)$$

где $x_2^+ = u^* x_2/\nu$.

Вычисленные описанным способом коэффициенты вихревой вязкости представлены на рис. 7.39 — для области ядра — и на рис. 7.40 — для пристеночной области. Для области ядра при этом были использованы не только данные Лауфера о распределении осредненной

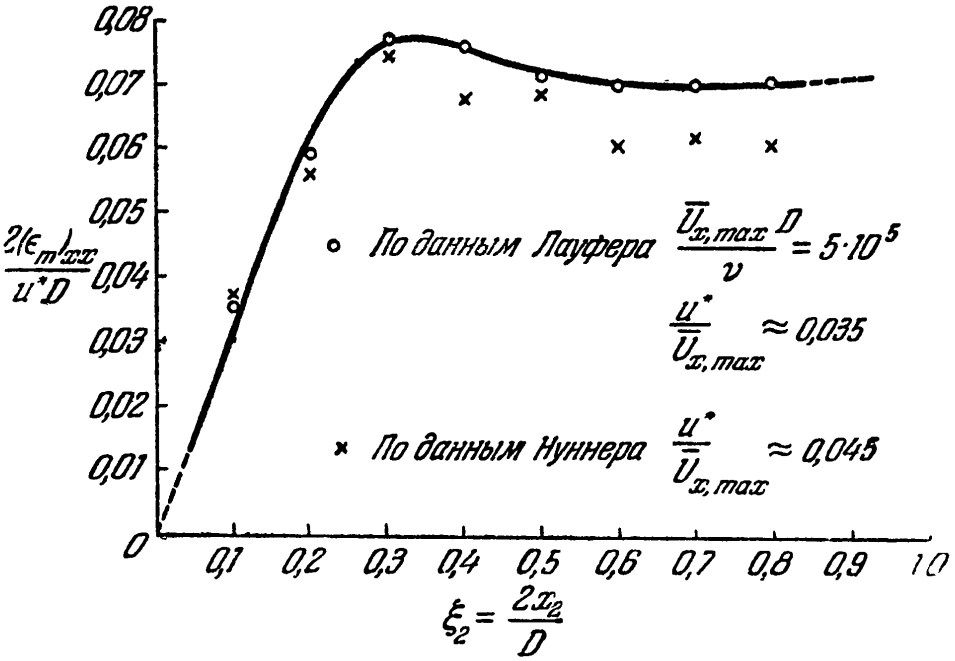



Рис. 7.39. Распределение коэффициента вихревой вязкости при течении в трубе, вычисленное по данным Лауфера [41] и Нуннера [42].

скорости, но также и данные Нуннера [42], в опытах которого динамическая скорость составляла $u^*/\bar{U}_{x,\max} \approx 0{,}045$.

Для области ядра течения в трубе распределение коэффициента вихревой вязкости имеет как качественное, так и количественное сходство с соответствующим распределением для внешней области течения в пограничном слое, если, как и прежде, рассматривать лишь полностью турбулентную зону (см. рис. 7.19). Коэффициент вихревой вязкости вначале линейно возрастает с увеличением $\xi_2 = 2x_2/D$, затем достигает максимума вблизи $\xi_2 = 0{,}3$, а после этого несколько убывает и при $\xi_2 = 0{,}5$ достигает приблизительно постоянного значения. Такого же вида кривая была получена Рейхардтом [12] для двумерного течения в канале, хотя в этом случае максимум наблюдался в диапазоне $0{,}4 < \xi_2 < 0{,}5$.

Для пристеночной области величины $2(\epsilon_m)_{xx}/u^*D$ при течении в трубе значительно меньше, чем $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ для пограничного слоя.

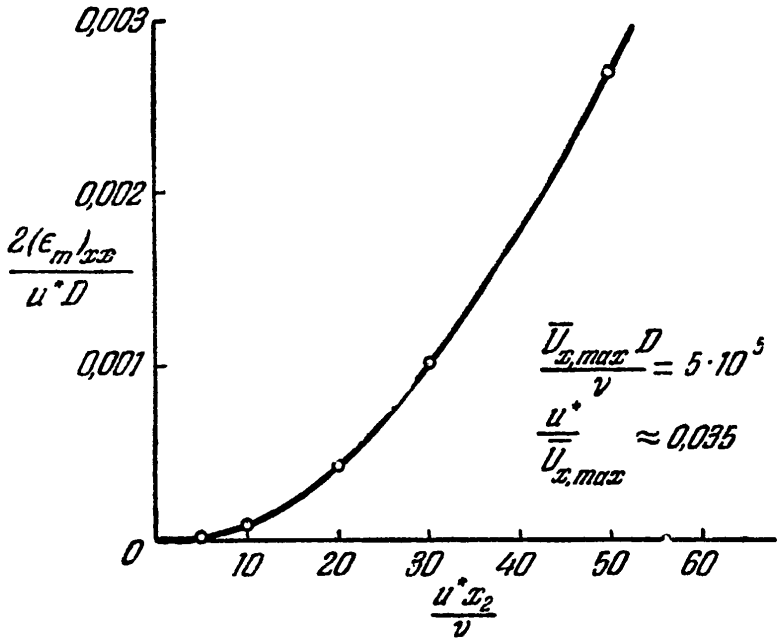



Рис. 7.40. Распределение коэффициента вихревой вязкости вблизи стенки при течении в трубе [41].

Значит, ни $D/2$, ни $\delta$ не могут служить в качестве масштаба длины для пристеночной области. Поскольку течение здесь определяется

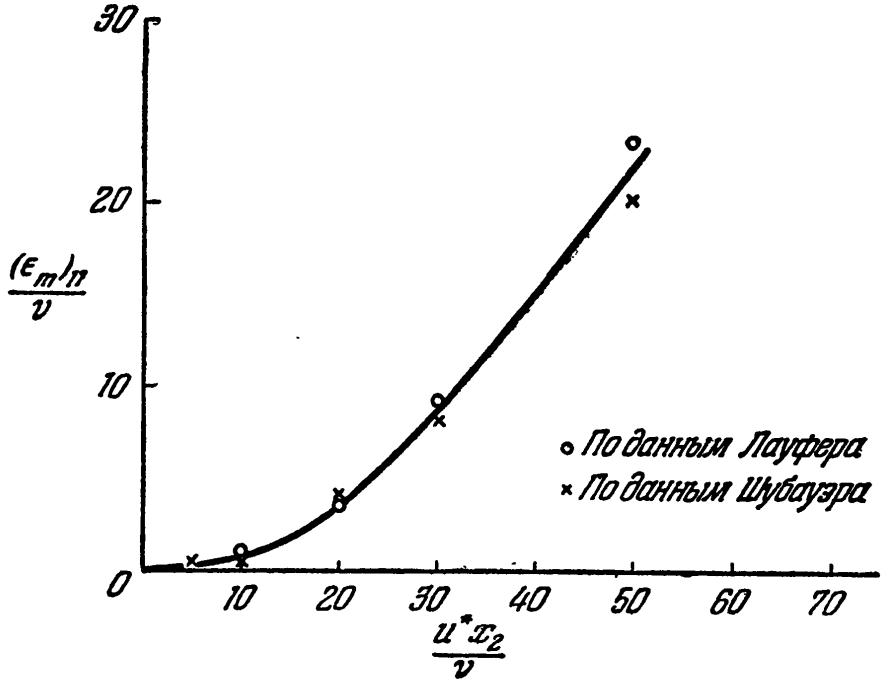



Рис. 7.41. Коэффициент вихревой вязкости в пристеночной области потока в трубе (по Лауферу [41]) и в пограничном слое (по Шубауэру [30]).

только величинами $u^*$ и $\nu$, то масштабом длины, который следует использовать, должно являться отношение $\nu/u^*$. Если воспользоваться

этим масштабом длины, то вместо величины $2(\epsilon_m)_{xx}/u^*D$ или $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ надлежит рассматривать $(\epsilon_m)_{11}/\nu$. Распределение величины $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ как для течения в трубе, так и для течения в пограничном слое изображено на рис. 7.41. Изменение $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ в зависимости от $x_2^+ = u^* x_2/\nu$ может быть аппроксимировано степенным законом, а именно: $(\epsilon_m)_{11}/\nu = (x_2^+)^n$, где $n \approx 2{,}1$. Это значение $n$ ниже найденной теоретически величины, равной или большей 3. Поэтому к полученному здесь эмпирическому значению следует относиться с осторожностью, особенно если учесть низкую точность измерений в зоне, очень близкой к стенке.

Исходя из приближенного соотношения (7.21) для $\varepsilon'$, Лауфер оценил диссипацию под действием турбулентности. Для этого он измерил величины $\overline{(\partial u_x/\partial x)^2}$, $\overline{(\partial u_r/\partial x)^2}$ и $\overline{(\partial u_\varphi/\partial x)^2}$, приняв $\partial/\partial x \approx \approx -\overline{U}_x^{-1}\partial/\partial t$, что приближенно справедливо для потока с поперечным сдвигом, лишь если $(u_x/\overline{U}_x)^2 \ll 1$ (см. § 1.8). Измерить величины $\overline{(\partial u_r/\partial r)^2}$, $\overline{(\partial u_\varphi/\partial r)^2}$, $\overline{(\partial u_r/r\,\partial\varphi)^2}$ и $\overline{(\partial u_\varphi/r\,\partial\varphi)^2}$ не представлялось возможным; но, как и Клебанов при исследовании пограничного слоя, Лауфер ввел предположение о достаточной степени локальной изотропности. Соотношения изотропности имеют вид

$$\overline{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2}$$

и

$$\overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{r\,\partial\varphi}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_r}{r\,\partial\varphi}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_x}{r\,\partial\varphi}\right)^2}.$$

Поддающиеся измерению величины свидетельствуют о наличии приемлемой степени изотропности, за исключением области, близкой к стенке. При сделанных выше допущениях соотношение (7.21) принимает вид

$$\varepsilon' = \nu\left[\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x}\right)^2} + \frac{5}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2} + \frac{5}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_x}{r\,\partial\varphi}\right)^2}\right].$$

Эта турбулентная диссипация, приведенная к безразмерной форме с помощью величин $u^*$ и $D/2$, изображена на рис. 7.42 при значениях $\overline{U}_{x,\max} D/\nu = 5 \cdot 10^4$ и $5 \cdot 10^5$. При более высоком числе Рейнольдса измерение отдельных составляющих турбулентной диссипации было чрезвычайно трудным. Полученные при этом значения представляются слишком низкими, поскольку вклад той части спектра турбулентности, которая соответствует высоким значениям волновых чисел, мог измеряться лишь с большой ошибкой и наверняка был занижен. Поэтому оценка диссипации проводилась в этом случае по результатам, полученным при более низком значении числа Рейнольдса

в предположении о том, что в области, близкой к стенке, (1) существует подобие, если в качестве масштабов скорости и длины выбраны соответственно $u^*$ и $\nu/u^*$, и (2) ошибка, выраженная в процентах, одинакова по всему поперечному сечению трубы. Вычисленная таким способом диссипация при более высоком числе Рейнольдса представлена на рис. 7.42 пунктирной линией. Распределение диссипации в рассматриваемом случае очень сходно с распределением диссипации в пограничном слое (рис. 7.20) и, подобно ему, полностью отличается от распределения диссипации в свободном турбулентном потоке, для которого характерна высокая степень однородности в поперечном

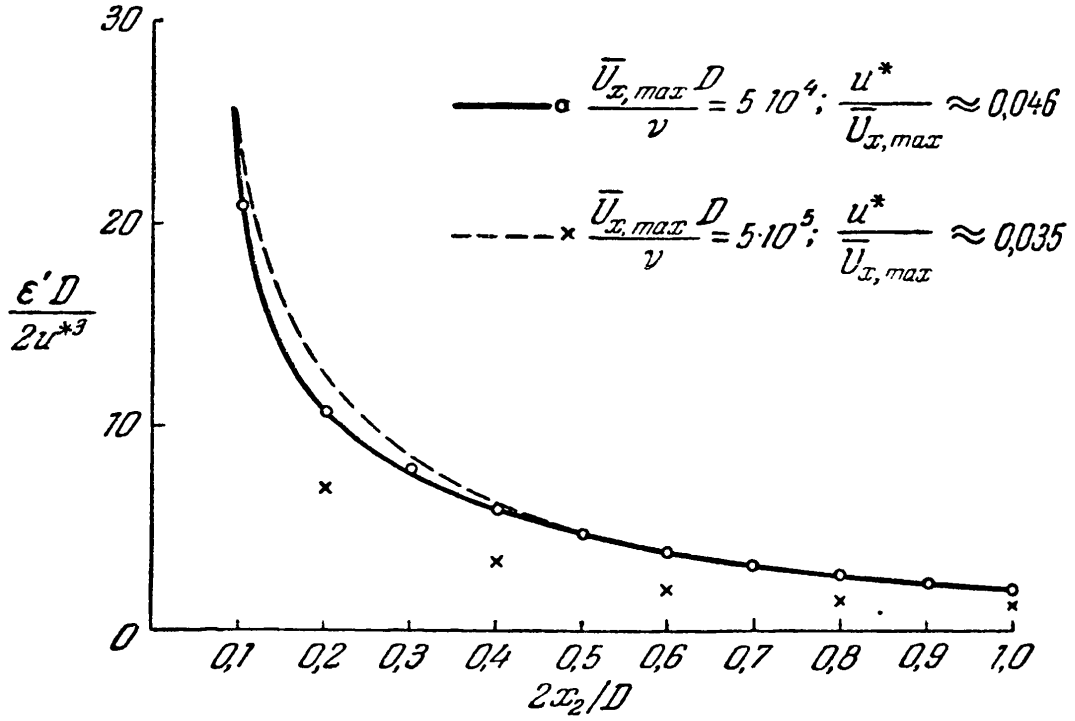



Рис. 7.42. Турбулентная диссипация при течении в трубе [41].

сечении области турбулентного течения. Это указывает на тот факт, что мелкомасштабная структура пристеночной турбулентности значительно менее однородна, нежели мелкомасштабная структура свободной турбулентности.

Пользуясь методом термоанемометра, впервые предложенным и примененным для этой цели Таунсендом (см. § 2.4), Лауфер измерил тройные корреляции скорости $\overline{u_r^3}$, $\overline{u_x^2 u_r}$ и $\overline{u_\varphi^2 u_r}$. Таким образом, ему удалось определить распределение величины $\overline{u_r q^2}$. Благодаря этому по известным распределениям осредненной скорости, турбулентного напряжения сдвига, кинетической энергии турбулентности и диссипации оказалось возможным составить баланс турбулентной энергии, ибо единственным неизвестным слагаемым в этом балансе оставалось распределение диффузии энергии давления $\overline{u_r p}$, которую и можно было считать величиной, замыкающей баланс.

Как отмечалось в § 7.2, полное уравнение баланса энергии турбулентности может быть в той или иной степени упрощено, в зависимости от того, какую область течения в трубе мы рассматриваем. Если рассматривать ту часть пристеночной области, которая расположена наиболее близко к стенке, то можно пользоваться уравнением (7.5а). Выбирая в качестве масштабов скорости и длины

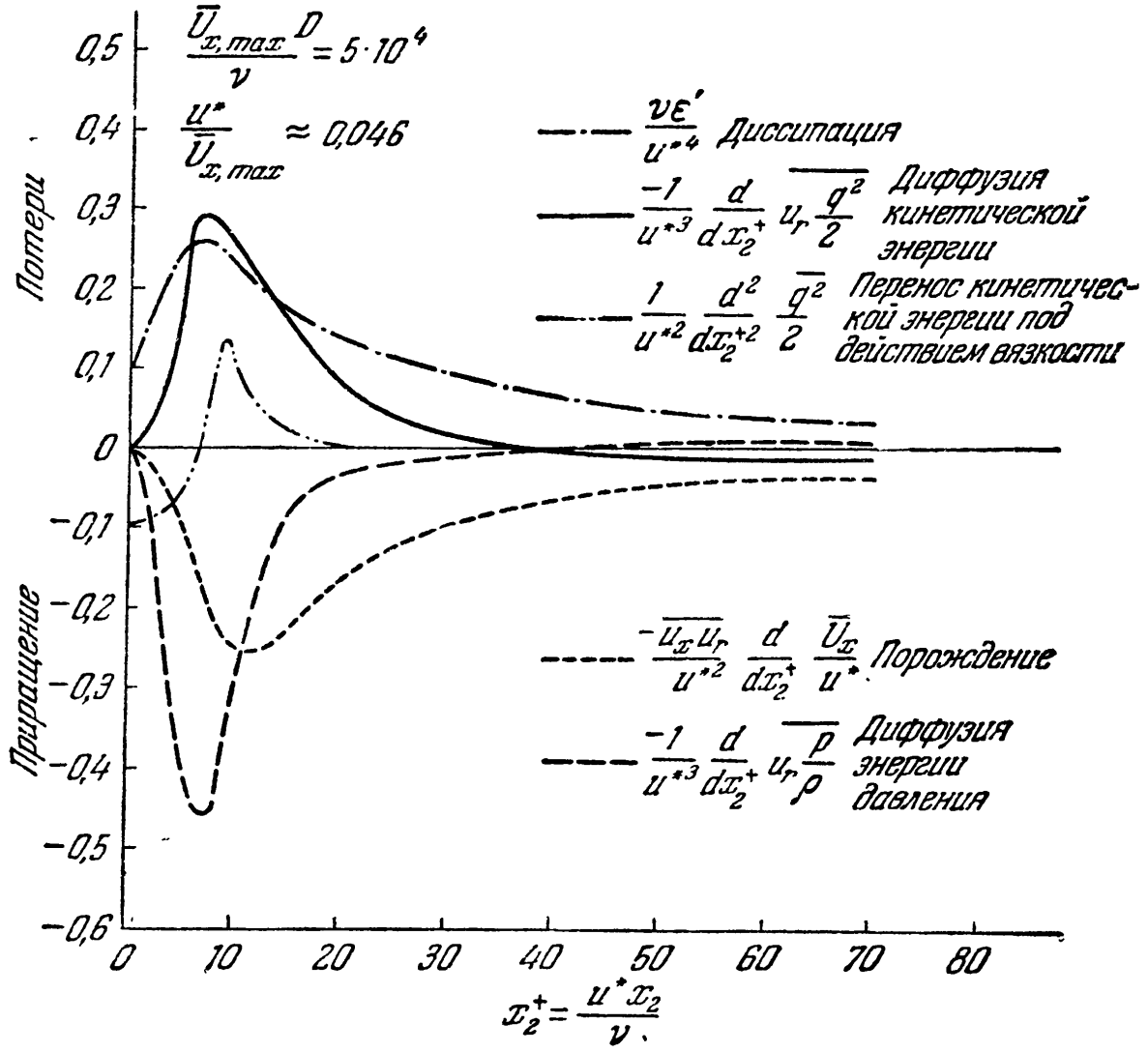



Рис. 7.43. Баланс энергии в пристеночной области потока в трубе [41].

соответственно величины $u^*$ и $\nu/u^*$, можно преобразовать уравнение (7.5б) для течения в трубе к следующей безразмерной форме:

$$\frac{\overline{u_xu_r}}{u^{*2}}\frac{d}{dx_2^+}\left(\frac{\overline{U}_x}{u^*}\right)+\frac{1}{u^{*3}}\frac{d}{dx_2^+}\overline{u_r\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}=\frac{\nu\varepsilon'}{u^*}-\frac{d^2}{dx_2^{+2}}\frac{\overline{q^2}}{2u^{*2}}.$$

Здесь знаки перед некоторыми членами отличаются от знаков в уравнении (7.5б) в силу того, что положительные направления скорости $u_r$ и оси $x_2$ противоположны.

На рис. 7.43 представлен баланс энергии в пристеночной области, измеренный Лауфером и скорректированный Таунсендом [31], который

обратил внимание на то, что Лауфер при оценке диссипации не учел влияния ее больших градиентов вблизи стенки.

В области, наиболее близкой к стенке, все члены, входящие в приведенное выше уравнение, являются существенными. Можно заметить, что члены, характеризующие диссипацию и порождение энергии, почти равны по величине, но противоположны по знаку; то же самое можно

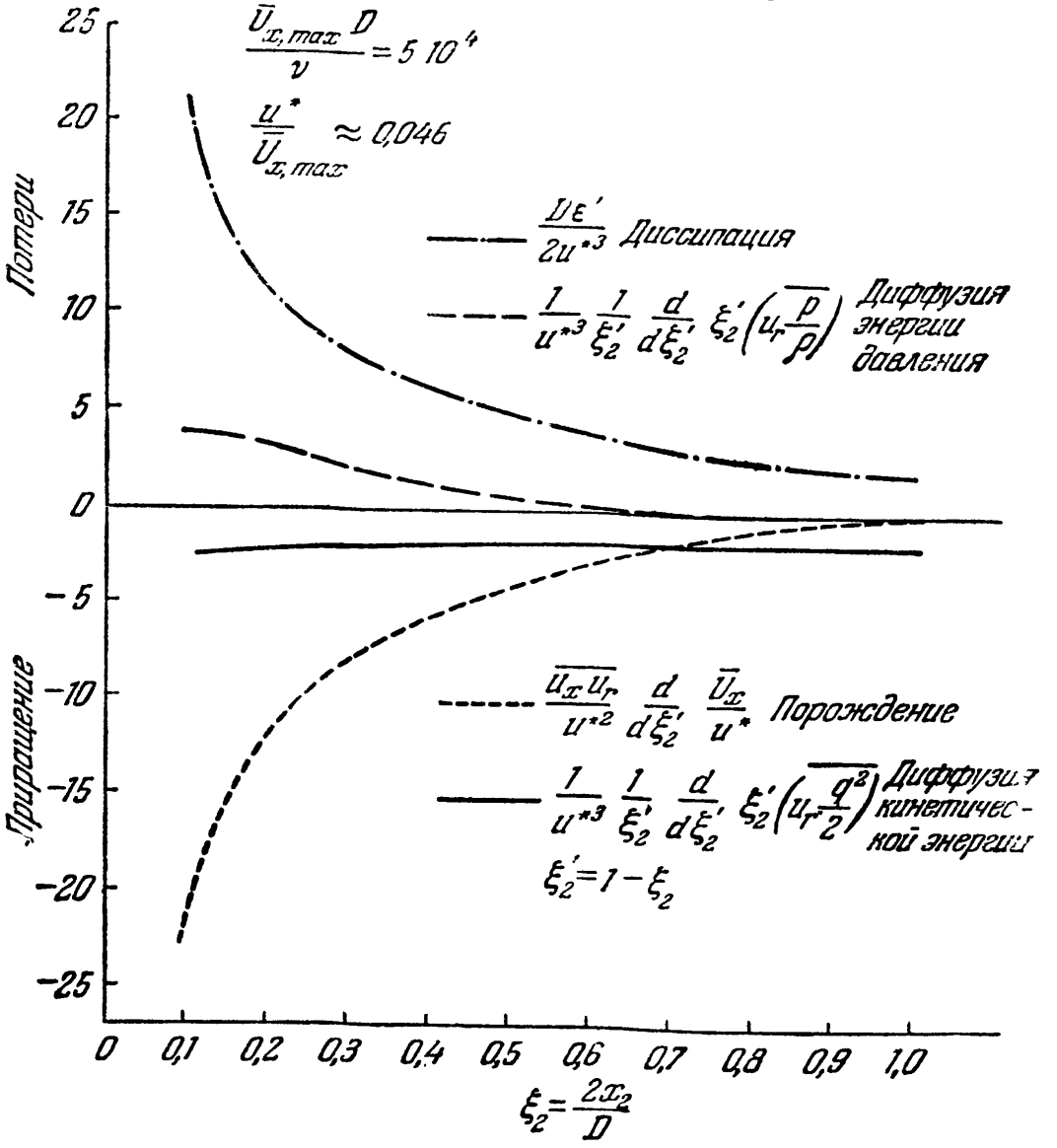



Рис. 7.44. Баланс энергии в ядре потока в трубе [41].

сказать и о слагаемых, представляющих турбулентную диффузию кинетической энергии и энергии давления.

В области, расположенной дальше от стенки, основной вклад в баланс энергии приходится на долю порождения и диссипации энергии. Поэтому для данной области удовлетворяется более простое уравнение (7.6), хотя здесь и наблюдается незначительный перенос энергии за счет турбулентной дуффузии. Как ясно показывает рис. 7.44. на котором представлен баланс энергии для области ядра, рассматриваемая область занимает значительную часть полного поперечного сечения трубы.

Для области ядра, по-видимому, более подходящим является уравнение (7.20). Используя $u^*$ и $D/2$ в качестве соответствующих масштабов скорости и длины, можно преобразовать уравнение (7.20) к безразмерной форме:

$$\frac{\overline{u_x u_r}}{u^{*2}} \frac{d}{d\xi_2'}\left(\frac{\overline{U}_x}{u^*}\right) + \frac{1}{u^{*3}} \frac{1}{\xi_2'} \frac{d}{d\xi_2'}\left\{\xi_2'\left[\overline{u_r\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}\right]\right\} + \frac{\varepsilon' D}{2u^{*3}} = 0,$$

где $\xi_2' = 1 - \xi_2 = \frac{2r}{D}$.

В этой области, скажем, при $\xi_2 < 0{,}2$, определенный, хотя и относительно небольшой, вклад приходится на долю турбулентной диффузии кинетической энергии и энергии давления. В то время как турбулентная диффузия энергии давления уменьшается и в центральной области ($\xi_2 > 0{,}6$) становится пренебрежимо малой, роль турбулентной диффузии кинетической энергии с увеличением $\xi_2$ все более возрастает. В области, близкой к оси трубы, диссипация энергии уравновешивается единственно лишь турбулентной диффузией кинетической энергии.

Насколько можно судить по рис. 7.43 и 7.44, благодаря турбулентной диффузии, в направлении от стенки к центру трубы существует непрерывный поток кинетической энергии турбулентности. При этом в переходной области ($x_2^+ < 30$) наблюдаются потери кинетической энергии, а снаружи этой области и в области ядра имеется прирост энергии. Аналогично по направлению к стенке, в области $\xi_2 < 0{,}5$, существует, по-видимому, поток энергии давления, который сопровождается приростом энергии в переходной области и потерями снаружи этой области. Можно заметить, что перенос энергии в последнем случае направлен против градиента кинетической энергии турбулентности (ср. рис. 7.36).

Спектры энергии компонент турбулентных пульсаций скорости $u_x$ и $u_r$, измеренные Лауфером в различных точках поперечного сечения потока в трубе, уже были показаны на рис. 4.3 и 4.4. Помимо того, что говорилось об этих спектрах в главе 4, можно отметить, что в диапазоне наиболее низких волновых чисел энергия компоненты $u_x$ во всех точках значительно больше энергии компоненты $u_r$, в то время как в диапазоне высоких волновых чисел наблюдается противоположная тенденция. Это различие энергетических спектров ясно видно на рис. 7.45 и 7.46, на которых указанные спектры изображены вместе с энергетическим спектром компоненты $u_\varphi$ соответственно для точек $2x_2/D = 1$ и $2x_2/D = 0{,}074$.

В центре трубы спектры $E_2(k_1)$ и $E_3(k_1)$ компонент $u_r$ и $u_\varphi$ одинаковы (при измерениях никакой разницы обнаружить не удалось). Однако в пристеночной области, как показывают спектры (рис. 7.46), снятые при $2x_2/D = 0{,}074$ ($u^* x_2/\nu \approx 650$), дело обстоит иначе. Раз-

личия между этими спектрами в диапазоне малых волновых чисел соответствуют различиям, наблюдавшимся в случае интенсивностей $u'_x$, $u'_r$ и $u'_\varphi$. Согласно кривым распределения, изображенным на рис. 7.32, в центре трубы $u'_r \approx u'_\varphi$, а величина $u'_x$ больше, чем $u'_r$ и $u'_\varphi$, в то время как в пристеночной области $u'_x > u'_\varphi > u'_r$.

