

А. Б. ШКАРИН,
А. М. ФЕДЯНОВ, Б. Г. САНДЛЕР

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ТЕХНИКЕ

(сборник задач)

Пособие для учителей

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1962

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Уравнения первой степени	5
Системы уравнений первой степени	10
Квадратные уравнения	17
Прогрессии	28
Логарифмы	31
Неравенства	35
Бином Ньютона	39
Производная. Исследование функций на максимум и минимум	41

Р е ш е н и я з а д а ч

Уравнения первой степени	46
Системы уравнений первой степени	51
Квадратные уравнения	59
Прогрессии	95
Логарифмы	99
Неравенства	102
Бином Ньютона	104
Производная. Исследование функций на максимум и минимум.	107

*Александр Борисович Шкарик,
Алексей Михайлович Федянов, Борис Григорьевич Сандлер*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ТЕХНИКЕ

Редактор *Л. А. Сидорова*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Обложка художника *В. Т. Сидоренко*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *О. М. Суздалова*

Сдано в набор 12/IV 1961 г. Подписано к печати 22/VIII 1961 г.
84 × 108¹/₃₂. Печ. л. 7,25 (5,95). Уч-изд. 4,70 л. Тираж 50 тыс. экз.
A07968

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ № 2345

Цена без переплета 13 коп., переплет 5 коп.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с перестройкой обучения в средней школе на основании закона «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР», принятого 24 декабря 1958 года на второй сессии Верховного Совета СССР, возникает необходимость создания новых учебников и учебных пособий по всем дисциплинам, в том числе и по математике.

Настоящий сборник задач технического характера по отдельным вопросам алгебры, по нашему мнению, может оказать известную помощь учителям средней школы в преподавании математики. Часть задач сборника может быть использована для внеклассной и кружковой работы.

При его составлении авторы стремились на конкретных примерах показать приложение элементарной математики к решению технических задач и обеспечить познавательный характер всем задачам сборника.

Постановка задач как по форме, так и по содержанию носит, как правило, тот характер, какой реально возникает в инженерной практике. Поэтому все обозначения заданных и искомых величин взяты в том виде, в каком они встречаются в технической литературе.

Следует обратить внимание читателя на тот факт, что во всех технических расчетах, как правило, оперируют приближенными численными значениями величин. Это объясняется тем, что первоначальные исходные данные обычно получают путем измерений. А как известно, всякое измерение, встречающееся в природе, нельзя произвести абсолютно точно. Степень приближения значения измеренной величины к точному зависит от методов измерений и точности самих измерительных приборов и инструментов, но во всех случаях должна обеспечивать правильность производимых расчетов. Однако эта сторона вопроса в технических расчетах не всегда подчеркивается. В известной мере это допускалось и при решении ряда задач настоя-

щего сборника. Большинство решений доведено до числового результата; некоторые из них имеют и другие варианты.

Для облегчения понимания содержания задач они иллюстрированы рисунками и чертежами. Специальные термины и понятия сопровождаются краткими пояснениями.

Авторы выражают свою признательность гг. Ларичеву П. А., Колосову А. А., Дормидонтову Н. Д., Кудрявцеву С. В., Соркину Ю. И. и Хотимской О. В., замечания и советы которых при работе над рукописью были для нас ценными.

Авторы просят читателей свои замечания и пожелания направлять в адрес редакции математики Учпедгиза.

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

1. При измерении кронциркулем толщины стенки детали иногда оказывается невозможным вынуть кронциркуль, не раздвигая ножек (рис. 1, а). В этом случае к измеряемой

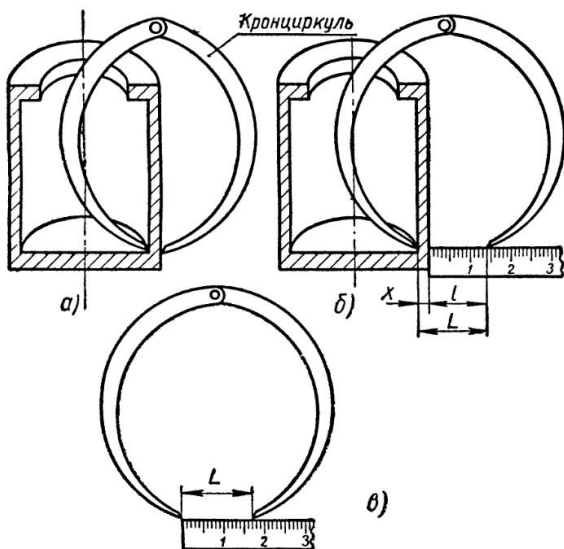


Рис. 1.

величине при помощи линейки прибавляют некоторый отрезок l (рис. 1, б), получившееся таким образом расстояние L между ножками кронциркуля замеряют (рис. 1, в). Какова толщина стенки детали, если измерения указанным способом дали $L = 37$ мм и $l = 25$ мм ?

2. Из какого количества секций, т. е. отдельных труб, должен состоять пульповод (трубопровод) земснаряда, (рис. 2), чтобы он мог подавать песок с водой для намы-

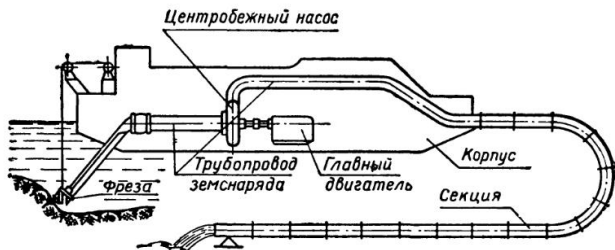


Рис. 2.

ва плотины на расстояние 350 м от места забоя, если длина каждой секции равна 8 м, а длина трубопровода внутри самого земснаряда равна 46 метрам?

3. Из стального листа необходимо вырубить 25 круглых шайб (рис. 3) с наружным диаметром, равным 50 мм,



Заштрихованы участки полдсы, которые идут в отход

Рис. 3.

и внутренним диаметром — 22 мм. Какую площадь должен иметь лист, если 35 % площади этого листа идет в отход?

4. В резервуар (рис. 4) налита жидкость. На глубине $h = 1,5$ м от ее поверхности определено давление

$$p = 1,15 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Определить удельный вес жидкости, если давление над поверхностью равно атмосферному.

Указание. При решении задачи воспользоваться основным уравнением гидростатики $p = p_0 + \gamma h$, где p — давление в данной точке жидкости; p_0 — давление на ее поверхности; γ — удельный вес жидкости; h — высота столба жидкости над точкой, где измеряется давление.

5. Найти положение центра тяжести по длине детали, которая в точке A (рис. 5) опирается на неподвижную призму, а в точке B часть веса детали передается на весы, показания которых дают $G_1 = 12$ кг. Вес детали $G = 27$ кг и расстояние между призмами $l = 45$ см.

6. Одна из конструкций весов схематично показана на рисунке 6.

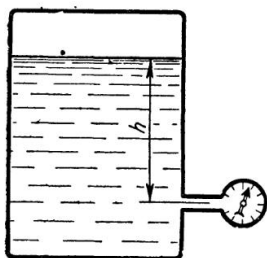


Рис. 4.

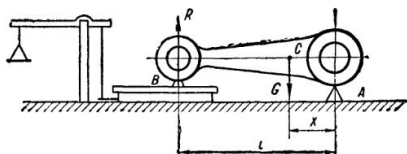


Рис. 5.

Во сколько раз вес гирь P будет меньше груза Q ?

7. Из стальной проволоки диаметром 5 мм следует изготовить винтовую цилиндрическую пружину высотой 122 мм. Определить количество витков такой пружины, если зазор между витками ненагруженной пружины должен равняться 8 мм.

8. Скорость хода часов с маятником зависит от периода колебаний маятника, который определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ сек},$$

где l — длина маятника в см;

g — ускорение силы тяжести в $\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$.

Определить, на сколько надо укоротить маятник (передвинуть диск маятника по его стержню вверх), если перед этим длина маятника равнялась 20 см и часы отставали на 12 минут в сутки. Принять $g = 980 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$.

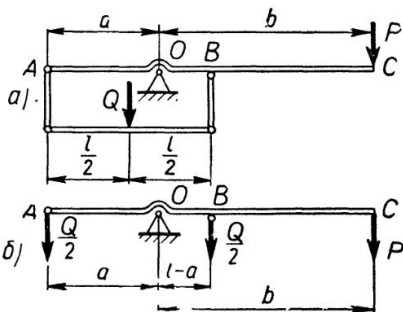


Рис. 6.

9. Брус шириной $b = 236$ мм требуется распилить на доски, толщина которых $b_1 = 20$ мм. Ширина реза $t = 4$ мм. Сколько досок получится из этого бруска?

10. Коэффициент трения скольжения железнодорожного подвижного состава определяется по эмпирической формуле:

$$f = \frac{k}{1 + 0,03v}, \text{ где } v — \text{ скорость движения в } \frac{\text{м}}{\text{сек}}; k — \text{ коэф-}$$

фициент трения скольжения при покое, равный для сухих рельсов 0,22.

Определить скорость поезда, при которой коэффициент трения скольжения колес вагонов об рельсы достигнет 0,15.

11. Измерение больших диаметров может производиться посредством штангенциркуля (рис. 7). Размер h для данного штангенциркуля обычно известен или может быть легко измерен. Размер l получаем при измерении штангенциркулем. Требуется определить диаметр детали D .

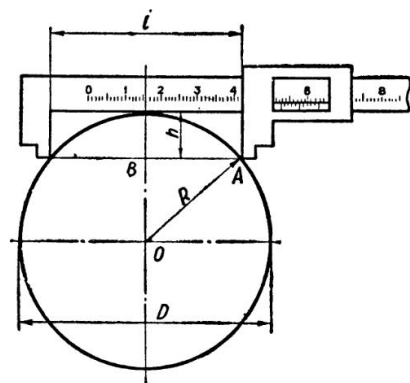


Рис. 7.

12. Большие диаметры могут измеряться также по методу измерения по хорде и высоте сегмента. Для этого применяется прибор, показанный на ри-

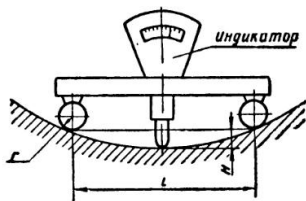


Рис. 8.

сунке 8. Вывести формулу для определения диаметра окружности, если расстояние между роликами l , высота сегмента H и радиусы роликов r .

13. Для контроля правильной обработки конических участков валов производят измерение диаметральных размеров в нескольких сечениях по длине участка.

Определить диаметр d в сечении на расстоянии λ от наибольшего диаметра конусного участка, если известно, что длина конусного участка l , наибольший диаметр d_1 , наименьший диаметр d_2 (рис. 9).

14. Определить, на сколько глубже погрузится ареометр весом Q (рис. 10) в жидкость с удельным весом γ по сравнению с известной глубиной его погружения в жидкость с удельным весом γ_0 . Площадь сечения цилиндрической части ареометра f . Считать, что в обоих случаях у ареометра погружается и цилиндрическая часть.

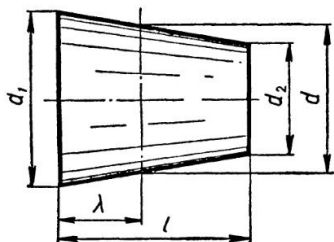


Рис. 9.

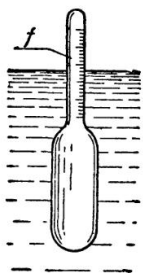


Рис. 10.

Примечание. Ареометром называется прибор для определения удельного веса жидкости по глубине погружения.

15. Определить величину e смещения геометрической оси внутренней поверхности трубы (рис. 11) относительно геометрической оси наружной поверхности трубы (эксцентриситет), если наружный диаметр D , внутренний диаметр d , а наименьшая толщина стенки S_1 .

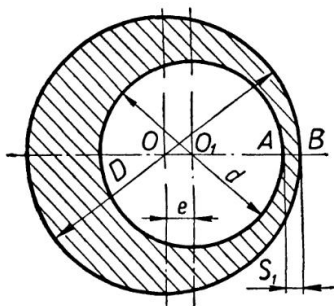


Рис. 11.

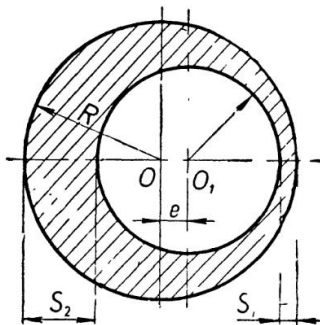


Рис. 12.

16. Определить эксцентриситет трубы e , если известно, что наименьшая толщина стенки S_1 , а наибольшая толщина стенки S_2 (рис. 12).

17. Для измерения больших диаметров в ряде случаев применяется метод опоясывания. Деталь охватывается стальной лентой (рис. 13), к концам которой прикреплены угольники. Длина ленты измеряется заранее и подбирается таким образом, чтобы была несколько меньше длины окружности измеряемой детали.

Определить наименьший возможный зазор между концами ленты, если ее длина L , а наименьший возможный диаметр детали, измеряемой данной лентой, равен D .

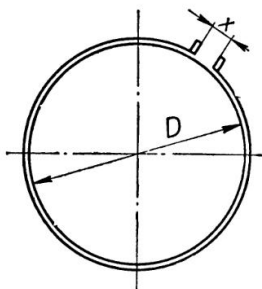


Рис. 13.

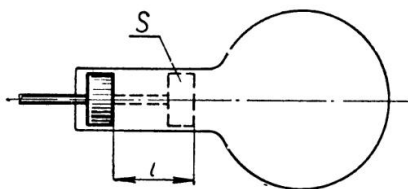


Рис. 14.

18. В сосуде сжимается газ за счет перемещения поршня площадью S (рис. 14).

Определить начальный объем газа в сосуде V_0 , если ход поршня l , степень сжатия газа m , а зависимость между степенью сжатия и объемом газа выражается формулой:

$$m^\alpha = \frac{V_0}{V_k},$$

где V_k — конечный объем газа; α — показатель степени, определяемый опытным путем.

(Степенью сжатия называется отношение давления сжатого газа p_k к начальному давлению p_0 , т. е. $m = \frac{p_k}{p_0}$.)

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

19. Два параллельных вала соединяются между собой при помощи двух зубчатых колес (рис. 15). Требуется сменить шестерни таким образом, чтобы сумма чисел их зубьев осталась неизменной и равной Z_c , а отношение $\frac{n_1}{n_2}$ числа оборотов валов (передаточное отношение) равнялось i .

20. Рассмотрим два цилиндрических зубчатых колеса, находящихся в зацеплении (рис. 16). На этих колесах всегда можно найти две такие окружности, которые при вращении колес как бы катятся одна по другой без скольжения. Окружные скорости на этих окружностях, называемых начальными, у обоих колес одинаковые.

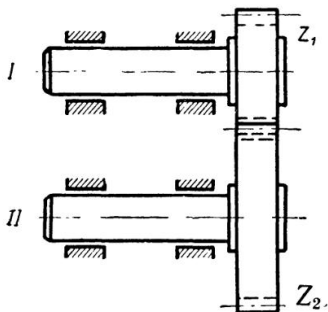


Рис. 15.

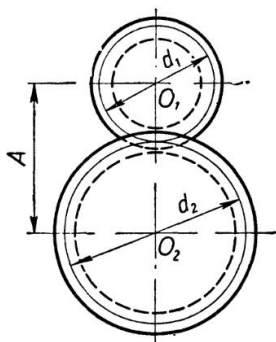


Рис. 16.

Можно доказать, что между числами оборотов зубчатых колес и диаметрами начальных окружностей существует зависимость $n_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot d_2$.

Найти диаметры начальных окружностей двух находящихся в зацеплении зубчатых колес, число зубьев которых равно Z_1 и Z_2 . Межцентровое расстояние у этих колес равно A .

21. Две цилиндрические винтовые пружины (рис. 17) различных диаметров и одинаковой высоты вставлены одна в другую и сжимаются силой P кг.

Определить, какая часть силы P действует на внутреннюю пружину и какая часть силы P действует на внешнюю пружину, если жесткость первой из них $C_1 \frac{\text{кг}}{\text{см}}$, а жесткость второй $C_2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

(Жесткостью пружины C называется та сила, которая укорачивает пружину на 1 см.)

22. Равнобокий уголок с шириной полок $b = 75$ мм и толщиной стенок $t = 8$ мм приварен в узле фермы к косынке двумя боковыми швами.

Определить возможно наименьшую длину этих швов, если растягивающее усилие $N = 15 \text{ т}$ приложено к вертикальной стенке уголка так, как показано на рисунке 18. Допускаемое напряжение на срез швов равно $[\tau_s] = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

23. Стержень длиной $L = 2000 \text{ мм}$ был сварен по длине из двух различных марок стали: сталь IX18H9T с коэффициентом линейного расширения $\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ и сталь 20 с коэффициентом линейного расширения $\alpha_2 = 12,1 \cdot 10^{-6}$. После сварки стержень проточили по наружной поверхности. В дальнейшем потребовалось определить положение сварного шва, а так как он стал незаметен после проточки, поступили следующим образом.

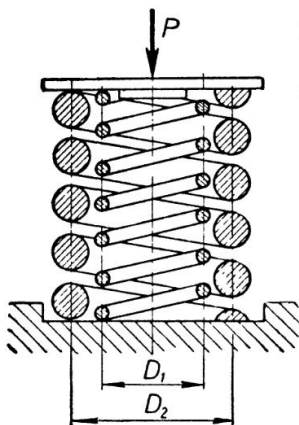


Рис. 17.

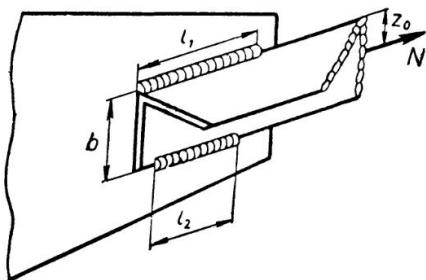


Рис. 18.

Стержень нагрели до температуры $t = 200^\circ \text{С}$ и измерили его температурное удлинение, которое оказалось равным $\Delta L = 0,58 \text{ мм}$. По имеющимся данным необходимо определить длину каждого из участков стержня.