Лауфер не проводил измерений пространственных корреляций компонент турбулентных пульсаций скорости для течения в трубе;

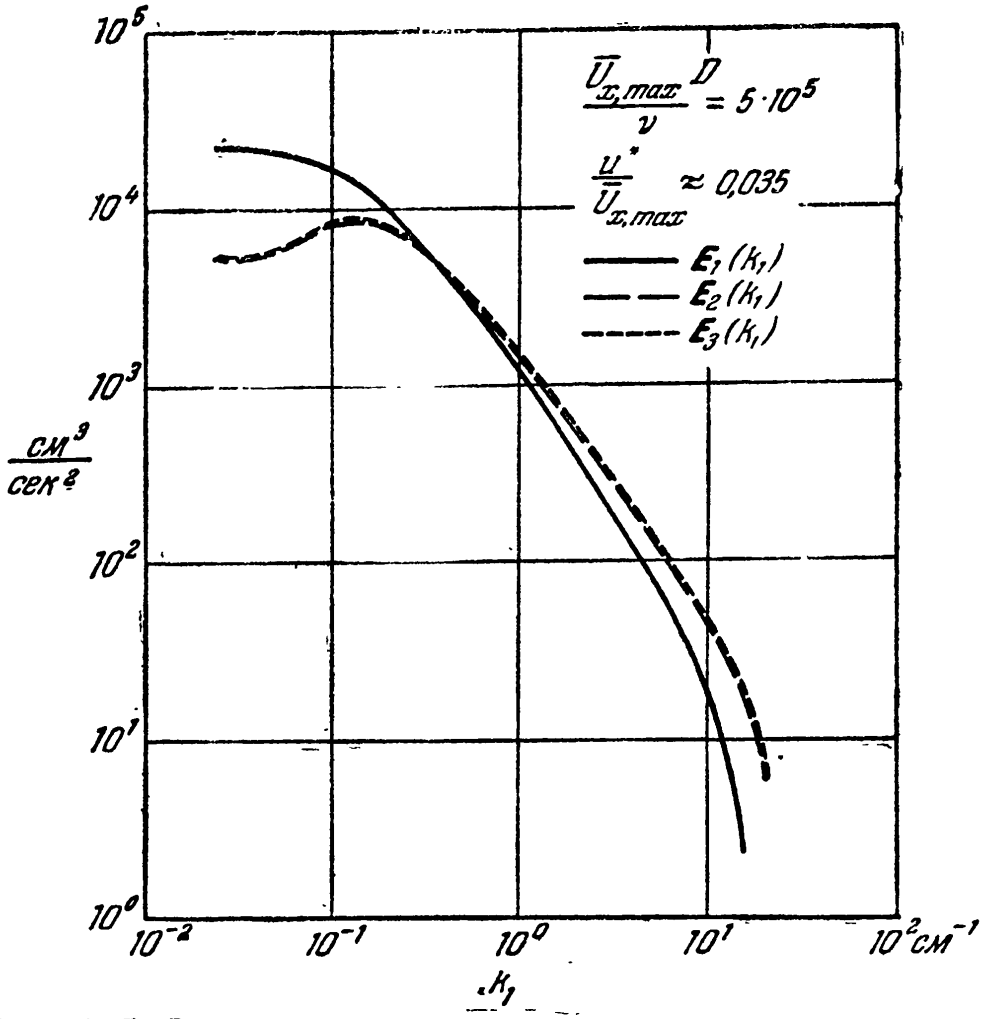



Рис. 7.45. Энергетические спектры на оси потока в трубе ($2x_2/D = 1$) [41].

однако подобные измерения были осуществлены им в двумерном канале [43]. Из результатов этих измерений следует, что продольная корреляция в осевом направлении $\overline{u_1(\xi_1)\, u_1(\xi_1 + x_1)}$ простирается на значительно бóльшие расстояния, нежели поперечные корреляции $\overline{u_1(\xi_2)\, u_1(\xi_2 + x_2)}$ и $\overline{u_1(\xi_3)\, u_1(\xi_3 + x_3)}$ (координата $x_2$ отсчитывается по перпендикуляру к стенке). Интегральный масштаб $\Lambda_f$ в направлении оси $x_1$ оказался приблизительно в 0,8 раза меньше полуширины канала; интегральные масштабы $\Lambda_g$ в направлении осей $x_2$ и $x_3$ были примерно равны друг другу и составляли $0{,}2 \div 0{,}3$ от полуширины канала. Изменение этих интегральных масштабов в поперечном

сечении области ядра было невелико. Но в то же время соответствующие масштабы диссипации $\lambda_f$ и $\lambda_g$, как оказалось, возрастают с увеличением расстояния от стенки, а их максимальные значения составляют около 0,1 от полуширины канала. Очевидно, турбулентность в области ядра была образована в данном случае крупными вихрями, вытянутыми в осевом направлении. Аналогичные результаты в отношении

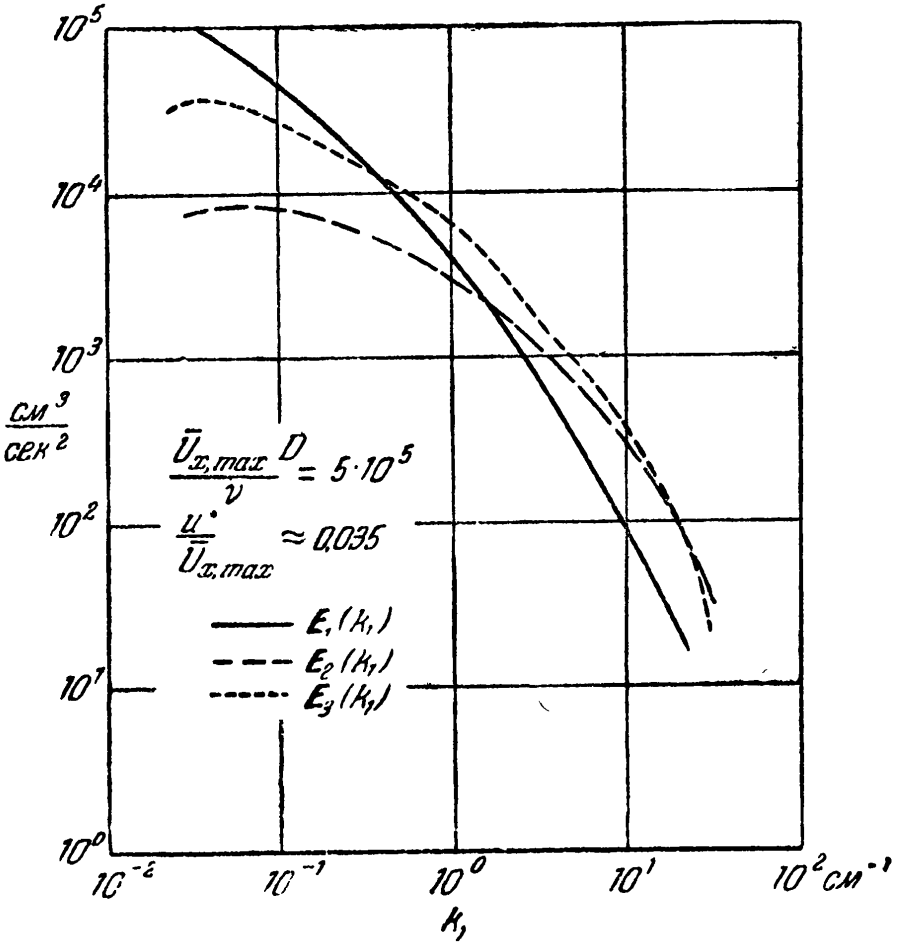



Рис. 7.46. Энергетические спектры потока в трубе при $2x_2/D = 0{,}074$ ($u^* x_2/\nu \approx 650$) [41].

величины интегрального и диссипативного масштабов получаются и из анализа измерений Лауфера, относящихся к кинетической энергии и диссипации при течении в трубе, если для их оценки воспользоваться соотношениями (3.105) и (3.96), приведенными в главе 3 (Таунсенд [31]; длина $l_e$ порядка величины интегрального масштаба).

## § 7.10. Структура турбулентного потока в трубе

На основании фактов, изложенных в предыдущем параграфе, можно представить определенную картину структуры турбулентного потока в трубе. До некоторой степени эта картина применима также и к турбулентному пограничному слою, так как, согласно экспериментальным данным, между течением в трубе и течением в пограничном слое существует тесное сходство. Степень этого сходства возрастает по

мере приближения к стенке. В пристеночной области никакой разницы между течением в трубе и в пограничном слое не существует. Одна из причин такого положения, когда подобие в более удаленных от стенки областях ослабевает, состоит в том, что при течении в пограничном слое в осевом и поперечном направлениях происходит конвективный перенос, обусловленный осредненным движением, в то время как при турбулентном течении в трубе его не наблюдается. Это становится очевидным, если сравнивать балансы энергии турбулентности для обоих течений (ср., например, рис. 7.21 и 7.44). Другой причиной является то, что при течении в трубе поток не имеет перемежающегося характера, подобного тому, который наблюдается во внешней области пограничного слоя, где существует взаимодействие с невозмущенным нетурбулентным свободным потоком.

Наиболее существенные факты относительно течения в трубе вкратце сводятся к следующему.

Порождение и диссипация кинетической энергии турбулентности имеют резко выраженный максимум в переходном слое вблизи стенки.

В большей части поперечного сечения трубы основной вклад в баланс энергии турбулентности приходится на долю порождения и диссипации и, больше того, обе эти величины приблизительно одинаковы, так что турбулентность практически находится в состоянии энергетического равновесия.

Благодаря турбулентной диффузии имеется поток кинетической энергии в направлении ее градиента, к центру трубы, которым обусловлены потери энергии в пристеночной области; это — единственный источник энергии в центральной области трубы, компенсирующий потери из-за диссипации. В то же время переходный слой получает энергию вследствие турбулентной диффузии энергии давления, направленной из области ядра к стенке.

Эти процессы схематически показаны на рис. 7.47.

В центре трубы наблюдается некоторая анизотропность, проявляющаяся в том, что $u'_x > u'_r$, но $u'_r \approx u'_\varphi$; степень анизотропности возрастает по направлению к пристеночной области, где $u'_x > u'_\varphi > u'_r$. В пристеночной области порождение энергии турбулентности при $u^* x_2/\nu \approx 12$ достигает максимума. В этой точке величина $u'_r$ очень мала, в то время как величина $u'_x$ является большой и при этом достигает максимального значения (см. рис. 7.34). Таким образом, порождение кинетической энергии турбулентности за счет поперечного сдвига в осредненном течении приходится главным образом на долю компоненты $u'_x$. Наибольшая часть этой энергии непосредственно сразу же диссипируется, а некоторая часть переносится от стенки к более удаленным от нее областям. Согласно Таунсенду [31], это явление можно объяснить, если принять предположение о том, что турбулентность вблизи стенки образована частично мелкими присоединенными

вихрями, имеющими фиксированную ориентацию, а частично — отошедшими свободными вихрями, которые под действием турбулентности диффундируют по направлению к внутренним областям сечения трубы, благодаря чему происходит перенос их кинетической энергии, сопровождаемый одновременно затуханием и диссипацией энергии.

Энергетический спектр осевой компоненты турбулентных пульсаций скорости, измеренный Лауфером в переходном слое (см., например, рис. 4.3), свидетельствует не только о сильном взаимодействии

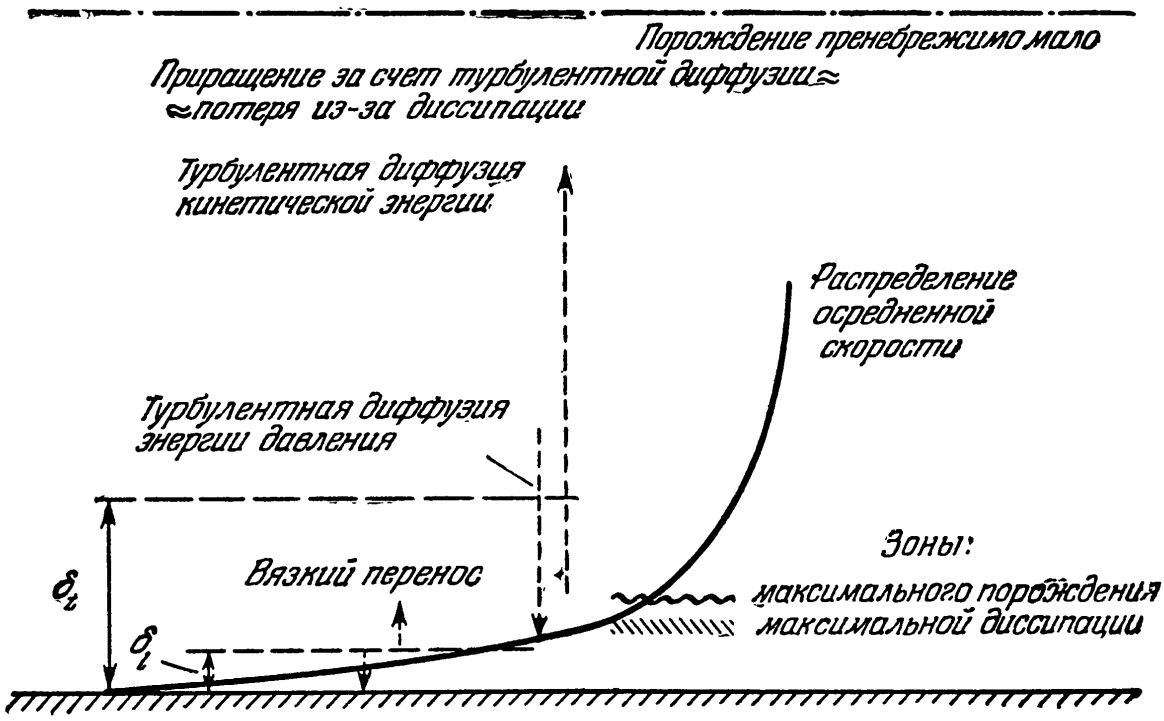



Рис. 7.47. Процессы, происходящие при установлении баланса энергии турбулентности при течении в трубе.

с осредненным движением, но также и о том, что по мере приближения к стенке диапазон волновых чисел расширяется в сторону больших значений. Энергетический спектр, измеренный в центре трубы, характеризуется значительно более ограниченным диапазоном волновых чисел. С подобными результатами согласуется постепенное возрастание масштаба диссипации с увеличением расстояния от стенки, указывающее на то, что размер вихрей в пристеночной области становится все меньше и меньше.

В то же время приблизительное постоянство и сама величина интегрального масштаба в области ядра течения в трубе указывают на то, что в этой области существуют крупные вихри, вытянутые в осевом направлении, причем их поперечные размеры составляют примерно от $^1/_4$ до $^1/_2$ радиуса трубы, а их осредненные скорости лежат в осевом направлении. На эти крупные вихри наложены более мелкие вихри, и по энергетическим спектрам, снятым в различных точках потока в трубе, а также по распределению масштабов дисси-

пации можно сделать вывод, что эти крупные вихри вблизи пристеночной части состоят из более мелких вихрей, нежели в центральной области трубы. Очевидно, через посредство крупных вихрей осуществляется (по всей вероятности, частично) перенос и диффузия мелких, богатых энергией вихрей от пристеночной области к центру. Но в то же время эти вихри должны способствовать возвращению бедных энергией жидких молей обратно к стенке, где эти моли под действием поперечного сдвига со стороны осредненного движения снова превращаются в мелкие вихри высокой интенсивности. Подобная картина турбулентного движения изображена на рис. 7.48; эту

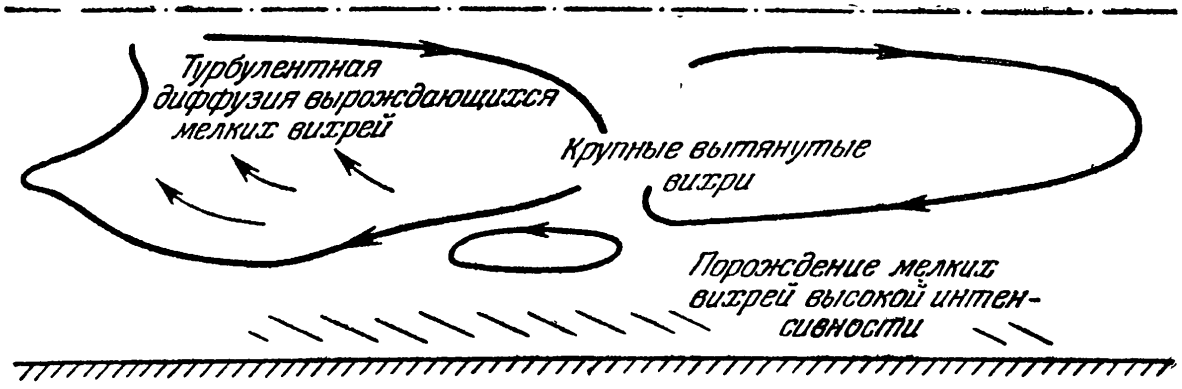



Рис. 7.48. Картина турбулентного движения при течении в трубе.

картину полезно сравнить с фотографиями, представленными на рис. 1.10.

Крупный размер вихрей в области ядра, вытекающее отсюда приблизительное постоянство интегрального масштаба и малое изменение интенсивности турбулентности в центральной области могут объяснить, почему коэффициент вихревой вязкости выше, скажем, $2x_2/D = 0{,}5$ сохраняет примерно постоянное значение. Это приблизительное постоянство коэффициента вихревой вязкости можно использовать для расчета осредненной скорости, основанного на предположении о том, что коэффициент вихревой вязкости в области ядра постоянен.

Выше было показано, что логарифмическое распределение скорости применительно к пристеночной области дает точное описание действительного распределения скорости и что его использование совместимо с предположениями о постоянстве напряжения сдвига и линейном возрастании коэффициента вихревой вязкости с расстоянием от стенки. Эти предположения оправдываются тем, что уменьшение напряжения сдвига в пристеночной области невелико, а коэффициент вихревой диффузии, согласно рис. 7.39, с увеличением $2x_2/D$ возрастает практически по линейному закону.

Каким будет распределение скорости, основанное на предположении о постоянстве коэффициента вихревой вязкости в области ядра?

Дифференциальное уравнение для распределения скорости запишется так:

$$(\epsilon_m)_{xx}\frac{d}{dx_2}\overline{U}_x = \frac{1}{\rho}\sigma_{12} = \frac{1}{\rho}\sigma_w(1-\xi_2) = u^{*2}(1-\xi_2)$$

или

$$\frac{d}{d\xi_2}\frac{\overline{U}_x}{\overline{U}_{x,\max}} = \frac{u^*D}{2(\epsilon_m)_{xx}}\frac{u^*}{\overline{U}_{x,\max}}(1-\xi_2).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\overline{U}_{x,\max}-\overline{U}_x}{u^*} = \frac{u^*D}{4(\epsilon_m)_{xx}}(1-\xi_2)^2. \qquad (7.103)$$

Это решение можно сравнить с распределением скорости, измеренным Лауфером при $\overline{U}_{x,\max}D/\nu = 5\cdot 10^5$. Таким образом, следует положить, что $u^*/\overline{U}_{x,\max}\approx 0{,}035$, и принять постоянное значение коэффициента вихревой вязкости, равное

$$\frac{2(\epsilon_m)_{xx}}{u^*D} = 0{,}07$$

(ср. с рис. 7.39). Результаты расчета приведены на рис. 7.49; совпадение между вычисленным и измеренным распределениями скорости при $\xi_2 > 0{,}2$ является вполне удовлетворительным.

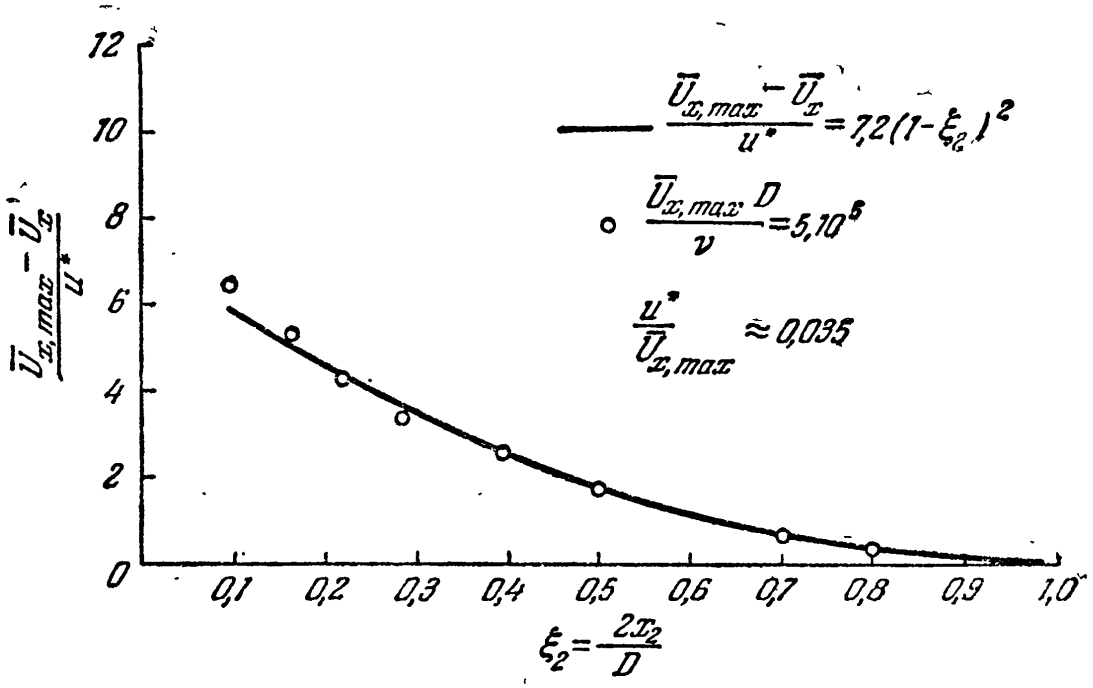



Рис. 7.49. Сравнение расчетной избыточной скорости с экспериментальными данными Лауфера [41].

Действительное распределение коэффициента вихревой вязкости можно, конечно, аппроксимировать более точно, и притом по всему поперечному сечению трубы. Рейхардт [12] аппроксимировал это распределение для исследованного им двумерного течения в канале,

воспользовавшись для этой цели четными степенями полинома четвертого порядка по $1 - \xi_2$. Полученное в результате расчета распределение скорости оказалось в замечательном согласии с измеренным распределением. Однако улучшение, достигнутое при этом по сравнению с распределением скорости, полученным на основании предположения о постоянстве коэффициента вихревой вязкости, заметно проявляется лишь в области $\xi_2 < 0{,}2$, где логарифмическое распределение тоже дает удовлетворительное решение.

## § 7.11. Перенос скалярной субстанции при пристеночной турбулентности

Немногочисленные экспериментальные исследования распределения скалярной субстанции при пристеночной турбулентности относятся, в основном, к переносу тепла и, кроме того, ограничены измерением распределения осредненной температуры. Так, какие-либо экспериментальные данные о характеристиках турбулентных пульсаций температуры или их корреляциях с турбулентными пульсациями скорости отсутствуют. Поэтому любые представления о механизме турбулентного переноса скалярной субстанции могут основываться лишь на предположении о некоторой аналогии между переносом скалярной субстанции и переносом импульса.

В самом деле, даже измерения распределений осредненной температуры настолько скудны, что указанной аналогией до сих пор пользуются для расчета этих распределений.

В этом параграфе мы остановимся на некоторых теориях, основанных на предположении о такого рода аналогии, и рассмотрим, в частности, вопрос о том, можно ли вычислить распределение субстанции по известному распределению осредненной скорости.

В связи с тем, что большинство проведенных измерений, как уже упоминалось, относится к распределению осредненной температуры, в последующем изложении мы ограничимся лишь рассмотрением переноса тепла.

Распределение осредненной температуры в пограничном слое воздушного потока вдоль нагретой пластины было измерено Элиасом [44], а в турбулентном потоке в трубе — Нуннером [42]. В качестве движущейся среды Нуннер тоже использовал воздух, а стенка трубы в его опытах путем нагревания ее снаружи конденсирующимся паром поддерживалась при постоянной температуре. Опыты проводились на медной трубе с внутренним диаметром 5 *см*, внутренняя поверхность которой могла быть искусственно сделана неровной посредством установки на разных расстояниях внутри трубы шайб различной формы и толщины.

Измерения в пограничном слое ограничивались, главным образом, внешней областью, а при течении в трубе — областью ядра.

Если для случая течения в пограничном слое распределение $(\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta})/(\bar{\Theta}_w - \Theta_0)$, где $\bar{\Theta}_w$ — осредненная температура стенки, а $\Theta_0$ — температура свободного потока, сравнивать с распределением $\bar{U}_1/U_0$ в поперечном сечении пограничного слоя, то между двумя этими распределениями наблюдается неплохое подобие. Аналогичный результат получается и для течения в трубе, если сравнивать распределения $(\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta})/(\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}_{\min})$ и $\bar{U}_x/\bar{U}_{x,\max}$; здесь $\Theta_{\min}$ — осредненная температура на оси трубы. Эти результаты, видимо, оправдывают предположение об аналогии между переносом тепла и импульса. Однако

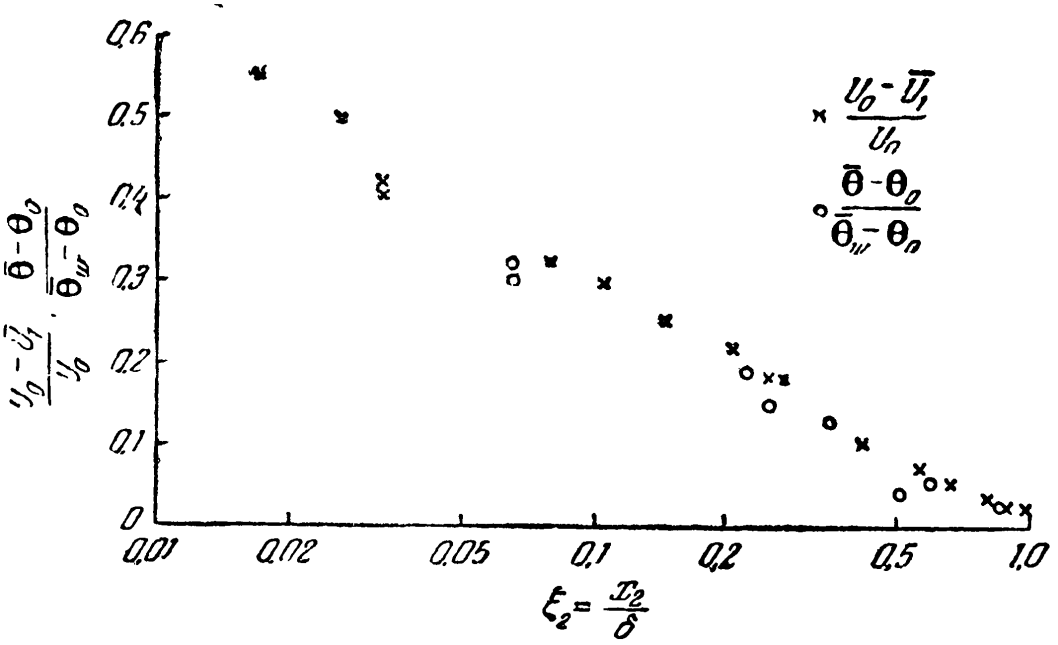



Рис. 7.50. Распределение избыточной скорости и избыточной температуры в пограничном слое на нагретой плоской гладкой пластине [44].

из-за того, что эти измерения проводились в областях, удаленных от стенки, распределение избыточной температуры целесообразнее сравнивать с распределением избыточной скорости. Кроме того, в некоторой части пристеночной области оказывается справедливым полулогарифмическое распределение скорости.

На рис. 7.50 сравниваются полученные по опытным данным Элиаса избыточная скорость $(U_0 - \bar{U}_1)/\bar{U}_0$ и избыточная температура $(\bar{\Theta} - \Theta_0)/(\bar{\Theta}_w - \Theta_0)$, причем оба распределения представлены в полулогарифмическом масштабе по $\xi_2 = x_2/\delta$. Аналогичное сравнение производится и на рис. 7.51, где показаны распределения избыточной скорости $(\bar{U}_{x,\max} - \bar{U}_x)/\bar{U}_{x,\max}$ и избыточной температуры $(\bar{\Theta} - \bar{\Theta}_{\min})/(\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}_{\min})$, полученные по опытным данным Нуннера.

Эти рисунки показывают, что по крайней мере в области, удаленной от стенки, между распределениями скорости и температуры имеется подобие, которое, однако, — а вместе с ним и аналогия

между переносом тепла и импульса — нарушается по мере приближения к стенке.

Посмотрим теперь, существует ли аналогия между переносом импульса и тепла, выражающаяся в подобии распределений осредненной скорости и осредненной температуры.

Способ решения этой задачи состоит в том, чтобы уравнение для распределения температуры выразить через распределение скорости, а затем убедиться, возможны ли физически и совместимы ли с опытными данными результаты, вытекающие из принятой аналогии, т. е. возможно ли подобие распределений скорости и температуры.

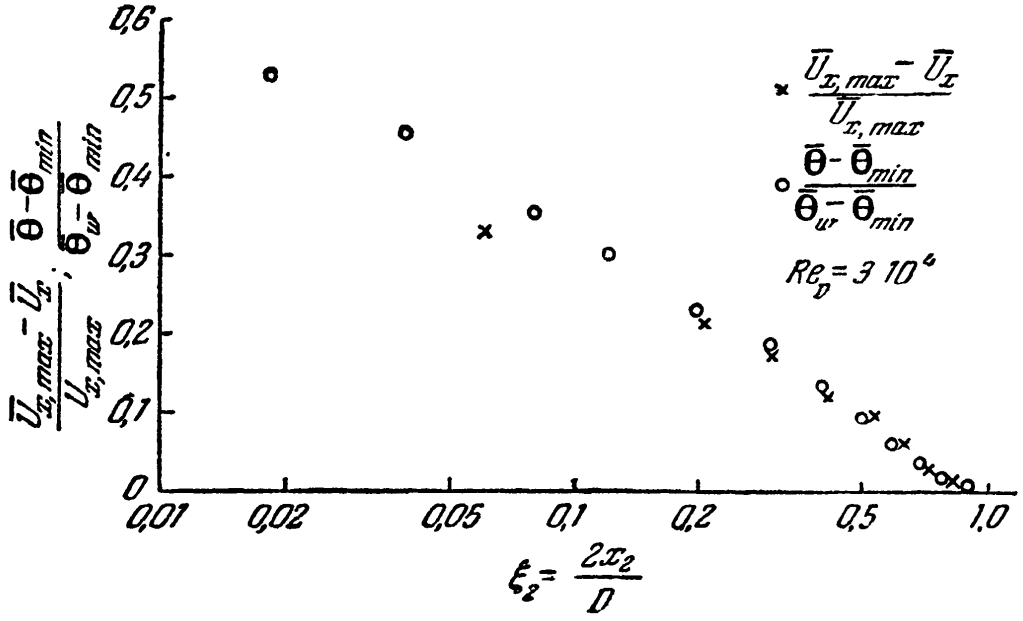



Рис. 7.51. Распределение избыточной скорости и избыточной температуры в неизотермическом потоке в трубе [42].

При выводе уравнения для распределения температуры, выраженного через распределение скорости, предположим, что турбулентный перенос как импульса (в узком смысле этого слова), так и тепла является диффузией градиентного типа, на основании чего можно ввести соответствующие коэффициенты переноса.

Полное напряжение сдвига, представляющее собой сумму двух слагаемых, одно из которых определяется молекулярной вязкостью, а другое — вихревой вязкостью, можно записать в виде

$$\sigma_{12} = (\sigma_{12})_{\text{мол}} + (\sigma_{12})_{\text{турб}} = \mu_{\text{эфф}} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = [\mu + \rho(\epsilon_m)] \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}. \quad (7.104)$$

Аналогично для переноса тепла $\Im_0$ на единицу площади в единицу времени через плоскость, параллельную стенке, запишем

$$\Im_\theta = (\Im_\theta)_{\text{мол}} + (\Im_\theta)_{\text{турб}} = -\varkappa_{\text{эфф}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} = -[\varkappa + \rho c_p (\epsilon_\theta)_{22}] \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2}. \quad (7.105)$$

Так как распределение температуры в рассматриваемой области неравномерно, то и распределение физических свойств движущейся жидкости тоже обладает неравномерностью. Будем считать, что коэффициент молекулярной вязкости $\mu$, коэффициент теплопроводности $\kappa$ и плотность жидкости $\rho$ зависят от температуры. Удельная теплоемкость газа $c_p$, вообще говоря, изменяется с температурой весьма слабо; поэтому будем считать ее постоянной.

Из уравнения (7.105) после интегрирования получаем

$$\overline{\Theta}_w - \overline{\Theta} = \int_0^{x_2} \frac{\Im_\theta}{\kappa_{\text{эфф}}}\, dx_2,$$

или, в безразмерной форме,

$$\frac{\mu_w c_p (\overline{\Theta}_w - \overline{\Theta})}{(\Im_\theta)_w \delta} = \int_0^{\xi_2} \frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w} \frac{\mu_w}{\mu_{\text{эфф}}} \mathrm{Pr}_{\text{эфф}}\, d\xi_2; \tag{7.106}$$

здесь индекс $w$ соответствует условиям на стенке, а $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}}$ — эффективное число Прандтля:

$$\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \frac{c_p \mu_{\text{эфф}}}{\kappa_{\text{эфф}}}. \tag{7.107}$$

Уравнение (7.106) записано для течения в пограничном слое, но его можно использовать и для течения в трубе, если толщину пограничного слоя $\delta$ заменить радиусом трубы $D/2$.

Используя величину $\mu_{\text{эфф}}$ и соотношение (7.104), эффективное число Прандтля и распределение температуры теперь можно выразить через распределение скорости; таким образом, имеем

$$\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \frac{c_p}{\kappa + \rho c_p (\epsilon_\theta)_{22}} \frac{\sigma_{12}}{\partial \overline{U}_1/\partial x_2} = \frac{c_p}{\kappa + \rho c_p (\epsilon_\theta)_{22}} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \frac{\mu_w \delta^+}{\frac{d}{d\xi_2}(\overline{U}_1/u^*)},$$

где $\delta^+ = \rho_w u^* \delta/\mu_w$. Это соотношение можно дополнительно преобразовать, введя турбулентное число Прандтля

$$\mathrm{Pr}_{\text{турб}} = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{(\epsilon_\theta)_{22}} \tag{7.108}$$

и выразив $(\epsilon_m)_{11}$ через распределение скорости при помощи формулы (7.104). После преобразований окончательно получаем

$$\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \frac{\mathrm{Pr} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \frac{\mu_w}{\mu}}{\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_{\text{турб}}} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \frac{\mu_w}{\mu} + \left(1 - \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_{\text{турб}}}\right) \frac{1}{\delta^+} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\overline{U}_1}{u^*}}. \tag{7.109}$$

Аналогично распределение температуры (7.106) можно выразить через распределение скорости. При этом получается соотношение

$$\frac{\mu_w c_p (\bar{\theta}_w - \bar{\theta})}{(\Im_\theta)_w \delta} = \int_0^{\xi_2} \frac{1}{\delta^+} \frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \mathrm{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2. \quad (7.110)$$

Пользуясь этим уравнением для распределения температуры, можно вычислить полный перенос тепла через стенку к движущейся жидкости. В этом случае обычно принято вводить либо число Нуссельта, либо коэффициент $c_h$, характеризующий сопротивление тепловому потоку вблизи стенки.

Число Нуссельта определяется как

$$\mathrm{Nu} = \frac{\delta}{\kappa_w (\bar{\theta}_w - \theta_0)} (\Im_\theta)_w. \quad (7.111)$$

Из уравнения (7.110) получим следующее выражение для Nu:

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = \frac{1}{\delta^+} \int_0^1 \frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \frac{\mathrm{Pr}_{\text{эфф}}}{\mathrm{Pr}_w} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2. \quad (7.112)$$

Определение коэффициента $c_h$, характеризующего сопротивление тепловому потоку, аналогично определению коэффициента трения $c_f$, выраженному формулой (7.48), а именно:

$$c_h = \frac{(\Im_\theta)_w}{c_p \rho_w U_0 (\bar{\theta}_w - \theta_0)}. \quad (7.113)$$

Этот безразмерный критерий $c_h$ называется также числом Стантона.

Далее, из уравнения (7.110) имеем

$$\frac{1}{c_h} = \frac{U_0}{u^*} \int_0^1 \frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \mathrm{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2,$$

или, учитывая соотношение (7.49) между $u^*/U_0$ и $c_f$,

$$\frac{1}{c_h} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \int_0^1 \frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \mathrm{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2. \quad (7.114)$$

Из определений (7.111) и (7.113) вытекает известная формула

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}_\delta \mathrm{Pr}_w c_h, \quad (7.115)$$

где $\mathrm{Re}_\delta = \rho_w U_0 \delta / \mu_w$.

Уравнение (7.110) показывает, что распределение температуры можно вычислить по распределению скорости только в том случае, когда известна зависимость величин $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$, $\sigma_w/\sigma_{12}$ и $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}}$ от $\xi_2$.

Кроме того, подобие между распределениями температуры и скорости может существовать, лишь если

$$\frac{\mathfrak{I}_\theta}{(\mathfrak{I}_\theta)_w}\frac{\sigma_w}{\sigma_{12}}\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \text{const}. \tag{7.116}$$

Ясно, что в общем случае это условие несправедливо, но в некоторых случаях оно приближенно выполняется.

В одной из самых ранних теорий переноса тепла в турбулентных потоках, а именно в теории Рейнольдса, просто принималось, что между переносом импульса и переносом тепла имеется полная аналогия. Следствием этого предположения является то, что условие (7.116) должно удовлетворяться. Часто полагают, что аналогия Рейнольдса определяется следующими условиями:

$$\mathrm{Pr} = 1, \quad \mathrm{Pr}_{\text{турб}} = 1, \quad \frac{\mathfrak{I}_\theta}{(\mathfrak{I}_\theta)_w} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w}, \quad \frac{\mu_w}{\mu} = 1, \quad \frac{\rho_w}{\rho} = 1,$$

но, как было показано, это вовсе не обязательно. Требуется, чтобы постоянная в уравнении (7.116) была равна единице. Тогда из уравнений (7.114) и (7.49) следует, что, согласно аналогии Рейнольдса,

$$c_h = \frac{1}{2}c_f. \tag{7.117}$$

Тот же результат относительно равенства $(\bar{\Theta} - \Theta_0)/(\bar{\Theta}_w - \Theta_0)$ и $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0$ получается, если предположить, что

$$\frac{\mathfrak{I}_\theta}{(\mathfrak{I}_\theta)_w} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \quad \text{и} \quad \mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_{\text{турб}} = \text{const}.$$

В этом случае $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \mathrm{Pr}_{\text{турб}} = \mathrm{Pr}$ и уравнение (7.110) принимает вид

$$\frac{\mu_w c_p (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta})}{(\mathfrak{I}_\theta)_w \delta} = \frac{\mathrm{Pr}}{\delta^+}\frac{\bar{U}_1}{u^*},$$

откуда следует, что $(\bar{\Theta} - \Theta_0)/(\bar{\Theta}_w - \Theta_0) = (U_0 - \bar{U}_1)U_0$. Однако из уравнения (7.114) вместо соотношения (7.117) получается

$$c_h = \frac{1}{2\,\mathrm{Pr}}c_f. \tag{7.118}$$

В случае воздуха $\mathrm{Pr} \approx 0{,}71$. Результаты различных измерений распределения тепла и вещества при течении в трубе, по-видимому, указывают на то, что турбулентное число Прандтля в среднем составляет около $0{,}65 \div 0{,}70$. Вёрц и Шервуд [45] по опытам с диффузией гелия, городского газа и углекислого газа в турбулентном потоке в двумерном канале получили значение турбулентного числа Прандтля, равное 0,72. По опытным данным Фридриха, опубликованным Лорен-

цем [46], для воздуха, движущегося по нагретой трубе ($\mathrm{Re}_D \approx 10^5$), Рейхардт [10] получил значение 0,65.

Маккартер, Штуцман и Кох [47] обнаружили, что диффузия тепла от источника в воздушном потоке в вертикальной трубе ($\mathrm{Re}_D$ от 7000 до 26 000) может быть описана уравнением (см. § 5.5)

$$(\epsilon_\vartheta)_{22} = 0{,}02\overline{U}_{\text{ср}} D \sqrt{\lambda}.$$

Если принять, что для ядра течения в трубе $(\epsilon_m)_{11} \approx 0{,}035 u^* D$ (см. рис. 7.39), то при $u^* = \overline{U}_{\text{ср}} (\lambda/8)^{1/2}$ получим

$$(\epsilon_m)_{11} = 0{,}0125\overline{U}_{\text{ср}} D \sqrt{\lambda}.$$

Следовательно, и в этом случае имеем $\mathrm{Pr}_{\text{турб}} = (\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\vartheta)_{22} \approx 0{,}63$.

Таким образом, если принять, что $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$ изменяется от 0,65 до 0,70, то при $\mathrm{Pr} \approx 0{,}71$ для воздуха имеем $\mathrm{Pr}_{\text{турб}} \approx \mathrm{Pr}$. Этим можно объяснить, почему аналогия Рейнольдса, как мы видели, применима для ядра течения в трубе (см. рис. 7.51). Однако турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$ для пристеночной области может довольно заметно отличаться от своего значения в области ядра, так что здесь аналогия Рейнольдса даже приближенно уже более не будет справедлива. Это находит свое отражение в расхождении распределений температуры и скорости в пристеночной области, а также в отклонении от простой связи (7.117) между $c_h$ и $c_f$. Уравнение (7.117) не содержит числа Прандтля, хотя определенного влияния этого параметра и следует ожидать из-за наличия вязкого подслоя, в котором преобладают процессы молекулярного переноса.

Различные модификации аналогии Рейнольдса, предложенные в последнее время, относятся главным образом к переносу в пристеночной области. При этом вводились определенные предположения относительно величин $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}}$, $\mathfrak{I}_\vartheta/(\mathfrak{I}_\vartheta)_w$ и $\sigma_w/\sigma_{12}$.

Выше было показано, что в пристеночной области распределение скорости хорошо описывается формулами, основанными на предположении $\sigma_w/\sigma_{12} \approx 1$ (слой постоянного напряжения). Вполне очевидное предположение, которое следует принять относительно величины $\mathfrak{I}_1/(\mathfrak{I}_\vartheta)_w$, состоит в том, что для пристеночной области $\mathfrak{I}_\vartheta/(\mathfrak{I}_\vartheta)_w \approx 1$. Кроме того, считается, что $\mu_w/\mu \approx 1$ и $\rho_w/\rho \approx 1$. Тогда уравнение (7.114) принимает вид

$$\frac{1}{c_h} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \int_0^1 \mathrm{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\overline{U}_1}{u^*} d\xi_2, \tag{7.119}$$

а из уравнения (7.109) следует, что

$$\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \left[ \frac{1}{\mathrm{Pr}_{\text{турб}}} + \left( \frac{1}{\mathrm{Pr}} - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{\text{турб}}} \right) \frac{1}{\delta^+} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\overline{U}_1}{u^*} \right]^{-1}. \tag{7.120}$$

Рассмотрим теперь вкратце, придерживаясь хронологической последовательности, модификации теории Рейнольдса.

Независимо друг от друга Тэйлор, Прандтль и Кольбурн предложили некоторые видоизменения этой теории, которые в общих чертах сходны между собой. При этом пограничный слой условно разделяется на две отдельные области, в одной из которых, прилегающей к стенке, процессы переноса по своей природе являются молекулярными (вязкий подслой), а процессы переноса в другой области полностью определяются турбулентностью.

В вязком подслое $(\epsilon_m)_{11} = (\epsilon_m)_{22} = 0$; так как в этой области

$$\frac{d}{d\bar{x}_2}\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \delta^+,$$

то из уравнения (7.12) следует очевидный результат $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \mathrm{Pr}$.

Для турбулентной области принимается аналогия Рейнольдса; поэтому здесь $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = 1$. Таким образом, из уравнения (7.119) получаем

$$\frac{1}{c_h} = \sqrt{\frac{2}{c_f}}\left[\mathrm{Pr}\frac{(\bar{U}_1)_l}{u^*} + \frac{U_0 - (\bar{U}_1)_l}{u^*}\right],$$

или

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f}\left[1 + (\mathrm{Pr} - 1)\frac{(\bar{U}_1)_l}{U_0}\right].$$

Здесь $(\bar{U}_1)_l$ — скорость при $x_2 = \delta_l$, т. е.

$$\frac{(\bar{U}_1)_l}{u^*} = \frac{u^*\delta_l}{\nu} = \delta^+.$$

Таким образом, соотношение между $c_h$ и $c_f$ имеет вид

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f} + \delta_l^+(\mathrm{Pr} - 1)\sqrt{\frac{2}{c_f}}. \qquad (7.121)$$

В § 7.5 упоминалось о том, что данные о наиболее подходящем значении $\delta_l^+$, используемом при описании распределения скорости, сильно расходятся. Прандтль для подстановки в уравнение (7.121) использовал значение $\delta_l^+ = 5{,}6$. Это значение было получено из условия, что скорость, вычисленная в некоторой точке в пограничном слое из закона линейного распределения в вязком подслое, должна равняться величине, вычисленной из распределения скорости по закону «$^1/_7$».

Соотношение (7.121) приводит к приемлемому согласию с опытом, лишь если число Прандтля Pr не слишком сильно отличается от единицы. Для более высоких значений Pr оно дает заниженные значения $c_h$. Это можно объяснить следующим образом. При больших значениях Pr молекулярный перенос импульса происходит с более

высокой скоростью, нежели молекулярный перенос тепла. Однако из-за наличия переходной области на перенос тепла вблизи стенки заметное (хотя и слабое) влияние будет оказывать турбулентность по соседству с вязким подслоем. Следовательно, логично предположить, что при больших значениях $\mathrm{Pr}$ влиянием переходной области пренебрегать нельзя.

Поэтому Карман [48] в своем анализе рассматривал как вязкий подслой, так и переходную область, причем для переходной области принималось, что $\mathrm{Pr}_{\text{турб}} = 1$. Однако для зоны, лежащей снаружи этого слоя, т. е. для полностью турбулентной области, Карман также воспользовался предположением об аналогии Рейнольдса. Для толщины вязкого подслоя и переходного слоя Карман принял соответственно значения $\delta_l^+ = 5$ и $\delta_t^+ = 30$.

Таким образом, при $x_2^+ < \delta_l^+$ имеем $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \mathrm{Pr}$ и $\overline{U}_1^+ = x_2^+$, а при $\delta_l^+ < x_2^+ < \delta_t^+$

$$\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = \left[1 + \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{5}{x_2^+}\right]^{-1}.$$

Для распределения скорости Карман просто принял выражение

$$U_1^+ = 5\left(1 + \ln\frac{x_2^+}{5}\right).$$

При $x_2^+ > \delta_t^+$, как и прежде, $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = 1$.

Тогда из уравнения (7.119) после интегрирования получаем

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f} + 5\left[(\mathrm{Pr} - 1) + \ln\frac{1 + 5\mathrm{Pr}}{6}\right]\sqrt{\frac{2}{c_f}}. \qquad (7.122)$$

Это соотношение приводит к существенному улучшению по сравнению с формулой (7.121), хотя при $\mathrm{Pr} = 10$ все же наблюдается отклонение от действительных значений $c_h$, величина которого, по-видимому, зависит от числа Рейнольдса.

Дальнейшие видоизменения, внесенные Гофманом [9], отличаются, главным образом, предположениями о распределении скорости в переходной области и о величинах $\delta_l^+$ и $\delta_t^+$.

В своей первой теории Гофман разделил переходную область на две части и принял намного меньшее, нежели Карман, значение $\delta_l^+$, усилив, таким образом, влияние турбулентности в областях, более близких к стенке. Во второй теории Гофман положил $\delta_l^+ = 0$ и принял предположение о том, что распределение скорости, которое отражает постепенно ослабляющееся по направлению к стенке влияние турбулентности (см. § 7.4), имеет вид:

$$\overline{U}_1^+ = x_2^+ - 0{,}001113 x_2^{+3} \quad \text{при} \quad 0 < x_2^+ < 15{,}5,$$
$$\overline{U}_1^+ = 3 + 3{,}05 \ln x_2^+ \quad \text{при} \quad 15{,}5 < x_2^+ < 25,$$

Для участка снаружи переходной области, т. е. при $x_2^+ > 25$, как и прежде, принималась аналогия Рейнольдса.

Таким способом Гофман вычислил зависимость Nu от Pr. На рис. 7.52 результаты этих расчетов изображены вместе с зависимостью, полученной по теории Кармана. Результаты своих расчетов Гофман сравнивал с эмпирическими соотношениями Краусольда [49], которые имеют вид:

а) для нагревания

$$\mathrm{Nu} = 0{,}024\,\mathrm{Re}_D^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}37},$$

б) для охлаждения

$$\mathrm{Nu} = 0{,}024\,\mathrm{Re}_D^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}3}.$$

Эти зависимости также изображены на рис. 7.52.

Расчеты Гофмана при сравнении с опытами по нагреванию имеют заметное преимущество перед теорией Кармана. Но в случае опытов с охлаждением при больших числах Прандтля величины Nu оказываются значительно ниже и согласие между этими величинами и теми,

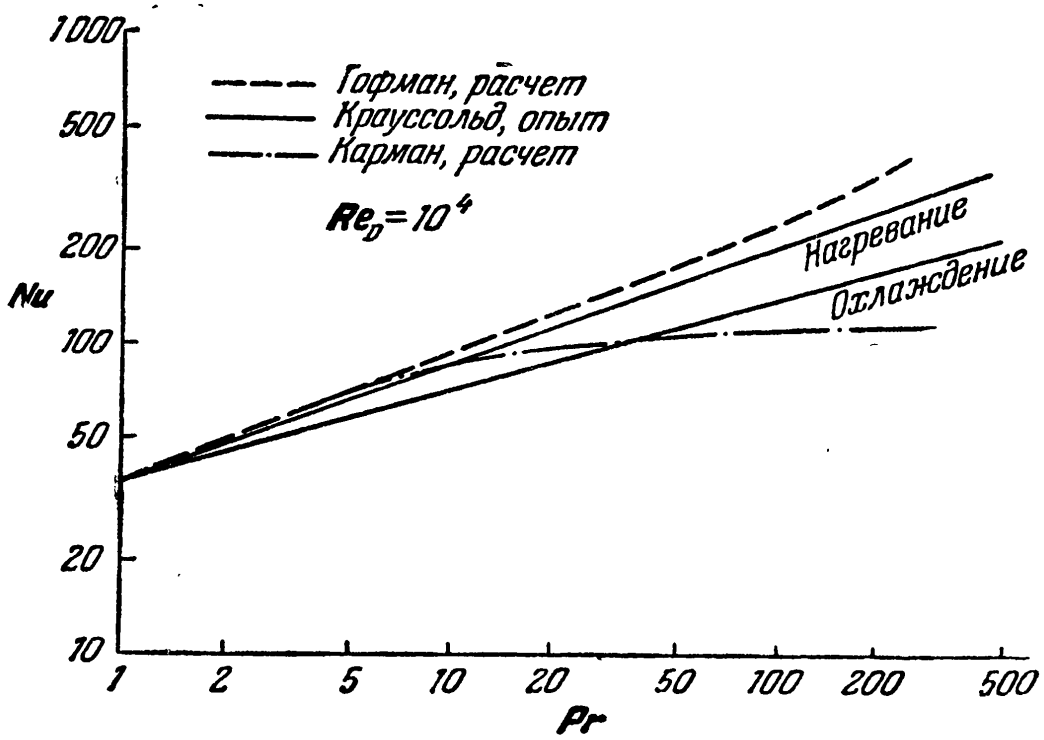



Рис. 7.52. Сравнение расчетных и экспериментальных данных о теплообмене в турбулентном потоке в трубе [9].

которые получаются по теории Гофмана, ухудшается. Так как опыты Краусольда проводились с жидкостями, вязкость которых при уменьшении температуры возрастала, то указанные низкие значения можно объяснить, предполагая, что с возрастанием вязкости и ее демпфирующего влияния степень турбулентности вблизи стенки становится ниже.

Рейхардт [10] внес существенные улучшения в изложенные теории в двух направлениях. (1) Он впервые учел переменность физических

свойств жидкости, обусловленную температурным полем в поперечном сечении пограничного слоя. (2) Он не принял никаких допущений о возможных аналогиях между переносом импульса и тепла в какой-либо из областей пограничного слоя. Таким образом, Рейхардт воспользовался полными уравнениями (7.110) и (7.114). Относительно величин $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$ и $\sigma_{12}/\sigma_w$ он принял предположение, что произведение $[\Im_\theta/(\Im_\theta)_w](\sigma_w/\sigma_{12})$ имеет порядок единицы. Это предположение, помимо иных доказательств, подтверждается собственными вычислениями Рейхардта для распределения $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$ (см. ниже). Изменение физических свойств жидкости учитывалось Рейхардтом путем введения средних (по сечению) значений для вязкого подслоя и других средних значений для переходной области. Чтобы получить интегрируемые выражения для распределения температуры и для $c_h$, Рейхардт аппроксимировал распределение скорости в переходной области экспоненциальной функцией. Однако, несмотря на это, окончательный результат описывается довольно громоздким выражением.

Мы уже говорили, что позднее Рейхардт [12] предложил другое распределение скорости [см. уравнение (7.44)], которое несколько лучше соответствует действительному распределению, нежели экспоненциальная функция. Конечно, лучше было бы воспользоваться уточненным распределением скорости (7.44), но тогда интегралы, содержащиеся в уравнениях (7.110) и (7.114), становятся очень громоздкими и допускают лишь численное решение.

Однако если пользоваться численным решением, то, применяя метод итераций, можно получить точное решение. При этом в уравнениях (7.110) и (7.114) используются данные о действительном распределении скорости. В первом приближении величину $[\Im_\theta/(\Im_\theta)_w](\sigma_w/\sigma_{12})$ можно положить равной единице, а для $\mu_w/\mu$, $\mathrm{Pr}$ и $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$ можно принять средние значения. После этого по полученному распределению температуры, пользуясь методом, рассмотренным выше [см. уравнение (7.127)], можно вычислить распределение $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$. Аналогично могут быть вычислены по их температурной зависимости и величины $\mu_w/\mu$ и $\mathrm{Pr}$. Таким образом, получаем $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$, $\mu_w/\mu$ и $\mathrm{Pr}$ как новые функции $\xi_2$. Пользуясь этими новыми функциями, можно найти новое численное решение уравнений (7.110) и (7.114).

С помощью уточненного распределения температуры можно получить второе приближение для переменных величин, пользуясь которым, снова можно вычислить интересующие нас интегралы и т. д.

Однако вместо применения этого трудоемкого способа всегда стараются получить решение в замкнутой форме. Единственным возможным путем достижения этой цели является метод, который применялся упомянутыми выше исследователями. Результаты подобных расчетов в итоге полностью зависят от справедливости принятых при этом предположений.

Так, Дайслер [13] предположил, что $Pr_{турб} = 1$ и что влияние изменений $\sigma_{12}$ и $\Im_0$ в поперечном сечении потока в трубе или в пограничном слое на распределения скорости и температуры пренебрежимо мало. Им было показано, что постольку, поскольку Pr не очень сильно отличается от единицы, допущение о линейном распределении $\sigma_{12}$ и $\Im_0$ приводит практически к таким же распределениям скорости и температуры, как и предположение о равномерности распределения этих величин, во всяком случае при значениях $u^*D/\nu$, лежащих в диапазоне от 1000 до 10 000. Дайслер исходил при этом из уравнения (7.105), в котором он положил $\Im_0 = (\Im_0)_w$, а для

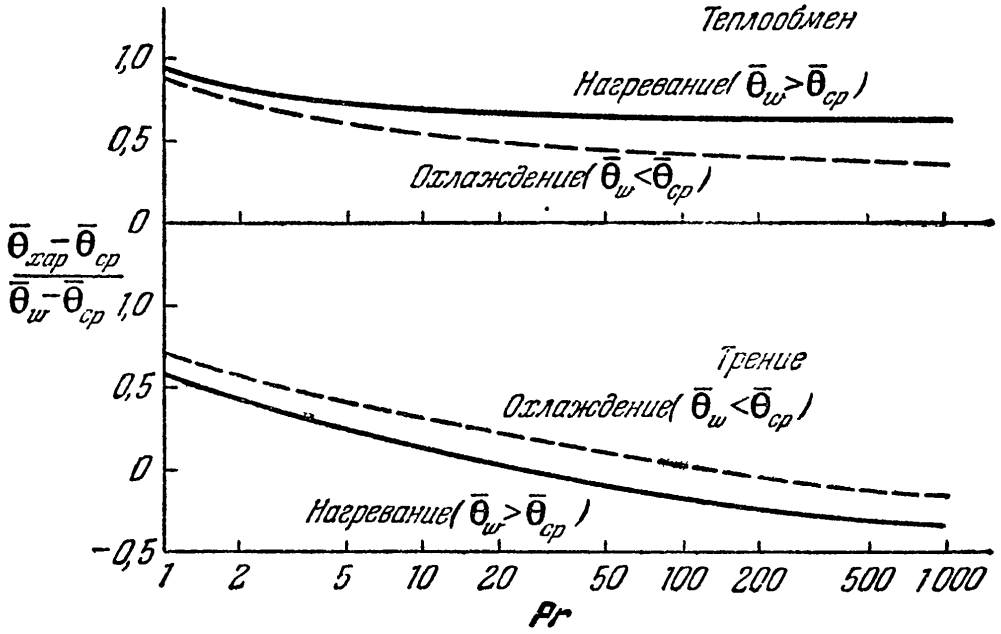



Рис. 7.53. Зависимость характерной температуры от числа Прандтля для определения кажущихся постоянных свойств жидкости [13].