24. Допускаемое окружное усилие P ременной передачи равно разности натяжений S_1 и S_2 ведущей и ведомой ветвей ремня (рис. 19) при рабочем ходе на малой скорости, т. е.

$$P = S_1 - S_2.$$

Предварительное натяжение ремня S_0 в состоянии покоя связано с S_1 и S_2 соотношением:

$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

Определить натяжения ведущей и ведомой ветвей ремня S_1 и S_2 , если $P = 20$ кг и $S_0 = 25$ кг.

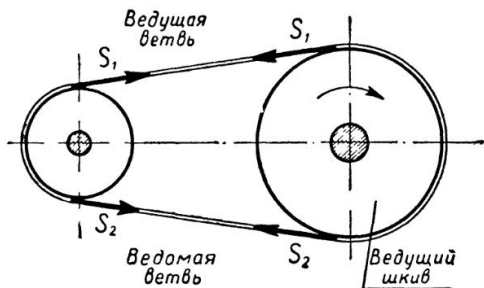


Рис. 19.

25. Коэффициент трения f ременных передач в зависимости от скорости $v \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ скольжения ремня выражается формулой: $f = a + bv$.

Определить постоянные величины (константы) a и b для кожного ремня, если путем опыта были найдены значения коэффициента f :

$f_1 = 0,4$ при скорости скольжения $v_1 = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ и

$f_2 = 0,5$ при скорости скольжения $v_2 = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

26. При расчете двигателей внутреннего сгорания приходится определять состав продуктов сгорания жидкого топлива при различных значениях коэффициента избытка воздуха α , представляющего отношение действительного количества воздуха к теоретически необходимому для полного сгорания.

Определить состав продуктов сгорания 1 кг бензина по весу при $\alpha = 0,9$ (недостаток воздуха). Состав бензина по весу в процентах: углерода C — 83,4, водорода H_2 — 14,2, кислорода O_2 — 0,3; примеси — 0,1.

Примечание При решении задачи иметь в виду, что из-за недостатка воздуха сгорание углерода произойдет в CO_2 и CO ; что теоретически необходимое количество воздуха L_0 определяется по формуле

$$L_0 = \frac{1}{0,23} \left(\frac{8}{3} C + 8H_2 - O_2 \right) \text{ кг}$$

и что для сгорания 1 кг С в СО необходимо $\frac{4}{3}$ кг O_2 , для сгорания 1 кг С в CO_2 необходимо $\frac{8}{3}$ кг O_2 , при сгорании 1 кг С в СО получится $\frac{7}{3}$ кг СО и при сгорании 1 кг С в CO_2 получится $\frac{11}{3}$ кг CO_2 . В формуле для L_0 обозначают: С, H_2 , O_2 — соответственно веса углерода, водорода, кислорода в топливе в килограммах.

27. Два автомобиля движутся со скоростью v_I и v_{II} (рис. 20), причем $v_I > v_{II}$ и первый автомобиль догоняет

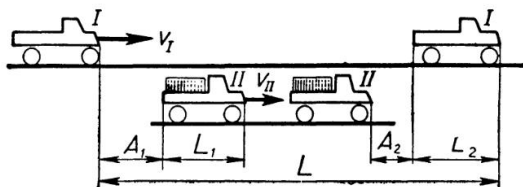


Рис. 20.

второй. На расстоянии A_1 от второго автомобиля шофер первого автомобиля начинает обгон и заканчивает его, обогнав второй автомобиль на расстояние A_2 . Длина первого автомобиля L_2 , второго — L_1 . Определить x — длину участка дороги, просматриваемого шофером первого автомобиля, если она должна быть вдвое больше L пути обгона из условий обеспечения безопасности, так как обгон производится на дороге со встречным движением, и скорость встречного автомобиля может быть не меньше скорости обгоняющего.

28. При испытаниях на дальность самолет пролетел от заводского аэродрома до заранее намеченного пункта S километров, потратив на это t_1 часов; затем он повернул и за время t_2 пришел обратно на заводской аэродром. Во все время полета летчик держал одну и ту же скорость по прибору, а разница во времени объясняется влиянием ветра, который был сначала попутным, а потом встречным ($t_1 < t_2$).

Определить истинную скорость самолета относительно воздушной массы v , скорость ветра v_w и путь, пройденный самолетом относительно воздушной массы, $S_{\text{ист}}$.

29. В закрытом сосуде находятся под давлением жидкость и газ (рис. 21). Измерением определено давление в точке A , равное $p_1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, и в точке B , равное $p_2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Определить давление газа в сосуде, расстояние точки A от поверхности жидкости и расстояние между точками A и B , если ее удельный вес равен $\gamma \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$, и расстояние точки B от поверхности равно h_2 . Для решения взять основное уравнение гидростатики из задачи 4.

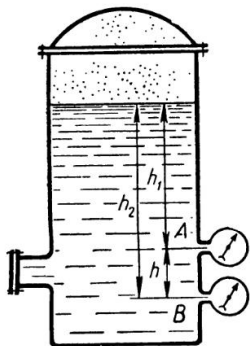


Рис. 21.

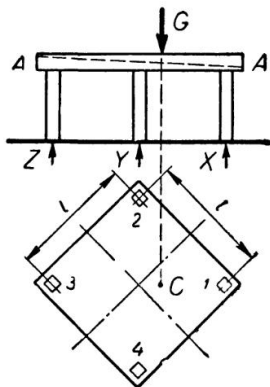


Рис. 22.

30. Определить усилия в ножках проектируемого металлического стола (рис. 22), на который должна укладываться литая деталь весом $G = 300 \text{ кг}$. Расстояние между ножками стола $l = 1 \text{ м}$ и равнодействующая веса детали проходит через точку C на расстоянии $t = 10 \text{ см}$ от средних линий стола.

31. На строительстве гидроэлектростанции потребовалось переместить подъемный кран весом в 25 Т с эстакады на соседнюю с ней монтажную площадку. Для этого был сооружен помост, опирающийся на три параллельно уложенные балки на расстоянии $l = 2 \text{ м}$ друг от друга (рис. 23).

Определить нагрузку на каждую балку от веса крана, если его центр тяжести находился на расстоянии $0,5 \text{ м}$ от средней балки.

32. Пролетное строение железобетонного моста уложено на три опоры так, как показано на рисунке 24.

Определить усилия на опорах от веса моста, если длина моста $l = 20$ м и на каждый метр этой длины приходится 16 т веса моста.

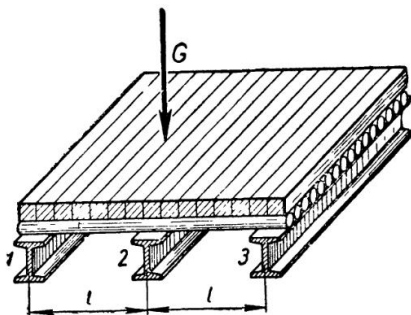


Рис. 23.

33. Жесткий брус AB (рис. 25) подвешен в горизонтальном положении на двух стальных стержнях одинаковой длины: левый конец бруса шарнирно прикреплен к стене. В точке D к брусу приложен груз весом $Q = 5,7$ т.

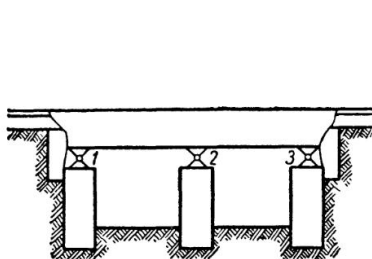


Рис. 24.

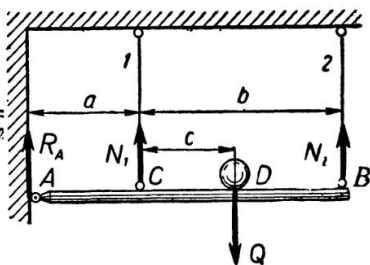


Рис. 25.

Определить усилия в стальных стержнях 1, 2 и в опоре A , если $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 1$ м, податливость первого стержня $k_1 = 0,00005 \frac{\text{см}}{\text{кг}}$, податливость второго стержня $k_2 = 0,000025 \cdot \frac{\text{см}}{\text{кг}}$.

Податливостью называется величина, на которую удлинится стержень (в сантиметрах) под действием силы в 1 кг.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

34. В прямоугольном листе жести со сторонами $a = 600$ мм и $b = 400$ мм требуется вырезать прямоугольное отверстие площадью $S = 1000$ см² так, чтобы его края были на одинаковом расстоянии от краев листа.

Определить с точностью до 1 мм это расстояние.

35. На токарном станке с трехкулачковым самоцентрирующим патроном требуется обточить короткий эксцентричный валик (рис. 26). Величина эксцентриситета (смещения осей цилиндрических участков) $e = 10$ мм. Диаметр участка вала, зажимаемого в кулачках $D = 100$ мм. Угол между кулачками $\alpha = 120^\circ$.

Определить толщину пластины x , которую при этом надо подложить под один из кулачков (рис. 27).

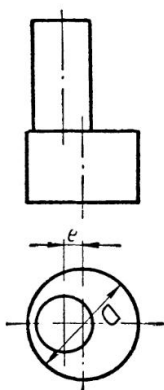


Рис. 26.

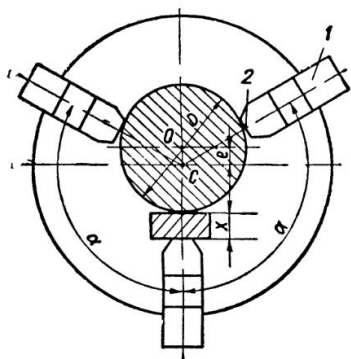


Рис. 27.

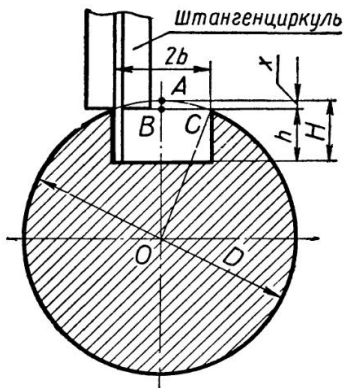


Рис. 28.

36. На цилиндрическом участке вала диаметром D , равным 52 мм, имеется паз шириной b , равной 16 мм. Глубина паза H задана на чертеже (рис. 28). Ее измере-

ние с точностью до $0,1$ мм произвели по боковой поверхности паза. Допустим ли этот способ измерения?

37. На рисунке 29 показано фрезерование плоской поверхности детали торцевой фрезой. На сколько путь, проходимый фрезой, больше длины фрезеруемой прямоугольной поверхности шириной $b = 80$ мм, если диаметр фрезы $D = 100$ мм?

38. Определить высоту радиомачты h (рис. 30), необходимую для уверенного приема телевизионных программ из Москвы в Волгограде. Показать невозможность такого проекта. При решении следует иметь в виду, что ультракороткие волны, на которых ведутся телевизионные передачи, не огибают земной поверхности, поэтому уверенный прием возможен только в зоне прямой видимости, т.е. наблюдатель в Волгограде должен видеть верхушку радиомачты, установленной в Москве. Приблизленно по-

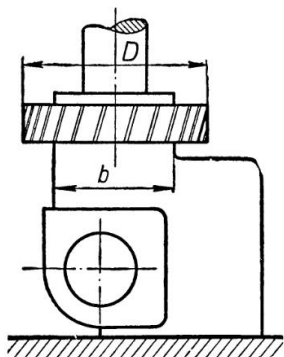


Рис. 29.

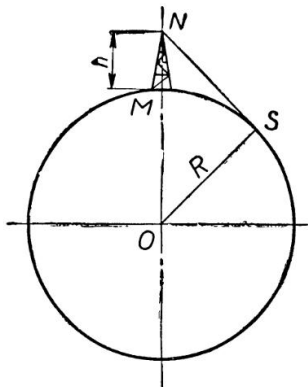


Рис. 30.

лагаем, что расстояние l от верхушки мачты до Волгограда равно расстоянию между Москвой и Волгоградом $l = 880$ км. Радиус Земли $R = 6368$ км.

39. При перевозке длинного груза по железной дороге на поворотах конец груза отклоняется от середины пути. Это отклонение не должно превышать допустимой величины. Определить величину отклонения на закруглении пути радиуса $R = 300$ м, если расстояние между тележками платформы $2b = 9880$ мм. Конец груза выступает от середины платформы на величину $l = 15\,500$ мм.

40. Ножки штангенциркулей, служащие для измере-

ния диаметров отверстий (рис. 31, а), делают скругленными по радиусу меньшему, чем радиус наименьшего из измеряемых отверстий.

Определить, чему равна ошибка измерения диаметра отверстия, если ножки штангенциркуля сделать плоскими, и при измерении был получен размер $a = 15$ мм. Ширина ножек штангенциркуля $b = 6$ мм (рис. 31, б).

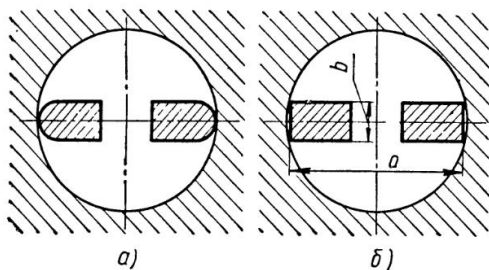


Рис. 31.

41. При расчете выпуклых днищ паровых котлов важным расчетным размером является высота днища h (рис. 32). По нормам расчета элементов паровых котлов на прочность этот размер должен быть не меньше, чем $0,2 \cdot D$. Однако в чертежах обычно задают радиусы r, R и диаметр D .

Определить высоту днища h по размерам, задаваемым на чертежах.

42. Два стержня длиной $l = 300$ мм каждый шарнирно закреплены в точках A и B , лежащих на одной высоте, и связаны шарнирно между собой в точке C , которая расположена на $h = 100$ мм ниже точек A и B . Найти величину вертикального перемещения точки C при нагреве стержней на $t = 120^\circ \text{C}$. Коэффициент линейного расширения материала стержней $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

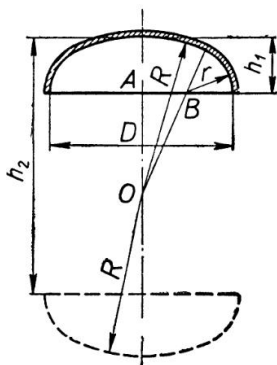


Рис. 32.

43. Определить положение ползуна кривошипно-шатунного механизма (рис. 33), если длина кривошипа r ,

шатуна l и кривошип повернут на угол φ от горизонтального положения.

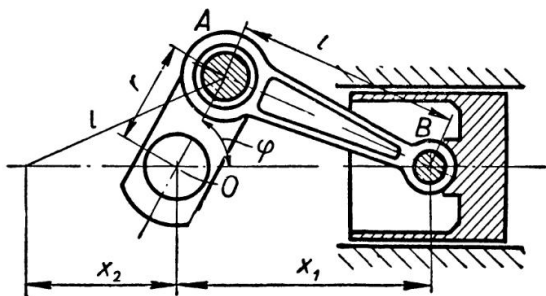


Рис. 33.

44. Поперечное сечение канала имеет форму равнобокой трапеции (рис. 34) с меньшим основанием $a = 2$ м. Боковые стенки канала наклонены к вертикали под углом $\alpha = 30^\circ$. Определить глубину канала h , если для обеспечения требуемой скорости течения воды необходима площадь поперечного сечения $F = 4,5 \text{ м}^2$.

45. Определить толщину стенки стальной трубы с наружным диаметром $d = 140$ мм, идущая на изготовление вышек буровых установок, если известно, что по условиям прочности площадь ее поперечного сечения $F = 25 \text{ см}^2$.

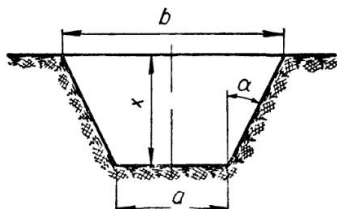


Рис. 34.

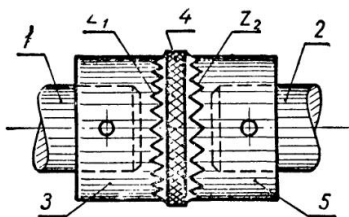


Рис. 35.

46. Среднее расстояние между Землей и Луной $l = 3,84 \cdot 10^5$ км. Масса луны в 81,5 раза меньше массы Земли. На каком расстоянии от центра Земли силы притяжения Земли и Луны равны между собой.

47. В процессе работы механизма требуется производить регулировку углового положения вала 1 относительно вала 2 (рис. 35) с точностью до δ° . Для обеспечения регулировки между валами установлена дифференциальная зубчатая муфта, состоящая из двух полу муфт 3 и 5, имеющих на торцах разное число зубьев и зубчатого промежуточного кольца 4. При регулировке одну из полу муфт сдвигают вдоль оси вала; валы устанавливают в требуемое положение; вращением кольца 4 достигают совпадения зубьев кольца с зубьями полу муфт, после чего полу муфты устанавливают в первоначальное положение и закрепляют на валу.

Определить наименьшее число зубьев обоих полу муфт, при котором обеспечивается заданная точность регулировки, если известна их разность $\Delta Z = Z_1 - Z_2$.

48. В машиностроении широко применяются электросварочные швы с нормальным очертанием (рис. 36). Длина катета шва нормального очертания называется его толщиной и обозначается через K . Длина перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, носит название расчетной толщины шва. Расчетной площадью шва называется произведение его расчетной толщины на длину шва.

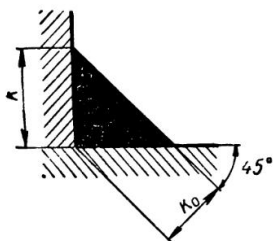


Рис. 36.

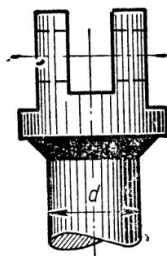


Рис. 37.

Какой толщины надо сделать шов с нормальным очертанием для приварки проушины к трубе, диаметр которой $d = 60 \text{ мм}$, если его расчетная площадь $F = 5,2 \text{ см}^2$ (рис. 37)? При решении задачи принять $\cos 45^\circ \approx 0,7$.

49. При проверке указателя скорости самолета часто применяют так называемый метод петель, который состоит в следующем (рис. 38). Самолет летит вдоль мерной базы

(показано на рисунке жирной линией) по траектории $ABCDE$, выдерживая постоянную скорость по прибору. Первый наблюдатель пускает секундомер в начале прямого

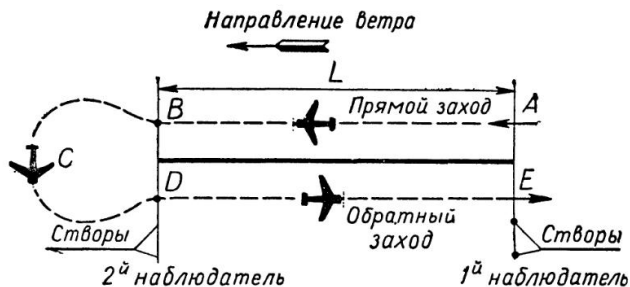


Рис. 38.

захода (точка A) и выключает в конце обратного (точка E), измеряя t_1 — время прохождения большой петли $ABCDE$. Второй наблюдатель точно так же измеряет время t_2 прохождения малой петли BCD . Считая длину мерной базы L и скорость ветра v_v известными (направление ветра показано на рисунке стрелкой), определить скорость самолета относительно воздуха v (воздушную скорость).

50. Поперечное сечение понтона имеет форму равнобочной трапеции (рис. 39). Вес понтона с грузом $Q = 3,8 \text{ Т}$; длина $l = 6 \text{ м}$; ширина днища $a = 1,5 \text{ м}$; угол наклона бортов к вертикали $\alpha = 8^\circ$ и удельный вес воды $\gamma = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

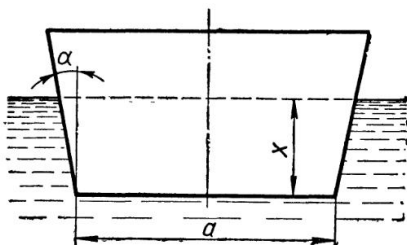


Рис. 39.

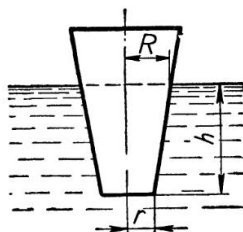


Рис. 40.

Определить глубину погружения понтона в воду, если считать, что его сечение постоянно по всей длине.

51. Поплавок в виде усеченного конуса (рис. 40) весом

Q должен погрузиться в жидкость с удельным весом γ на глубину h . Радиус основания поплавка, погруженного в жидкость r .

Определить радиус поперечного сечения поплавка на уровне поверхности жидкости.

52. На рисунке 41 схематично показан фрикционный молот с доской. Доска (1) у этого вида молотов расположена вертикально между двумя роликами. При работе молота ролики (2) вращаются в разные стороны и производят подъем бабы (3), скрепленной с доской. После достижения требуемой высоты подъема ролики выключаются и под действием собственного веса баба падает вниз, производя удар.

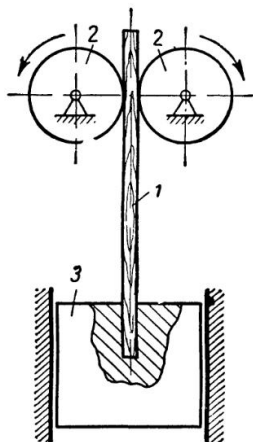


Рис. 41.

Подъем бабы распадается на три периода: разгон, установив-

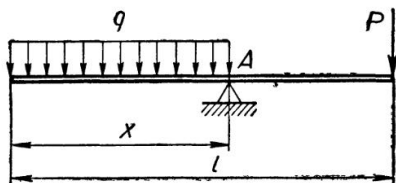


Рис. 42.

шееся движение с постоянной скоростью и замедленное движение в конце подъема.

Определить скорость установившегося движения, при которой подъем бабы на высоту $H = 1400 \text{ мм}$ происходит за время $T = 0,9 \text{ сек}$, если ускорение при разгоне $a_1 = 9 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ и замедление $a_2 = 10 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$.

53. Сечение стержня представляет квадрат со стороной a . Определить высоту x прямоугольного ребра, шириной b из того же материала, которое необходимо приварить, чтобы переместить центр тяжести на величину s .

54. Валик выполнен в виде ступенчатого цилиндра с диаметрами D и d . Длина толстой части валика l . Какой длины должна быть тонкая часть, для того чтобы центр тяжести отстоял на расстоянии s от середины толстой части.

Угол γ определяет направление скорости, а Θ_c — начальное положение стебля.

58. Ремни клиноременных передач изготавливаются определенной длины.

Определить расстояние между центрами шкивов клиноременной передачи (рис. 45), если длина ремня L , а диаметры шкивов d_1 и d_2 .

В подавляющем большинстве случаев угол наклона ветвей ремня к прямой, проходящей через центры шкивов, φ достаточно мал, поэтому можно положить синус этого угла, равным величине этого угла в радианах $\sin \varphi \approx \varphi$, а косинус

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

59. Груз весом Q , падая с высоты h (рис. 46), ударяет по упору, закрепленному на конце стержня AB . Длина стержня l ; площадь поперечного сечения F и мо-

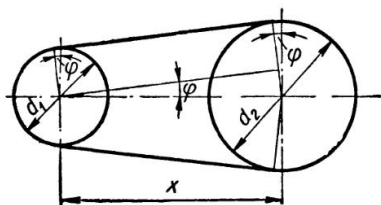


Рис. 45.

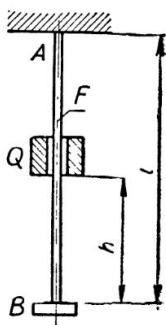


Рис. 46.

дуль упругости материала E . Найти наибольшее напряжение в стержне при ударе σ , считая, что вся энергия падающего груза обращается в потенциальную энергию растяжения стержня.

При решении весом стержня по сравнению с весом груза пренебречь; груз считать абсолютно жестким. Потенциальная энергия растяжения стержня:

$$\Pi_p = \frac{\sigma^2 F l}{2E};$$

величина растяжения при ударе: $\Delta l = \frac{\sigma l}{E}.$

60. На середину деревянного бруса, лежащего на двух опорах (рис. 47), падает груз весом $Q = 20 \text{ кг}$ с высоты $h = 0,5 \text{ м}$. Жесткость бруса $c = 500 \frac{\text{кг}}{\text{см}}$. Определить величину сосредоточенной силы P , статически приложенной посередине бруса, которая вызывает такой же прогиб, что и падающий груз.

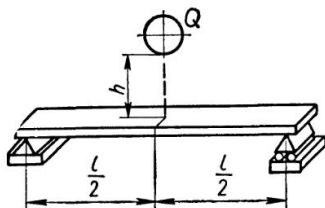


Рис. 47.

У к а з а н и е. При решении задачи принять, что потенциальная энергия, накопленная в брус при его изгибе:

$$P_{\text{и}} = \frac{P^2}{2c}.$$

Массой бруса по сравнению с массой стержня пренебречь. Груз считать абсолютно жестким.

61. При пахоте отваленные пласты почвы (рис. 48, а) должны занимать устойчивое положение. Положение отвал-

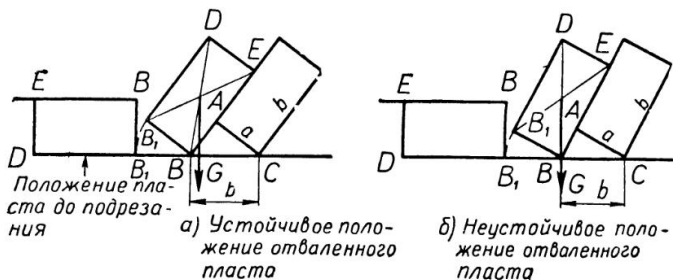


Рис. 48.

ленного пласта называется устойчивым, когда его диагональ BD будет наклонена в сторону от борозды. Если диагональ отваленного пласта станет вертикально (рис. 48, б) или будет наклонена в сторону борозды, то такое поло-

жение называется неустойчивым, так как пласт может завалиться в борозду. Найти соотношение между шириной пласта b и глубиной пахоты a , при котором отваленные пласты занимают устойчивое положение.

62. По трубопроводу A (рис. 49) протекает $q = 25$ литров воды в секунду. Трубопровод B имеет длину $L_1 = 30$ м; диаметр $d_1 = 50$ мм. и коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda_1 = 0,04$. Для трубопровода C соответственно $L_2 = 50$ м; $d_2 = 100$ мм и $\lambda_2 = 0,03$. Потеря напора в трубопроводе определяется формулой: $h = 0,083 \lambda L \frac{q^2}{d^5}$.

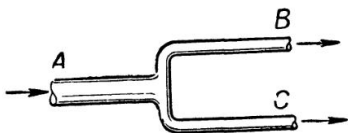


Рис. 49.

Определить количество воды, протекающей в каждом из параллельных трубопроводов B и C в единицу времени. В параллельных трубопроводах потери напора h одинаковы.

63. При переходе электрической линии через реку (рис. 50) высота точки подвеса A проводов на левой опоре $h_1 = 15$ м; расстояние между опорами $l = 200$ м, провисание провода по отношению к левой опоре $f = 5$ м и горизонтальная составляющая натяжения провода (определяемая из условий прочности) $H = 1000$ кг. Вес одного метра провода $q = 2$ кг/м. Определить необходимую высоту точки подвеса B на правой опоре.

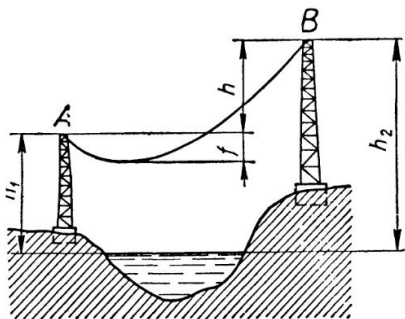


Рис. 50.

У к а з а н и е. При решении задачи воспользоваться применяемой в инженерной практике формулой:

$$f = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} - \frac{h}{2}, \text{ где } h \text{ — разность высот точек подвеса.}$$

64. Звук удара камня о дно шахты доходит до наблюдателя, находящегося на поверхности, через t секунд от момента бросания.

Определить глубину шахты H и время падения камня τ , если v — скорость звука и g — ускорение силы тяжести. Камень был брошен без начальной скорости. Сопротивлением воздуха его движению пренебречь.

65. Выполняя затяжной прыжок, парашютист покинул самолет на высоте $H = 5000$ м и через $t_0 = 5$ мин приземлился в заданном районе. Средняя скорость снижения на парашюте $v = 7 \frac{\text{м}}{\text{сек.}}$. Ускорение силы тяжести

$g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$. Определить время t_1 снижения без парашюта и время t_2 снижения с парашютом. Сопротивлением воздуха на участке снижения без парашюта пренебречь.

66. Деталь состоит из двух соосных цилиндров, диаметры которых $D = 180$ мм и $d = 100$ мм (рис. 51). Вес

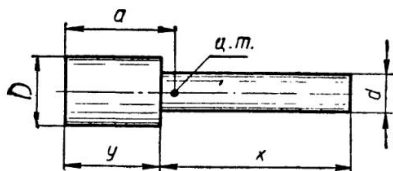


Рис. 51.

детали $P = 85$ кг; расстояние от торца цилиндрического участка диаметром D до центра тяжести $a = 280$ мм;

удельный вес материала детали $\gamma = 7,85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Определить длины цилиндрических участков.

ПРОГРЕССИИ

67. На барабан лебедки (рис. 52) навито n слоев каната. Диаметр барабана — D , диаметр каната — d , по длине барабана помещается m витков. Вывести формулу для определения длины каната, навитого на барабан. Величиной смятия каната пренебречь.

68 При проектировании ферменной консоли¹ (рис. 53) ее вылет l был разделен на n равных частей для установки $n-1$ стоек. Для того чтобы определить вес фермы,

¹ Часть конструкции, выступающая за опору (например, балкон).

конструктору необходимо знать сумму длин ее элементов. Найти формулу для определения общей длины стоек фермы, если размер BC равен h . Воспользовавшись этой формулой, определить общую длину стоек, если $h = 1$ м и $n = 5$.

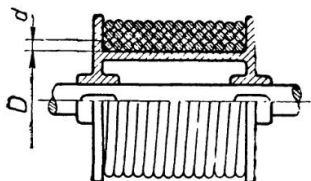


Рис. 52.

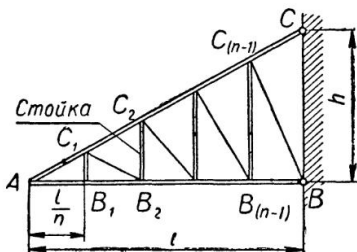


Рис. 53.

69. Одноцилиндровый поршневой компрессор* приводится в движение со скоростью $n = 150$ об/мин (рис. 54). За время каждого оборота компрессор нагнетает $\Delta V = 0,5$ дм³ воздуха в ресивер**, имеющий объем $V_p = 100$ дм³. Определить время, необходимое для доведения давления в ре-

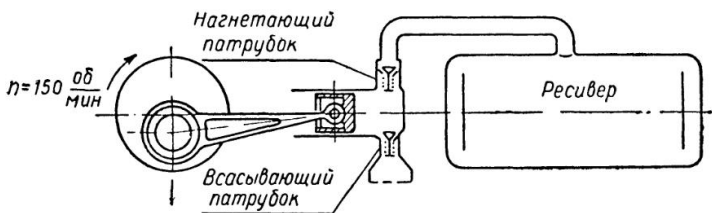


Рис. 54.

сивере до $p = 4$ атм, полагая что воздух не нагревается. Первоначальное давление в ресивере равно атмосферному.

70. Найти работу, необходимую для подъема тяжелой цепи до вертикального положения. Вес всей цепи — Q , длина цепи — L (рис. 55).

* Машина для сжатия и перемещения газов.

** Промежуточный резервуар для сглаживания пульсации давления.

71. Известно, что период полураспада радиоактивного газа радона равен $T = 3,825$ суток. Определить, какое количество радона осталось в запаянной ампуле через $t = 38,25$ суток, если его первоначальное количество $N_0 = 0,5$ кг.

72. В грузоподъемных устройствах для выигрыша в силе часто используются полиспасты, т. е. системы подвижных и неподвижных

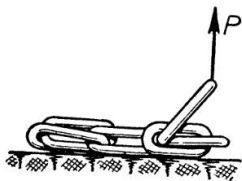


Рис. 55.

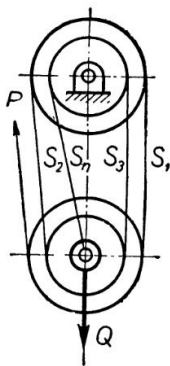


Рис. 56.

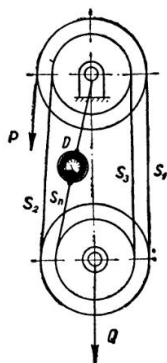


Рис. 57.

блоков, группируемых в обоймах и огибаемых канатом или цепью.

Определить усилие в ходовом конце каната P полиспаста, представленного на рисунке 56. Полиспаст нагружен силой Q , число ветвей (без ходового конца каната) — n , коэффициент сопротивления блока — k . Следует иметь в виду, что коэффициент сопротивления блока k есть величина, обратная коэффициенту полезного действия блока $k = \frac{1}{\eta}$.

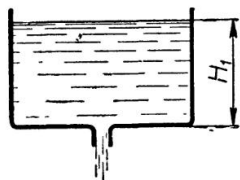


Рис. 58.

73. Динамометр D поставлен у закрепленного («мертвого») конца полиспаста (рис. 57). Число ветвей полиспаста (без ходового конца) — $n = 4$. Динамометр показывает усилие $S_n = 243$ кг.

Определить величину поднимаемого груза Q и натяжение ходового конца P , если коэффициент сопротивления блока — $k = 1,02$.

74. Из бака, наполненного до уровня H_1 (рис. 58), через небольшое отверстие в днище вытекает мазут. За-

висимость между секундными расходом q и напором H (высотой свободной поверхности жидкости над уровнем отверстия) может быть выражена линейной функцией $q = AH$, где A —коэффициент пропорциональности, зависящий от рода жидкости и диаметра отверстия.

Вывести формулу для общего расхода мазута через t секунд, если площадь свободной поверхности жидкости в баке равна F . Полагаем приближенно, что величина напора в течение каждой секунды остается неизменной.

ЛОГАРИФМЫ

75. 1 кг воздуха расширяется при постоянной температуре в 100°C , причем его объем увеличивается в 5 раз.

Определить работу расширения, используя для этого формулу теплотехники:

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где A —работа расширения; R —некоторая постоянная величина, зависящая от молекулярного веса газа и для воздуха, равная $29,27 \frac{\text{кгм}}{\text{кг град}}$; T —абсолютная температура газа;

V_1 —объем газа до расширения (сжатия); V_2 —объем газа после расширения (сжатия).

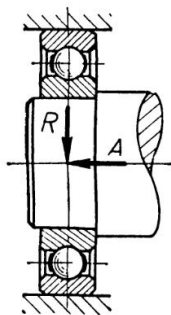


Рис. 59.

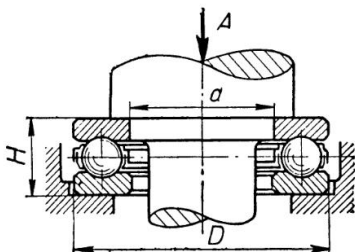


Рис. 60.

76. Выбор радиального шарикоподшипника (рис. 59), работающего при нормальной температуре, со спокойной

нагрузкой и с вращающимся внутренним кольцом*, производится по формуле:

$$C = (R + mA) (nh)^{0.3},$$

где C — коэффициент работоспособности, определяется из таблиц подшипников в зависимости от типа и номера выбранного подшипника; R — радиальная нагрузка в кг; A — осевая нагрузка в кг; m — коэффициент приведения осевой нагрузки в радиальную, определяется из специальных таблиц в зависимости от типа и размеров подшипника; n — число оборотов, $\frac{\text{об}}{\text{мин}}$; h — долговечность подшипника в часах.

Пусть на подшипник 321 средней серии с коэффициентом работоспособности $C = 210\,000$ действует радиальная нагрузка $R = 700$ кг и осевая $A = 100$ кг, $m = 1,5$. Вал вращается со скоростью $n = 5000 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$.

Определить долговечность подшипника.