$(\epsilon_\theta)_{22}$ принял такое же выражение, как и для $(\epsilon_m)_{11}$, а именно уравнение (7.45). Подобно решению для распределения скорости, решение для распределения температуры может быть получено только численным методом.

Дайслер исследовал также влияние изменения вязкости жидкости с температурой. Он получил интересный результат, что даже при наличии зависимости вязкости от температуры расчеты могут проводиться при постоянном значении коэффициента вязкости, если это значение брать при соответствующей характерной температуре. Эта характерная температура зависит от числа Прандтля Pr, уменьшаясь с его ростом, причем эта зависимость для теплообмена и для переноса импульса (трение) неодинакова, а также имеет различный вид при нагревании и при охлаждении. Для капельных жидкостей эти функции представлены на рис. 7.53. При $Pr > 10$ характерную температуру для теплообмена можно считать приблизительно равной

$\bar{\Theta}_{хар} - \bar{\Theta}_{ср} \approx 0{,}5\,(\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}_{ср})$; эта величина представляет собой хорошо известную так называемую пленочную температуру.

Теоретические разультаты Дайслера для $c_h$ находятся в очень хорошем соответствии с опытными данными, полученными многими исследователями для различных жидкостей при значениях числа Прандтля вплоть до 3000. Кривая теоретической зависимости $c_h$ от Pr показана на рис. 7.54. Наибольшая часть экспериментальных данных отклоняется от расчетной зависимости менее чем на 10%, а величина максимальных отклонений составляет около 20%. Эти экспериментальные материалы содержат также данные о массообмене.

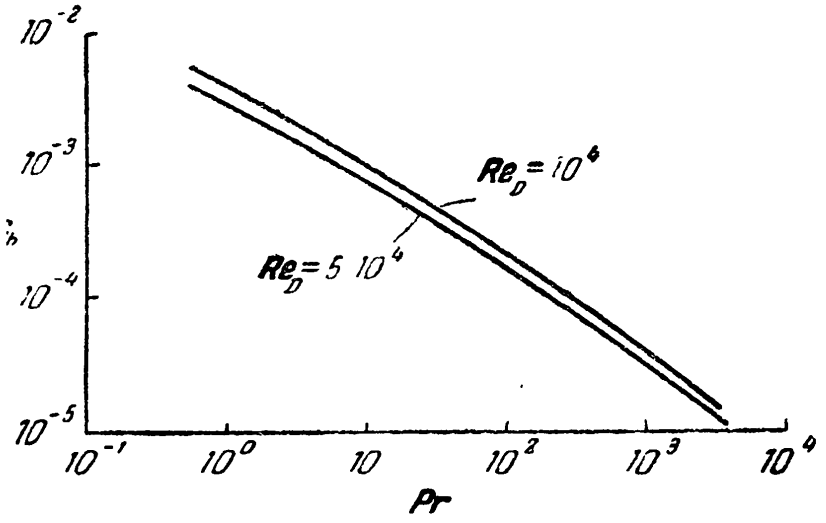



Рис. 7.54. Расчетная зависимость коэффициента сопротивления потоку тепла от числа Прандтля [13].

В случае массообмена применимы те же расчетные соотношения, в которых число Прандтля Pr должно быть заменено числом Шмидта Sc, а $c_h$ — соответствующим коэффициентом, характеризующим сопротивление потоку массы.

Исследования Дайслера показали, что коэффициент $c_h$, характеризующий сопротивление тепловому потоку, совершенно нечувствителен к тем предположениям, которые принимаются относительно характера изменения различных параметров потока снаружи пристеночной области, и что он определяется главным образом условиями, характерными для пристеночной области, если число Рейнольдса потока велико. Этот вывод подтверждается сравнением результатов нескольких авторов, которые в своих расчетах пользовались различными предположениями.

Следовательно, имеется полное основание полагать, что для течения вне пристеночной области аналогия Рейнольдса справедлива, а для пристеночной области нельзя ограничиться лишь предположением, что $\sigma_{12}/\sigma_w \approx 1$, а следует также считать, что $\Im_0/(\Im_0)_w \approx 1$.

Тогда уравнение (7.114) может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{c_h}=\frac{2}{c_f}+\sqrt{\frac{2}{c_f}}\int_0^{\xi_2''}(\mathrm{Pr}_{\text{эфф}}-1)\frac{d}{d\xi_2}\frac{\bar{U}_1}{u^*}d\xi_2=\frac{2}{c_f}+\sqrt{\frac{2}{c_f}}F(\mathrm{Pr}), \tag{7.123}$$

поскольку содержащийся здесь интеграл зависит только от Pr. Величина $\xi_2''$ соответствует границе пристеночной области.

В качестве аналитического выражения для распределения скорости, которое достаточно хорошо годится для всей пристеночной области, следует рассматривать формулу Рейхардта (7.44). Однако, как уже упоминалось, она приводит к интегралам, которые не могут быть решены в замкнутой форме.

Для полностью турбулентной части пристеночной области справедливо логарифмическое распределение скорости. Распределение подобного типа совместимо с предположением о том, что коэффициент вихревой вязкости имеет линейную зависимость от $x_2^+$. Если принять, что величина $(\epsilon_0)_{22}$ тоже является линейной функцией $x_2^+$, то в результате получится логарифмическое распределение температуры, в чем можно убедиться непосредственно из рассмотрения уравнения (7.105), в котором $\Im_\theta=(\Im_0)_w=\text{const}$, а величиной $K$ по сравнению с $\rho_{\text{ср}}(\epsilon_\theta)_{22}$ пренебрегается.

Для вязкого подслоя и переходной области Рэнни [50] предложил следующее распределение скорости:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*}=\frac{1}{\varkappa_1}\operatorname{th}(\varkappa_1 x_2^+), \tag{7.124}$$

которое при $\delta_t^+=27{,}5$ и $\varkappa=0{,}0688$, сливается с логарифмическим распределением. Соответствующее выражение для коэффициента вихревой вязкости имеет вид

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{\nu}=\operatorname{sh}^2(\varkappa_1 x_2^+). \tag{7.125}$$

При очень малых значениях $x_2^+$ эта формула приводит к квадратичной зависимости $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ от $x_2^+$, что находится в близком соответствии с экспериментальными данными (см. §§ 7.6 и 7.9, а также рис. 7.41).

Далее, Рэнни ввел предположение о том, что в пристеночной области $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}=1$, и получил из решения уравнения (7.123) функцию $F(\mathrm{Pr})$ в замкнутой форме. Эта функция имеет вид:

при $\mathrm{Pr}>1$

$$F(\mathrm{Pr})=\frac{\mathrm{Pr}}{\varkappa_1\sqrt{\mathrm{Pr}-1}}\operatorname{arctg}(\varkappa_1\sqrt{\mathrm{Pr}-1}\,\delta_t^+)-$$

$$-\frac{1}{\varkappa}\ln\left[\delta_t^+-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\right]-B,$$

при $\mathrm{Pr} < 1$

$$F(\mathrm{Pr}) = \frac{\mathrm{Pr}}{\varkappa_1 \sqrt{1-\mathrm{Pr}}} \operatorname{arcth} - \left(\varkappa_1 \sqrt{1-\mathrm{Pr}}\,\delta_t^+\right) - \\ - \frac{1}{\varkappa} \ln\left[\delta_t^+ - \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\right] - B. \qquad (7.126)$$

Постоянные $\varkappa$ и $B$ имеют те же значения, что и в формуле логарифмического распределения скорости (7.32). Рэнни принял следующие значения: $\varkappa = 0{,}4$ и $B = 5{,}5$. Сравнение результатов расчета по этой теории с опытными данными Шервуда и Петри [61] в диапазоне изменения числа Прандтля $0{,}8 < \mathrm{Pr} < 100$ приводит к удовлетворительному совпадению.

Помимо рассмотренных здесь соотношений для $c_h$ и $\mathrm{Nu}$, выражающих зависимость их от $\mathrm{Re}$ и $\mathrm{Pr}$ и основанных на более или менее реалистических представлениях о процессах переноса, естественно, имеется множество чисто эмпирических соотношений. Читателям, интересующимся этими соотношениями, можно рекомендовать учебники по тепло- и массообмену (см., например, [51]).

Возвращаясь к теоретическим решениям, следует отметить, что ценность этих решений, как мы видели, обусловливается лежащими в основе их представлениями о процессах переноса, в особенности в пристеночной области, а также предположениями, которые вытекают из этих представлений.

Напомним, что эти предположения касаются распределения скорости и распределений $\mathrm{Pr}$, $\mu_w/\mu$, $\sigma_{12}/\sigma_w$, $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$ и $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$.

Дайслером было показано, что изменение $\mathrm{Pr}$ и $\mu_w/\mu$ можно учесть путем выбора правильного значения характерной температуры. Изменение $\sigma_{12}/\sigma_w$ при течении в трубе строго следует линейной зависимости от расстояния до стенки, однако для пристеночной области как в пограничном слое, так и при течении в трубе оказывается справедливым предположение о том, что $\sigma_{12}/\sigma_w \approx 1$.

Таким образом, нам остается, по существу, рассмотреть только изменение $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$ и $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$.

Для случая течения в трубе Рейхардт [10], пользуясь уравнением теплового баланса, вычислил изменения $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$ в поперечном сечении трубы при различных значениях чисел Рейнольдса и Прандтля. При этом он исходил из обычного предположения, что влияние диффузии тепла в направлении течения пренебрежимо мало по сравнению с конвективным переносом под действием осредненного движения; это предположение можно считать справедливым, за исключением, быть может, области, очень близкой к стенке.

Рассмотрим элементарную кольцевую область длиной $dx_1$, заключенную между цилиндрами с радиусами соответственно

$$\frac{D}{2} - x_2 \quad \text{и} \quad \frac{D}{2} - (x_2 + dx_2).$$

Уравнение теплового баланса для этого элементарного объема запишется в виде

$$\frac{d}{dx_2}\left[2\pi\left(\frac{D}{2}-x_2\right)dx_1\Im_\theta\right]dx_2=-2\pi\left(\frac{D}{2}-x_2\right)dx_2\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho\bar{U}_1c_p\bar{\Theta})\,dx_1,$$

откуда

$$\left(\frac{D}{2}-x_2\right)\Im_\theta=-c_p\int_0^{x_2}\left(\frac{D}{2}-x_2\right)\rho\bar{U}_1\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_1}dx_2+\frac{D}{2}(\Im_\theta)_w,$$

или

$$(1-\xi_2)\frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w}=1-\frac{\int_0^{\xi_2}(1-\xi_2)\rho\bar{U}_1\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_1}d\xi_2}{\int_0^1(1-\xi_2)\rho\bar{U}_1\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_1}d\xi_2}.$$

Далее, Рейхардт принял, что распределение температуры является полностью установившимся и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{\Theta}_w-\bar{\Theta})=-\text{const}\,(\bar{\Theta}_w-\bar{\Theta}).$$

Тогда записанное выше уравнение принимает вид

$$(1-\xi_2)\frac{\Im_\theta}{(\Im_\theta)_w}=1-\frac{\int_0^{\xi_2}(1-\xi_2)\bar{U}_1\rho\,(\bar{\Theta}_w-\bar{\Theta})\,d\xi_2}{\int_0^1(1-\xi_2)\bar{U}_1\rho\,(\bar{\Theta}_w-\bar{\Theta})\,d\xi_2}. \qquad (7.127)$$

Таким способом Рейхардт вычислил $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w$ в первом приближении, воспользовавшись для этой цели распределением температуры, найденным им собственным приближенным методом, рассмотренным выше. Соответствующие результаты расчета при $\mathrm{Pr}=0{,}72$ и 200 и при $\mathrm{Re}_D=5\cdot10^3$ и $4\cdot10^5$ представлены на рис. 7.55.

На основании этого рисунка можно сделать вывод о том, что $\Im_\theta/(\Im_\theta)_w>\sigma_{12}/\sigma_w$ и что отношение этих величин при больших значениях $\mathrm{Pr}$ и $\mathrm{Re}_D$ стремится к единице. Следовательно, предположение о том, что в пристеночной области $\Im_\theta\approx(\Im_\theta)_w$ определенно является менее спорным, нежели предположение о том, что $\sigma_{12}\approx\sigma_w$.

Рассмотрим теперь турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$, которое представляет собой отношение коэффициентов вихревой диффузии для импульса и для тепла.

Турбулентное число Прандтля определялось многими исследователями для течения в трубе и в плоском канале. Известны как сум-

марные, так и локальные значения $Pr_{турб}$. Выше в настоящем параграфе уже упоминалось, что когда движущейся жидкостью является воздух, то наблюдавшиеся значения суммарного числа Прандтля лежат в диапазоне от 0,6 до 0,75.

Исходя из распределений температуры и скорости, измеренных в воздушном потоке в горизонтальном канале (высотой 1,9 *см* и шириной 30,5 *см*), верхняя и нижняя стенки которого поддерживались при различных, но постоянных температурах, Пейдж со своими сотрудниками [52] нашел распределение $Pr_{турб}$ в поперечном сечении

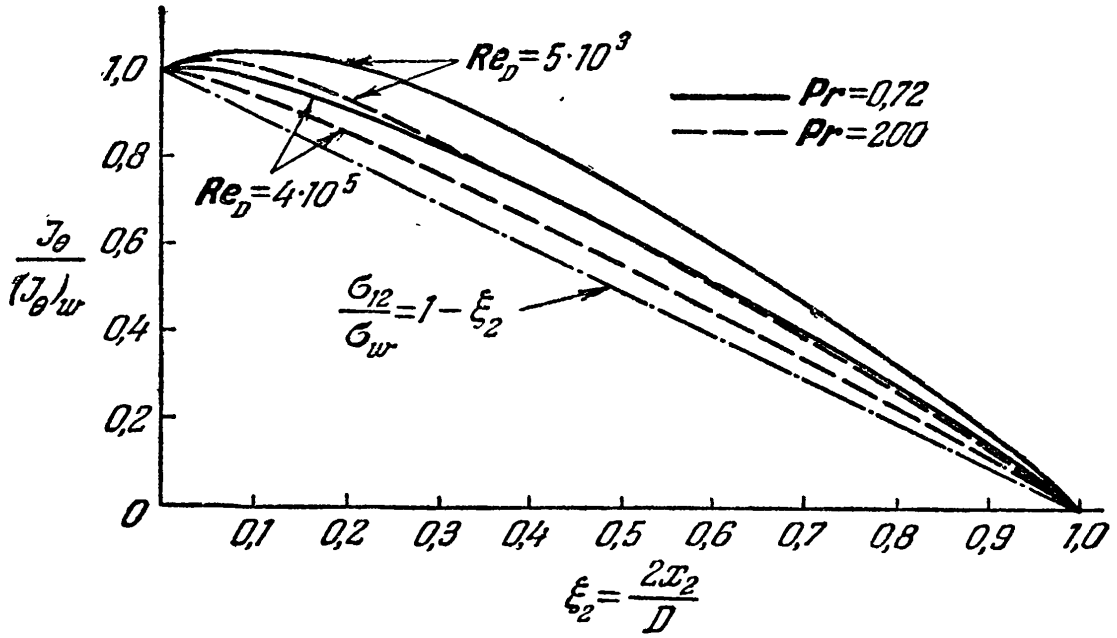



Рис. 7.55. Влияние критериев $Re_D$ и Pr на распределение потока тепла в поперечном направлении при течении в трубе [10].

канала. Оказалось, что турбулентное число Прандтля $Pr_{турб}$ возрастает с увеличением $Re_D$, стремясь к единице, и уменьшается с удалением от центра по направлению к пристеночной области. Каких-либо данных для пристеночной области получить при этом не удалось.

Однако совершенно противоположные результаты были получены Исаковым и Дрю [53] для ртути, движущейся вверх по вертикальной нагретой трубе с внутренним диаметром 3,8 *см*. Согласно этим опытам, величина $Pr_{турб}$ уменьшается с увеличением $Re_D$ и изменяется в поперечном сечении трубы таким образом, что ее минимальное значение соответствует примерно $\xi_2 = 0{,}2$; по направлению к стенке $Pr_{турб}$ резко возрастает. При этом были получены значения $Pr_{турб}$ как больше, так и меньше единицы. В рассматриваемом случае, как и прежде, каких-либо данных для пристеночной области тоже не приводится.

Данные о $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$, полученные Пейджем с сотрудниками, как и результаты опытов Исакова и Дрю, показывают, что при данном значении $\mathrm{Pr}$ произведение $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}\overline{\mathrm{Re}}_D^n$ является однозначной функцией $\xi_2$. Для воздушного потока получается величина $n = -0{,}15$, а в случае течения ртути $n = 0{,}46$.

Не имея каких-либо сведений о характеристиках турбулентных пульсаций температуры, очень трудно дать удовлетворительное объяснение этих результатов.

Однако логично ожидать заметного влияния молекулярного числа Прандтля на турбулентное число Прандтля. В главе 5 было показано, что коэффициент вихревой диффузии зависит от интенсивности молекулярного обмена блуждающих жидких частиц и жидких молей с их непосредственным окружением. Когда молекулярное число Прандтля очень велико, то молекулярного переноса тепла практически не происходит и величина $\epsilon_\theta$ должна приближаться к коэффициенту диффузии жидких частиц $\epsilon$. Так как $\epsilon_m/\epsilon < 1$, то отсюда следует, что при больших значениях $\mathrm{Pr}$ турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$ всегда должно быть меньше единицы.

В тех случаях, когда молекулярное число Прандтля невелико, поведение $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$ становится менее ясным. По крайней мере, можно утверждать, что при очень малом $\mathrm{Pr}$ между блуждающими жидкими частицами происходит очень интенсивный теплообмен, вследствие чего значения $\epsilon_\theta$ становятся относительно малыми и величина $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$ поэтому может оказаться больше единицы. При меньших значениях числа Рейнольдса этот эффект проявляется сильнее. Наоборот, с увеличением числа Рейнольдса образуются все более и более мелкие вихри, вследствие чего молекулярные процессы и их влияние ослабевают; в результате этого величина $\epsilon_m/\epsilon_\theta$ может уменьшиться; в то же время каждый из коэффициентов $\epsilon_m$ и $\epsilon_\theta$ также уменьшается. По-видимому, в случае ртути ($\mathrm{Pr} = 0{,}024$) величина $\mathrm{Pr}_{\text{турб}}$, которая при низких $\mathrm{Re}_D$ больше единицы, с увеличением $\mathrm{Re}_D$, минуя единицу, стремится к еще меньшим значениям.

В приведенных выше рассуждениях мы умышленно пренебрегали влиянием диффузии какого бы то ни было неградиентного типа на процессы переноса. Однако хорошо известно, что в случае свободных турбулентных потоков, рассмотренных в главе 6, не удается пренебречь влиянием на перенос тепла крупномасштабных движений, а этот эффект относится к категории факторов неградиентного типа. Или, лучше сказать, в этом случае оказалось невозможным дать удовлетворительное описание полного переноса тепла с помощью лишь диффузии градиентного типа.

Аналогично можно ожидать, что крупномасштабные турбулентные движения, наблюдающиеся во внешней области пограничного слоя и в ядре течения в трубе, будут оказывать существенное влияние

на вихревой перенос тепла. Это влияние может исказить результаты всех тех измерений турбулентного переноса, которые основаны на представлениях о диффузии градиентного типа, т. е. в результаты, основанные на коэффициентах вихревой диффузии и турбулентных числах Прандтля.

## § 7.12. Отдельные задачи пристеночной турбулентности

В этом параграфе мы кратко рассмотрим несколько проблем, почти не затронутых в предыдущих разделах, главным образом, потому, что по этим проблемам имеется слишком мало экспериментальных данных и они до сих пор содержат много нерешенных вопросов.

Этими проблемами являются: (1) влияние шероховатости стенки на перенос тепла, (2) влияние турбулентности свободного потока на процессы переноса в турбулентном пограничном слое и (3) влияние сжимаемости жидкости.

### Влияние шероховатости стенки на теплообмен

Экспериментальные данные показывают, что если относительная шероховатость достаточно мала, то ее влиянием на картину турбулентного течения можно пренебречь. В случае песочной шероховатости это справедливо, согласно опытам Никурадзе, скажем, при $u^*k/\nu < 5$. Следовательно, можно ожидать, что перенос тепла в потоке вдоль шероховатой стенки, обладающей малой относительной шероховатостью, будет подобен переносу тепла в потоке вдоль гладкой стенки, за исключением, быть может, незначительного влияния, обусловленного увеличением площади поверхности шероховатой стенки.

С увеличением шероховатости в пределах $5 < u^*k/\nu < 55$ (для песочной шероховатости) наблюдается рост ее влияния на картину течения; среди прочих явлений отмечается уменьшение эффективной толщины вязкого подслоя. Это уменьшение оказывает влияние на перенос тепла поперек пограничного слоя в силу того, что элементы шероховатости вызывают возмущения в вязком подслое, которые способствуют турбулентному переносу. Иными словами, элементы шероховатости усиливают «активную» роль вязкого подслоя, проявляющуюся даже в случае гладкой стенки. С увеличением числа Прандтля это благотворное воздействие на перенос тепла будет возрастать.

Когда шероховатость становится настолько большой, что $u^*k/\nu > 55$ (это численное значение, как и выше, относится к песочной шероховатости), то эффективная толщина вязкого подслоя обращается в нуль (см. рис. 7.8 и 7.9). В этом случае сопротивление течению

перестает зависеть от молекулярного переноса импульса, т. е. от вязкости, и, следовательно, от числа Рейнольдса. По-видимому, логично считать, что перенос тепла также не будет испытывать влияния молекулярного переноса и, следовательно, не будет зависеть не только от числа Рейнольдса, но и от числа Прандтля.

Это предположение представляется вполне логичным, однако против него можно высказать серьезные возражения. В полностью турбулентной части потока перенос тепла определяется величиной $\epsilon_\theta$, причем этот коэффициент вихревой диффузии зависит от числа Прандтля. Стало быть, сохраняется по меньшей мере влияние числа Прандтля на перенос тепла.

Посмотрим теперь, какие явления происходят вблизи стенки. Примем, что течение развивается в условиях вполне шероховатой стенки, при которых сопротивление течению не зависит от числа Рейнольдса. Сопротивление течению, оказываемое элементами шероховатости, складывается из вязкого сопротивления стенки и сопротивления формы. В условиях вполне шероховатой стенки элементы шероховатости погружены в полностью турбулентную часть пристеночной области настолько далеко, что сопротивление формы становится преобладающим, и в результате этого сопротивление соответствует квадратичному закону, будучи независимым от числа Рейнольдса.

Однако перенос тепла не обязательно должен следовать той же модели, что и перенос импульса. Из опытных данных по измерению переноса тепла на цилиндре и сфере, обтекаемых равномерным потоком, известно, что число Нуссельта остается функцией числа Рейнольдса, даже когда коэффициент сопротивления уже перестает зависеть от числа Рейнольдса. Это наблюдается также и в случае, когда свободный поток сам по себе является турбулентным (см. ниже). Следовательно, если элементы шероховатости рассматривать как малые тела, присоединенные к гладкой стенке и обтекаемые турбулентным потоком, то, по аналогии со сказанным выше, можно ожидать влияния числа Рейнольдса на перенос тепла от стенки к жидкости при любом значении числа Рейнольдса, а также, очевидно, и влияния числа Прандтля, хотя эти эффекты, по всей вероятности, могут оказаться слабее, нежели в случае гладкой стенки.

Первые опыты, поставленные специально для исследования влияния шероховатости стенки на теплообмен, были проведены Полем [54], который изучал перенос тепла к жидкостям, движущимся по шероховатым трубам. Однако в этих опытах значения $u^*k/\nu$ были меньше 12; поэтому они не смогли дать ответа на вопросы, поднятые выше.

К сожалению, то же самое приходится сказать и об обширных измерениях, проведенных Смитом и Эпштейном [55] при исследовании теплообмена и трения в воздушном потоке в гладкой медной трубе ($D=0{,}6$ *см*) и в шести других промышленных трубах ($D=0{,}3 \div 0{,}9$ *см*) с относительной шероховатостью $D/k$ от 640 до 64, при числах

Рейнольдса от $10^4$ до $8 \cdot 10^4$. Было отмечено некоторое увеличение коэффициентов теплоотдачи с возрастанием шероховатости, но даже в трубе с наибольшей шероховатостью едва ли удалось достичь условий вполне шероховатой стенки при наивысшем значении $\mathrm{Re}_D$; при этом все еще наблюдалась слабая зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса.

Более завершенными являются результаты опытов Нуннера [42]. Искусственная шероховатость, созданная Нуннером в медной трубе ($D = 5$ *см*) с помощью кольцевых шайб, в переводе на эквивалентную песочную шероховатость составляла $k = 2{,}28$ *см*! Значения

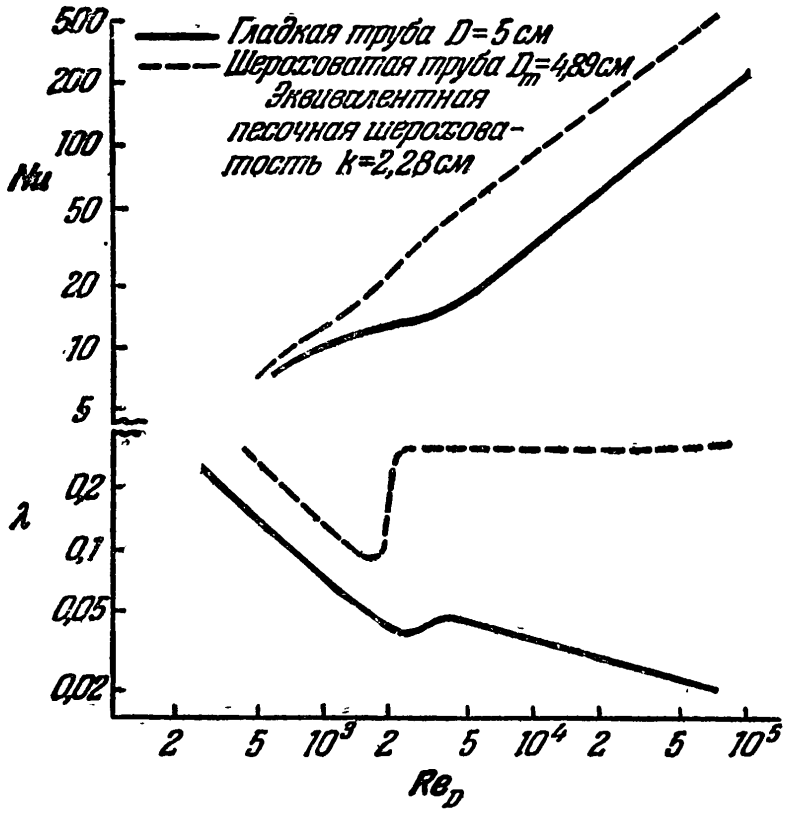



Рис. 7.56. Влияние шероховатости стенки на теплообмен и трение при течении воздуха [42].

числа Рейнольдса были достаточно высоки, чтобы обеспечивать широкий диапазон, в котором выполнялись условия вполне шероховатой стенки. Однако эти опыты проводились только на воздухе, и поэтому число Прандтля оставалось неизменным. Нуннеру удалось получить зависимость $\mathrm{Nu}$ от $\mathrm{Re}_D$ для любых условий шероховатости. В логарифмических координатах зависимости $\mathrm{Nu}$ от $\mathrm{Re}_D$ при $\mathrm{Re}_D > 3000$, как и в случае гладкой стенки, представляют собой практически прямые линии. Эти линии почти параллельны соответствующей линии для гладкой стенки и смещены относительно нее по вертикали, причем это смещение увеличивается с возрастанием эффективной шероховатости. Таким образом, никакого заметного отклонения от зависимости от числа Рейнольдса для гладкой стенки в этих опытах получено не было. На рис. 7.56 изображены две

кривые для двух предельных случаев: гладкой трубы и трубы с наибольшей эквивалентной песочной шероховатостью $k = 2{,}28$ *см*. При обработке экспериментальных данных для шероховатой трубы использовалось осредненное значение диаметра $D_m$. Этот осредненный диаметр определялся как эквивалентный диаметр гладкой трубы, имеющей такой же объем на единицу длины.