77 Выбор упорного шарикоподшипника (рис. 60), работающего при нормальной температуре и со спокойной нагрузкой, производится по следующей формуле: $C = A(nh)^{0.3}$ (обозначения входящих в формулу величин см. в условиях предыдущей задачи). Выбрать подшипник, если $A = 1000$ кг; $n = 700 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$ и $h = 10\,000$ часов.

Указание. Для подбора подшипника воспользоваться приведенной ниже выдержкой из таблицы упорных шарикоподшипников.

Условное обозначение подшипника	Габариты подшипника			Коэфф работоспособности C	Допускаемая статическая нагрузка кг	Вс подшипника кг
	d мм	D мм	H мм			
8215	75	110	27	92 000	12 000	0,86
8216+	80	115	28	96 000	12 600	0,95
8217	85	125	31	116 000	16 800	1,25
8218+	90	135	35	140 000	19 500	1,77
8220	100	150	38	170 000	23 500	2,4

78 При обработке углеродистой стали на токарных и револьверных станках экономическая скорость резания определяется по формуле:

* Повышенная температура, беспокойная нагрузка с ударами и вращение наружного кольца учитываются специальными коэффициентами, снижающими долговечность подшипника.

$$v_{\text{ЭК}} = \frac{55,6}{t^{0,26} S^{0,66}} \frac{\text{м}}{\text{мин}},$$

где $v_{\text{ЭК}}$ — скорость резания, соответствующая наивыгоднейшей стойкости резца (т. е. времени его работы между двумя переточками), условно принятой равной 60 мин; t — глубина резания в мм; S — подача* в $\frac{\text{мм}}{\text{об}}$ (миллиметров на оборот).

Вычислить $v_{\text{ЭК}}$, если $t = 1,5 \text{ мм}$, а $S = 0,3 \frac{\text{мм}}{\text{об}}$.

79. Определить экономическую скорость резания при обработке серого чугуна на токарном станке, если глубина резания $t = 2 \text{ мм}$, а подача $S = 0,4 \frac{\text{мм}}{\text{об}}$. Формула для определения экономической скорости в этом случае:

$$v_{\text{ЭК}} = \frac{32,6}{t^{0,16} S^{0,38}} \frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

80. Определить максимальную подачу, допускаемую токарным станком по следующей формуле:

$$S_{\text{max}} = \left(\frac{2000 M}{C_p t^{x_p} D} \right)^{\frac{1}{y_p}} \frac{\text{мм}}{\text{об}},$$

где $M = 30 \text{ кгм}$ — крутящий момент станка; $t = 5 \text{ мм}$ — глубина резания; $D = 50 \text{ мм}$ — диаметр обрабатываемой детали;

$\left. \begin{array}{l} C_p = 157, \\ x_p = 1, \\ y_p = 0,78, \end{array} \right\}$ коэффициенты, характеризующие обрабатываемый металл, в данном случае сталь 20.

81. Известно, что усилие резания на токарном станке может быть найдено по формуле:

$$P_z = C_p t^{x_p} S^{y_p} \text{ кг},$$

где P_z — вертикальное усилие, действующее на резец в кг; t — глубина резания в мм; S — подача в $\frac{\text{мм}}{\text{об}}$; C_p, x_p, y_p — коэффициенты, характеризующие обрабатываемый металл.

Для конструкционной стали марки 35 были произведены измерения P_z при различных значениях глубины реза-

* *Подача* — величина относительного перемещения инструмента и обрабатываемой им на станке заготовки.

ния и подачи. Пользуясь результатами этого эксперимента представленными в таблице, определить величину C_p , x_p и y_p .

t мм	S мм/об	P_z кг
2	0,2	97,5
3	0,3	200
5	0,4	419

82. Количество теплоты, передаваемой в час на участке трубы (рис. 61) длиной L , рассчитывается по формуле:

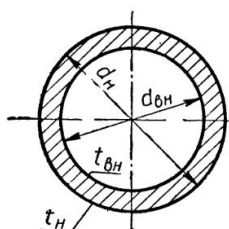


Рис. 61.

$$Q = \frac{2\pi\lambda L(t_{\text{вн}} - t_{\text{н}})}{2,301g \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{вн}}}} \frac{\text{ккал}}{\text{час}},$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала трубы; $t_{\text{вн}}$ — температура внутренней стенки трубы; $t_{\text{н}}$ — температура наружной стенки трубы; $d_{\text{вн}}$ — внутренний диаметр трубы, $d_{\text{н}}$ — наружный диаметр трубы.

Определить количество теплоты, передаваемое трубой длиной $L = 5$ м с внутренним диаметром $d_{\text{вн}} = 20$ мм, наружным $d_{\text{н}} = 25$ мм, изготовленной из стали с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 49 \frac{\text{ккал}}{\text{час} \cdot \text{м} \cdot \text{град}}$, если внутри трубы протекает нагретая вода; температура внутренней стенки $t_{\text{вн}} = 70^\circ\text{C}$, а температура наружной стенки $t_{\text{н}} = 68^\circ\text{C}$.

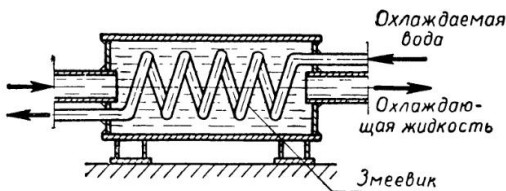


Рис. 62.

83. Пользуясь формулой из предыдущей задачи, найти толщину стенки трубы (змеевика) теплообменника (рис. 62).

Внутри змеевика движется нагретая вода; температура внутренней стенки $t_{\text{вн}} = 100^\circ\text{C}$, температура наружной стенки $t_{\text{н}} = 95^\circ\text{C}$. Змеевик должен быть изготовлен из латуни, коэффициент теплопроводности которой $\lambda = 100 \frac{\text{ккал}}{\text{час} \cdot \text{м} \cdot \text{град}}$, длина змеевика $L = 4 \text{ м}$, наружный диаметр $d_{\text{н}} = 10 \text{ мм}$.

Проектная мощность теплообменника (количество передаваемой в час теплоты) $Q = 40\,000 \frac{\text{ккал}}{\text{час}}$.

84. Тяга и мощность воздушного винта самолета определяются по формулам: $P = \alpha \rho n_s^2 D^4 \text{ кг}$; $N = \beta \rho n_s^3 D^5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}}$, где α — коэффициент тяги; β — коэффициент мощности; n_s — секундные обороты винта, $\frac{\text{об}}{\text{сек}}$; D — диаметр винта, м; ρ — плотность воздуха, $\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$.

Вычислить тягу и мощность винта, если $\alpha = 0,18$; $n_s = 25 \text{ об/сек}$; $\beta = 0,28$; $D = 2,1 \text{ м}$; $\rho = 0,125 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$ (у поверхности Земли).

85. Определить вязкость ν машинного масла при 20° Цельсия, пользуясь формулой: $\lg \lg (\nu + 0,8) = A - B \lg T$, где T — абсолютная температура. Коэффициенты A и B принять равными: $A = 25,44$; $B = 10,39$.

НЕРАВЕНСТВА

Разрушение детали наступает в тот момент, когда сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения (напряжение), достигает определенной величины. Для того чтобы при работе не произошла поломка детали, фактические напряжения, возникшие при работе, не должны превышать некоторого значения, допускаемого по условиям работы.

Это напряжение называется допускаемым и обозначается $[\sigma]$, в то время, как действующие напряжения обозначаются просто буквой греческого алфавита σ (сигма).

86. Требование прочности для растянутого стержня (рис. 63)

$$\frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

где N — растягивающая стержень сила; F — площадь поперечного сечения стержня.

Определить, какому требованию должен удовлетворять диаметр d стержня круглого сечения, если он изготовлен из стали Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$

и растянут силой $N = 4000 \text{ кг}$.

87. Наиболее напряженным сечением в консольной балке (рис. 64) является сечение заделки $A=A$, в котором появляется остаточная деформация, если напряжение превысит предел текучести материала балки. Напряжение в сечении AA в случае силы, приложенной на конце, определяется по формуле:

$\sigma = \frac{Pl}{W}$, где σ — максимальное напряжение изгиба; P — сила, изгибающая балку; l — длина консоли; W — момент сопротивления балки; для прокатных профилей, таких, как

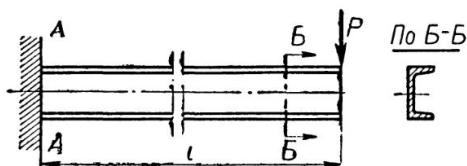


Рис. 64.

швеллеры, двутавры и уголки, дается в специальных таблицах и ГОСТах.

Требование прочности:

$$\sigma = \frac{Pl}{W} \leq [\sigma].$$

Определить, какому требованию должна удовлетворять приложенная на конце балки сила P , если $l = 150 \text{ см}$ и балка изготовлена из швеллера $N14a$, момент сопротивления которого $W = 80,5 \text{ см}^3$. Материал балки — сталь Ст. 3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

88. Определить, какую эксцентричную нагрузку P можно приложить к прямому стержню, площадь сечения которого

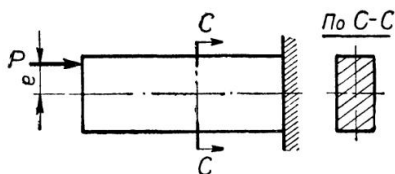


Рис. 65.

го F , момент сопротивления сечения изгибу W , эксцентриситет приложения нагрузки e (рис. 65), если допустимые напряжения в стержне $[\sigma]$, напряжения от изгиба $\sigma_{из} = \frac{Pe}{W}$, напряжения от сжатия стержня $\sigma_{сж} = \frac{P}{F}$.

89. При расчете устойчивости подъемного крана (рис 66.) определяют так называемый коэффициент ста-

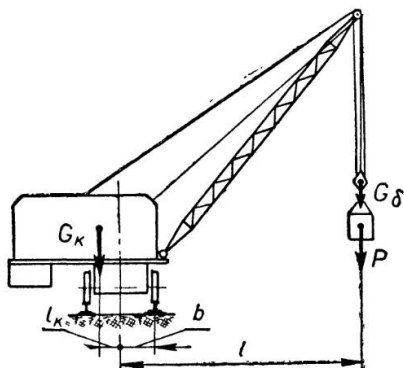


Рис. 66.

тической устойчивости, как отношение восстанавливающего момента:

$$M_{восст} = G_k(l_k + b) - G_\delta(l - b),$$

где G_k — вес крана; G_δ — вес блочной обоймы с крюком; l_k — расстояние от центра тяжести крана до оси его поворота; l — расстояние от центра тяжести груза до оси по-

ворота крана; b — половина ширины колеи рельсового пути к опрокидывающему моменту:

$$M_{\text{опр}} = P(l - b),$$

где P — грузоподъемность крана.

По правилам Госгортехнадзора коэффициент статической устойчивости должен быть не менее 1,4.

$$\kappa = \frac{M_{\text{восст}}}{M_{\text{опр}}} = \frac{G_{\text{к}}(l_{\text{к}} + b) - G_{\text{д}}(l - b)}{P(l - b)} \geq 1,4.$$

Полагая все параметры крана заданными, определить пределы его грузоподъемности.

90. Определить требование, которому должно удовлетворять сечение медных проводов воздушной линии электропередачи, если потеря напряжения в них не должна превышать 5%. Потеря напряжения находится по формуле:

$$\Delta U\% = \frac{Sl}{U^2} \left(\frac{a}{s} + b \right),$$

где $U = 0,220$ — напряжение; $S = 0,01$ — нагрузка; $l = 0,5$ — длина линии; s — сечение проводов в мм^2 ; $a = 1430$ — для медных проводов; $b = 24$ — для воздушных линий.

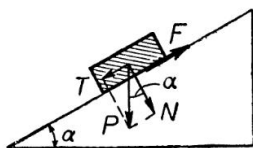


Рис. 67.

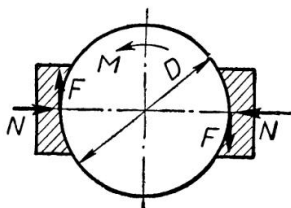


Рис. 68.

91. Тяжелое тело весом P находится на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 67.) Коэффициент трения между данным телом и плоскостью — f .

При каких значениях угла α данное тело будет: а) двигаться по плоскости вниз и б) находиться в равновесии?

92. В двухколодочном тормозе (рис. 68) колодки прижимаются к барабану равными силами N посредством системы рычагов, которая на нашей схеме не показана. Расчетный тормозной момент $M_{\text{т}}$ должен быть в β раз больше крутящего момента на валу M , подлежащего погашению: $M_{\text{т}} \geq \beta M$, где $\beta = 1,75$ — коэффициент запаса торможения.

Определить усилие N , если $M = 3000 \text{ кгсм}$, диаметр тормозного барабана $D = 50 \text{ см}$, а коэффициент трения между чугуновой колодкой и стальным барабаном $f = 0,15$.

93. Известно, что вертолет (рис. 69) может подниматься и опускаться вертикально, а также неподвижно висеть в воздухе. При этом сила тяги несущего винта вертолета $P = \alpha \rho n_s^2 D^4$, где α — безразмерный коэффициент тяги, зависящий от шага винта; ρ — плотность воздуха; n_s — число оборотов винта в секунду; D — диаметр винта.

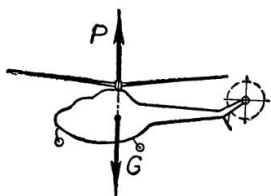


Рис. 69.

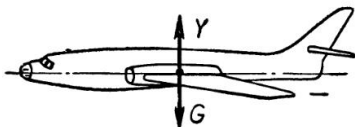


Рис. 70.

При каком значении секундных оборотов n_s вертолет весом G будет: а) подниматься, б) неподвижно висеть в воздухе и в) опускаться?

Шаг винта полагаем постоянным, следовательно, и $\alpha = \text{const}$.

94. Подъемная сила крыла самолета вычисляется по формуле:

$$Y = C_y S \rho \frac{v^2}{2},$$

где C_y — коэффициент подъемной силы, зависящий от угла атаки крыла; S — площадь крыла; ρ — плотность воздуха; v — скорость самолета.

Полагая угол атаки крыла постоянным, определить скорость, при которой самолет весом G (рис. 70) будет лететь на режиме: а) набора высоты, б) горизонтального полета и в) снижения.

БИНОМ НЬЮТОНА

95. Пользуясь формулами задачи 62, определить, во сколько раз изменится потеря напора в трубе при увеличении ее диаметра на 5 мм, считая все остальные величины в формуле неизменными.

96. Усилие в ходовом конце каната полиспаста (рис. 57):

$$P = \frac{k^n(k-1)}{k^n-1}Q,$$

где Q — вес поднимаемого груза; $k = 1,02$ — коэффициент сопротивления блока; n — число ветвей полиспаста. Вывести упрощенную формулу для вычисления P и, применив ее, определить P , если $Q = 1500$ кг и $n = 5$.

97. Газ сжимается в сосуде, стенки которого хорошо проводят тепло. При этом абсолютная температура и давление газа связаны следующим уравнением:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}},$$

где $n = 1,2$ — показатель политропы; p_1 и p_2 — соответственно давления первого и второго состояния; T_1 и T_2 — соответственно абсолютные температуры первого и второго состояния.

Температура в сосуде измеряется посредством помещенной в нем термпары. Пусть во втором состоянии при сжатии температура получила небольшое приращение $\Delta t = 5^\circ$ против первого состояния. Определить, какое приращение получило при этом давление. Температура $T_1 = 300^\circ$ и давление $p_1 = 2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ первого состояния известны.

98. Тяга воздушного винта и потребляемая им мощность вычисляются по формулам: $P = \alpha \rho n_s^3 D^4$; $N = \beta \rho n_s^3 D^5$, где D — диаметр винта; n_s — число оборотов винта в секунду; ρ — плотность воздуха; α и β — коэффициенты, зависящие от конструкции винта.

При ремонте винта (рис. 71) для удаления с его концов царапин и зазубрин пришлось уменьшить его диаметр на величину ΔD , которая значительно меньше диаметра D .

Определить, на сколько снизилась тяга этого винта и потребляемая им мощность при тех же секундных оборотах, если полагать все остальные параметры, входящие в формулы, неизменными.

99. Известно, что T_1 — долговечность вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью, при приложении к нему поперечной нагрузки (рис. 72), равной Q_1 .

Определить, на сколько уменьшится долговечность вала, если нагрузка увеличится на ΔQ . Зависимость между нагрузкой и долговечностью устанавливается формулой:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^9,$$

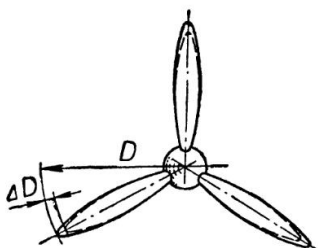


Рис. 71.

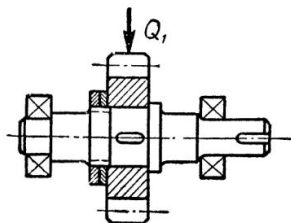


Рис. 72.

где Q_2 и T_2 — нагрузка, отличающаяся от Q_1 и соответствующая ей долговечность.

ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

100. Прочность бруса прямоугольного сечения при работе его на изгиб прямо пропорциональна ширине и кубу высоты. Найти ширину бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром $D = 30$ см. (рис. 73.).

101. Вращающий момент, получаемый пароходом от поворота руля на угол φ , может быть выражен формулой $M = a \sin^2 \varphi \cos \varphi$. При каком угле поворота получается максимальный момент?

102. Из решения задачи 65 имеем общее время снижения парашютиста: $t_0 = t_1 + t_2$,

где t_1 — время снижения без парашюта; $t_2 = \frac{H}{v_2} - \frac{gt_1^2}{2v_2}$ —

время снижения с парашютом; H — общая высота;

$v_2 = 7 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ — средняя скорость снижения на парашюте;

$g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ — ускорение силы тяжести.

Определить, через сколько времени после прыжка парашютист должен открыть парашют, чтобы возможно дольше продержаться в воздухе.

103. При переходе электрической линии через реку (рис. 50) провисание провода по отношению к левой опоре выражается формулой:

$$f_1 = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} - \frac{h}{2},$$

где $q = 2 \frac{\kappa g}{m}$ — вес одного метра провода; $l = 200$ м — расстояние между опорами; $H = 1000$ кг — горизонтальная составляющая натяжения провода; h — разность высот точек подвеса.

Определить разность высот правой и левой опор h , при которой провисание f_1 будет минимальным.

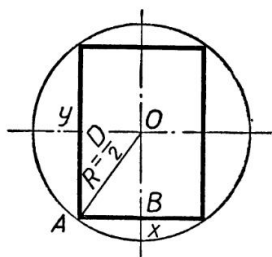


Рис. 73.

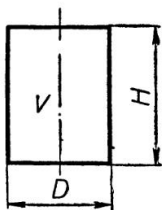


Рис. 74.

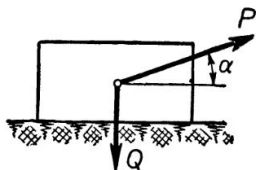


Рис. 75.

104. Объем открытого цилиндрического резервуара для хранения жидкости (рис. 74) равен $V = 10$ м³. Определить диаметр D_m и высоту H_n , при которых его вес будет наименьшим, если толщина стальных листов, идущих на изготовление цилиндрической части и плоского днища, по конструктивным соображениям, принята одинаковой.

105. Отношение площади поперечного сечения трубопровода к его смачиваемому периметру называется гидравлическим радиусом. Чем больше гидравлический радиус, тем меньше потеря напора (давления) по длине трубопровода. Определить стороны прямоугольного сечения трубопровода, при котором потеря напора будет наименьшей, если площадь поперечного сечения его F .

106. Требуется передвинуть груз весом Q по горизонтальной площадке (рис. 75.). Под каким углом α к гори-

зону выгоднее всего приложить сдвигающую силу P , если коэффициент трения между грузом и площадкой равен $f = 0,2$.

107. При расчете поршневого насоса важной величиной является максимальная скорость поршня. Поршень M (рис. 76) приводится в движение посредством кривошипно-

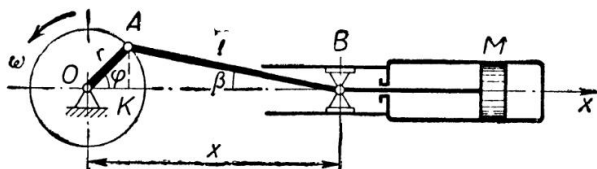


Рис. 76.

шатунного механизма OAB через крейцкопф B и поршневой шток BM . Кривошип OA длиной r вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси O . Определить максимальную скорость поршня, если длина шатуна $AB = l$, а отношение $\frac{r}{l} = \lambda = 0,25$. Угол φ в начальный момент равен нулю.

108. При производстве геологоразведочных и буровых работ из скважин постоянно приходится брать пробы грунта. Натяжение каната T (рис. 77) складывается из веса грунтоноски P и веса каната, опущенного в скважину. Для конструктора, проектирующего лебедку, важно знать максимальный момент на барабане. На первый взгляд кажется, что момент должен быть наибольшим в первое мгновение подъема, когда весь канат смотан с барабана и сила T максимальна. Однако по мере наматывания каната плечо действия силы T относительно оси барабана увеличивается и в результате максимальный момент получаем не в самом начале подъема, а в каком-то промежуточном положении. Определить число слоев каната n на барабане, при котором момент силы T наибольший.

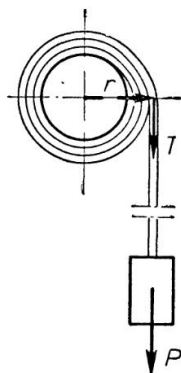


Рис. 77.

Примечание. При решении воспользоваться выведенной в задаче 67 формулой для определения длины n слоев каната, навитого на барабан: $L = \pi m n (D + nd)$. Полагать вес всего каната равным Q , вес единицы длины его q , диаметр барабана D , диаметр каната d , по длине барабана помещается m витков.

109. Прогиб балки, нагруженной сосредоточенной силой P (рис. 78), описывается уравнением:

$$y = \frac{Pb}{Cl} x [2l(l-x) - b^2 - (l-x)^2],$$

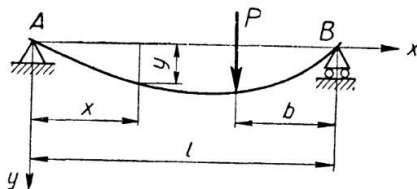


Рис. 78.

где C — постоянная, характеризующая жесткость данной балки. Определить положение и величину максимального прогиба балки.

110. Из прямоугольного листа жести шириной $b = 4$ дм требуется изготовить желоб прямоугольного сечения (рис. 79.) Определить наибольшую площадь поперечного сечения желоба.

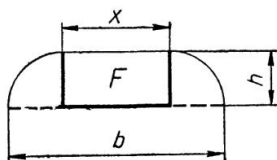


Рис. 79.

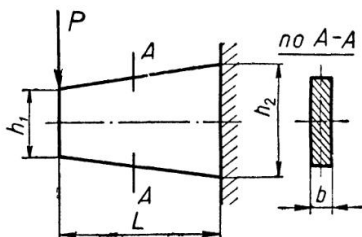


Рис. 80.

111. На рисунке 80 показана консольная балка переменного сечения, нагруженная на конце сосредоточенной силой P . Ширина балки b , наименьшая высота h_1 , наибольшая

шая — h_2 и длина L . Напряжения изгиба в любом поперечном сечении можно найти по формуле:

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2},$$

где M — изгибающий момент, действующий в рассматриваемом сечении; h — высота этого сечения. Сечение, в котором напряжение изгиба наибольшее, называется опасным. Определить положение опасного сечения и величину напряжения в этом сечении.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

1. Незвестную толщину стенки обозначим через x . Тогда $x + l = L$. Подставим в полученное уравнение числа: $x + 25 = 37$. Отсюда находим: $x = 12$ мм.

2. Искомое число секций пульповода обозначим через x . Тогда длина всех секций равна $8x$. Если сюда прибавить длину трубопровода самого земснаряда, то получим все расстояние 350 м, т. е. $8x + 46 = 350$. Отсюда $8x = 304$ и $x = \frac{304}{8} = 38$.

3. Площадь одной шайбы $F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (5^2 - 2,2^2) \approx 15,8$ см². Если площадь листа x , то отход составит $0,35x$. Вычтя из всей площади листа x площадь отхода $0,35x$, получим площадь 25 шайб, равную $15,8 \times 25 = 395$ см². Таким образом, составляем уравнение: $x - 0,35x = 395$. Решаем его и находим: $0,65x = 395$ и $x = 610$ см².

4. В нашем случае $p_0 = 1 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}$, поэтому, подставляя заданные величины в основное уравнение гидростатики, получим: $1,15 = 1 + 150\gamma$.

Отсюда $\gamma = 0,001 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^3}$.

5. Пусть искомое расстояние центра тяжести C от правой опоры A равно x . Если на опору B действует $G_1 = 12$ кГ, то на правую опору A приходится остальная часть веса детали, т. е. $G_2 = G - G_1 = 15$ кГ.

Вес детали между опорами A и B распределяется обратно пропорционально расстоянию точки C от опор, т. е.

$$\frac{G_1}{x} = \frac{G_2}{l-x} \text{ или } \frac{12}{x} = \frac{15}{45-x}.$$

Отсюда $12(45-x) = 15x$ и $x = 20$ см.

6. Вес груза Q прикладывается к рычагу AC в двух точках A и B (рис. 6). Рычаг будет находиться в равновесии, когда $\frac{Q}{2} \cdot a = \frac{Q}{2}(l-a) + P \cdot b$.

Откуда $\frac{Q}{P} = \frac{2b}{2a-l}$.

7. Обозначим искомое число витков через x . Видимо, число зазоров будет на единицу меньше числа витков пружины и потому можно составить уравнение: $5x + 8(x - 1) = 122$.

Его решение дает $x = 10$ витков.

8. Найдем период колебаний отстававших часов:

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{20}{980}} \cong 0,89714 \text{ сек.}$$

Затем определим, каким должен быть период колебаний T_0 при правильном ходе часов. Переведем 12 минут в секунды и разделим на число минут в сутках, т. е. на 1440. Получим, что за одну минуту часы отставали на 0,5 сек.

В 1 минуту совершалось $n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,89714} \approx 66,88$ колебаний. За одно колебание часы отставали на $\Delta t = \frac{0,5}{n} =$

$= \frac{0,5}{66,88} \text{ сек.} \approx 0,00748 \text{ сек.}$ Теперь очевидно, что $T_0 = T - \Delta t = 0,88966 \text{ сек.}$ Обозначим величину, на которую надо укоротить длину маятника, через x . Тогда новая длина маятника будет равна $l_0 = l - x$. Поскольку $T_0 =$

$= 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$, то получаем уравнение:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l-x}{g}}, \text{ или } 0,88966 = 6,28 \sqrt{\frac{20-x}{980}}.$$

Решаем его и находим $x \approx 0,4$ см.

9. Число резов будет на единицу меньше числа досок x . Следовательно, $b_1x + t(x-1) = b$.

Откуда $x = \frac{b+t}{b_1+t} = \frac{236+4}{20+4} = 10$.

10. Рассматриваем формулу $f = \frac{k}{1+0,03v}$ как уравнение, которое решаем относительно v : $0,03v = \frac{k}{f} - 1$ и $v = \frac{k-f}{0,03f} = \frac{0,22-0,15}{0,03 \cdot 0,15} \approx 15,6 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$, или ≈ 56 км в час.

11. Пусть радиус детали $R = \frac{D}{2}$. Из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора следует

$$OA^2 = OB^2 + AB^2,$$

$$\text{или } R^2 = (R-h)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{l^2}{4}.$$

Откуда $2R = h + \frac{l^2}{4h}$. Так как $D = 2R$, то $D = h + \frac{l^2}{4h}$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть непосредственным измерением найдено, что $h = 4$ см и $l = 40$ см. Тогда по выведенной формуле находим диаметр детали:

$$D = 4 + \frac{40^2}{4 \cdot 4} = 104 \text{ см.}$$

Примечание. Задачи 11 и 12 можно решить также, применив теорему о делении гипотенузы прямоугольного треугольника основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла.

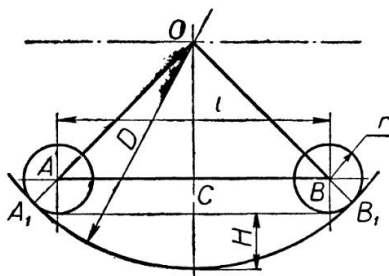


Рис. 81.

12. Из прямоугольного треугольника OCA^* (рис. 81) видно, что

* Смотри примечание к решению задачи 11.

$$\left(\frac{D}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left[\frac{D}{2} - (r + H)\right]^2.$$

Для сокращения вычислений при преобразованиях введем новое неизвестное: $x = \frac{D}{2} - r$.

Тогда будем иметь уравнение:

$$x^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (x - H)^2,$$

или $x^2 = \frac{l^2}{4} + x^2 - 2Hx + H^2.$

Отсюда $x = \frac{l^2 + 4H^2}{8H}.$

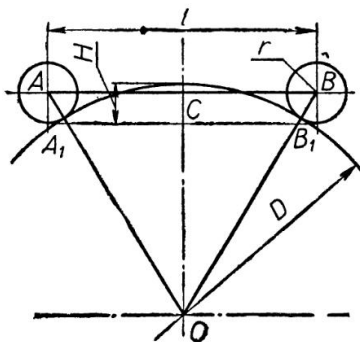


Рис. 82.

Подставим вместо x его значение $\frac{D}{2} - r$ и получим:

$$D = H + \frac{l^2}{4H} + 2r.$$

В случае измерения наружного диаметра (рис. 82) исходное уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{D}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left[\frac{D}{2} - H + r\right]^2.$$

Откуда $D = H + \frac{l^2}{4H} - 2r.$

Как видим, отличие от первого результата состоит только в знаке последнего слагаемого правой части.

13. Из рисунка 9 нетрудно установить, что $\frac{d_1 - d_2}{l} =$
 $= \frac{d_1 - d}{\lambda}.$

Откуда $d = d_1 - \frac{d_1 - d_2}{l} \lambda.$

Например, если известно, что $d_1 = 50 \text{ мм}; d_2 = 30 \text{ мм};$
 $l = 200 \text{ мм}; \lambda = 50 \text{ мм},$ то $d = 50 - \frac{50 - 30}{200} \cdot 50 = 45 \text{ мм}.$

14. На основании закона Архимеда объем части ареометра, погруженной в жидкость с удельным весом γ_0 , равен $\frac{Q}{\gamma_0}$, а объем погруженной в жидкость части с удельным весом γ равен $\frac{Q}{\gamma}.$

Учитывая, что во втором случае объем больше, чем в первом, на величину объема цилиндрической части $f \cdot x$, получаем:

$$\frac{Q}{\gamma} = \frac{Q}{\gamma_0} + f \cdot x.$$

Отсюда $x = \frac{Q}{f} \cdot \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma \gamma_0}.$

15. Непосредственно из рисунка 11 следует, что $OB =$
 $= OO_1 + O_1A + AB.$

Заменяя $OB = \frac{D}{2}, OO_1 = e, O_1A = \frac{d}{2}, AB = S_1,$

получим: $\frac{D}{2} = e + \frac{d}{2} + S_1.$

Откуда $e = \frac{D - d}{2} - S_1.$

16. Пусть R — наружный, а r — внутренний радиусы трубы (рис. 12).

Тогда:

$$R = S_2 + r - e = S_1 + r + e, \text{ или } S_2 - e = S_1 + e.$$

Откуда $e = \frac{S_2 - S_1}{2}.$

17. Наименьшая возможная длина окружности детали

$$L = \pi \cdot D = L + x.$$

Отсюда $x = \pi D - L.$

Примечание Как при определении наименьшего возможного зазора, вычисление которого необходимо для проверки возможности

применения ленты заданной длины, так и при определении диаметра изделия по формуле $D = \frac{L + x}{\pi}$ значение $\pi = 3,14\dots$ может оказаться недостаточно точным и его надо брать с бóльшим числом знаков, например: $\pi = 3,1416\dots$

18. Объем газа в конце сжатия $V_k = V_0 - S \cdot l$, поэтому можно записать, что $m^x = \frac{V_0}{V_0 - S \cdot l}$.

В полученном уравнении неизвестным является начальный объем V_0 , который будет равен:

$$V_0 = \frac{m^x \cdot S \cdot l}{m^x - 1}.$$

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

19. По условию $\frac{n_1}{n_2} = i$. В то же время $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$, поэтому $\frac{z_2}{z_1} = i$ и $z_1 + z_2 = z_c$.

В результате получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{z_2}{z_1} = i, \\ z_1 + z_2 = z_c, \end{cases}$$

совместное решение которых дает $z_1 = \frac{z_c}{i + 1}$ и $z_2 = \frac{iz_c}{i + 1}$.

Нередко получается, что после вычислений числа z_1 и z_2 оказываются дробными. Тогда число зубьев одного из колес округляют до ближайшего целого числа, а число зубьев второго колеса находят из уравнения: $z_1 + z_2 = z_c$. После этого проверяют полученное передаточное отношение. Если отклонение от заданного значения получается допустимым по условию работы механизма, то на этом подбор числа зубьев шестерен заканчивается.

Рассмотрим числовой пример. Пусть $z_c = 64$, $i = 2$.

Число зубьев первой шестерни

$$z_1 = \frac{z_c}{i + 1} = \frac{64}{2 + 1} = 21,33.$$

Принимаем после округления $z_1 = 21$. Тогда число зубьев второй шестерни $z_2 = z_c - z_1 = 64 - 21 = 43$.

Фактическое передаточное отношение $i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{43}{21} = 2,05$

приемлемо.

20. Числа оборотов зубчатых колес связаны с числом их зубьев зависимостью $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$.

Применяя здесь зависимость между диаметрами начальных окружностей и числом оборотов зубчатых колес, получим:

$$z_2 d_1 = z_1 d_2.$$

С другой стороны, $A = \frac{d_1 + d_2}{2}$.

Затем решаем систему уравнений и находим:

$$\begin{cases} z_2 d_1 - z_1 d_2 = 0, \\ d_1 + d_2 = 2A, \end{cases} \quad d_1 = \frac{2A}{1 + \frac{z_2}{z_1}}, \quad d_2 = \frac{2A}{1 + \frac{z_1}{z_2}}.$$

21. Обозначим силу, сжимающую внутреннюю пружину через P_1 , а силу, сжимающую наружную пружину, через P_2 . Но так как в сумме эти силы равны P , то можно записать уравнение: $P_1 + P_2 = P$.

Для нахождения второго уравнения используем то условие, что при сжатии обе пружины укоротятся на одинаковые величины, т. е. $t_1 = t_2$.

Укорочения первой и второй пружин определяются по формулам: $t_1 = \frac{P_1}{C_1}$ и $t_2 = \frac{P_2}{C_2}$.

Так что второе уравнение имеет вид:

$$\frac{P_1}{C_1} = \frac{P_2}{C_2}, \text{ или } C_2 P_1 = C_1 P_2.$$

Решаем совместно систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_1 + P_2 &= P, \\ C_2 P_1 &= C_1 P_2 \end{aligned} \right\}$$

и получаем:

$$P_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} P \text{ кг}, \quad P_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} P \text{ кг}.$$

22. Обозначим длину одного шва через l_1 , а длину другого—через l_2 (рис. 18) и общую длину боковых швов обозначим через l_δ , т. е. $l_\delta = l_1 + l_2$.

Возможно наименьшая длина l_δ найдется из того условия, что наибольшие напряжения в швах $\tau_{\max}$ не превзойдут величины допускаемого напряжения $[\tau_s]$, т. е. $\tau_{\max} \leq [\tau_s]$. Это записано так называемое условие прочности. Так

как наибольшие напряжения на срез для швов в технике определяются формулой $\tau_{\max} = \frac{N}{0,7tl_\delta}$, то условие прочности примет вид: $\frac{N}{0,7tl_\delta} \ll [\tau_s]$.

Отсюда $l_\delta \geq \frac{N}{0,7t[\tau_s]} = \frac{15000}{0,7 \cdot 0,8 \cdot 1000} \approx 26,8 \text{ см.}$

Итак, имеем: $l_1 + l_2 = 26,8 \text{ см.}$

В то же время усилия, приходящиеся на каждый из двух швов, распределяются обратно пропорционально расстояниям их от линии действия силы N , т. е. $\frac{l_1}{l_2} = \frac{b - z_0}{z_0}$.