Интересно отметить, что в случае шероховатой трубы не наблюдалось заметного различия между зависимостями $\mathrm{Nu}$ от $\mathrm{Re}_D$ для областей «ламинарного» ($\mathrm{Re}_D < 2000$) и турбулентного режимов течения, тогда как зависимость $\lambda$ от $\mathrm{Re}_D$ характеризуется обычной переходной зоной вблизи значения $\mathrm{Re}_D = 2000$, хотя в области ламинарного режима течения коэффициенты трения оказываются значительно выше, нежели для гладкой трубы. Наблюдающееся в случае гладкой трубы относительное увеличение числа Нуссельта при уменьшении числа Рейнольдса в переходной области и в области ламинарного режима течения может вызываться вторичными течениями, обусловленными влиянием архимедовых сил, которое усиливается при убывании скорости осредненного потока, т. е. при уменьшении числа Рейнольдса. Предположение о существовании этих вторичных течений подкрепляется своеобразными несимметричными профилями температуры, измеренными Нуннером. Очевидно, теми же эффектами объясняется и «прямолинейное» продолжение кривой ($\mathrm{Nu}$, $\mathrm{Re}_D$) для шероховатой трубы при ламинарном режиме течения, стремящееся к кривой для гладкой трубы.

Из своих исследований Нуннер сделал вывод, что влияние шероховатости стенки на теплообмен подобно эффекту, который должен наблюдаться при изменении числа Прандтля. Он обобщил зависимость $\mathrm{Nu}$ ($\mathrm{Re}_D$, $\mathrm{Pr}$), которая следует из формулы Прандтля (7.121), учтя влияние шероховатости стенки:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\lambda}{8} \frac{\mathrm{Re}_D \mathrm{Pr}}{1 + 1{,}5\,\mathrm{Re}_D^{-1/8}\,\mathrm{Pr}^{-1/6}\,(\mathrm{Pr}\,\lambda/\lambda_0 - 1)}.$$

Здесь $\lambda_0$ обозначает коэффициент трения в случае гладкой стенки при том же значении $\mathrm{Re}_D$. Это соотношение согласуется с собственными данными Нуннера с точностью до 20%.

Наличие члена $\mathrm{Pr}\,\lambda/\lambda_0$ отражает эквивалентность влияния числа Прандтля и шероховатости на теплообмен. Но, поскольку опыты Нуннера проводились только с воздухом, влияние числа Прандтля требует дальнейшего экспериментального исследования.

В связи с тем, что как теплообмен, так и трение возрастают с увеличением шероховатости стенки трубы, возникает интересный вопрос, дает ли какие-либо экономические выгоды искусственное увеличение шероховатости; этот вопрос изучался, например, Нуннером [42] и Кохом [66], который продолжил опыты Нуннера. Этот

вопрос возникает потому, что путем увеличения массового расхода в гладкой трубе можно получить такие же значения Nu или $C_h$, как и в шероховатой трубе с одинаковым диаметром. Если произведение массового расхода жидкости на величину градиента давления окажется для гладкой трубы выше, чем для шероховатой, то применение шероховатой трубы будет экономически выгодным. Из-за сложности процессов теплообмена в турбулентном потоке в шероховатой трубе невозможно заранее предсказать, какому из этих двух путей следует отдать предпочтение. Вообще говоря, применение шероховатых труб оказывается менее выгодным с экономической точки зрения, что можно отнести, по всей вероятности, за счет относительно большой доли сопротивления формы элементов шероховатости в полном сопротивлении течению. Однако вполне возможны также и такие случаи, когда применение шероховатой трубы с экономической точки зрения становится более выгодным. Этот вывод следует, например, из результатов опытов Нуннера и вполне определенно был подтвержден Кохом.

## Влияние турбулентности свободного потока на процессы переноса в пограничном слое

Когда свободный поток снаружи пограничного слоя на теле сам по себе является турбулентным, он будет оказывать влияние на процессы турбулентного переноса в пограничном слое. Пока интенсивность турбулентности свободного потока относительно невелика, т. е. меньше интенсивности турбулентности в турбулентном пограничном слое, можно ожидать, что это влияние будет ограничено лишь наружными областями пограничного слоя. Но с увеличением интенсивности турбулентности свободного потока ее влияние может усилить процесс турбулентного переноса.

В случае течения около тела влияние турбулентности свободного потока может быть трех видов:

1. Расположенная выше по потоку часть пограничного слоя на теле обычно еще не является турбулентной, и в некоторой точке вниз по потоку от передней критической точки происходит переход течения в турбулентное. Турбулентность в свободном потоке может не только оказать влияние на положение этой точки перехода, но и вызвать также возмущения в ламинарной части пограничного слоя и, стало быть, повлиять на процессы переноса в ней.

2. Как отмечалось выше, турбулентность свободного потока может оказывать влияние на турбулентную часть пограничного слоя на теле.

3. Если за телом имеется след, то турбулентность свободного потока может взаимодействовать с течением в следе.

Из результатов измерения локального переноса тепла на сферах и цилиндрах известно, что максимальная интенсивность теплообмена наблюдается в передней критической точке и в кормовой части тела, а минимальная интенсивность имеет место на боковых поверхностях этих тел. Значит, можно ожидать, что влияние турбулентности свободного потока на перенос тепла будет наибольшим на фронтальной поверхности тела и в его кормовой части.

Первые измерения по оценке влияния интенсивности турбулентности свободного потока на перенос тепла были проведены, по-видимому, Райхером [56], которому удалось экспериментально обнаружить 50%-ное усиление переноса тепла при поперечном обтекании цилиндра воздушным потоком, турбулизированным при помощи решетки.

Аналогичные опыты были поставлены Лойцянским и Швабом [57], которые для этой цели воспользовались нагретыми сферами диаметром 7 *см*. Путем повышения относительной интенсивности турбулентности свободного потока от 0,5% почти до 3% они получили увеличение $\overline{\mathrm{Nu}}$ на 30÷35% при значениях числа Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}$ (отнесенного, по-видимому, к диаметру сферы и скорости свободного потока) от $5 \cdot 10^4$ до $10^5$.

Камингс, Клэпп и Тэйлор [58] определили значения $\overline{\mathrm{Nu}}$ для случая переноса тепла от цилиндра ($\overline{\mathrm{Re}} \approx 6000$), когда относительная интенсивность турбулентности изменялась от 2 до 21%. Максимальное увеличение $\overline{\mathrm{Nu}}$ составило в этих опытах примерно 25%; быстрота этого увеличения существенно возрастала лишь в диапазоне изменения интенсивности турбулентности от 2 до 5%. Анализируя результаты этих опытов, Де Хаас ван Дорссер, Ленигер и Ван Меэль [59] пришли к выводу, что любое увеличение интенсивности турбулентности выше 5% не имеет почти никакого смысла. Эти авторы сами производили измерения скорости испарения воды с плоской поверхности промокательной бумаги. В соответствии с их выводом им удалось обнаружить, что увеличивать интенсивность турбулентности выше 5% не требуется. При таком увеличении интенсивности они получили повышение скорости испарения почти на 50%.

В отличие от результатов Камингса и его сотрудников, опыты Майзеля и Шервуда [60] по испарению воды с поверхности пропитанных влагой сфер и цилиндров показали, что скорость испарения с увеличением интенсивности турбулентности всегда возрастает; оказалось, что быстрота этого возрастания увеличивается с повышением числа Рейнольдса.

Майзель и Шервуд поставили также несколько опытов, в которых изменялся интегральный масштаб турбулентности свободного потока. Им не удалось обнаружить какого-либо влияния изменения этой величины на скорость испарения. Однако надо заметить, что все использованные при этом различные масштабы турбулентности были сравнимы по своему размеру с диаметром сферы или цилиндра.

Сато и Сэйдж [62] недавно опубликовали результаты измерений переноса тепла от электрически нагреваемой сферы к воздушному потоку. В этих опытах серебряная сфера ($D = 1{,}25$ *см*) помещалась в «потенциальное» ядро струи, которое могло быть турбулизировано с помощью решетки, установленной выше по потоку. Решетка представляла собой перфорированную пластину с отверстиями диаметром 2,2 *см*, равномерно расположенными с шагом 2,5 *см*. Относительная интенсивность турбулентности свободного потока вокруг сферы посредством изменения положения сферы относительно решетки могла быть увеличена до 15%. Измерения проводились при трех значениях скорости струи, соответствующих $\mathrm{Re}_D = 2000$; 4000 и 8000. Относительное число Нуссельта $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ ($\mathrm{Nu}_0$ соответствует нулевой относительной интенсивности турбулентности) возрастало с увеличением $\mathrm{Re}_D$ и относительной интенсивности турбулентности, достигая значения 2,42 при $\mathrm{Re}_D = 8000$ и при относительной интенсивности турбулентности, равной 15%.

Значительно более полные измерения с целью выяснения влияния интенсивности и интегрального масштаба турбулентности на перенос тепла от электрически нагреваемого цилиндра к воздушному потоку были осуществлены Ван дер Хегге Цийненом [63]. В этих опытах в воздушный поток, искусственно турбулизированный с помощью решетки, помещались цилиндры различных диаметров, от 0,306 до 4,19 *см*. При этом использовались три решетки с квадратными ячейками, изготовленные из плоских полос (размер ячейки/ширина полосы $= 2{,}7/0{,}7$; 5,2/0,2 и 8,0/1,0). Средняя скорость воздушного потока составляла около 1200 *см/сек*. Относительная интенсивность турбулентности свободного потока в районе расположения цилиндра изменялась за счет попеременного использования этих трех решеток и изменения положения цилиндра относительно решетки; при этом также изменялось отношение интегрального масштаба к диаметру цилиндра. Пользуясь большим количеством данных, полученных для переноса тепла к воздушному потоку и характеризующих одновременное влияние относительной интенсивности и отношения интегрального масштаба к диаметру цилиндра, Ван дер Хегге Цийнен смог разделить эти два эффекта. В результате он получил следующее эмпирическое соотношение:

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Nu}_0} = 1 + \varphi\left(\frac{u_1' D}{\nu}\right)\psi\left(\frac{\Lambda_f}{D}\right),$$

где $\Lambda_f$ — продольный интегральный масштаб.

На рис. 7.57 изображены кривые зависимости $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ от $\Lambda_f/D$, параметром которых, в соответствии с этим соотношением, выбрана относительная интенсивность турбулентности $u_1'/\overline{U}_1$. Поскольку $u_1' D/\nu = (u_1'/\overline{U}_1)\mathrm{Re}_D$, то в качестве параметра вместо $u_1'/\overline{U}_1$ можно также

выбрать величину $u_1'D/\nu$; в настоящих опытах величина $u_1'D/\nu$ изменялась в пределах от 0 до 1150.

Опираясь на формулу Ван дер Хегге Цийнена, можно объяснить кажущиеся несоответствия и даже противоречия, обнаруженные в литературе по влиянию интенсивности и масштаба турбулентности на теплообмен. Любопытно заметить, что, как можно видеть, имеется оптимальное значение $\Lambda_f/D$, не зависящее от $u_1'D/\nu$, при котором отношение $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ достигает своей максимальной величины, а именно $\Lambda_f/D \approx 1{,}6$. Существование довольно резко выраженного максимума

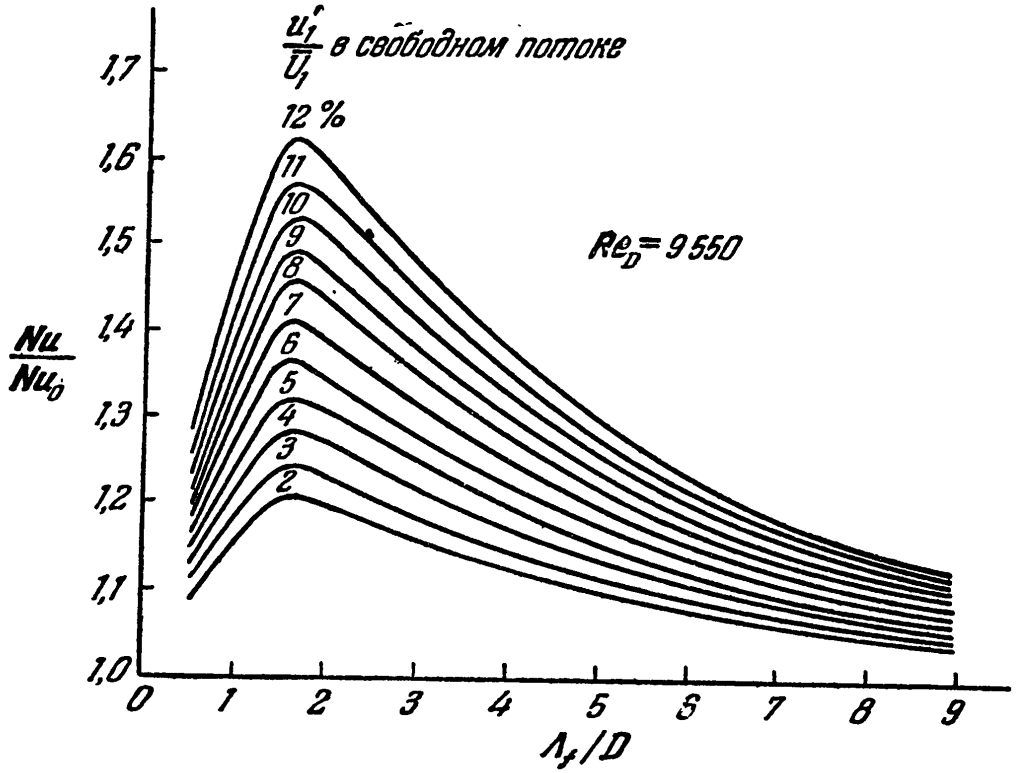



Рис. 7.57. Влияние интенсивности и масштаба турбулентности свободного потока на перенос тепла от цилиндра [63].

при фиксированном значении $\Lambda_f/D$, по-видимому, указывает на своего рода резонанс между осредненной частотой турбулентного потока и частотой образования вихрей в следе за цилиндром.

Частота образования вихрей приблизительно равняется $0{,}2\bar{U}_1/D$. Если принять предположение о резонансе с энергосодержащими вихрями турбулентного потока, то эта частота образования должна быть равна удвоенной частоте энергосодержащих вихрей, т. е. $\bar{U}_1 k_e/\pi$, где $k_e$ — волновое число, соответствующее этим вихрям. В случае изотропной турбулентности $\Lambda_f \approx 0{,}75/k_e$ [см. уравнение (3.138)]. Отсюда получается значение $\Lambda_f/D \approx 1{,}2$, которое по порядку величины совпадает со значением 1,6, найденным экспериментально.

Подобный резонанс может приводить к увеличению интенсивности пульсаций в пограничном слое на цилиндре, особенно в следе за ним,

и способствовать, таким образом, возрастанию скорости переноса тепла. В пользу подобной интерпретации результатов опытов Ван дер Хегге Цийнена говорит увеличение разрежения на поверхности цилиндра (связанное с увеличением пульсаций скорости и давления на боковой поверхности цилиндра и в следе за ним) с возрастанием степени турбулентности свободного потока, когда величина $\Lambda_f/D$ равняется примерно 1,6.

В случае пограничного слоя на плоской пластине влияние турбулентности свободного потока на перенос тепла от пластины может, по-видимому, проявляться только в ламинарном пограничном слое перед точкой перехода или, вероятно, в ускорении самого перехода; однако в полностью развитой турбулентной части пограничного слоя это влияние вряд ли может наблюдаться. Нам известно, что течение в пристеночной области турбулентного пограничного слоя нечувствительно к условиям, существующим снаружи пограничного слоя. Благодаря тому, что основное сопротивление переносу тепла проявляется в пристеночной области, никакого влияния турбулентности свободного потока на скорость переноса тепла от пластины не должно наблюдаться. Иначе говоря, никакого влияния не следует ожидать до тех пор, пока число Прандтля жидкости не станет настолько малым, что сопротивление переносу тепла не будет более ограничено пристеночной областью, или пока возмущения пограничного слоя, накладываемые внешними условиями, не станут настолько сильными, что смогут проникнуть в вязкий подслой.

Анализируя в свете этих представлений результаты, полученные Эдвардсом и Фарбером [64], мы не заметим ничего удивительного. Эдвардс и Фарбер произвели измерение переноса тепла от изолированной области плоской пластины, помещенной в параллельный ей поток воздуха, который мог быть турбулизирован с помощью решеток, устанавливаемых вверх по потоку от пластины. Максимальная величина относительной интенсивности турбулентности составляла в этих опытах до 5%. В турбулентной части пограничного слоя не удалось отметить совершенно никакого влияния на перенос тепла, однако заметное влияние наблюдалось в переходной области. При относительной интенсивности турбулентности свободного потока 5% турбулентное течение в пограничном слое устанавливалось при $\mathrm{Re}_{x_1} \approx 10^5$, в то время как при отсутствии турбулизирующей решетки течение не становилось турбулентным, пока не достигалось значение $\mathrm{Re}_{x_1} \approx 10^6$. Наибольшее увеличение числа Нуссельта, обусловленное влиянием турбулентности свободного потока, составляло при $\mathrm{Re}_{x_1} \approx 2{,}5 \cdot 10^5$ около 70%.

Турбулентность свободного потока оказывала при этом небольшое влияние на ламинарную часть пограничного слоя, предшествующую переходной области.

## Влияние сжимаемости жидкости

Данных о влиянии сжимаемости жидкости на механизм турбулентного течения в пограничном слое или в трубе известно очень мало. Это влияние слишком слабо, чтобы его следовало учитывать в рассмотренных выше течениях, обладающих малой скоростью; однако его нельзя более игнорировать в случае потоков большой (сверхзвуковой) скорости. Торможение свободного потока большой скорости в пограничном слое вызывает превращение кинетической энергии, благодаря сжатию, в тепло, вследствие чего происходит повышение температуры. Поскольку выделение теплоты сжатия в пограничном слое неравномерно, то под действием молекулярной и турбулентной диффузии происходит перенос тепла. В результате этого температура вблизи стенки может стать отличной от температуры торможения. Эта разница зависит от молекулярного числа Прандтля, а также от степени тепловой изоляции стенки.

Можно ожидать, что главное влияние сжимаемости в высокоскоростном пограничном слое будет связано с изменениями свойств жидкости, обусловленными изменениями температуры.

Некоторые сведения о влиянии сжимаемости на распределение осредненной скорости в турбулентном пограничном слое при больших значениях числа Маха свободного потока были получены Лоббом, Винклер и Першем [65] по измерениям распределений полного давления и температуры в поперечных сечениях. Значения числа Маха $\mathbf{M}_0$ свободного потока составляли в этих опытах 5,0, 6,8 и 7,7.

Распределение скорости в вязком подслое оказалось линейным и подчиняющимся соотношению $\overline{U}_1^+ = x_2^+$; вязкость при этом определялась по температуре стенки. Это распределение выполнялось для значительно большей области, нежели в случае несжимаемой жидкости, а именно вплоть до $\delta_l^+ \approx 12$ при $\mathbf{M}_0 = 6{,}8$ по сравнению с $\delta_l^+ \approx 5$ для несжимаемой жидкости. Переход к полностью турбулентной области был значительно менее плавным, а в полностью турбулентной части пристеночной области наблюдались отклонения от логарифмического распределения скорости, которые зависели от интенсивности теплообмена со стенкой.

Распределение скорости во внешней области турбулентного пограничного слоя вполне удовлетворительно аппроксимировалось степенным законом

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_0} = \xi_2^{1/n}.$$

Величина $n$ с возрастанием числа Маха уменьшалась. Так, при $\mathbf{M}_0 = 5{,}0$ величина $n$ составляла примерно 7, а число Рейнольдса $\mathbf{Re}_\delta$ незначительно изменялось в диапазоне от $1{,}5 \cdot 10^5$ до $1{,}65 \cdot 10^5$; при $\mathbf{M}_0 = 6{,}8$ [$\mathbf{Re}_\delta = (1{,}81 \div 2{,}94) \cdot 10^5$] было получено значение $n = 6$,

а при $M_0 = 7{,}7$ ($Re_\delta = 2 \cdot 10^5$) — $n \approx 5{,}5$. Поскольку показатель степени $n$ зависит также от $Re_\delta$ (возрастает при увеличении $Re_\delta$), то это влияние, естественно, сказывается и на приведенных выше значениях $n$.

По распределению скорости в вязком подслое Лобб, Винклер и Перш определили также напряжение сдвига на стенке $\sigma_w$, а по $\sigma_w$ — коэффициент трения $c_f = \sigma_w \frac{1}{2}\rho_0 U_0^2$. Эти данные, а также данные других авторов были систематизированы Кьюзом [32] на графике, который мы приводим на рис. 7.58. Здесь отношение $c_f/c_{f,i}$, где

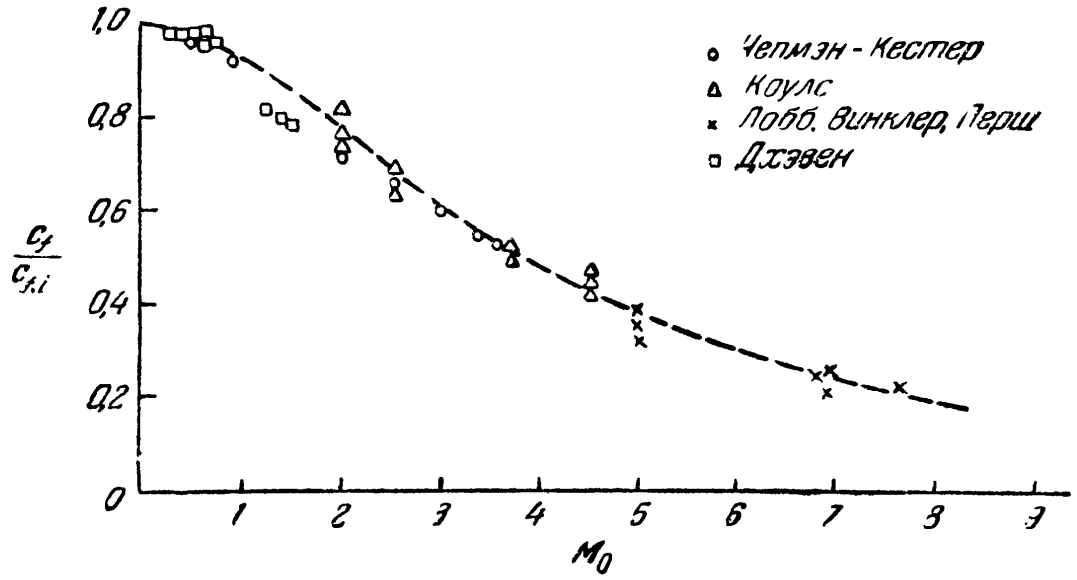



Рис. 7.58. Влияние числа Маха свободного потока на коэффициент трения о стенку $c_f$ для сжимаемого газа, отнесенный к коэффициенту $c_{f,i}$ для несжимаемой жидкости [32].

величина $c_{f,i}$ относится к несжимаемой жидкости, изображено в зависимости от числа Маха свободного потока. Хотя при этом и наблюдается некоторое влияние числа Рейнольдса, все же основное изменение коэффициента трения связано с влиянием числа Маха. Убывание этого отношения с ростом числа Маха связано с тем, что это отношение приблизительно пропорционально некоторой положительной степени величины $\theta_0/\theta_w$, которая убывает с ростом числа Маха, т. е. с увеличением температуры торможения. Для изотермического потока несжимаемой жидкости можно записать следующее приближенное соотношение [см. уравнение (7.61)]:

$$c_{f,i} = \text{const}\left(\frac{\rho_0 U_0 \delta}{\mu_0}\right)^{-m}.$$

Если принять, что такое же соотношение справедливо и в случае сжимаемого пограничного слоя, а величины $\rho$ и $\mu$ определить из условий на стенке, то получим

$$\frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho_w U_0^2} = \text{const}\left(\frac{\rho_w U_0 \delta}{\mu_w}\right)^{-m},$$

откуда

$$c_f = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2} = \text{const}\,\frac{\rho_w}{\rho_0}\left(\frac{\rho_w U_0 \delta}{\mu_w}\right)^{-m} =$$

$$= c_{f,i}\left(\frac{\rho_w}{\rho_0}\right)^{1-m}\left(\frac{\mu_w}{\mu_0}\right)^{m} \approx c_{f,i}\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_w}\right)^{1-(n+1)m};$$

здесь предполагается, что $\mu_w/\mu_0 \approx (\Theta_w/\Theta_0)^n$. Для наблюдающихся в действительности значений $m$ и $n$ величина $(n+1)m$ меньше единицы.

Годдардом [67] было проведено исследование влияния шероховатости стенки на сжимаемый пограничный слой. Он обнаружил, что если выполняется условие вполне шероховатой стенки, то вплоть до $M_0 = 5$ влияние сжимаемости носит лишь опосредствованный характер. Коэффициент трения $c_f$ зависит, как и в случае несжимаемой жидкости, только от $u^*k/\nu$. Поскольку при условии вполне шероховатой стенки непосредственного влияния вязкости не наблюдается, то $c_f/c_{f,i} = \rho_w/\rho_0$, так что в целом влияние сжимаемости сказывается в уменьшении плотности жидкости вблизи поверхности. Смещение профиля скорости $\Delta\overline{U}_1/u^*$ зависит, по-видимому, только от параметра $u^*k/\nu$ (ср. с рис. 7.9, соответствующим случаю несжимаемой жидкости).

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

$c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

$c_f$ — $\sigma_w \Big/ \frac{1}{2}\rho U_0^2$, коэффициент трения о стенку.

$c_h$ — коэффициент, характеризующий сопротивление тепловому потоку вблизи стенки.

$D$ — диаметр трубы.

$E_2(k_1)$, $E_2(k_2)$ — одномерный спектр кинетической энергии турбулентности.

$f$ — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.

$g$ — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.

$H$ — $\delta_d/\delta_m$, формпараметр пограничного слоя.

$h(\xi_2)$ — поправочная функция для логарифмического закона избыточной скорости.

$h_1(\xi_2)$ — поправочная функция Милликена для логарифмического распределения скорости.

$k$ — параметр шероховатости, средняя высота элементов шероховатости.

$L_i$ — масштаб длины в направлении $x_i$.

$l$ — масштаб длины для пространственных изменений турбулентных пульсаций скорости.

$\mathrm{M}_0$ — число Маха свободного потока.

Nu — число Нуссельта.

$P$ — статическое давление; $\overline{P}$ — осредненная по времени величина; $p$ — турбулентная пульсация; $P_0$ — статическое давление в свободном потоке.

Pr — $\nu/\mathcal{K}_0$, число Прандтля; $\mathrm{Pr}_{\text{турб}} = (\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\theta)_{22}$; $\mathrm{Pr}_{\text{эфф}} = c_p\mu_{\text{эфф}}/\mathcal{K}_{\text{эфф}}$.

$\overline{q^2}$ — $\overline{u_i u_i}$, удвоенная кинетическая энергия турбулентности.

Re — число Рейнольдса; $\mathrm{Re}_D = \overline{U}_{\text{ср}} D/\nu$; $\mathrm{Re}_{x_1} = U_0 x_1/\nu$; $\mathrm{Re}_\delta = U_0\delta/\nu$; $\mathrm{Re}_{\delta d} = U_0\delta_d/\nu$.

$r$ — цилиндрическая полярная координата в радиальном направлении; радиальное расстояние от оси трубы.

Sc — число Шмидта.

$U_i$ — эйлерова скорость; $\overline{U}_i$ — осредненная по времени величина; $u_i$ — компонента турбулентной пульсации; $u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}}$; $U_0$ — скорость свободного потока; $\overline{U}_{x,\max}$ — максимальная скорость на оси потока в трубе; $\overline{U}_{\text{ср}}$ — средняя скорость в поперечном сечении потока в трубе; $u^* = (\sigma_w/\rho)^{1/2}$ — динамическая скорость; $\overline{U}_i^+ = \overline{U}_i/u^*$; индексы $r$, $\varphi$ и $x$ соответствуют цилиндрическим полярным координатам.

$w(\xi_2)$ — поправочная функция Коулса для логарифмического распределения скорости.

$x$ — цилиндрическая полярная координата в осевом направлении; $x_i$ — декартова координата; $x_2^+ = x_2 u^*/\nu$.

$\delta$ — толщина пограничного слоя; $\delta_d$ — толщина вытеснения; $\delta_m$ — толщина потери импульса; $\delta_e$ — толщина потери энергии; $\delta^+ = \delta u^*/\nu$; $\delta_l$ — толщина вязкого подслоя; $(\delta_t - \delta_l)$ — толщина переходного слоя.

$\Delta$ — толщина диссипации пограничного слоя.

$\varepsilon$ — диссипация под действием турбулентности на единицу массы.

$\varepsilon'$ — $\nu\overline{(\partial u_j/\partial x_j)(\partial u_j/\partial x_i)}$.

$(\epsilon_m)_{ij}$ — тензор вихревой диффузии для импульса; $(\epsilon_\theta)_{ij}$ — то же для тепла.

$\varphi$ — цилиндрическая полярная координата в окружном направлении.

$\mathfrak{I}$ — поток через единицу площади; $\mathfrak{I}_\theta$ — для тепла.

$\varkappa$ — универсальная постоянная Кармана.

$\mathcal{K}$ — коэффициент теплопроводности: $\mathcal{K}_{эфф} = \mathcal{K} + \rho c_p (\epsilon_\theta)_{22}$; $\mathcal{R}_\theta = \mathcal{K}/c_p\rho$.

$l$ — прандтлевский путь смешения; $l_m$ — то же для импульса.

$\Lambda_f$ — пространственный продольный интегральный масштаб.

$\Lambda_g$ — пространственный поперечный интегральный масштаб.

$\lambda$ — коэффициент трения о стенку при течении в трубе.

$\mu$ — динамический коэффициент вязкости; $\mu_{эфф} = \mu + \rho (\epsilon_m)_{11}$.

$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

$\Omega$ — коэффициент перемежаемости.

$\Pi$ — параметр Коулса для профиля скорости в пограничном слое.

$\pi$ — 3,14159 ...

$\rho$ — плотность.

$\sigma_{ij}$ — тензор напряжений.

$\sigma_w$ — напряжение сдвига на стенке.

$\Theta$ — температура; $\overline{\Theta}$ — осредненная по времени величина; $\theta$ — турбулентная пульсация; $\overline{\Theta}_w$ — температура стенки; $\Theta_0$ — температура свободного потока; $\overline{\Theta}_{min}$ — температура на оси потока в трубе.

$\mathcal{U}_l$ — масштаб скорости в направлении $x_i$.

$\mathfrak{v}$ — масштаб турбулентных пульсаций скорости.

$\xi_i = x_i/\delta$; $\xi_2 = 2x_2/D$; $\xi_2' = 1 - \xi_2$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Для читателей, незнакомых с тензорным исчислением, дадим краткий обзор тех его элементов, которые часто применяются в этой книге.

Тензор представляет собой величину, которая остается инвариантной и преобразуется в самое себя при повороте системы координат.

В зависимости от числа независимых параметров, или компонент, определяющих тензор, будем различать тензоры разных рангов, сложность которых возрастает с увеличением ранга, т. е. с увеличением числа компонент.

Наипростейший тензор определяется лишь одной компонентой. Это — тензор нулевого ранга, или скаляр, и, будучи таковым, он инвариантен относительно поворота системы координат.

Следующим по сложности является тензор первого ранга, или вектор, который определяется тремя компонентами.

Однако прежде чем переходить к дальнейшему рассмотрению тензоров и их инвариантности относительно поворота системы координат, обратимся к анализу преобразования координат точки в пространстве трех измерений при подобном повороте.

Пусть $P$ — точка, координатами которой в системе $(x_1, x_2, x_3)$ являются $x_1$, $x_2$ и $x_3$ (см. рис. П. 1). Введем новую систему координат $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, относительно которой координаты точки $P$ обозначим через $x_1^*$, $x_2^*$ и $x_3^*$.

Тогда имеем тождество

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2}. \qquad (\text{П. 1})$$

Координаты $x_1$, $x_2$ и $x_3$ с помощью углов между соответствующими координатными осями старой и новой систем можно выразить через координаты $x_1^*$, $x_2^*$ и $x_3^*$.

Обозначим через $(x_1, x_1^*)$ угол, на который следует повернуть положительную ось $x_1$, чтобы она совпала с положительной осью $x_1^*$.

Аналогично через $(x_1, x_3^*)$ обозначим угол между положительной осью $x_1$ и положительной осью $x_3^*$.

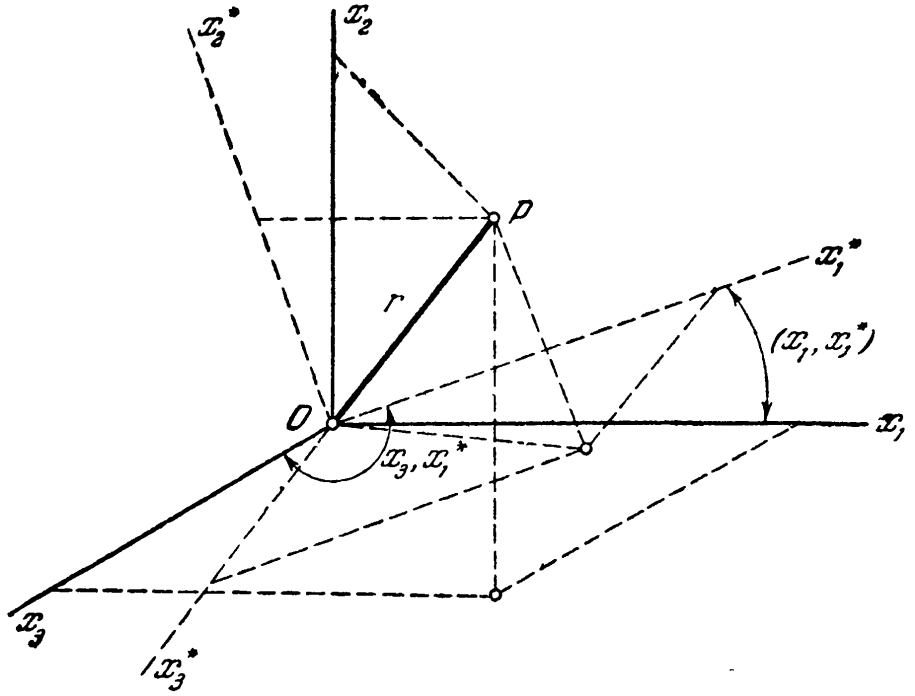



Рис. П. 1. Преобразование системы координат.

В общем случае $(x_i, x_j^*)$ — угол между положительной осью $x_i$ старой системы координат и положительной осью $x_j^*$ новой системы координат ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$).

Тогда имеем

$$x_1^* = x_1 \cos(x_1, x_1^*) + x_2 \cos(x_2, x_1^*) + x_3 \cos(x_3, x_1^*),$$
$$x_2^* = x_1 \cos(x_1, x_2^*) + x_2 \cos(x_2, x_2^*) + x_3 \cos(x_3, x_2^*),$$
$$x_3^* = x_1 \cos(x_1, x_3^*) + x_2 \cos(x_2, x_3^*) + x_3 \cos(x_3, x_3^*).$$

Если различные направляющие косинусы для краткости записать как

$$e_{11} = \cos(x_1, x_1^*), \quad e_{21} = \cos(x_2, x_1^*), \ldots$$

или в общем виде

$$e_{ij} = \cos(x_i, x_j^*),$$

то приведенная выше система трех уравнений примет вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 e_{11} + x_2 e_{21} + x_3 e_{31}, \\ x_2^* &= x_1 e_{12} + x_2 e_{22} + x_3 e_{32}, \\ x_3^* &= x_1 e_{13} + x_2 e_{23} + x_3 e_{33}. \end{aligned} \qquad (\text{П. 2})$$

Заметим, что (1) первый индекс в $e_{ij}$ относится к старой системе координат и что (2) в общем случае $e_{ij} \neq e_{ji}$, так как $\cos(x_i, x_j^*) \neq \cos(x_j, x_i^*)$.

С другой стороны, величину $x_i$ старой системы можно выразить через $x_j^*$ новой системы и получить при этом другую систему трех уравнений, аналогичную (П. 2):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* e_{11} + x_2^* e_{12} + x_3^* e_{13}, \\ x_2 &= x_1^* e_{21} + x_2^* e_{22} + x_3^* e_{23}, \\ x_3 &= x_1^* e_{31} + x_2^* e_{32} + x_3^* e_{33}. \end{aligned} \qquad \text{(П. 3)}$$

Направляющие косинусы $e_{ij}$ образуют нормированную ортогональную систему. Соотношения их ортогональности можно вывести, пользуясь тождеством (П. 1). Введем, например, в правую часть (П. 1) выражения (П. 2) для $x_i^*$:

$$\begin{aligned} r^2 = x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} = \\ = (x_1 e_{11} + x_2 e_{21} + x_3 e_{31})^2 + (x_1 e_{12} + x_2 e_{22} + x_3 e_{32})^2 + \\ + (x_1 e_{13} + x_2 e_{23} + x_3 e_{33})^2 = \\ = x_1^2 (e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2) + x_2^2 (e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2) + \\ + x_3^2 (e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2) + 2x_1 x_2 (e_{11} e_{21} + e_{12} e_{22} + e_{13} e_{23}) + \\ + 2x_1 x_3 (e_{11} e_{31} + e_{12} e_{32} + e_{13} e_{33}) + 2x_2 x_3 (e_{21} e_{31} + e_{22} e_{32} + e_{23} e_{33}). \end{aligned}$$

Поскольку это тождество выполняется при любых значениях $x_1$, $x_2$ и $x_3$, то коэффициенты при $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$, $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_2 x_3$ равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 &= 1, \\ e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 &= 1, \\ e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 &= 1, \\ e_{11} e_{21} + e_{12} e_{22} + e_{13} e_{23} &= 0, \\ e_{11} e_{31} + e_{12} e_{32} + e_{13} e_{33} &= 0, \\ e_{21} e_{31} + e_{22} e_{32} + e_{23} e_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(П. 4)}$$

Эта система шести уравнений представляет собой соотношения ортогональности между направляющими косинусами $e_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

С целью дальнейшего упрощения записи представим систему уравнений (П. 2), например, в виде

$$x_i^* = x_j e_{ji}, \qquad \text{(П. 5)}$$

где индексы $i$ и $j$ могут принимать значения 1, 2 и 3. Здесь применяется правило суммирования Эйнштейна, согласно которому суммирование должно производиться по трем величинам с повторяющимися индексами, встречающимися в выражении для общего члена.

Например, для каждого из значений $i$, равных 1, 2 или 3, уравнение (П. 5) должно записываться в форме $x_i^* = x_1 e_{1i} + x_2 e_{2i} + x_3 e_{3i}$ при $i = 1$, 2 или 3. Таким образом, запись (П. 5) в действительности означает систему трех уравнений, каждое из которых имеет в правой части три члена.

Аналогично систему уравнений (П. 3) можно представить в виде

$$x_j = x_i^* e_{ji}. \qquad \text{(П. 6)}$$

Теперь соотношения ортогональности (П. 4) можно записать в следующей сокращенной форме:

$$e_{ij}e_{kj} = 1 \quad \text{при} \quad i = k,$$
$$e_{ij}e_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k$$

или в виде одного уравнения:

$$e_{ij}e_{kj} = \delta_{ik}, \qquad \text{(П. 7а)}$$

где $\delta_{ik}$ — символ Кронекера, определяемый равенствами

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{при} \quad i = k,$$
$$\delta_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \qquad \text{(П. 8)}$$

Аналогичным способом можно показать, что

$$e_{ij}e_{ik} = \delta_{jk}. \qquad \text{(П. 7б)}$$

Величины $x_i$ представляют собой координаты отрезка прямой $r$, который имеет заданное направление. Следовательно, такой отрезок прямой определяется тремя компонентами, а именно тремя координатами $x_i$.

Такая величина называется вектором или тензором первого ранга. При повороте системы координат компоненты этого вектора, или тензора первого ранга, преобразуются согласно соотношению (П. 5).

Любая величина, которая определяется тремя компонентами $A_i$, преобразующимися в свою очередь в соответствии с соотношением

$$A_i^* = A_j e_{ji}, \qquad \text{(П. 9)}$$

называется тензором первого ранга. Символически она записывается как $A_i$, т. е. задается тремя своими компонентами; при этом соотношение (П. 9) представляет собой правило ее преобразования.

Обратное соотношение имеет вид

$$A_j = A_i^* e_{ji}. \qquad \text{(П. 10)}$$

Если каждую из компонент тензора $A_j$ умножить на скаляр $B$, то в результате получается новый тензор первого ранга $BA_j = C_j$:

$$BA_j = BA_i^* e_{ji} = (BA_i)^* e_{ji}, \qquad \text{(П. 11)}$$

откуда

$$C_j = C_i^* e_{ji}.$$

Сумма двух тензоров первого ранга $A_i$ и $B_i$ является опять-таки тензором первого ранга $C_i$, т. е.

$$A_j + B_j = A_i^* e_{ji} + B_i^* e_{ji} = (A_i + B_i)^* e_{ji}, \qquad (\text{П. 12})$$

или

$$C_j = C_i^* e_{ji},$$

так что величина $C_j$ подчиняется правилу преобразования.

Произведение двух тензоров первого ранга $A_i$ и $B_j$ представляет собой тензор второго ранга $C_{ij}$. По определению, он получается путем умножения каждой компоненты тензора $B_j$ на каждую из компонент тензора $A_i$ или каждой компоненты $A_i$ на каждую компоненту $B_j$. Символически это записывается следующим образом:

$$A_i B_j = C_{ij}. \qquad (\text{П. 13})$$

Согласно (П. 10),

$$A_i B_j = A_k^* e_{ik} B_l^* e_{jl} = (A_k B_l)^* e_{ik} e_{jl},$$

или

$$C_{ij} = C_{kl}^* e_{ik} e_{jl}. \qquad (\text{П. 14})$$

Любая величина $A_{ij}$, которая имеет девять компонент и подчиняется правилу преобразования (П. 14), называется тензором второго ранга.

Вообще, тензор $n$-го ранга имеет $3^n$ компонент и правило его преобразования записывается так:

$$\underset{n\text{ индексов}}{A^*_{ijk\ldots lm}} = \underset{n\text{ индексов}}{A_{pqr\ldots st}} e_{pi} e_{qj} e_{rk} \ldots e_{sl} e_{tm}. \qquad (\text{П. 15})$$

Существуют два важных тензора специального типа, один из которых является тензором второго ранга, а другой — тензором третьего ранга. Тензор второго ранга был введен выше; это — символ Кронекера, определяемый формулой (П. 8). Он представляет собой единичный тензор второго ранга и притом является симметричным. Показать, что это действительно тензор, можно следующим образом. Предположим на время, что это — тензор второго ранга, который, стало быть, подчиняется правилу

$$\delta_{ij}^* = \delta_{kl} e_{ki} e_{lj}.$$

Тогда, если $\delta_{kl}$ подчиняется соотношениям (П. 8), то и $\delta_{ij}^*$ должно подчиняться (П. 8).

При $k \neq l$ имеем $\delta_{kl} = 0$, и соответствующие члены обращаются в нуль.

При $k=l$ имеем $\delta_{kl}=1$; поэтому

$$\delta^{*}_{ij}=e_{ki}e_{kj}.$$

Но, согласно соотношениям ортогональности, $e_{kl}e_{kj}=0$, если $i\neq j$, и $e_{ki}e_{kl}=1$, если $i=j$. Следовательно, для $\delta^{*}_{ij}$ соотношения (П. 8) выполняются.

Другим специальным тензором, имеющим важное значение, является антисимметричный, или «альтернирующий», тензор $\varepsilon_{ijk}$.

По определению,

$\varepsilon_{ijk}=1$, когда все индексы различны и число перестановок индексов четное,

$\varepsilon_{ijk}=-1$ когда все индексы различны и число перестановок индексов нечетное,

$\varepsilon_{ijk}=0$, когда два произвольных индекса одинаковы.

Известно несколько способов запоминания этих свойств антисимметричного тензора. Здесь мы предлагаем следующее простое правило:

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=+1,$$
$$\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=-1.$$

Обращаем внимание читателя на цикличность перестановки.

Указанное выше правило умножения для произведения двух тензоров первого ранга можно обобщить на случай тензоров более высокого ранга.

Таким образом, под общим произведением двух тензоров соответственно $n$-го и $m$-го рангов понимается тензор $(n+m)$-го ранга, образованный путем умножения каждой компоненты первого тензора на каждую из компонент второго тензора или каждой компоненты второго тензора на каждую из компонент первого тензора. Например,

$$A_{ij}B_{klm}=C_{ijklm}. \qquad (\text{П. 16})$$

Согласно этому правилу, умножение тензора на $\delta_{ij}$ дает тензор на два ранга выше:

$$\delta_{ij}A_{pq}=B_{ijpq}.$$

Если $j=p$, то

$$\delta_{ij}A_{jq}=B_{ijjq}.$$

Однако если тензор имеет два одинаковых индекса, то ранг тензора понижается на 2, так как пара одинаковых индексов означает суммирование по ним, а у данного тензора на два свободных индекса меньше. Следовательно,

$$B_{ijjq}=B_{i11q}+B_{i22q}+B_{i33q}=C_{iq}.$$

Покажем теперь, что $C_{iq}=A_{iq}$.

В соответствии с соотношениями (П. 7) и (П. 14) имеем

$$C_{iq} = \delta_{ij} A_{jq} = e_{ik} e_{jk} e_{js} e_{qr} A^*_{sr}.$$

Но $e_{jk} e_{js} = 0$ при $k \neq s$ и $e_{jk} e_{js} = 1$ при $k = s$; поэтому можно выбрать $e_{jk} e_{js} = 1$ и $k = s$. Тогда

$$\delta_{ij} A_{jq} = e_{is} e_{qr} A^*_{sr} = A_{iq}.$$

Таким образом, умножение $A_{jq}$ на $\delta_{ij}$ означает перемену индекса $j$ в $A_{jq}$ на $i$.

В общем виде

$$\delta_{ij} A_{kjrs} = A_{kirs}. \qquad (\text{П. } 17)$$

Эту операцию обычно называют подстановкой.

Если к тому же $i = k$, то ранг тензора понижается на 2:

$$\delta_{ij} A_{ijrs} = A_{iirs} = B_{rs}. \qquad (\text{П. } 18)$$

Следовательно, при умножении $A_{kjrs}$ на $\delta_{kj}$ индексы $k$ и $j$ в $A_{kjrs}$ становятся одинаковыми, т. е. повторяющимися, что приводит к понижению ранга тензора на 2. Эту операцию принято называть свертыванием индексов.

Когда перемножаются два тензора $A_i$ и $B_j$ первого ранга, то, если их произведение $A_i B_j$ умножить на $\delta_{ij}$, т. е. применить операцию свертывания индексов, в результате получается тензор нулевого ранга, или скаляр:

$$\delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \qquad (\text{П. } 19)$$

Этот результат представляет собой не что иное, как «скалярное» («через точку») произведение векторов $A_i$ и $B_j$, обозначаемое в векторной алгебре символом $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Это правило можно обобщить и на тензоры более высокого ранга. Таким образом, скалярное произведение тензоров $A_{ij}$ и $B_{pqr}$ по индексам $i$ и $p$ имеет вид

$$\delta_{ip} A_{ij} B_{pqr} = A_{ij} B_{iqr} = C_{jqr}. \qquad (\text{П. } 20)$$

Так как умножение на $\delta_{ip}$ означает свертывание по индексам $i$ и $p$ в $A_{ij} B_{pqr}$, то скалярному произведению по определенным индексам можно сопоставить свертывание по тем же индексам.

Обобщая еще шире, можем сказать, что скалярное перемножение тензоров $A_{ij} \ldots$ и $B_{pqr} \ldots$ по индексам $i$, $p$ и $j$, $q$,

$$\delta_{ip} \delta_{jq} A_{ij} \ldots B_{pqr} = A_{ij} \ldots B_{ijr} \ldots,$$

идентично свертыванию по индексам $i$, $p$ и $j$, $q$.

Антисимметричный характер тензора $\varepsilon_{ijk}$ можно проиллюстрировать следующим образом. Умножим тензор первого ранга $A_i$

на $\varepsilon_{ijk}$; при этом получится тензор четвертого ранга. Если применить свертывание по индексам $l$, $k$, то получим тензор второго ранга:

$$\varepsilon_{ijk}A_k = B_{ij}. \qquad (\text{П. 21})$$

Этот тензор второго ранга $B_{ij}$ будет антисимметричным; имеем

$$B_{ij} = \varepsilon_{ij1}A_1 + \varepsilon_{ij2}A_2 + \varepsilon_{ij3}A_3.$$

С учетом значений $\varepsilon_{ijk}$ при различных $i$ и $j$ получаем

$$\begin{array}{lll} i=1 & j=2 & B_{12} = A_3 \\ & j=3 & B_{13} = -A_2 \\ i=2 & j=1 & B_{21} = -A_3 \\ & j=3 & B_{23} = +A_1 \\ i=3 & j=1 & B_{31} = A_2 \\ & j=2 & B_{22} = -A_1 \end{array}$$

Таким образом, компоненты тензора $B_{ij}$ имеют вид

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\text{П. 22})$$

откуда ясно, что тензор $B_{ij}$ носит антисимметричный характер.

Вектор $A_k$ обычно называют вектором антисимметричного тензора $B_{ij} = \varepsilon_{ijk}A_k$. И наоборот, антисимметричный тензор, связанный с вектором, получается путем умножения на $\varepsilon_{ijk}$ и последующего свертывания.

Умножим теперь произведение двух тензоров первого ранга $A_iB_j$ на $\varepsilon_{ijk}$. Тогда полученный результат оказывается просто «векторным» произведением двух векторов $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, хорошо известным в векторной алгебре:

$$\varepsilon_{ijk}A_iB_j = C_{iijjk} = D_k \qquad (\text{П. 23})$$

и

$$D_1 = \varepsilon_{ij1}A_iB_j = A_2B_3 - A_3B_2,$$
$$D_2 = \varepsilon_{ij2}A_iB_j = A_3B_1 - A_1B_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В случае трех векторов $A_i$, $B_j$, $C_k$ произведение $\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$ является скаляром:

$$\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2 =$$
$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = A_iD_i,$$

где

$$D_i = \varepsilon_{ijk}B_jC_k.$$

В векторной алгебре это произведение трех векторов принято называть тройным скалярным произведением $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$.

В заключение этого алгебраического раздела тензорного исчисления перечислим некоторые свойства единичных тензоров $\delta_{ij}$ и $\varepsilon_{ijk}$:

$$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3,$$
$$\delta_{ij}\delta_{jl}=\delta_{il},$$
$$\delta_{lk}\varepsilon_{ikm}=0,$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}.$$

Справедливость последнего уравнения может быть доказана на основании свойств этих тензоров при различных $i$, $j$, $k$, $l$ и $m$:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=2\delta_{il},$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6.$$

Производная от скаляра по одной из координат представляет собой тензор первого ранга. Пусть $A$ — скаляр; тогда производная по $x_i$ запишется как $\partial A/\partial x_i$. Так как

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}=\frac{\partial A}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial x_i}=\frac{\partial A}{\partial x_j^*}e_{ij}, \qquad (\text{П. 24})$$

то эта производная и в самом деле преобразуется по правилу преобразования (П. 6) для тензора первого ранга.

Аналогично вторая производная от скаляра представляет собой тензор второго ранга и т. д.:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_l^*}\left(\frac{\partial A}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_l^*\,\partial x_j^*}e_{ij}e_{kl}. \qquad (\text{П. 25})$$

Производная от тензора первого ранга по координате является тензором второго ранга. Пусть $A_i$ — тензор первого ранга; тогда его производная запишется так: $\partial A_i/\partial x_j$. Поскольку

$$A_i=A_k^*e_{ik} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_l^*}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_l^*}e_{jl},$$

то

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=e_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l^*}\left(A_k^*e_{ik}\right)=e_{jl}e_{ik}\frac{\partial A_k^*}{\partial x_l^*}, \qquad (\text{П. 26})$$

что представляет собой правило преобразования (П. 14) для тензора второго ранга.

Обобщая, можно сказать, что $m$-я производная тензора $n$-го ранга является тензором $(n+m)$-го ранга.

В частном случае в качестве тензора первого ранга выберем одну из координат $x_i$. Тогда производная по координате $x_j$, т. е. $\partial x_i/\partial x_j$,

будет тензором второго ранга. Но так как $\partial x_i/\partial x_j = 1$, когда $i = j$, и $\partial x_i/\partial x_j = 0$, когда $i \neq j$, то

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \qquad (\text{П. 27})$$

Заметим, что $\partial x_i/\partial x_i = \delta_{ii} = 3$.

Пусть $A$ — функция от $x_j$; найдем производную от $A$ по $x_i$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A(x_j) = \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}\frac{\partial A(x_j)}{\partial x_j}.$$

Пусть $A$ — функция от $u$, а $u$ в свою очередь зависит от $x_j$. Тогда применение известного правила дифференцирования неявной функции дает

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}\frac{\partial A(u)}{\partial u}\frac{\partial u(x_j)}{\partial x_j}.$$

В данной книге часто приходится пользоваться этим правилом применительно к радиусу-вектору $r = \sqrt{x_j x_j}$; в этом случае соответственно имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Если $A = A(r)$, то

$$\frac{\partial A}{\partial x_j} = \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}\frac{\partial A}{\partial r}.$$

Аналогично для производных более высокого порядка

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_j}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r} + \frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial A}{\partial r} =$$
$$= \delta_{jk}\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{x_j}{r^2}\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{x_j}{r}\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x_k} =$$
$$= \delta_{jk}\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{x_j x_k}{r^3}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{x_j x_k}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} =$$
$$= \delta_{jk}\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right)\frac{x_j x_k}{r^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right)\frac{x_j x_k}{r^2} \quad \text{при} \quad j \neq k,$$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{3}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2},$$

но

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right)\frac{x_1^2}{r^2}.$$

# ЛИТЕРАТУРА

## К главе 1


1. J. Roy. Aeronaut. Soc., **41**, 1109 (1937). См. также [6].
2. Kármán Th., J. Aeronaut. Sci., **4**, 131 (1937).
3. Burgers J. M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 1073 (1948).
4. Prandtl L. and Tietjens O., Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics, vol. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934. (Имеется русск. перевод: Прандтль Л., Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, тт. I и II, ГТТИ, М. — Л., 1932.)
5. Handbuch der Experimental-Physik, vol. 4, p. 1, Akademische Verlag Gesellschaft, Leipzig, 1931.
6. Dryden H. L., Ind. Eng. Chem., **31**, 416 (1939).
7. Prandtl L., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 340.
8. Flügel G., VDI-Forschungsheft № 395, 1939.
9. Garside J. E., Hall A. R. and Townend D. T. A., Nature, **152**, 748 (1943).
10. Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts., № ACR 3L23, 1943.
11. Boussinesq J., Mém. prés. par div. savants à l'acad. sci. Paris, **23**, 46 (1877).
12. Sutton O. G., Atmospheric Turbulence, стр. 30, 35, London, 1949.
13. Rosenhead L., Proc. Roy. Soc. London, **226A**, 1 (1954).
14. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **157A**, 537 (1936).
15. Corrsin S. and Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1142, 1953.
16. Lin C. C., Quart. Appl. Math., **10**, 295 (1935).
17. Jeans J. H., An Introduction to the Kinetic Theory of Gases, Cambridge University Press, New York, 1946.
18. Taylor G. I., Proc. London Math. Soc., **20**, 196 (1921).
19. Kampé de Fériet J., Ann. soc. sci. Bruxelles, Ser. I, **59**, 145 (1939).
20. Kármán Th., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **34**, 530 (1948).
21. Batchelor G. K., Quart. Appl. Math., **6**, 97 (1948).
22. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mick W. C. and Skramstad H. K., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 581, 1937.
23. Kalinske A. A. and Pien C. L., Ind. Eng. Chem., **36**, 220 (1944).
24. Doob J. L., Ann. Math., **43**, 352 (1946).
25. Frenkiel F. N., J. Aeronaut. Sci., **15**, 57 (1948).
26. Frenkiel F. N., O. N. E. R. A. Rapp. tech. № 34, 1948.
27. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **164A**, 476 (1938).
28. См., например, Jeffreys H. and Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, стр. 452, Cambridge University Press, New York, 1950.
29. Dryden H. L., Quart. Appl. Math., **1**, 7 (1943).

30. Kampé de Fériet J., Compt. rend., **227**, 760 (1948); см. также Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech., Public Addresses, № 1, London, 1948.
31. Lamb H., Hydrodynamics, 6-е изд., стр. 677, Cambridge University Press, New York, 1932. (Имеется русск. перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, Москва, 1947.)
32. Orr W. M. F., Proc. Roy. Irish Acad., **27A**, 69 (1906—1907).
33. Rayleigh, Proc. Math. Soc. London, **11**, 57 (1880); **19**, 67 (1887).
34. Burgers J. M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **17**, № 2 (1939). См. также Mises R and Kármán Th., Advances in Applied Mechanics, т. 1, стр. 171, New York, 1948. (Имеется русск. перевод: Проблемы механики. Сб. статей под ред. Мизеса Р. и Кармана Т., ИЛ, Москва, 1955.)
35. Munk M., Aero Digest, June, 1951, стр. 100; July, 1952, стр. 32.
36. Dryden H. L. and Kuethe A. M., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 342, 1930.
37. Ertel H., Ann. Hydrographie u. maritime Meteorol., **65**, 193 (1937).
38. Corrsin S., J. Aeronaut. Sci., **20**, 853 (1953).
39. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., Recherche aéronaut. № 32, стр. 21, 1953.
40. Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3489, 1955.
41. Dryden H. L., Z. Flugwissenschaften, **4**, 89—95 (1956).
42. Görtler H., Z. angew. Math. u. Mech., **21**, 250—252 (1949).
43. Lin C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability, стр. 61, Cambridge University Press, New York, 1955. (Имеется русск. перевод: Линь Цзяцзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, Москва, 1958.)
44. Lindgren E. R., Arkiv Fysik, **12**, 1 (1957).