Величины b и z_0 находятся в специальных таблицах (см., например, Н. М. Беляев, Соппротивление материалов), называемых сортаментом. По сортаменту находим $z_0 = 2,1 \text{ см}$ и $b = 7,5 \text{ см}$.

Таким образом, для нахождения длин l_1 и l_2 имеем два уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 + l_2 = l_\delta; \\ \frac{l_1}{l_2} = \frac{b - z_0}{z_0}, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 + l_2 = 26,8; \\ \frac{l_1}{l_2} \approx 2,57. \end{array} \right\}$$

Решение этой системы дает: $l_1 = 16,4 \text{ см}$ и $l_2 = 10,4 \text{ см}$.

23. Обозначим: x —длина первого участка из стали 1Х18Н9Т; y —длина второго участка из стали 20.

Составим уравнения:

$$\begin{aligned} x + y &= L, \\ \alpha_1 t \cdot x + \alpha_2 \cdot t \cdot y &= \Delta L, \end{aligned}$$

совместное решение которых дает:

$$x = \frac{\frac{\Delta L}{\alpha_2 t} - L}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1} = 100 \text{ мм} \quad \text{и} \quad y = L - x = 100 \text{ мм.}$$

24. Для нахождения величин S_1 и S_2 надо совместно решить уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 - S_2 = 20, \\ S_1 + S_2 = 50. \end{array} \right\}$$

Ответ. $S_1 = 35 \text{ кг}$, $S_2 = 15 \text{ кг}$.

25. Подставляем в формулу $f = a + bv$ сначала значения f_1 и v_1 , а затем значения f_2 и v_2 и получаем два уравнения:

$$\begin{cases} 0,4 = a + 0,1 b, \\ 0,5 = a + 0,5 b. \end{cases}$$

Из которых находим: $a = 0,375$ и $b = 0,25$.

26. Обозначим долю углерода топлива, сгоревшего в СО через x , а сгоревшего в CO_2 — через y . Всего в 1 кг бензина содержится 0,854 кг С, поэтому $x + y = 0,854$.

При сгорании бензина с $\alpha < 1$ можно считать, что водород бензина вследствие большего химического сродства к кислороду (по сравнению с углеродом) будет сгорать полностью. Углерод же вступит в реакцию с оставшимся кислородом и сгорит в СО и CO_2 . При этом продукты сгорания топлива при $\alpha < 1$ будут состоять из H_2O , СО, CO_2 и N_2 . Азота в воздухе содержится 77%, водорода в топливе $\text{H}_2 = 0,142$ кг и кислорода $\text{O}_2 = 0,003$ кг. Поэтому при $\alpha = 1$:

$$L_0 = \frac{1}{0,23} \left(\frac{8}{3} \cdot 0,854 + 8 \cdot 0,142 - 0,003 \right) = 14,83 \text{ кг.}$$

Но так как $\alpha = 0,9$, то на 1 кг бензина будет израсходовано $0,9 \cdot 14,83 = 13,35$ кг воздуха, в котором содержится $\text{O}' = 0,23 \cdot L \cdot \alpha = 0,23 \cdot 14,83 \cdot 0,9 = 3,069$ кг кислорода. С другой стороны, количество кислорода, необходимое для сгорания 1 кг бензина, можно выразить такой формулой:

$$\text{O}' = \frac{8}{3} x + \frac{4}{3} y + 8\text{H}_2 - \text{O}_2 = \frac{8}{3} x + \frac{4}{3} y + 8 \cdot 0,142 - 0,003.$$

Полученные два количества для O' приравняем:

$$\frac{8}{3} x + \frac{4}{3} y + 1,133 = 3,069.$$

Получим два уравнения:

$$\begin{cases} x + y = 0,854, \\ \frac{8}{3} x + \frac{4}{3} y = 1,936, \end{cases}$$

из которых находим: $x = 0,598$ кг и $y = 0,256$ кг.

Таким образом, при сгорании 1 кг бензина при $\alpha = 0,9$ будем иметь:

$$\text{CO}_2 \quad \frac{11}{3} \cdot 0,256 = 0,94 \text{ кг},$$

$$\text{CO} \quad \frac{7}{3} \cdot 0,598 = 1,40 \text{ кг},$$

$$\text{H}_2\text{O} \quad 9\text{H}_2 = 9 \cdot 0,142 = 1,28 \text{ кг},$$

$$\text{N}_2 \quad 0,77 \cdot 13,35 = 10,25 \text{ кг},$$

$$\text{примесей воздуха} \quad 0,1 \cdot 13,35 = 1,34 \text{ кг}.$$

27. Путь обгона равен

$$L = \frac{x}{2} = A_1 + L_1 + V_{\text{II}} \cdot t + A_2 + L_2,$$

где t — время обгона и

$$L = \frac{x}{2} = V_1 \cdot t.$$

Решая эти уравнения совместно, получаем:

$$t = \frac{A_1 + A_2 + L_1 + L_2}{V_1 - V_{\text{II}}},$$

$$x = 2V_1 \frac{A_1 + A_2 + L_1 + L_2}{V_1 - V_{\text{II}}}.$$

Например, если $A_1 = 20 \text{ м}$, $A_2 = 30 \text{ м}$, $L_2 = 4 \text{ м}$, $L_1 = 6 \text{ м}$, $V_1 = 60 \frac{\text{км}}{\text{час}}$, $V_{\text{II}} = 40 \frac{\text{км}}{\text{час}}$, то

$$x = 2 \cdot 60 \cdot \frac{20 + 30 + 4 + 6}{60 - 40} = 360 \text{ м}.$$

28. При прямом полете к скорости самолета относительно воздушной массы прибавлялась скорость ветра, а при обратном полете скорость ветра отнималась. Поэтому скорость самолета относительно поверхности Земли была при прямом полете $V + V_{\text{в}}$, а при обратном — $V - V_{\text{в}}$. Теперь легко составить уравнения:

$$\begin{cases} \frac{L}{V + V_{\text{в}}} = t_1, \\ \frac{L}{V - V_{\text{в}}} = t_2. \end{cases}$$

Их решение дает:

$$V = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right), \quad V_{\text{в}} = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right).$$

Пусть $L_{\text{ист}}$, самолет пролетел за $t_1 + t_2$ часов, летя со скоростью V . Поэтому можно записать, что

$$L_{\text{ист}} = V(t_1 + t_2) = 2L + (t_1 - t_2)V_{\text{в}}.$$

29. Применим основное уравнение гидростатики к точкам A и B и получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \gamma h_1, \\ p_2 &= p_0 + \gamma h_2. \end{aligned}$$

Из рисунка 21 видно, что $h_2 - h_1 = h$. Поэтому для нахождения p_0 , h и h_1 имеем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \gamma h_1 + p_0 = p_1, \\ \gamma h_2 + p_0 = p_2, \\ h_2 - h_1 = h, \end{cases}$$

решая которую, получим:

$$p_0 = p_2 - \gamma h_2, \quad h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}, \quad h_1 = h_2 - \frac{p_1 - p_2}{\gamma}.$$

30. Обозначим усилие в ножке 1 через X , в ножках 2 и 4 через Y (эти усилия одинаковы вследствие симметричного расположения ножек 2 и 4 относительно диагонали 1—3), в ножке 3 — через Z . Очевидно, что сумма усилий в ножках стола равна весу детали, т. е.

$$X + 2Y + Z = G. \quad (1)$$

Если взять сумму моментов всех сил относительно диагонали 2—4, то получим второе уравнение:

$$\begin{aligned} X \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} - G \cdot t\sqrt{2} - Z \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} &= 0, \\ \text{или } lX - 2Gt - lZ &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать, что крышка стола под действием груза G займет положение, изображенное пунктиром $A-A$; это значит, что укорочение ножек 2 и 4 равно среднеарифметическому укорочению ножек 1 и 3. Но укорочения ножек пропорциональны действующим сжимающим усилиям, поэтому

$$\frac{X + Z}{2} = 2Y, \text{ или } X + Z = 4Y.$$

В результате имеем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} X + 2Y + Z = 300, \\ X - Z = 60, \\ X - 4Y + Z = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $X = 130 \text{ кг}$, $Y = 50 \text{ кг}$, $Z = 70 \text{ кг}$.

31. При решении задачи будем пользоваться схемой, изображенной на рисунке 83. Обозначим реактивные усилия на опорах через R_1 , R_2 и R_3 . Эти усилия вызываются весом G , поэтому

$$R_1 + R_2 + R_3 = G. \quad (1)$$

Второе уравнение получим, если составим сумму моментов относительно опоры 2:

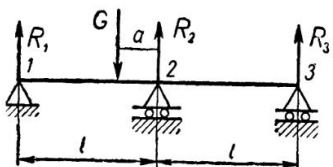


Рис. 83.

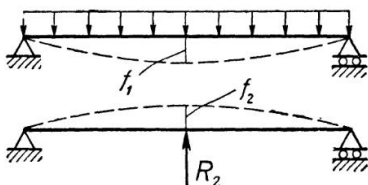
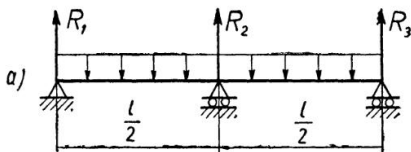


Рис. 84.

$$R_1 l - R_3 l - Ga = 0. \quad (2)$$

Третье уравнение, составленное с помощью уравнения изогнутой оси балки, мы приводим в готовом виде

$$6R_1 + R_2 - 48 = 0. \quad (3)$$

Решим полученные уравнения:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 25, \\ 2R_1 - 2R_2 = 12,5, \\ 6R_1 + R_2 = 48. \end{cases}$$

Откуда находим: $R_1 = 4,2$ т, $R_2 = 22,9$ т, $R_3 = -2,1$ т. Знак (—) перед R_3 говорит о том, что эта реакция действует в направлении, противоположном изображенному на чертеже.

32. Условно можно изобразить мост схемой (рис. 84, а), где q означает вес 1 м длины моста, называемый интенсивностью распределенной нагрузки. Реактивные усилия на опорах обозначим буквами R_1 , R_2 и R_3 . Очевидно, сумма усилий R_1 , R_2 и R_3 равна весу моста G , т. е.

$$R_1 + R_2 + R_3 = G. \quad (1)$$

Составляем сумму моментов всех сил, действующих на мост, относительно, например, третьей опоры:

$$R_1 \cdot l + R_2 \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0. \quad (2)$$

Для получения третьего уравнения схему моста представим в виде двух балок, изображенных на рисунке 84, б. Наложение этих двух схем друг на друга и дает исходную схему. Балка схемы 84, б прогнется в точке 2 (рис. 24) от распределенной нагрузки (собственного веса) вниз на величину f_1 , определяемую формулой:

$$f_1 = \frac{5ql^4}{384EJ}.$$

Здесь произведение EJ называется изгибной жесткостью. Балка схемы 84, в тоже прогнется в точке 2 от реактивного усилия R_2 вверх на величину f_2 , определяемую формулой:

$$f_2 = \frac{R_2 l^3}{48EJ}.$$

Но так как при наложении схем б) и в) прогиб в точке 2 должен отсутствовать, то это возможно при условии, что $f_1 = f_2$, или

$$\frac{5ql^4}{384EJ} = \frac{R_2 l^3}{48EJ}. \quad (3)$$

Таким образом, имеем систему трех уравнений:

$$R_1 + R_2 + R_3 = G, \quad (1)$$

$$R_1 l + R_2 \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{5ql^4}{384EJ} = \frac{R_2 l^3}{48EJ}. \quad (3)$$

Из третьего уравнения находим, что

$$R_2 = \frac{5}{8} ql.$$

Из первого и второго уравнений определяем:

$$R_1 = \frac{3}{16} ql \quad \text{и} \quad R_3 = \frac{3}{16} ql.$$

* Формулы выводятся в курсе сопротивления материалов.

После подстановки числовых значений будем иметь:

$$R_1 = R_3 = 60 \text{ т} \quad \text{и} \quad R_2 = 200 \text{ т}.$$

33. Обозначим растягивающие усилия в стержнях 1 и 2 (рис. 85) соответственно через N_1 и N_2 и реакцию опоры A через R_a . Тогда, очевидно,

$$R_a + N_1 + N_2 = Q. \quad (1)$$

Далее запишем сумму моментов сил относительно точки A

$$N_1 \cdot a + N_2 (a + b) - Q (a + c) = 0. \quad (2)$$

Под действием груза стержни 1 и 2 растянутся и жесткий брус AB повернется около точки A , заняв положение, изображенное пунктиром на рисунке 85. Отрезки CC_1 и BB_1 являются удлинениями стержней 1 и 2 и соответственно равны $CC_1 = k_1 \cdot N_1$, $BB_1 = k_2 \cdot N_2$.

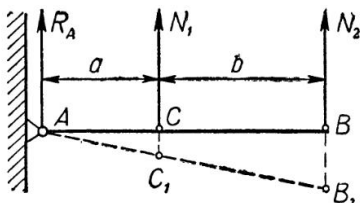


Рис. 85.

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 следует, что

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{или} \quad \frac{k_2 N_2}{k_1 N_1} = \frac{a + b}{a} \quad (3)$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$R_a + N_1 + N_2 = 5,7, \quad (1)$$

$$N_1 + 3N_2 - 11,4 = 0, \quad (2)$$

$$N_2 = 6N_1. \quad (3)$$

Решая эту систему, получим:

$$R_a = 1,5 \text{ т}, \quad N_1 = 0,6 \text{ т} \quad \text{и} \quad N_2 = 3,6 \text{ т}.$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

34. Обозначим через x расстояние между краями листа и отверстия. Площадь отверстия $S = (a - 2x)(b - 2x)$, или $4x^2 - 2(a + b)x + (ab - S) = 0$,

откуда
$$x_{1,2} = \frac{(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4(ab - S)}}{4}.$$

Величина, стоящая под корнем, больше нуля. В этом можно убедиться, если представить решение уравнения в виде:

$$x_{1,2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4S}}{4}.$$

Условию задачи удовлетворяет только один корень

$$x_1 = \frac{(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + 4S}}{4},$$

так как

$$x_2 = \frac{(a+b) + \sqrt{(a-b)^2 + 4S}}{4} > \frac{a+b}{4} > \frac{b}{2},$$

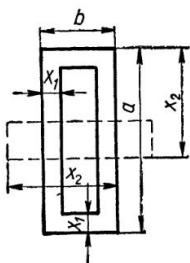


Рис. 86.

где b — меньшая сторона листа.

Геометрический смысл обоих корней ясен из рисунка 86. После подстановки числовых значений

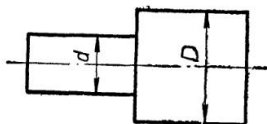


Рис. 87.

$$x_1 = \frac{(60+40) - \sqrt{(60-40)^2 + 4 \cdot 1000}}{4} \approx 8,4 \text{ см.}$$

35. У самоцентрирующих патронов (рис. 27) все кулачки 1 перемещаются одновременно, при этом их поверхности 2, которыми зажимается обрабатываемая деталь, находятся на одинаковых расстояниях от оси вращения шпинделя (точка С). Это значительно упрощает и ускоряет установку деталей с цилиндрическими поверхностями, у которых геометрические оси всех участков должны совпадать (рис. 87).

При обработке эксцентричных деталей геометрическая ось зажимаемого в кулачках патрона цилиндрического участка должна быть смещена относительно оси вращения на величину эксцентриситета e . Для этого под один из кулачков необходимо подложить мерную пластину.

Из косоугольного треугольника OCA (рис. 88)

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2OC \cdot KC. \quad (1)$$

В прямоугольном треугольнике AKC

$$\angle KCA = \frac{\alpha}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{ и } KC = \frac{AC}{2}.$$

Учитывая, что при принятых обозначениях

$$OA = \frac{D}{2}, \quad DC = e, \quad AC = \frac{D}{2} + x - e,$$

и после подстановки в равенство (1) получим:

$$\frac{D^2}{4} = \left(\frac{D}{2} - e + x\right)^2 + e^2 - \left(\frac{D}{2} - e + x\right)e,$$

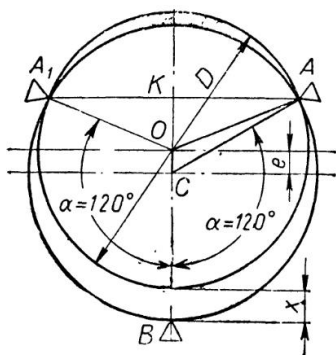


Рис. 88.

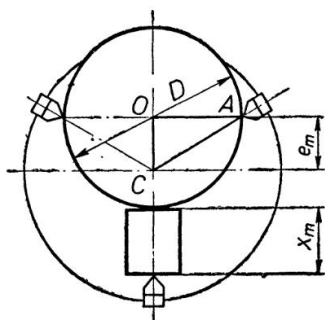


Рис. 89.

$$\text{или } y^2 - ey - \left(\frac{D^2}{4} - e^2\right) = 0,$$

$$\text{где } y = \frac{D}{2} - e + x. \quad (2)$$

Решая полученное квадратное уравнение, имеем:

$$y_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} + \left(\frac{D^2}{4} - e^2\right)} = \frac{e}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 3e^2}.$$

Подставим вместо y его значение из (2) и из полученного уравнения найдем толщину пластинки:

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{D^2 - 3e^2} - (D - 3e)}{2},$$

$$\text{или } x_{1,2} = \frac{D}{2} \left[\pm \sqrt{1 - 3\varepsilon^2} - (1 - 3\varepsilon) \right],$$

где $\varepsilon = \frac{e}{D}$ — относительный эксцентриситет.

При рассматриваемом методе обработки эксцентричных деталей наибольшая величина эксцентриситета ограничивается возможностью закрепления детали в кулачках. Теоретически предельный случай показан на рисунке 89. Из прямоугольного треугольника COA теоретически наибольшая возможная величина эксцентриситета:

$$e_m = \frac{D}{2\sqrt{3}}.$$

Соответствующий относительный эксцентриситет:

$$\varepsilon_m = \frac{e_m}{D} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,288.$$

На практике обработку эксцентричных деталей в трех-кулачковых самоцентрирующих патронах производят при относительных эксцентриситетах: $0 < \varepsilon < 0,2$.