## К главе 2

1. McAdams W. H., Heat Transmission, 3-е изд., стр. 260, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954. (Имеется русск. перевод: Мак-Адамс В., Теплопередача, ОНТИ, М., 1936.)
2. Kramers H., Physica, **12**, 61 (1946).
3. King L. V., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **214A**, 373 (1914).
4. Frenkiel F. N., O. N. E. R. A. Rapp. tech., № 37, 1948.
5. Dryden H. L. and Kuethe A. M., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 320, 1929.
6. Betchov R., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 721 (1948).
7. Lowell H. H., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2117, 1950.
8. Van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **2A**, 351 (1951).
9. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C., Jr., and Skramstad H. K., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 581, 1937.
10. Frenkiel F. N., Aeronaut. Quart., **5**, 1 (1954).
11. Betchov R., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **52**, 195 (1949).
12. Betchov R. and Welling W., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **53**, 432 (1950).
13. Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronat. Wartime Repts., № ACR 3L23, 1943.
14. Eckert E. and Drewitz O., Forsch. Gebiete Ingenieurw., **11**, 116 (1940).
15. Kovasznay L. S. G., J. Aeronaut. Sci., **17**, 565 (1950).
16. Favre A., Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech., London, 1948, т. 2, стр. 44.
17. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., Recherche aeronaut., № 31, стр. 37, 1953.
18. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **157A**, 537 (1936).

19. Townsend A. A., Proc. Cambridge Phil. Soc., **43**, 560 (1947).
20. Mock W. C., Jr. and Dryden H. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 448, 1932.
21. Mock W. C., Jr., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 598, 1937.
22. Simmons L. F. G., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem. № 1919, 1939.
23. Gould R. W. F., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem. № 2240, 1945.
24. Kovasznay L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 1130, 1947.
25. Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts., № ACR 5K27, 1946.
26. Betchov R., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 1063 (1948).
27. Laufer J., автореферат диссертации, California Institute of Technology, Pasadena, 1948.
28. Liepmann H. W., Helv. Phys. Acta, **2**, 119 (1949).
29. Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 1864, 1949.
30. Ziegler M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **15**, 3 (1934).
31. Ossofsky E., Rev. Sci. Instr., **19**, 881 (1948).
32. Weske J. R., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 881, 1943.
33. Tournier M., Laurenceau P., Huebès J. J. and Seigneurin A., Recherche aéronaut., № 15, стр. 19, 1950; № 19, стр. 11, 1951.
34. Laurence J. P. and Landes L. G., Instruments, **26**, 1890 (1953) или ISA Journal **9**, 128 (1953).
35. Van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **6A**, 129 (1956).
36. Kovasznay L. S. G., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1209, 1954.
37. Collis D. C., Aeronaut. Quart., **4**, 93 (1952).
38. Wyatt L. A., J. Sci. Instr. **30**, 13 (1953).
39. Middlebrook G. B. and Piret E. L., Ind. Eng. Chem., **42**, 1511 (1950).
40. Richardson E. G., Trans. North East Coast Inst. Engrs. & Shipbuilders, **64**, 273 (1948).
41. Vernotte P., Compt. rend., **230**, 58 (1950).
42. Thomas P., J. Am. Inst. Elec. Engrs., **42**, 219 (1923).
43. Lindvall F. C., Trans. Am. Inst. Elec. Engrs., **53**, 1068 (1934).
44. Fucks W., Deut. Luftfahrt-Forsch. U. u. M., №№ 1202, 1203, 1205, 1431, 1943—1944.
45. Fucks W., Z. Naturforsch., **5A**, 89 (1950).
46. Fucks W., Z. Physik, **137**, 49 (1954).
47. Agostini L., Proc. 7th Intern. Congr. Appl Mech., London, 1948, т. 2, стр. 56.
48. Werner F. D., Rev. Sci. Instr., **21**, 61 (1950).
49. Kolin A., Proc. Soc. Exp. Biol. Med., **35**, 53 (1936).
50. Thürlemann B., Helv. Phys. Acta, **14**, 383 (1941).
51. Kolin A. and Reiche F., J. Appl. Phys., **25**, 409 (1954).
52. Kolin A., Rev. Sci. Instr., **16**, 109 (1945).
53. Grossman L. M. and Shay E. A., Mech. Eng., **71**, 744 (1949).
54. Grossman L. M. and Charwatt A. F., Rev. Sci. Instr., **23**, 741 (1952).
55. Gaffyn J. E. and Underwood R. M., Nature, **169**, 239 (1952).
56. Van Driest E. R., J. Appl. Mechanics, **12**, A91 (1945).
57. Kalinske A. A. and Pien C. L., Ind. Eng. Chem., **36**, 220 (1944).
58. Kampé de Fériet J., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 352.

59. Liepmann H. W. and Robinson M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3037 (1953).
60. Townend H. C. H., Proc. Roy. Soc. London, **145A**, 180 (1934).
61. Fage A. and Townend H. C. H., Proc. Roy. Soc. London, **135A**, 656 (1932).
62. Taylor M. K., Mech. Eng., **72**, 658 (1950).
63. Collins R. D. and Newby M. P., Nature, **162**, 224 (1948).
64. Frenkiel F. N., Compt. rend., **22**, 1331 (1946).
65. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., General Discussion on Heat Transfer, Proc. Inst. Mech. Engrs., London, 188 (1951).
66. Leaf W., Mech. Eng., **67**, 586 (1945).
67. Leaf W. and Atchinson L. C., J. Phys. & Colloid Chem., **53**, 957 (1949).
68. Weller R., J. Appl. Mechanics, **14**, 103A (1947).
69. Ullyot T., Trans. ASME, **69**, 245 (1947).
70. Kovasznay L. S. G., Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst., Berkeley, Calif., 1949, стр. 211.
71. Uberoi M. S. and Kovasznay L. S. G., J. Appl. Phys., **26**, 19 (1955).
72. Hubbard J. C., Fitzpatrick J. A., Thaler W. J., Cheng L. and Beeber R. J., Phys. Rev., **74**, 708 (1948).
73. Glaser A. H., J. Sci. Instr., **29**, 219 (1952).
74. Bourot J. M., Publ. sci. et tech. ministère air France, № 226, 1949.
75. Goldstein S., Proc. Roy. Soc. London, **155A**, 570 (1936).
76. Young A. D. and Maas J. N., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem., № 1770, 1937.
77. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **1A**, 435 (1949).
78. Alexander L. G., Baron T. and Comings E. W., Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Tech. Rept., № 8, 1950.
79. Tucker M. J., J. Sci. Instr., **29**, 327 (1952).
80. Burgers J. M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 1222 (1948).
81. Skinner G. T., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3682, 1956.
82. Laufer J. and McClellan R., J. Fluid Mech., **1**, 276 (1956).
83. Cooper R. D. and Tulin M. P., AGARDograph, № 12, 1955.
84. Lighthill M. J., Proc. Roy. Soc. London, **224A**, 1 (1954).
85. Janssen J. M. L., Ensing L. and van Erp J. B., Proc. Inst. Radio Engs., **47**, 555 (1959).
86. Ling S. C. and Hubbard P. G., J. Aeronaut. Sci., **23**, 890 (1956).

### К главе 3

1. Robertson H. P., Proc. Cambridge Phil. Soc., **36**, 209 (1940).
2. Kármán Th. and Howarth L., Proc. Roy. Soc. London, **164A**, 192 (1938).
3. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., Recherche aéronaut., № 32, стр. 21, 1953.
4. Stewart R. W., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 146 (1951).
5. Loitsianskii L. G., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 1079, 1945. (Лойцянский Л. Г., Труды ЦАГИ, вып. 440, 1939.)
6. Agostini L. and Bass J., Publ. sci. et tech. ministère air, № 237, 1950.
7. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **194A**, 527 (1948).
8. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc. London, **195A**, 513 (1949).
9. Kármán Th., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **34**, 530 (1948).
10. Колмогоров А. Н., ДАН СССР **30**, 299—303 (1941); **32**, 19—21 (1941).

11. Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, New York, 1953. (Имеется русск. перевод: Бэтчелор Дж., Теория однородной турбулентности, ИЛ, Москва, 1955.)
12. Kármán Th. and Lin C. C., Advances in Appl. Mechanics, **2**, 1 (1951).
13. Обухов А. М., ДАН СССР, **32**, 22—24, 1941.
14. Kovasznay L. S. G., J. Aeronaut. Sci., **15**, 745 (1948).
15. Heisenberg W., Z. Physik, **124**, 628 (1948).
16. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc. London, **200A**, 20 (1949). Также Phys. Rev., **75**, 896 (1949).
17. Stewart R. W. and Townsend A. A., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **243A**, 359 (1951).
18. Proudman I., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 158 (1951).
19. Sato H., J. Phys. Soc. Japan, **6**, 387 (1951); **7**, 392 (1952).
20. Liepmann H. W., Laufer J. and Liepman K., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2473, 1951.
21. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **193A**, 539 (1948).
22. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **190A**, 534 (1947).
23. Lin C. C., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **34**, 760 (1948).
24. Rotta J., Ingr-Arch., **18**, 60 (1950).
25. Frenkiel F. N., J. Appl. Mecanics, **15**, 311 (1948).
26. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C. and Skramstad H. K., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 581, 1937.
27. Hall A. A., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem., № 1842, 1938.
28. Baines W. D. and Peterson E. G., Trans. ASME, **73**, 467 (1951).
29. Proudman I. and Reid W. H., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **247A**, 926 (1954).
30. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **199A**, 238 (1949).
31. Обухов А. М., Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **13**, 58—69 (1949).
32. Ягломм А. М., ДАН СССР, **69**, 743—746 (1949).
33. Corrsin S., J. Aeronaut. Sci., **18**, 417 (1951).
34. Corrsin S., J. Appl. Phys., **22**, 469 (1951).
35. Kistler A. L., O'Brien V. and Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Research Mem., RM 54D19, 1954.
36. Обухов А. М., ДАН СССР, **66**, 17—20 (1949).
37. Batchelor G. K., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 359 (1951).
38. Limber D. N., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **37**, 230 (1951).
39. Uberoi M. S., J. Aeronaut. Sci., **20**, 197 (1953).
40. Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3116, 1954.
41. Krzywoblocki M. Z. E., Proc. 1st U. S. Natl. Conf. Appl. Mech., стр. 827, 1951.
42. Krzywoblocki M. Z. E., Proc. 2d Midwest. Conf. Fluid Dynamics, стр. 35, 1952.
43. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc. London, **210A**, 18 (1951).
44. Lighthill M. J., Gas Dynamics of Cosmic Clouds, стр. 121, Symposium, Cambridge, England, 1953.
45. Lighthill M. J., Proc. Roy. Soc. London, **211A**, 564 (1952); **222A**, 1 (1954).
46. Proudman I., Proc. Roy. Soc. London, **214A**, 119 (1952).
47. Onsager L., Phys. Rev., **68**, 286 (1945).
48. Weizsäcker G. F., Z. Physik, **124**, 628 (1948); Proc. Roy. Soc. London, **195A**, 402 (1948).
49. Reid W. H., Quart. Appl. Math., **14**, 201 (1956).

50. Batchelor G. K. and Proudman I., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **248A**, 369 (1956).
51. Tsuji H., J. Phys. Soc. Japan, **11**, 1096 (1956).
52. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **208A**, 534 (1951).
53. Grant H. L. and Nisbet I. C. T., J. Fluid Mech., **2**, 263 (1957).
54. Van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **7A**, 149 (1958).
55. Chou P., Quart. Appl. Math., **3**, 38 (1945).
56. Deissler R. G., Physics of Fluids, **1**, 111 (1958).
57. Burgers J. M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **53**, 122 (1950).
58. Batchelor G. K., J. Fluid Mech., **5**, 113 (1959).
59. Batchelor G. K., Howells I. D. and Townsend A. A., J. Fluid Mech., **5**, 134 (1959).

### К главе 4

1. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc. London, **186A**, 480 (1946).
2. Chandrasekhar S., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **242A**, 557 (1950).
3. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc. London, **203A**, 358 (1950).
4. Burgers J. M. and Mitchner M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **56**, 228, 343 (1953).
5. Rotta J., Z. Physik, **129**, 547 (1951).
6. Tchen C. M., J. Research Natl. Bur. Standards, **50**, 51 (1953).
7. Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, New York, 1953. (Имеется русск. перевод. См. литературу к гл. 3 [11].)
8. Klebanoff P. S. and Diehl Z. W., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2475, 1951.
9. Laufer J., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1174, 1954.
10. Craya A. and Milliat J. P., Compt. rend., **241**, 587 (1955).
11. Tchen C. M., Phys. Rev., **93**, 4 (1954).

### К главе 5

1. Prandtl L., Z. angew. Math. u. Mech., **5**, 136 (1925). См. также: Goldstein S., Modern Developments in Fluid Dynamics, т. 1, стр. 205, Oxford University Press, New York, 1938. (Имеется русск. перевод: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. 1, Москва, 1948.)
2. Prandtl L., Z. angew. Math. u. Mech., **22**, 241 (1942).
3. Taylor G. I., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **215A**, 1 (1915).
4. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **135A**, 685 (1932).
5. Kármán Th., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-phys. Kl., 58 (1930).
6. Kármán Th., J. Aeronaut. Sci., **4**, 131 (1937).
7. Reichardt H., Z. angew. Math. u. Mech., **21**, 257 (1941).
8. Reichardt H., Forsch. Gebiete Ingenieurw., № 414, 1951. См. также Oudart A., Publ. sci. et tech. ministére air, № 234, 1949.
9. Baron T., доклад, представленный в A. I. Ch. E., Tulsa, Okla., May 8—12, 1949.
10. Schultz B. H., Appl. Sci. Research, **1A**, 387, 400 (1949).
11. Alexander L. G., Baron T. and Comings E. W., Univ. Illinois Bull., № 413, 1953.
12. Nusselt W., Z. angew. Math. u. Mech., **10**, 105 (1930).
13. Eckert E. and Lieblein V., Forsch. Gebiete Ingenieurw., **16B**, 33 (1949).
14. Prandtl L., Physik. Z., **29**, 487 (1928).
15. Burgers J. M., конспект лекций, California Institute of Technology, Pasadena, 1951.

16. Batchelor G. K., Australian J. Sci. Research, **2**, 437 (1949).
17. Batchelor G. K., Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 345 (1952).
18. Batchelor G. K., Inst. Fluid Dynamics and Appl. Math., Lecture Ser., № 4, University of Maryland, College Park, 1951.
19. Taylor G. I., Proc. London Math. Soc., **20**, 196 (1921).
20. Richardson L. F., Proc. Roy. Soc. London, **110A**, 709 (1926).
21. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc. London, **213A**, 349 (1952).
22. Reid W. H., Proc. Cambridge Phil. Soc., **51**, 350 (1955).
23. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **209A**, 418 (1951).
24. Ertel H., Z. Meteorol., **59**, 277 (1942).
25. Batchelor G. K. and Townsend A. A., в книге Batchelor G. K. and Daires R. M. (ред.), Surveys in Mechanics, стр. 352, Cambridge University Press, New York, 1956.
26. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc. London, **229A**, 1 (1955).
27. Frenkiel F. N., Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech., London, т. 2, стр. 112, 1948.
28. Uberoi M. S. and Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1142, 1953.
29. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **190A**, 534 (1947).
30. Mickelsen W. R., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3570, 1955.
31. Carslaw H. S. and Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, стр. 223, Clarendon Press, Oxford, 1947.
32. Frenkiel F. N., Symposium on Turbulence, Naval Ord. Lab. Rept., № 1136, стр. 67, July, 1949.
33. Frenkiel F. N., Proc. 1st. U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., стр. 837, 1951.
34. Frenkiel F. N., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **38**, 509 (1952).
35. Frenkiel F. N., Advances in Applied Mechnics, т. 3, стр. 51, Academic Press, New York, 1953.
36. Fleishman B. A. and Frenkiel F. N., J. Meteorol., **12**, 141 (1955).
37. Kampé de Fériet J., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 352.
38. Kalinske A. A. and Pien C. L., Ind. Eng. Chem., **36**, 220 (1944).
39. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **224A**, 487 (1954).
40. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **151A**, 421 (1935).
41. Towle W. L. and Sherwood T. K., Ind. Eng. Chem., **31**, 457 (1939).
42. McCarter R. J., Stutzman L. F. and Koch H. A., Jr., Ind. Eng. Chem., **41**, 1290 (1949).
43. Sherwood T. K. and Woertz B. B., Ind. Eng. Chem., **31**, 1034 (1939).
44. Dryden H. L., Ind. Eng. Chem., **31**, 416 (1939).
45. Corrsin S. and Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1040, 1951.
46. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., General Discussion on Heat Transfer, стр. 188, Institute of Mechanical Engineering, London, 1951.
47. Lauwerier H. A., Appl. Sci. Research, **4A**, 153 (1954).
48. Hinze J. O., J. Aeronaut. Sci., **18**, 565 (1951).
49. Kendall M. G., The Advanced Theory of Statistics, т. 1, Griffin & Co., London, 1947.
50. Townsend A. A., Australian J. Sci. Research, **2A**, 451 (1949).
51. Bagnold R. A., Proc. Roy. Soc. London, **225A**, 49 (1954).
52. Bagnold R. A., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **249A**, 235 (1956).

53. Tchen C. M., Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid, автореферат диссертации, Delft, 1947.
54. Hughes R. R. and Gilliland E. R., Chem. Eng. Progr., **48**, 497 (1952).
55. Corrsin S. and Lumley J., Appl. Sci. Research, **6A**, 114 (1956).
56. Schmidt W., Der Massenaustausch in freier Luft, стр. 18, Henri Grand Verlag, Hamburg, 1925.
57. Schultz-Grunow F., Forsch. Gebiete Ingenieurw., **17**, 65 (1951).
58. Ryan L. F., Experiments on Aerondynamic Gooling, Mitl. Inst. Aerodyn. E. T. H. Zurich, № 18, 1951.
59. Ranque M. G., J. phys. radium, **4**, 112 (1933).
60. Hilsch R., Z. Naturforsch., **1**, 208 (1946).
61. Deemter J. J., Appl. Sci. Research, **3A**, 174 (1953).
62. Spalding D. B., Proc. Roy. Soc. London, **221A**, 78, 100 (1954).
63. Schuh H., Z. angew. Math. u. Mech., **25—27**, 54 (1947).
64. Mickley H. S., Ross R. C. and Squyers A. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3208, 1954.
65. Basset A. B., A Treatise on Hydrodynamics, т. 2, ч. 5, Deighton, Bell and Co., Cambridge, England, 1888.
66. Boussinesq J., Théorie analytique de la chaleur, т. 2, стр. 224, Gauthier-Villars, Paris, 1903.
67. Oseen C. W., Hydrodynamik, стр. 132, Leipzig, 1927.
68. Corrsin S., конспект лекций, APL (JHU-TG-63-29), стр. 49, Johns Hopkins University, Baltimore, Md., 1953.
69. Lumley J. L., Some Problems Connected with the Motion of Small Particles in Turbulent Fluid, автореферат диссертации, Johns Hopkins University, Baltimore, 1957.
70. Friedlander S. K., A. I. Ch. E. Journal, **3**, 381 (1957).

## К главе 6

1. Reichardt H., Forsch. Gebiete Ingenieurw., № 414, 1951.
2. Goldstein S., Modern Developments in Fluid Dynamics, т. 2, Clarendon Press, Oxford, 1938. (См. также: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. II, Москва, 1948.)
3. Schlichting H., Ingr. Arch., **1**, 533 (1930).
4. Fage A. and Falkner V. M., Proc. Roy. Soc. London, **135A**, 702 (1935).
5. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **190A**, 551 (1947).
6. Townsend A. A., Australian J. Research, **2A**, 451 (1949).
7. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **197A**, 124 (1949).
8. Townsend A. A., Australian J. Research, **1A**, 161 (1948).
9. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, New York, 1956. (Имеется русск. перевод: Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, ИЛ, Москва, 1959.)
10. Tollmien W., Z. angew. Math. u. Mech., **6**, 468 (1926).
11. Squire H. B. and Trouncer J., Brit. Aeronaut. Research Comm. Tech. Repts., № 1947, 1944.
12. Pai S. I., Quart. Appl. Math., **10**, 141 (1938).
13. Howarth L., Proc. Cambridge Phil. Soc., **34**, 185 (1938).
14. Forstall W., Jr., Material and Momentum Transfer in Coaxial Gas Streams, автореферат диссертации, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1949.
15. Forstall W., Jr. and Shapiro A. H., J. Appl. Mechanics, **17**, 399 (1950).

16. Forstall W., Jr. and Shapiro A. H., J. Appl. Mechanics, **18**, 219 (1951).
17. Acharya Y. V. G., Momentum Transfer and Heat Diffusion in the Mixing of Coaxial Turbulent Jets Surrounded by a Pipe, автореферат диссертации, Delft, 1954.
18. Landis F. and Shapiro A. H., Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst., Palo Alto, Calif., 1951, стр. 133.
19. Trüpel Th., Z. ges. Turbinenwesen, **12**, 52 (1915).
20. Ruden P., Naturwissenschaften, **21**, 52 (1915).
21. Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts., № 94, 1943.
22. Corrsin S. and Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 1865, 1949.
23. Corrsin S. and Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2124, 1950.
24. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **1A**, 435 (1949).
25. Albertson M. L., Dai Y. B., Jenson R. A. and Rouse H., Proc. Am. Soc. Civil Engrs., **74**, 1571 (1948).
26. Forstall W. and Gaylord E. W., J. Appl. Mechanics, **22**, 161 (1955).
27. Keagy W. R. and Weller A. E., Proc. Heat. Transfer and Fluid Mechanics Inst., Berkeley, Calif., 1949, стр. 89.
28. Alexander L. G., Baron T. and Comings E. W., Univ. Illinois Bull., № 413, 1953.
29. Corrsin S. and Kistler A. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3133, 1954.
30. Liepmann H. W. and Laufer J., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 1257, 1947.
31. Laurence J. C., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3561, 1955.
32. Chin W. C. and Rib L. N., Trans. Am. Geophys. Union, **37**, 13 (1956).
33. Van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **7A**, 293 (1958).
34. Alexander L. G., Kivnick A., Comings E. W. and Henze E. D., A. J. Ch. E. Journal, **1**, 55 (1955).
35. Phillips O. M., Proc. Cambridge Phil. Soc., **51**, 220 (1955).
36. Stewart R. W., J. Fluid Mech., **1**, 593 (1956).
37. Barat M., Compt. rend., **238**, 445 (1954).
38. Szablewski W., Ingr. Arch., **20**, 567, 573 (1952).
39. Keagy W. R. and Weller A. E., Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst., Berkeley, Calif., 1949, стр. 89.
40. Sunavala P. D., Hulse C. and Thring M. W., Combustion and Flame, **1**, 179 (1957).
41. Thring M. W. and Newby M. P., 4th Symposium on Combustion, стр. 789, Cambridge, Mass., 1952. (См. Вопросы горения и детонационных волн. Четвертый симпозиум по вопросам горения и детонационных волн, Оборонгиз, М., 1958.)
42. Tomotika S., Proc. Roy. Soc. London, **165A**, 65 (1938).
43. Miller D. R. and Comings E. W., J. Fluid Mech., **3**, 1 (1957).
44. Kobashi Y., J. Phys. Soc. Japan, **12**, 533 (1957).

## К главе 7

1. Goldstein S., Modern Developments in Fluid Dynamics, т. 2, стр. 331, Oxford University Press, New York, 1938. (См. литературу к гл. 5, [1], т. II.)
2. Wieghardt K., Автореферат диссертации, University of Göttingen, 1945.
3. Schubauer G. B. and Skramstad H. K., J. Aeronaut. Sci., **14**, 69 (1947).

4. Dryden H. L, Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 1168, 1947.
5. Blasius H., Z. Math. u. Physik, **56**, 4 (1908).
6. Nikuradse J., VDI-Forschungsheft, № 361, 1933.
7. Millikan C. B., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 386.
8. Kármán Th., Trans. ASME, **61**, 705 (1939).
9. Hofmann E., Forsch. Gebiete Ingenieurw., **11A**, 159 (1940).
10. Reichardt H., Z. angew. Math. u. Mech., **20**, 297 (1940).
11. Rotta J., Ingr. Arch., **18**, 277 (1950)
12. Reichardt H., Z. angew. Math. u. Mech., **31**, 208 (1951).
13. Deissler R. G., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3145, 1954.
14. Schlichting H., Boundary Layer Theory, Pergamon Press Ltd., London, 1955. (Имеется русск. перевод: Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, Москва, 1956.)
15. Ludwieg H. and Tillmann W., Ingr. Arch., **17**, 288 (1949).
16. Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1030, 1951.
17. Klebanoff P. S. and Diehl F. W., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2475, 1951.
18. Schultz-Grunow F., Luftfahrt-Forsch., **17**, 239 (1940).
19. Allan J. F. and Cutland R. S., Trans. North East Caost Inst. Engrs. & Shipbuilders, **69**, 245 (1953).
20. Hama F. R., Soc. Naval Architects Marine Engrs. Trans., **62**, 333 (1954).
21. Clauser F. H., Advances in Appl. Mechanics, **4**, 1 (1956).
22. Wieghardt K., Z. angew. Math. u. Mech., **25—27**, 146 (1947).
23. Goethals R., Compt. rend., **226**, 1073 (1948).
24. Miles J. W., J. Aeronaut. Sci. **24**, 704 (1957).
25. Elrod H. G., J. Aeronaut. Sci., **24**, 468 (1957).
26. Driest E. R., J. Aeronaut Sci., **23**, 1007 (1956).
27. Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3178, 1954.
28. Townsend A. A., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 375 (1951).
29. Corrsin S. and Kistler A. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 3133, 1954.
30. Schubauer G. B., J. Appl. Phys., **25**, 188 (1954).
31. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, New York, 1956. (См. литературу к гл. 6 [6].)
32. Kuethe A. M., J. Aeronaut. Sci., **23**, 444 (1956).
33. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., 9th Intern. Congr. Appl. Mechanics, Brussels, 1956; также J. Fluid Mech., **3**, 329 (1958).
34. Einstein H. A. and Li H., Proc. Am. Soc. Civil Engrs. Paper, № 945, 1956.
35. Hanratty T. J., AIChE Journal, **2**, 359 (1956).
36. Coles D., J. Fluid Mech., **1**, 191 (1956).
37. Latzko H., Z. angew. Math. u. Mech., **1**, 277 (1921).
38. Kirsten H., Experimental Investigation on the Development of the Velocity Distribution in Turbulent Pipe Flow, автореферат диссертации, University of Leipzig, 1927.
39. Nikuradse J., VDI-Forschungsheft, № 356, 1932.
40. Nikuradse J., VDI-Forschungsheft, № 361, 1933.
41. Laufer J., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1174, 1954.
42. Nunner W., VDI-Forschungsheft, № 455, 1956.
43. Laufer J., Natl. Advisory Comm Aeronaut. Tech. Notes, № 2123, 1950.
44. Elias F., Z. angew. Math. u. Mech., **9**, 434 (1929); **10**, 1 (1930).

45. Woertz B. B. and Sherwood T. K., Trans. AIChE, **35**, 517 (1939).
46. Lorenz H., Z. tech. Phys., **15**, 376 (1934).
47. McCarter R. J., Stutzman L. F. and Koch H. A., Jr., Ind. Eng. Chem., **41**, 1290 (1949).
48. Kármán Th., Trans. ASME, **61**, 705 (1939).
49. Kraussold H., VDI-Forschungsheft, № 351, 1931.
50. Rannie W. D., J. Aeronaut. Sci., **23**, 485 (1956).
51. McAdams W. H., Heat Transmission, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954. (См. литературу к гл. 2 [1].)
52. Page F., Jr., Schlinger W. G., Breaux D. K. and Sage B. H., Ind. Eng. Chem., **44**, 424 (1952).
53. Isakoff S. E. and Drew T. B., Proc. General Discussion on Heat Transfer, стр. 405, 479, New York, 1951.
54. Pohl W., Forsch. Gebiet. Ingenieurw., **4A**, 230 (1933).
55. Smith J. W. and Epstein N., A. I. Ch. E. Journal, **3**, 242 (1957).
56. Reiher H., Mitt. Forsch., **269**, 1 (1925).
57. Лойцянский Л. Г. и Шваб Б. А., Труды ЦАГИ, № 329, 1935.
58. Comings E. W., Clapp J. T. and Taylor J. F., Ind. Eng. Chem., **40**, 1096 (1948).
59. De Haas van Dorsser A. H., Leniger H. A. and van Meel D. A., De Ingenieur, **61**, № 25 (1949).
60. Maisel D. S. and Sherwood T. K., Chem. Eng. Progr., **46**, 172 (1950).
61. Sherwood T. K. and Petrie J. M., Ind. Eng. Chem., **24**, 736 (1932).
62. Sato K. and Sage B. H., ASME Paper, № 57-A-20.
63. Van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **7A**, 205 (1958).
64. Edwards A. and Furber B. N., Proc. Inst. Mech. Engrs. London, **170**, 941 (1956)
65. Lobb R. K., Winkler E. M. and Persh J., J. Aeronaut. Sci., **22** (1955).
66. Koch R., VDI-Forschungsheft, № 469, 1958.
67. Goddard F. E., J. Aero. Space Sci., **26**, 1 (1959).

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ


Агостини (Agostini L.) 149, 193, 663, 664
Александер (Alexander L. G.) 164, 165, 342, 488, 491, 493, 664, 666, 669
Аллен (Allan J. F.) 551, 670
Альбертсон (Albertson M. L.) 491, 669
Атчинсон (Atchinson L. C.) 664
Ачария (Acharya Y. V. G.) 488, 669

Бай (Pai S. I.) 483, 501, 668
Бара (Barat M.) 498, 499, 669
Бассэ (Basset A. B.) 414, 668
Бетхов (Betchov R.) 108, 109, 117, 132, 662, 663
Бибер (Beeber R. J.) 664
Блазиус (Blasius H.) 537, 670
Бро (Breaux D. K.) 671
Буро (Bourot J. M.) 155, 664
Буссинеск (Boussinesq J.) 31, 36, 311, 324, 339, 348, 414, 661, 668
Бэгнольд (Bagnold R. A.) 412, 413, 667
Бэйнес (Baines W. D.) 255, 665
Бэрон (Baron T.) 164, 342, 343, 491, 493, 664, 666, 669
Бэсс (Bass J.) 193, 230, 664
Бэтчелор (Batchelor G. K.) 68, 190, 192, 195, 208, 210, 214, 227, 229, 242, 248, 249, 254—257, 276, 277, 284, 287, 293, 307, 344, 360, 362, 363, 365, 366, 369, 370, 371, 381, 392, 393, 398, 406, 469, 661, 664—667
Бюргерс (Burgers J. M.) 16, 87, 88, 104, 232, 294, 301, 306, 315, 355, 372, 661, 662, 664, 666

Ван дер Хегге Цийнен (van der Hegge Zijnen) 95, 111, 157, 164, 255, 401, 402, 405, 407, 411, 491—493, 495—497, 505, 643—645, 662—664, 666, 667, 669, 671
Ван Драйст (van Driest E. R.) 547, 663, 670
Ван Меэль (van Meel D. A.) 642, 671
Вейцзэкер (Weizsäcker G. F.) 225, 665
Вернер (Werner F. D.) 149, 663
Вернотт (Vernotte P.) 147, 663
Вёрц (Woertz B. B.) 400, 624, 667, 671
Веске (Weske J. R.) 144, 145, 663
Виатт (Wyatt L. A.) 146, 663
Вигхардт (Wieghardt K.) 532, 555, 669, 670
Винклер (Winkler E. M.) 646, 647, 671

Гавильо (Gaviglio J.) 179, 571, 662, 664, 670
Гарсайд (Garside J. E.) 661
Гаффин (Gaffyn J. E.) 663
Гейзенберг (Heisenberg W.) 226, 227, 230, 238, 246, 250, 251, 283, 665
Гейлорд (Gaylord E. W.) 491, 497, 669
Генце (Henze E. D.) 488, 491, 669
Гёртлер (Görtler H.) 87, 662
Гёталс (Goethals R.) 558, 670
Глэзер (Glaser A. H.) 161, 162, 664
Годдард (Goddard F. E.) 648, 671
Гольдштейн (Goldstein S.) 164, 664, 666, 668, 669
Гофман (Hofmann E.) 545, 546, 627, 628, 670
Грант (Grant H. L.) 254, 666
Гроссман (Grossmann L. M.) 253, 663
Гулд (Gould R. W. F.) 663

Дай (Dai I. B.) 491, 669
Дайслер (Deissler R. G.) 190, 547, 553, 630, 631, 666, 670
Джеффрис (Jeffreys B. S.) 661

Джеффрис (Jeffreys H.) 661
Джиллилэнд (Gilliland E. R.) 415, 668
Джинс (Jeans J. H.) 57, 661
Диль (Diehl F. W.) 317, 320, 551, 552, 555—557, 666, 670
Димтер (Deemter J. J.) 668
Драйден (Dryden H. L.) 13, 68, 106, 255, 536, 661—663, 665, 667, 670
Древиц (Drewitz O.) 124, 662
Дрю (Drew T. B.) 635, 636, 671
Дуб (Doob J. L.) 68, 661
Дэйрс (Daires R. M.) 667
Дюма (Dumas R.) 179, 581, 662, 664, 670

Егер (Jaeger J. C.) 380, 667

Исаков (Isakoff S. E.) 635, 636, 671
Йенсон (Jenson R. A.) 491, 669

Калинске (Kalinske A. A.) 68, 164, 390, 661, 663, 667
Камингс (Commings E. W.) 342, 488, 491, 493, 499, 642, 664, 666, 669, 671
Кампé де Ферье (Kampé de Fériet J.) 62, 80, 390, 661—663, 667
Карман (Kármán Th.) 9—11, 68, 171, 178, 189, 214, 222, 228, 241, 248, 252, 333—335, 337, 339, 538, 541, 545, 627, 628, 661, 662, 664—667, 670, 671
Карслоу (Carslow H. S.) 380, 667
Катленд (Cutland R. S.) 551, 670
Кендалл (Kendall M. G.) 667
Кивник (Kivnick A.) 488, 491, 669
Киджи (Keagy W. R.) 495, 500, 669
Кинг (King L. V.) 97, 141, 662
Кирстен (Kirsten H.) 594, 670
Кистлер (Kistler A.) 259, 282, 501, 509, 515, 517, 518, 563—565, 570, 571, 665, 669, 670
Клаузер (Clauser F. H.) 552, 555, 556, 561, 583, 590, 670
Клебанов (Klebanoff P. S.) 127, 317, 320, 551, 552, 555—557, 564, 565, 567, 570, 571, 573, 574, 578, 580, 587, 588, 592, 602, 608, 662, 663, 666, 670
Клэпп (Clapp J. T.) 642, 671
Кобаши (Kobachi Y.) 466, 669
Коважный (Kavasznay L. S. G.) 123, 145, 159, 160, 226, 662—665
Колин (Kolin A.) 153, 663
Коллинз (Collins R. D.) 156, 664
Коллис (Collis D. C.) 146, 663
Колмогоров А. Н. 214, 217, 220, 225, 664
Кольбурн 626
Корсин (Corrsin S.) 55, 118, 141, 259, 275, 282, 375, 378, 379, 394, 401, 402, 413, 416, 491, 495, 499, 501—507, 509, 515—518, 563—565, 570, 571, 661—663, 665, 667—670
Коулс (Coles D.) 585—588, 670
Кох Г. А. (Koch H. A.) 399, 625, 667, 671
Кох (Koch R.) 640, 641, 671
Крайя (Craya A.) 317, 320, 666
Крамерс (Kramers H.) 95, 97, 662
Краусольд (Kraussold) 628, 671
Купер (Cooper R. D.) 127, 664
Куэтт (Couette M.) 86
Кшивоблоцкий (Krzywoblocki M. Z. E.) 289, 665
Кьюз (Kuethe A. M.) 13, 106, 647, 662, 670

Лайтхилл (Lighthill M. J.) 147, 290, 664, 665
Ламб (Lamb H.) 662
Ламли (Lumley J.) 413, 416, 668
Лауренс Дж. К. (Laurence J. C.) 501, 669
Лауренс Дж. П. (Laurence J. P.) 663
Лауфер (Laufer J.) 123, 124, 135, 317—319, 501, 553, 554, 595, 597, 600—603, 606, 608—614, 616, 663—666, 669, 670
Лацко (Latzko H.) 593, 594, 670
Ленигер (Leniger H. A.) 642, 671
Ли (Li H.) 238, 584, 670
Либлайн (Lieblein V.) 353, 666
Лимбер (Limber D. N.) 284, 665
Линг (Ling S. C.) 147, 148, 664
Линдвалл (Lindvall F. C.) 148, 149, 663
Линдгрен (Lindgren E. R.) 87, 88, 662
Линь (Lin C. C.) 55, 87, 88, 214, 222, 248, 252, 661, 662, 665
Липман (Liepmann H. W.) 135, 136, 240, 501, 663—665, 669
Лиф (Leaf W.) 664
Лобб (Lobb R. K.) 646, 647, 671
Ловерье (Lauverier H. A.) 401, 667
Лойцянский Л. Г. 191, 192, 642, 664, 671
Лорансо (Laurenceau P.) 144, 663
Лорентц (Lorentz) 85, 86

Лоренц (Lorenz H.) 624, 671
Лоуэлл (Lowell H. H.) 108, 111, 123, 662
Лэндес (Landes L.) 663
Лэндис (Landis F.) 491, 669
Людвиг (Ludwieg H.) 551, 552, 560, 562, 670

Маас (Maas J. N.) 664
Майзель (Maisel D. S.) 642, 671
Майлс (Miles J. W.) 546, 670
Мак-Адамс (McAdams W. H.) 95, 662, 671
Мак-Картер (McCarter R. J.) 399, 625, 667, 671
Мак-Клеллан (McClellan R. J.) 123, 124, 664
Мидлбрук (Middlebrook G. B.) 147, 663
Мизес (Mises R.) 662
Мик (Mick W. C.) 661
Микельсен (Mickelsen W. R.) 379, 667
Микли (Mickley H. S.) 353, 668
Миллер (Miller D. R.) 499, 669
Милья (Milliat J. P.) 317, 320, 666
Милликен (Millkan C. B.) 543, 559, 597, 670
Митчнер (Mitchner M.) 294, 301, 306, 315, 666
Мок (Mock W. C.) 662, 663, 665
Мунк (Munk M.) 88, 662

Никурадзе (Nikuradse J.) 538, 553, 560, 561, 594, 597, 598, 670
Нисбет (Nisbet I. C. T.) 254, 666
Нуннер (Nunner W.) 600, 606, 619, 620, 639—641, 670
Нуссельт (Nusselt W.) 353, 666
Ньюбай (Newby M. P.) 156, 500, 664, 669

О'Брайен (O'Brien V.) 259, 282, 665
Обухов А. М. 225, 226, 229, 284, 665
Обэ (Huebès J. J.) 144, 663
Озеен (Oseen C. W.) 414, 668
Онзагер (Onsager L.) 225, 665
Орр (Orr W. M. F.) 86, 662
Оссовский (Ossofsky E.) 144, 145, 663

Пейдж (Page F.) 635, 636, 671
Перш (Persh J.) 646, 647, 671
Петерсон (Peterson E. G.) 255, 665
Петри (Petrie J. M.) 671
Пире (Piret E. L.) 147, 663
Поль (Pohl W.) 638, 671
Польгаузен (Pohlhausen) 124
Прандтль (Prandtl L.) 323, 324, 327, 329, 330, 333, 334, 335, 337, 339, 341, 350, 538, 542, 568, 626, 661, 666
Праудмен (Proudman I.) 192, 208, 210, 211, 238, 239, 251, 252, 287, 290, 665, 666
Пян (Pien C. L.) 68, 390, 667

Райан (Ryan L. F.) 668
Райд (Reid W. H.) 208, 211, 238, 370, 665, 667
Райхе (Reiche F.) 153, 663
Райхер (Reiher H.) 642, 671
Ранк (Ranque M. G.) 668
Рейнольдс (Reinolds O.) 24, 30, 85, 86
Рейхардт (Reichardt H.) 339, 341, 342, 491, 495, 545, 546, 553, 554, 595, 625, 628, 629, 633, 634, 666, 668, 670, 671
Риб (Rib L. N.) 502, 669
Ричардсон (Richardson E. G.) 663
Ричардсон (Richardson L. F.) 366, 667
Робертсон (Robertson H. P.) 171, 664
Робинзон (Robinson M. S.) 136, 664
Розенхэд (Rosenhead L.) 661
Рой (Roy J.) 661
Росс (Ross R. S.) 353, 668
Ротта (Rotta J.) 251, 301, 545—547, 553, 560, 665, 666, 670
Роуз (Rouse H.) 491, 669
Руден (Ruden P.) 491, 495, 669
Рэлей (Rayleigh) 86, 662
Рэнни (Rannie W. D.) 632, 633, 671

Сато (Sato K.) 643, 671
Сато (Sato H.) 239, 244, 255, 665
Саттон (Sutton O. G.) 661
Сеньерэн (Seigneurin A.) 144, 663
Симмонс (Simmons L. F.) 663
Сквайерс (Squyers A. L.) 353, 668
Сквайр (Squire H. B.) 483, 484, 490, 668
Скиннер (Skinner G. T.) 130, 664
Скрэмстед (Skramstad H. K.) 113—115, 401, 402, 536, 661, 662, 665, 669
Смит (Smith J. W.) 638, 671
Сполдинг (Spalding D. B.) 353, 668
Стюарт (Stewart R. W.) 170, 184, 231, 242, 246, 252, 516, 517, 664, 665, 669

Сунавала (Sunavala P. D.) 500, 669
Сэйдж (Sage B. H.) 643, 671

Такер (Tucker M. J.) 130, 664
Талер (Thaler W. J.) 664
Таул (Towle W. L.) 398, 399, 400, 667
Тауненд (Townend H. C.) 154, 664
Тауненд (Townend D. T. A.) 11, 661
Таунсенд (Townsend A. A.) 132—135, 170, 195, 214, 218, 231, 232, 234, 242, 243, 246, 252, 254—257, 277, 336—338, 344, 370, 371, 392—395, 398, 406, 408, 457—460, 462, 464—466, 468, 469, 505, 510, 514, 516, 518, 519, 552, 563, 564, 570, 574, 576, 582, 583, 589—591, 595, 609, 610, 614, 615, 663—668, 670
Тилман (Tillmann W.) 551, 552, 560, 562, 670
Титьенс (Tietjens O.) 661
Толмин (Tollmien W.) 479, 498, 668
Томас (Thomas P.) 148, 663
Томотика (Tomotika S.) 669
Траунсер (Trouncer J.) 483, 484, 490, 668
Тринг (Thring M. W.) 500, 669
Трюпель (Trüpel Th.) 491, 669
Тулин (Tulin M. P.) 127, 664
Турнье (Tournier M.) 144, 663
Тэйлор (Taylor G. I.) 9, 10, 52, 59, 60, 62, 68, 71, 76, 131, 195, 218, 323, 329, 331, 332, 339, 366, 397, 626, 642, 661, 662, 667
Тэйлор (Taylor J. F). 671
Тэйлор (Taylor M. K.) 664
Тюрлеман (Thürlemann B.) 152, 663

Удар (Oudart A.) 666
Ундервуд (Underwood R. M.) 663
Уэллер (Weller R. J.) 495, 500, 664, 669
Уэллинг (Welling W.) 117, 662

Фавр (Favre A.) 56, 78, 129, 179, 581, 662, 664, 670
Фарбер (Furber B. N.) 645, 671
Фейдж (Fage A.) 154, 457, 460, 664, 668
Филлипс (Phillips O. M.) 516, 669
Фитцпатрик (Fitzpatrick J. A.) 664
Флайшман (Fleishman B. A.) 381, 387, 667
Флюгель (Flügel G.) 661
Фокнер (Falkner V. M.) 457, 460, 668
Форстолл (Forstall W.) 488, 490, 491, 495, 497, 668, 669
Френкиль (Frenkiel F. N.) 70, 115, 157, 375, 380, 381, 387, 661, 662, 664, 665, 667
Фридлэндер (Friedlander S. K.) 413, 668
Фридрих (Friedrich) 624
Фукс (Fucks W.) 149, 150, 663

Хаас ван Дорссер (De Haas van Dorsser A. N.) 671
Хаббард (Hubbard P. G.) 147, 148, 160, 664
Халс (Hulse C.) 500, 669
Хама (Hama F. R.) 551, 556, 558, 561, 585, 670
Харват (Charwatt A. F.) 663
Хауэлс (Howells I. D.) 277, 666
Хауэрт (Howarth L.) 171, 178, 189, 487, 664, 668
Хенретти (Hanratty T. Y.) 584, 585, 670
Хилш (Hilsch R.) 668
Хинце (Hinze J. O.) 157, 164, 401, 402, 407, 491, 495, 497, 664, 667, 669
Холл (Hall A. R.) 255, 661, 665
Хьюджес (Hughes R. R.) 415, 668

Циглер (Ziegler M.) 144, 145, 663
Цуджи (Tsuji H.) 249, 252, 255, 666

Чандрасекар (Chandrasekhar S.) 230, 251, 289, 290, 293, 373, 665—667
Чен (Tchen C. M.) 312, 314, 315, 317, 413, 414, 418, 420, 666, 668
Чжоу (Chou P.) 666
Чин (Chin W. C.) 306, 310, 311, 502, 669

Шаблевский (Szablewski W.) 500, 669
Шапиро (Shapiro A. H.) 488, 491, 668, 669
Шваб Б. А. 642, 671
Шервуд (Sherwood T. K.) 398—400, 624, 633, 642, 667, 671
Шлингер (Schlinger W. G.) 671
Шлихтинг (Schlichting H.) 457, 459, 555, 668, 670
Шмидт (Schmidt W.) 668

Штуцман (Stutzman L. F.) 399, 625, 667, 671
Шу (Schuh H.) 353, 668
Шубауэр (Schubauer G. B.) 127, 536, 551, 563, 564, 569, 580, 661—663, 665, 669, 670
Шульц (Schultz B. H.) 351, 666
Шульц-Грунов (Schultz-Grunow F.) 428, 551, 552, 556, 557, 668, 670

Эдвардс (Edwards A.) 645, 671
Эйнштейн (Einstein H. A.) 584, 670
Эккерт (Eckert E.) 124, 353, 662, 666
Элиас (Elias F.) 619, 620, 670
Элрод (Elrod H. G.) 546, 670
Энсайн (Ensing L.) 664
Эпштейн (Epstein N.) 638, 671
Эрп (Erp J. B.) 664
Эртель (Ertel H.) 33, 371, 662, 667

Юберой (Uberoi M. S.) 160, 208, 284, 285, 288, 375, 378, 379, 394, 401, 402, 491, 495, 499, 501, 503, 505—507, 509, 661, 664, 665, 667, 669

Яглом А. М. 665
Янг (Joung A. D.) 664
Янссен (Janssen J. M.) 664

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Автомодельность 170
— неполная 245
Аналогии при турбулентном переносе 344
Анемометр с коронным разрядом 149
— Линга и Хаббарда 147
— с нагретой пленкой 147
— с электрическим разрядом 148

Бэрона теория 343

Влияние сжимаемости 29, 123, 159, 289, 427, 646
— турбулентности свободного потока на процессы переноса в пограничном слое 641, 646
— шероховатости стенки на теплообмен 637
Вращение жидкости без деформации 26
Вырождение изотропного скалярного поля 279
— турбулентности 170, 195
— — изотропной 242
Вязкость вихревая 31, 33
— кажущаяся 31
— молекулярная 33
— турбулентная 31

Гейзенберга гипотеза 231, 311
— закон 231, 234
Гипотеза Гейзенберга 231, 311
— Кармана о подобии 294
— Тэйлора 54
Грасгофа критерий 94

Давление гидростатическое 25
— статическое осредненное, его измерение 160
Давление турбулентное среднее 32
Движение см. *Течение*
Дилатация 26
Диссипация кинетической энергии 50
Диффузия 57
— дискретных частиц при однородной турбулентности 412
— от неподвижного источника в равномерном потоке 380
— — — — в турбулентном потоке со сдвигом 400
— при однородной турбулентности 353
Длина «холодная» 108

Завихренность движения 26
Закон вырождения турбулентности 282
— Гейзенберга 231, 234
— избыточной скорости 582
— спектральный Колмогорова 225, 240, 277
— Фика 584

Измерение двойных корреляций скорости 127
— интенсивности турбулентности 125
— масштаба турбулентности 132
— осредненного статического давления 160
— осредненной скорости 163
— пульсаций концентрации 141
— — температуры 137
— спектра турбулентности 132
— тройных корреляций скорости 127
Изотропность локальная 169
Инвариант Лойцянского 192, 210, 244
Интеграл Лойцянского 192, 194, 222, 233

Интенсивность турбулентности, ее измерение 125
— — относительная 13
— турбулентных пульсаций 13

Кармана гипотеза подобия 294
— формула 233
Кармана—Хауэрта уравнение 189, 213, 250
Квазипериодичность турбулентности 15
Квазичастота 15
Кинга формула 97
Коважного формула 124
Колмогорова закон спектральный 225, 234, 240, 242, 277
Координаты цилиндрические 33
Корреляция лагранжева 62, 64, 156
— — временная 67
— между компонентами скорости в фиксированной точке потока 39
— между пульсациями давления и пульсациями скорости в двух точках потока 171
— между скоростями в двух различных точках потока 39
— скорости двойная 42, 43
— — —, ее измерение 127
— — поперечная 42
— — продольная 42
— — тройная 45
— — —, ее измерение 127
— эйлерова 64
— — временная 53, 66, 129
— — продольная 156
— — пространственная 65, 128, 129
Корсина формула 119
Коэффициент вихревого переноса 36
— вихревой вязкости 31, 311, 324, 327, 329, 330
— — диффузии 33
— восстановления 429
— вязкости второй 26
— — динамический 26
— — первый 26
— двойной эйлеровой корреляции 112
— диффузии 57
— молекулярного переноса 36
— перемежаемости 469, 570, 571
— поперечной корреляции скорости 42, 47, 114, 128, 178
— продольной корреляции между пульсациями скорости 114
— — — скорости 42, 47, 129, 178
Коэффициент тензора двойных корреляций скорости 42
— теплоотдачи 94
— тройной корреляции скорости 131
— турбулентной вязкости кинематический 227
— турбулентности 36
— эйлеровой корреляции 53
Крамерса формула 95
Критерий Грасгофа 94
— Нуссельта 94
— Прандтля 94
— Рейнольдса 94
Куэтта течение 96

Лагранжа метод 324
Лиссажу фигуры 130
Лойцянского инвариант 192, 210, 244
— интеграл 192, 194, 195, 222, 233

Масштаб вихревой диффузии 64
— времени 12
— диссипации 50
— интегральный 51
— — эйлеров 54
— лагранжев времени 63, 156
— пространственный 12
— турбулентности 12, 51
— —, его измерение 132
Маха число 289
— — среднеквадратичное 289
Метод баланса энергии 86
— взвешенных частиц 155
— возмущения 86
— диффузионный 157, 163
— интерференционный Маха 158
— Лагранжа 324
— мыльных пузырей 154
— оптический 158
— постоянного тока 98, 99, 100, 125
— постоянной температуры 98, 99, 142, 144, 145
— создания локальной зоны высокой температуры 154
— теневой 158
— Циглера 144
— Эйлера 324
— электромагнитной индукции 151
Методы, основанные на визуализации течения 153
Микромасштаб времени 63
— диссипации 50

Микромасштаб турбулентности временной эйлеров 54
Моль жидкий 323

Навье—Стокса уравнения 27
Напряжения вязкие 30
— рейнольдсовы 30
— турбулентные 30
Насадок Пито 161
Неустойчивость течения вторичная 87
Нуссельта критерий 94
— число 123, 124, 623

Отрыв пограничного слоя 535

Перемежаемость течения 23
Перенос скалярной субстанции при турбулентных движениях 36
— турбулентный 322
Пито насадок 161
— трубка 162
Подобие 170
Подслой вязкий 538, 546, 581, 584
— ламинарный 538
Поле течения изотропное 39
— — квазистационарное 40
Польгаузена формула 124
Поток — см. *Течение*
Прандтля критерий 94
— число 116
— — турбулентное 634, 636
Псевдотурбулентность 11
Пульсации давления при изотропной турбулентности 283
— концентрации, их измерение 141
— плотности 158
— скорости 13, 37
— температуры 282
— —, их измерение 137
Путь смешения 323, 348

Разряд Таунсенда 148
— темновой 148
— тлеющий 148
— электрический 148
Распределение спектральное скалярной субстанции 265
Рейнольдса критерий 94
— число 17, 214, 218, 220, 221, 242, 535
Рейхардта теория 340, 342, 439, 453, 457, 482, 487

Скорость динамическая 539
— осредненная, ее измерение 163
Слой переходный 546
— пограничный ламинарный на плоской пластине 534
— — на гладкой стенке 539
— — на шероховатой стенке 541
— — турбулентный на плоской пластине 538
— постоянного напряжения 542
Спектр Колмогорова 234, 242
— турбулентности, его измерение 132
— энергетический 16
— — одномерный 71
— — пространственный 195
Степень турбулентности 13
Струя круглая свободная 471

Таунсенда разряд 148
Температура пленочная 95
— торможения адиабатическая 429
— — действительная 429
Тензор двойных корреляций скорости 40
— диффузии 33
— изотропный второго ранга 174, 175
— — третьего ранга 186
— корреляционный второго ранга 171, 174
— — первого ранга 45, 171
— — третьего ранга 45, 171, 182
— напряжений 25
— скоростей деформации 26
— тройных корреляций изотропный 187
Теория Буссинеска 439, 471
— Бэрона 343
— переноса завихренности 329, 348, 354, 456, 480, 486
— пути смешения 323, 324, 334, 354, 372, 439, 452, 456, 479, 486
— Рейхардта 340, 342, 439, 453, 457, 482, 487
Термоанемометр 93, 94
— с нагретой нитью 93, 145
Течение диссипативное 10
— в круглой свободной струе 471, 484, 488, 501
— в нагретой круглой свободной струе 506
— в пограничном слое 522, 525
— в следе за цилиндром 448, 457, 462, 545
— в трубе 523, 533, 594, 601, 614

Течение вдоль плоской пластины 523
— Куэтта 11, 86
— неизотропное 169
— неупорядоченное 9
— перемежающееся 29, 339
— псевдотурбулентное 11, 17
— турбулентное 9
— — в плоском канале 190
— — изотропное 39
— — реальное 169
— — со сдвигом 294, 400, 510
Толщина вытеснения пограничного слоя 530
— вязкого подслоя 539
— диссипации 532
— пограничного слоя 530
— потери импульса 531
— — энергии 531
Точка перехода к турбулентному течению 535
Труба вихревая Ранка — Хильша 429
Турбулентность 9, 637
— анизотропная 11
— в потоке со сдвигом 11
— гомологичная 11
— изотропная 11, 41, 169, 187, 242, 259
— неизотропная 11, 293
— — свободная 438
— однородная 11, 293, 303, 307
— пристеночная 10, 619
— — неизотропная 522
— реальная 11
— свободная 10, 346, 438
Тэйлора гипотеза 54

Уравнение диффузии вещества в пространстве при наличии сферической симметрии 192
— Кармана—Хауэрта 189, 213, 250
— неразрывности 23
— — в цилиндрических координатах 33
— теплопроводности в пространстве при наличии сферической симметрии 192
Уравнение энергетического спектра динамическое 206
Уравнения Навье — Стокса 27
Уровень турбулентности 13
Участок входной 593

Фигуры Лиссажу 130
Фика закон 584
Формпараметр 538
Формула Кармана 233
— Кинга 97
— Коважного 124
— Корсина 119
— Крамерса 95
— Польгаузена 124
— Эккерта 124
Формулы для двойных корреляций эмпирические 67
Функция корреляционная 307
— спектральная 307
— — переноса 213

Циглера метод 144

Частица жидкая 323
Число волновое 196, 276
— Маха 289
— — среднеквадратичное 289
— Нуссельта 123, 124, 623
— Прандтля 116
— — турбулентное 622, 634, 636
— — эффективное 622
— Рейнольдса 214, 218, 220, 221, 242, 535
— — критическое 86, 535, 538
— — турбулентности 221

Шероховатость песочная 561
«Шлирен»-метод Теплера 158

Эйлера метод 324
Эккерта формула 124

Ядро течения в трубе 596