При указанных ограничениях в величине относительного эксцентриситета условию задачи удовлетворяет только один корень:

$$x = x_1 = \frac{D}{2} \left[\sqrt{1 - 3l^2} - (1 - 3l) \right].$$

Второй корень

$$x_2 = \frac{D}{2} \left[-\sqrt{1 - 3e^2} - (1 - 3e) \right]$$

при этом получается отрицательным, что не имеет физического смысла.

В нашем случае относительный эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{10}{100} = 0,1$$

и толщина пластинки

$$x = \frac{100}{2} \left[\sqrt{1 - 3 \cdot 0,1^2} - (1 - 3 \cdot 0,1) \right] \approx 7,12 \text{ мм.}$$

36. В результате кривизны поверхности вала измеренный размер h (рис. 28) не соответствует заданному на чертеже размеру H . Для того чтобы судить о допустимости данного способа измерения, найдем величину абсолютной ошибки: $x = H - h$.

Из прямоугольного треугольника OBC по теореме Пифагора $OC^2 = OB^2 + BC^2$.

Учитывая, что $OC = \frac{D}{2}$; $OB = \frac{D}{2} - x$; $BC = \frac{b}{2}$, после подстановки получаем:

$$\frac{D^2}{4} = \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 + \frac{b^2}{4},$$

откуда
$$\frac{D}{2} - x = \pm \sqrt{\frac{D^2 - b^2}{4}};$$

$$x_{1,2} = \frac{D}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{D^2}} \right].$$

Знак плюс перед корнем не отвечает условиям задачи, так как ошибка не может быть больше радиуса вала. Следовательно,

$$x = x_1 = \frac{D}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{D^2}} \right].$$

Величина $\frac{b^2}{D^2}$ мала по сравнению с единицей. Это позволяет воспользоваться приближенной формулой:

$$\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

В нашем случае $\alpha = \frac{b^2}{D^2}$ и $x \approx \frac{b^2}{4D} = \frac{16^2}{4 \cdot 52} \approx 1,23 \text{ мм.}$

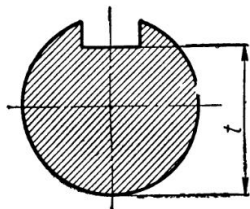


Рис. 90.

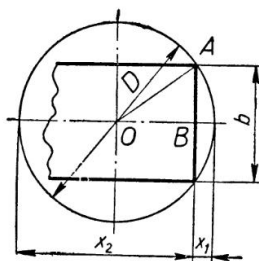


Рис. 91.

Ошибка во много раз превышает точность измерений, что совершенно недопустимо. Для того чтобы не допускать подобных ошибок, на чертежах более правильно вместо размера H указывать размер t (рис. 90).

Пазы, подобные показанному на рисунке 28, довольно часто встречаются на валах. В них устанавливают призматические шпонки, служащие для крепления на валах различных деталей, например зубчатых колес, шкивов, рукояток и т. д.

37. Из прямоугольного треугольника OAB (рис. 91) $OA^2 - AB^2 = OB^2$,

$$\text{или } \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2} - x\right)^2,$$

где x — искомое увеличение пути.

Извлекая из обеих частей уравнения квадратные корни, получаем:

$$\frac{D}{2} - x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - b^2},$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = \frac{1}{2} (D \pm \sqrt{D^2 - b^2}).$$

Условию задачи удовлетворяет только корень

$$x = x_1 = \frac{1}{2} (D - \sqrt{D^2 - b^2}), \quad (1)$$

так как x не может быть больше радиуса фрезы, что получается, если перед корнем взять знак плюс. Геометрический смысл второго корня

$$x_2 = \frac{1}{2} (D + \sqrt{D^2 - b^2})$$

ясен из рисунка.

В нашем случае

$$x = \frac{1}{2} (100 - \sqrt{100^2 - 80^2}) = 20 \text{ мм.}$$

Представим зависимость (1) в виде

$$x = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{D^2}} \right). \quad (2)$$

Из формул (2) видно, что с увеличением отношения $\frac{b}{D}$ дополнительный путь, проходимый фрезой, увеличи-

вается и достигает наибольшего значения при $\frac{b}{D} = 1$. В последнем случае $x = \frac{D}{2}$.

Если $\frac{b}{D} > 1$, то обработка за один проход невозможна, так как фреза не может перекрыть всю ширину обрабатываемой поверхности и приходится делать несколько проходов. Уравнение при этом не имеет вещественных корней.

Для сокращения времени обработки стремятся к тому, чтобы путь, проходимый фрезой, был возможно меньшим. Это можно достигнуть, увеличивая диаметр фрезы. Однако существуют и другие пути для достижения этой цели: последовательное расположение деталей на близком расстоянии и т. п.

38. На основании теоремы о квадрате касательной (рис. 30) $NS^2 = NO^2 - MO^2$, или, учитывая, что согласно допущению, принятому в условии задачи, $NS = l$, имеем:

$$l^2 = (R + h)^2 - R^2,$$

откуда $R + h = \pm \sqrt{R^2 + l^2}$ и $h_{1,2} = -R \pm \sqrt{R^2 + l^2}$.

Знак минус перед корнем не удовлетворяет условию задачи, так как высота телевизионной мачты не может быть отрицательной, следовательно,

$$h = h_1 = \sqrt{R^2 + l^2} - R,$$

$$\text{или } h = R \left[\sqrt{1 + \frac{l^2}{R^2}} - 1 \right].$$

Учитывая, что величина $\frac{l^2}{R^2}$ мала по сравнению с единицей, воспользуемся приближенной формулой:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

В нашем случае $\alpha = \frac{l^2}{R^2}$, тогда

$$h \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{880^2}{2 \cdot 6368} \approx 61 \text{ км.}$$

Если воспользоваться точной формулой, то для получения результата с такой же степенью точности во всех промежуточных вычислениях необходимо было бы сохранять не менее пяти значащих цифр, так как здесь имеет место разность близких величин.

Из ответа видно, что поставленная задача практически нереальна.

39 Для решения задачи воспользуемся теоремой о свойстве секущих, проведенных из одной точки к окружности. Из рисунка 92

$$AK (AK + 2R) = AB \cdot AD.$$

$$\text{Учитывая, что } AK = x; AB = l - b; AD = l + b,$$

где x — величина отклонения. Подставляя в первоначальное равенство, получим:

$$x (x + 2R) = (l - b) (l + b),$$

$$\text{или } x^2 + 2Rx - (l^2 - b^2) = 0,$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = -R \pm \sqrt{R^2 + (l^2 - b^2)}.$$

Знак минус перед корнем не отвечает условию задачи, так как отклонение не может быть отрицательным, следовательно,

$$x = x_1 = R \left[\sqrt{1 + \frac{l^2 - b^2}{R^2}} - 1 \right].$$

Величина $\frac{l^2 - b^2}{R^2}$ обычно мала по сравнению с единицей. В этом случае воспользуемся приближенной формулой

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{l^2 - b^2}{R^2}, \quad \text{тогда } x \approx \frac{l^2 - b^2}{2R}.$$

Для удобства вычислений при помощи логарифмической линейки приближенную зависимость представим в виде:

$$x \approx \frac{(l - b) (l + b)}{2R}.$$

В нашем случае

$$x \approx \frac{\left(15,5 - \frac{9,88}{2}\right) \left(15,5 + \frac{9,88}{2}\right)}{2 \cdot 300} \approx 0,36 \text{ м.}$$

Величина смещения получилась весьма значительной, и если длинный груз имеет также большую ширину, то на поворотах его конец может выйти за железнодорожный габарит, что недопустимо.

40. Обозначим ошибку, получаемую при измерении диаметра отверстия штангенциркулем с плоскими ножками, через x (рис. 93).

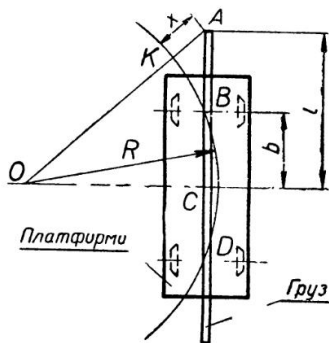


Рис. 92.

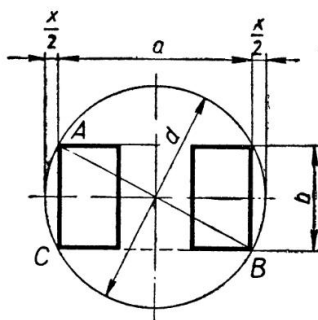


Рис. 93.

Из прямоугольного треугольника ABC

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Учитывая, что $d = a + x$

после подстановки получаем: $(a + x)^2 = a^2 + b^2$,

$$\text{откуда } x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 + b^2} - a.$$

Отрицательный корень не отвечает условию задачи, следовательно,

$$x = x_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - a = \sqrt{15^2 + 6^2} - 15 \approx 1,16 \text{ мм.}$$

Такая ошибка является совершенно недопустимой, так как во много раз превосходит точность измерения размеров штангенциркулем, которая колеблется для различных видов штангенциркулей от 0,1 до 0,02 мм.

41. Из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора (рис. 32) находим:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2,$$

или $(R-r)^2 = (R-h)^2 + \left(\frac{D}{2} - r\right)^2$,

откуда $R - h = \pm \sqrt{(R - r)^2 - \left(\frac{D}{2} - r\right)^2}$,

$$h_{1,2} = R \pm \sqrt{(R-r)^2 \left(\frac{D}{2} - r\right)^2},$$

$$h_1 = R - \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{D}{2} - r\right)^2},$$

$$h_2 = R + \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{D}{2} - r\right)^2}.$$

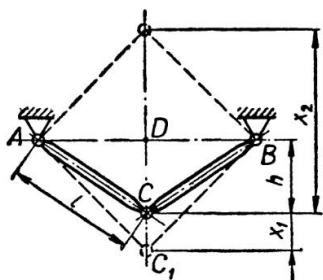


Рис. 94.

Геометрический смысл корней уравнения показан на рисунке 32. Очевидно, что второй корень не удовлетворяет условиям задачи.

42. Из прямоугольного треугольника ADC (рис. 94)

$$AD^2 = l^2 - h^2.$$

После нагревания стержней точка C переместится в положение C_1 . Из пря-

моугольного треугольника ADC_1

$$AD^2 = (l + lat)^2 - (h + x)^2.$$

Исключив из этих уравнений AD , получим:

$$l^2 - h^2 = (l + lat)^2 - (h + x)^2,$$

откуда

$$h+x=\pm\sqrt{l^2(2+at)at+h^2},$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{l^2 (2 + \alpha t) \alpha t + h^2} - h,$$

$$x_1 = \sqrt{l^2 (2 + \alpha t) \alpha t + h^2} - h,$$

$$x_2 = -\sqrt{l^2(2 + at)at + h^2} - h.$$

Геометрический смысл корней показан на рисунке 94. Условиям задачи удовлетворяет первый корень x_1 . После простейших преобразований и подстановки числовых значений получим:

$$x = x_1 = h \left[\sqrt{\frac{l^2}{h^2} (2 + at) at + 1} - 1 \right] = \\ = 100 \left[\sqrt{\frac{300^2}{100^2} (2 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 120) 12 \cdot 10^{-6} \cdot 120 + 1} - 1 \right] \approx 1,3 \text{ мм.}$$

При вычислении числового значения корня целесообразно воспользоваться приближенной формулой:

$$\sqrt{a+1} \approx \frac{a}{2} + 1.$$

43. Расстояние от ползуна B до оси вращения кривошипа O обозначим через x (рис. 33). По теореме косинусов из косоугольного треугольника OAB

$$l^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{или } x^2 - 2rx \cdot \cos \varphi - (l^2 - r^2) = 0,$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = r \cdot \cos \varphi \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + (l^2 - r^2)}.$$

После простейших преобразований получим:

$$x_{1,2} = r \cdot \cos \varphi \pm \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Рассмотрим геометрический смысл полученной зависимости. Первое слагаемое представляет проекцию кривошипа OA на прямую OB , второе — проекцию шатуна AB на ту же прямую. В зависимости от знака перед корнем видим, что одному и тому же положению кривошипа, определяемому углом φ , соответствует два положения ползуна. Условию задачи удовлетворяет только первое положение, когда перед корнем берем знак плюс, т. е.

$$x = x_1 = r \cdot \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}. \quad (1)$$

В тех случаях, когда у кривошипно-шатунного механизма $\frac{l}{r} \gg 5$, в технических расчетах часто пользуются приближенной зависимостью. Из равенства (1) находим:

$$x = r \left[\cos \varphi + \frac{l}{r} \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi} \right] \quad (2)$$

или приближенно, учитывая, что величина $\frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi$ при $\frac{l}{r} \gg 5$ мала по сравнению с единицей, и используя приближенную формулу

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi} \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \varphi,$$

получаем: $x \approx r \left[\cos \varphi + \frac{l}{r} \left(1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \varphi \right) \right],$

откуда

$$x \approx r \left[\frac{l}{r} + \cos \varphi - \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{l} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right]. \quad (3)$$

Приближенная зависимость особенно удобна для нахождения скоростей и ускорений ползуна аналитическим путем. Для оценки ее точности найдем x по обеим зависимостям, приняв $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ и $\varphi = 45^\circ$.

По точной зависимости:

$$x = r \left[\cos 45^\circ + \sqrt{1 - \frac{1}{5^2} \cdot \sin^2 45^\circ} \right] \approx 5,6569r,$$

по приближенной:

$$x \approx r \left[5 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \cos 45^\circ + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cos 90^\circ \right] \approx 5,6571r.$$

Из сравнения результатов видим, что расхождение в величине x весьма незначительное.

44. Длина большего основания (рис. 34) $b = a + 2h \operatorname{tg} \alpha$.

Площадь поперечного сечения канала

$$S = \frac{a+b}{2} h = \frac{a + (a + 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha)}{2} h,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha \cdot h^2 + ah - S = 0$.

$$h_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4S \operatorname{tg} \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Глубина канала не может быть отрицательной величиной, следовательно,

$$h = h_1 = \frac{\sqrt{a^2 + 4S \operatorname{tg} \alpha} - a}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{2^2 + 4 \cdot 4,5 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} - 2}{2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} \approx 1,56 \text{ м.}$$

45. Площадь поперечного сечения трубы

$$F = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_{\text{в}}^2),$$

где $d_{\text{в}}$ — внутренний диаметр трубы.

Учитывая, что $d_{\text{в}} = d - 2x$,

где x — толщина стенки, после подстановки получаем:

$$F = \frac{\pi}{4} [d^2 - (d - 2x)^2],$$

$$\text{откуда } (d - 2x)^2 = d^2 - \frac{4F}{\pi}.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, имеем:

$$x_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - \frac{4F}{\pi}}.$$

Толщина стенки трубы не может быть больше радиуса наружной поверхности, следовательно,

$$\begin{aligned} x = x_2 &= \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - \frac{4F}{\pi}} = \\ &= \frac{14}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{14^2 - \frac{4 \cdot 25}{\pi}} \approx 0,59 \text{ км.} \end{aligned}$$

Трубы изготавливаются с вполне определенной толщиной стенок. Наближайшая толщина стенки равна 0,6 см.

46. Тело массой m , находящееся на расстоянии x от центра Земли, притягивается к земле силой

$$F_1 = \frac{k \cdot m \cdot m_1}{x^2},$$

где k — коэффициент пропорциональности; m_1 — масса Земли.

Если эта масса находится на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, то к Луне она будет притягиваться силой

$$F_2 = \frac{kmm_2}{(l-x)^2},$$

где m_2 — масса Луны. По условию задачи $F_1 = F_2$, следовательно, $\frac{kmm_1}{x^2} = \frac{kmm_2}{(l-x)^2}$, или $\frac{x}{l-x} = \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$.

Решая полученное уравнение относительно x , получаем два корня:

$$x_1 = l \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = 3,84 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{81,5}}{1 + \sqrt{81,5}} \approx 3,46 \cdot 10^5 \text{ км}$$

$$\text{и } x_2 = l \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} - 1} = 3,84 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{81,5}}{\sqrt{81,5} - 1} \approx 4,32 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

Очевидно, что первый корень показывает точку, расположенную между Землей и Луной (рис. 95), а второй—

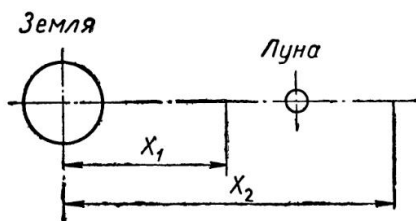


Рис. 95.

точку, расположенную дальше Луны. В первой точке силы притяжения к Земле и Луне равны между собой, но направлены в противоположные стороны и уравнивают друг друга. Во второй точке силы притяжения Земли и Луны будут складываться.

47. Будем считать вал 2 неподвижным (рис. 35). Если переставить дифференциальную зубчатую муфту относительно вала 2 на один зуб, то вал 1 повернется на угол

$$\delta_1 = \frac{360^\circ}{z_2}.$$

Произведя перестановку зубчатой муфты относительно вала 1 на один зуб в обратную сторону, получим угол поворота вала 1 относительно муфты:

$$\delta_2 = \frac{360^\circ}{z_1}.$$

Угол поворота вала 1 относительно вала 2

$$\delta^\circ = \delta_1 - \delta_2, \text{ или после подстановки } \delta^\circ = \frac{360^\circ}{z_2} - \frac{360^\circ}{z_1},$$

$$\text{откуда } \frac{\delta^\circ}{360^\circ} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{\Delta z}{z_2 (z_2 + \Delta z)}.$$

$$\text{После преобразования } z_2^2 + \Delta z \cdot z_2 - 360^\circ \frac{\Delta z}{\delta^\circ} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$z_2 = \pm \sqrt{\frac{\Delta z^2}{4} + 360^\circ \frac{\Delta z}{\delta^\circ}} - \frac{\Delta z}{2}.$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Следовательно,

$$z_2 = \sqrt{\frac{\Delta z^2}{4} + 360^\circ \frac{\Delta z}{\delta^\circ}} - \frac{\Delta z}{2}.$$

Легко видеть, что при $360^\circ \frac{\Delta z}{\delta^\circ} = 0$, величина z_2 тождественно равна нулю и с увеличением Δz число зубьев z_2 возрастает. Для того чтобы иметь возможно меньшее число зубьев при заданной точности регулирования, обычно принимают $\Delta z = 1$.

Чтобы судить о порядке получаемых величин, разберем числовой пример.

Пусть $\delta^\circ = 0,5^\circ$ и $\Delta z = 1$, тогда

$$z_2 = \sqrt{\frac{1^2}{4} + 360^\circ \frac{1}{0,5^\circ}} - \frac{1}{2} = 26,3.$$

Производить вычисления с большей точностью нецелесообразно, так как полученный результат все равно придется округлять в большую сторону до целого числа зубьев. После округления принимаем $z_2 = 27$.

Число зубьев с другой стороны муфты $z_1 = z_2 + \Delta z = 27 + 1 = 28$.

В результате округления в большую сторону фактический угол регулирования будет несколько меньше требуемого, что ведет к увеличению точности регулирования. Действительно,

$$\delta^\circ = 360^\circ \frac{\Delta z}{z_1 \cdot z_2} = 360^\circ \frac{1}{28 \cdot 27} \approx 0,476^\circ.$$

Если осуществить ту же точность регулирования простой зубчатой муфтой (без промежуточного зубчатого кольца), то необходимое число зубьев

$$z = \frac{360^\circ}{8^\circ} = \frac{360^\circ}{0,5^\circ} = 720,$$

т. е. значительно больше, чем у дифференциальной. Такое большое число зубьев практически трудно осуществимо.

48. Расчетная толщина шва (рис. 36) $k_0 = 0,7 k$.

Средний диаметр шва $d_c = d + 0,5k$.

Расчетная площадь шва (рис. 37) $F = \pi \cdot k_0 d_c$.

После подстановки входящих величин, получим:

$$F = \pi \cdot 0,7 \cdot k (d + 0,5k),$$

или

$$k^2 + 2dk - \frac{F}{0,35\pi} = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения дает:

$$k = -d \pm \sqrt{d^2 + \frac{F}{0,35\pi}}.$$

Если перед корнем взять знак минус, то толщина шва получится отрицательной, что не имеет физического смысла, следовательно,

$$k = d \left[\sqrt{1 + \frac{F}{0,35\pi d^2}} - 1 \right]$$

или, учитывая, что величина $\alpha = \frac{F}{0,35\pi d^2}$ мала по сравнению с единицей, и используя приближенную формулу

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2},$$

получаем

$$k \approx \frac{F}{0,7\pi d} = \frac{5,2}{0,7 \cdot \pi \cdot 6} \approx 0,395 \text{ см} \approx 4 \text{ мм}.$$

49. Время, затраченное самолетом на прохождение прямолинейных участков L в прямом и обратном заходах (рис. 38) $t = t_1 - t_2$.

При прямом заходе к воздушной скорости самолета прибавилась скорость ветра. При обратном заходе абсолютная скорость самолета относительно земли меньше воздушной на скорость ветра.

Время прямого захода:

$$\tau_1 = \frac{L}{v + v_B}.$$

Время обратного захода:

$$\tau_2 = \frac{L}{v - v_B}.$$

После подстановки

$$t = \tau_1 + \tau_2 = \frac{L}{v + v_B} + \frac{L}{v - v_B},$$

$$\text{или } v^2 - \frac{2L}{t}v - v_B^2 = 0.$$

Обозначим через $v_c = \frac{2L}{t}$ среднюю скорость самолета,

$$\text{тогда } v^2 - v_c v - v_B^2 = 0,$$

$$\text{откуда } v_{1,2} = \frac{v_c}{2} \pm \sqrt{\frac{v_c^2}{4} + v_B^2}.$$

Знак минус перед корнем не удовлетворяет условиям задачи, так как скорость самолета не может быть отрицательной. Следовательно,

$$v = v_1 = \frac{v_c}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4v_B^2}{v_c^2}} \right].$$

Испытания такого рода обычно не проводятся при сильном ветре, поэтому отношение $\alpha = \frac{4v_B^2}{v_c^2}$ мало по сравнению с единицей и, используя приближенную формулу

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{получаем: } v \approx \frac{v_c}{2} \left[1 + 1 + \frac{2v_B^2}{v_c^2} \right] = v_c + \frac{v_B^2}{v_c}.$$

В практике проведения испытаний полученную скорость v сравнивают с приборной скоростью и находят поправку к показанию прибора.

Примем $L = 10 \text{ км}$; $t = 95,6 \text{ сек}$ и $v_B = 10 \text{ м/сек}$.

$$\text{Средняя скорость: } v_c = \frac{2L}{t} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{95,6} \approx 209,2 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Скорость самолета относительно воздуха:

$$v = v_c + \frac{v_B^2}{v_c} = 209,2 + \frac{10^2}{209,2} \approx 209,7 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

50. Обозначим через x глубину погружения понтона в воду. Ширина понтона на уровне воды $y = a + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Объем воды, вытесненной понтоном,

$$V = \frac{a + y}{2} x l,$$

или

$$V = \frac{a + (a + 2x \operatorname{tg} \alpha)}{2} x l = (ax + x^2 \operatorname{tg} \alpha) l.$$

По закону Архимеда $Q = \gamma V$,

откуда $Q = (ax + x^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha) l \gamma$,

или $\operatorname{tg} \alpha \cdot x^2 + ax - \frac{Q}{\gamma l} = 0$.

Решая данное квадратное уравнение, получаем:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4 \frac{Q}{\gamma l} \operatorname{tg} \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Так как отрицательный корень не имеет физического смысла, то

$$x = x_1 = \frac{\sqrt{a^2 + 4 \frac{Q}{\gamma l} \operatorname{tg} \alpha} - a}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{1,5^2 + 4 \frac{3 \cdot 8}{1 \cdot 6} \operatorname{tg} 8^\circ} - 1,5}{2 \cdot \operatorname{tg} 8^\circ} \approx 0,405 \text{ м}.$$

51. На основании закона Архимеда $Q = \gamma V$, где V — объем погруженной части поплавка.

Учитывая, что $V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rR + R^2)$, после подстановки $Q = \gamma \frac{\pi h}{3} (r^2 + rR + R^2)$, или $R^2 + rR + r^2 - \frac{3Q}{\pi \gamma h} = 0$,

откуда

$$R_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{3Q}{\pi \gamma h} - \frac{3}{4}r^2}.$$

Второй отрицательный корень не отвечает условиям задачи (он соответствует конусу, представленному на рисунке 96). Следовательно,

$$R = R_1 = \sqrt{\frac{3Q}{\pi \gamma h} - \frac{3}{4}r^2} - \frac{r}{2}.$$

52. Обозначим через v скорость установившегося движения.

Время разгона:

$$t_1 = \frac{v}{a_1}.$$

Путь, проходимый при разгоне: $S_1 = \frac{v^2}{2a_1}$.

Время замедленного дви-

жения: $t_2 = \frac{v}{a^2}.$

Путь, проходимый при замедленном движении: $S_2 = \frac{v^2}{2a_2}.$

Время установившегося движения: $t_y = T - (t_1 + t_2).$

Путь, проходимый при установившемся движении: $S_y = vt_y.$

Учитывая, что $H = S_1 + S_y + S_2$, после подстановки имеем: $H = \frac{v^2}{2a_1} + \left[T - \left(\frac{v}{a_1} + \frac{v}{a_2} \right) \right] v + \frac{v^2}{2a_2}$, или

$$v^2 - 2 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} T \cdot v + 2 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} H = 0.$$

Решением данного квадратного уравнения будет:

$$v_{1,2} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} T \mp \sqrt{\left[\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right]^2 T^2 - 2 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} H}.$$

Условию задачи удовлетворяет только один корень:

$$v = v_1 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} T - \sqrt{\left[\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right]^2 T^2 - 2 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} H}.$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим выражение

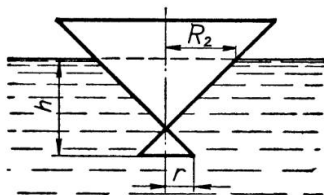


Рис. 96.

$$v_0 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} T,$$

которое получается, если в решении уравнения отбросить радикал. Преобразуя это выражение, получаем:

$$T = \frac{v_0}{a_1} + \frac{v_0}{a_2} = t'_1 + t'_2.$$

Следовательно, v_0 — такая скорость, при которой подъем бабы молота будет состоять только из двух периодов: разгона и замедленного движения. Если перед корнем взять знак плюс, то скорость установившегося движения будет выше, что не имеет физического смысла.

При заданных параметрах движения скорость установившегося движения бабы молота:

$$v = \frac{9 \cdot 10}{9 + 10} 0,9 - \sqrt{\left[\frac{9 \cdot 10}{9 + 10}\right]^2 \cdot 0,9^2 - 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{9 + 10} 1,4} \approx \\ \approx 2,04 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

53. При определении положения центра тяжести тела, имеющего сложную конфигурацию, его разбивают на элементы, положение центров тяжести которых можно легко найти. В нашем случае имеем два таких элемента: призму квадратного сечения (брус) и призму прямоугольного сечения (ребро) (рис. 97).

Расстояние от центра тяжести тела до произвольной оси можно найти по формуле:

$$c = \frac{Q_1 c_1 + Q_2 c_2}{Q_1 + Q_2}, \quad (1)$$

где $Q_1 = \gamma l F_1$ — вес бруса; $Q_2 = \gamma l F_2$ — вес ребра; γ — удельный вес материала; l — длина элементов; F_1 и F_2 — площади продольных сечений призматических элементов; c_1 и c_2 — расстояния от центров тяжести элементов до оси, относительно которой производится определение центра тяжести тела.

После подстановки в формулу (1)

$$c = \frac{\gamma l F_1 c_1 + \gamma l F_2 c_2}{\gamma l F_1 + \gamma l F_2},$$

или

$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2}{F_1 + F_2}. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), видим, что они отличаются только тем, что вместо весов элементов в (1) и (2) стоят площади их сечений.

Примем, что ось, относительно которой определяем положение центра тяжести, проходит через центр тяжести бруса, тогда $c_1 = 0$ и $c_2 = \frac{a+x}{2}$.

Учитывая, что $F_1 = a^2$ и $F_2 = bx$, получаем:

$$c = \frac{\frac{a+x}{2} bx}{bx + a^2},$$

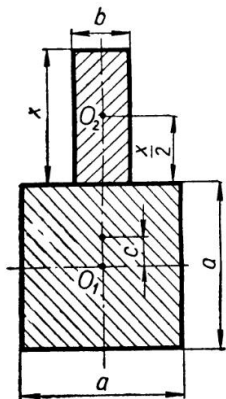


Рис. 97.

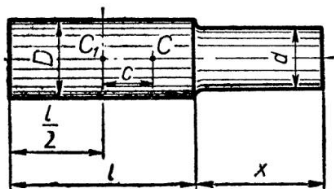


Рис. 98.

или

$$x^2 + 2 \left(\frac{a}{2} - c \right) x - 2 \frac{a^2 c}{b} = 0,$$

откуда $x_{1,2} = - \left(\frac{a}{2} - c \right) \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + 2 \frac{a^2 c}{b}}.$

Так как высота ребра не может быть отрицательной, то

$$x = x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + 2 \frac{a^2 c}{b}} - \left(\frac{a}{2} - c \right).$$

54. Направим ось, относительно которой определяем положение центра тяжести, таким образом, чтобы она проходила через центр тяжести участка с большим диаметром C_1 , и была направлена перпендикулярно к оси ва-

лика (рис. 98), тогда по аналогии с предыдущей задачей расстояние центра тяжести от этой оси

$$c = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 x \cdot \frac{l+x}{2}}{\frac{\pi}{4} d^2 x + \frac{\pi}{4} D^2 l} = \frac{x(l+x)}{2\left(x + \frac{D^2}{d^2} l\right)},$$

или

$$x^2 - 2\left(c - \frac{l}{2}\right)x - 2c \frac{D^2}{d^2} l = 0,$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = \left(c - \frac{l}{2}\right) \pm \sqrt{\left(c - \frac{l}{2}\right)^2 + 2cl \frac{D^2}{d^2}};$$

так как x не может быть меньше нуля, то

$$x = x_1 = \left(c - \frac{l}{2}\right) + \sqrt{\left(c - \frac{l}{2}\right)^2 + 2cl \frac{D^2}{d^2}}.$$

55. Равномерно распределенная нагрузка часто встречается при решении различных технических задач. В качестве примера можно привести нагрузку от веса деталей, сечение которых постоянно по длине, от давления жидкости на дно сосудов, газа и т. д.

Для равновесия балки (рис. 42) необходимо, чтобы момент от силы P , вращающий балку по часовой стрелке, был равен моменту от равномерно распределенной нагрузки, вращающему балку против часовой стрелки.

Момент от силы P :

$$P(l - x),$$

где x — расстояние от конца балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой до опоры.

Равномерно распределенную нагрузку можно заменить одной сосредоточенной силой qx , приложенной посередине загруженного участка. Момент от этой силы: $qx \cdot \frac{x}{2}$.

Приравнивая моменты, получаем: $\frac{qx^2}{2} = P(l - x)$,

$$\text{или } x^2 + 2\frac{P}{q}x - 2\frac{P}{q}l = 0,$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = -\frac{P}{q} \pm \sqrt{\frac{P^2}{q^2} + 2\frac{P}{q}l}.$$

Отрицательный корень не отвечает поставленным условиям задачи, следовательно,

$$\begin{aligned} x &= x_1 = \frac{P}{q} \left[\sqrt{1 + 2\frac{ql}{P}} - 1 \right] = \\ &= \frac{1000}{250} \left[\sqrt{1 + 2\frac{250 \cdot 6}{1000}} - 1 \right] = 4 \text{ м.} \end{aligned}$$

56. Обозначим через ρ переменное расстояние от оси вращения до точки установки индикатора, т. е. $\rho = OA$.

Из косоугольного треугольника COA (рис. 43) получаем:

$$R^2 = e^2 + \rho^2 - 2e\rho \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{или } \rho^2 - 2e\rho \cos \varphi - (R^2 - e^2) = 0.$$

Решение данного квадратного уравнения дает:

$$\rho_{1,2} = e \cdot \cos \varphi \pm \sqrt{e^2 \cdot \cos^2 \varphi + (R^2 - e^2)}.$$

Если $R > e$, то нетрудно видеть, что второй корень отрицательный и не удовлетворяет условию задачи, следовательно,

$$\rho = \rho_1 = e \cdot \cos \varphi + \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + (R^2 - e^2)},$$

или, учитывая, что $1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$, и вынося R из-под корня, имеем:

$$\rho = e \cos \varphi + R \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{R^2}}.$$

Перемещение мерного конца индикатора (рис. 43) $z = (e + R) - \rho$, или, подставляя вместо ρ его значение,

$$z = e(1 - \cos \varphi) + R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{R^2}} \right].$$

В подавляющем большинстве случаев величина эксцентриситета мала по сравнению с радиусом. В этих случаях можно воспользоваться приближенной формулой:

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2},$$

тогда

$$z \approx e(1 - \cos \varphi) + \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{2R} = e \left[1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{R} \sin^2 \varphi \right].$$

Если величиной $\frac{e}{2R}$ по сравнению с единицей мож-

но пренебречь, то получаем еще более простую формулу: $z \approx e(1 - \cos \varphi)$, которой пользуются на практике, когда для определения эксцентриситета по каким-либо причинам невозможно измерить биение вращением детали на 360° .

Пусть требуется найти эксцентриситет установки сектора, если при его повороте на 30° индикатор отклонился от своего крайнего положения на $0,15 \text{ мм}$.

Используя приближенную формулу, получаем:

$$e \approx \frac{z}{1 - \cos \varphi} = \frac{0,15}{1 - \cos 30^\circ} \approx 1,1 \text{ мм}.$$

57. Из косоугольного треугольника COC_1 , на основании теоремы косинусов (рис. 44)

$$(l_0 + a)^2 = l_0^2 + S_c^2 - 2S_cl_0 \cos(\Theta_c + \gamma),$$

$$\text{или } S_c^2 - 2l_0 S_c \cos(\Theta_c + \gamma) - (2al_0 + a^2) = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения дает:

$$S_{c1,2} = l_0 \cos(\Theta_c + \gamma) \pm \sqrt{l_0^2 \cos^2(\Theta_c + \gamma) + 2al_0 + a^2}.$$

Перед корнем должен быть знак плюс, так как S_c — величина положительная, тогда

$$S_c = S_{c1} = l_0 \cos(\Theta_c + \gamma) + \sqrt{l_0^2 \cos^2(\Theta_c + \gamma) + 2al_0 + a^2}.$$

В частном случае при $\Theta_c = 80^\circ$; $a = 5,5 \text{ см}$; $l_0 = 23,9 \text{ см}$ и $\gamma = 60^\circ$ получаем:

$$S_c = 23,9 \cdot \cos(80^\circ + 60^\circ) + \sqrt{23,9^2 \cdot \cos^2(80^\circ + 60^\circ) + 2 \cdot 5,5 \cdot 23,9 + 5,5^2} \approx 6,7 \text{ см}.$$

58. Длина ремня (рис. 45):

$$L = 2x \cdot \cos \varphi + \frac{d_1}{2} (\pi - 2\varphi) + \frac{d_2}{2} (\pi + 2\varphi) =$$

$$= 2x \cdot \cos \varphi + \varphi (d_2 - d_1) + \frac{\pi}{2} (d_2 + d_1),$$

но

$$\varphi \approx \sin \varphi = \frac{d_2 - d_1}{2x},$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = 1 - \frac{(d_2 - d_1)^2}{8x^2}.$$

Подставляя значения φ и $\cos \varphi$, получаем:

$$L = 2x + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4x} + \frac{\pi}{2} (d_2 + d_1),$$

или

$$x^2 - \frac{1}{2} \left[L - \frac{\pi}{2} (d_2 + d_1) \right] x + \frac{1}{8} (d_2 - d_1)^2 = 0.$$

Вводя обозначения

$$A_1 = \frac{1}{4} \left[L - \frac{\pi}{2} (d_2 + d_1) \right]$$

$$\text{и } A_2 = \frac{1}{8} (d_2 - d_1)^2,$$

$$\text{имеем: } x^2 - 2A_1 x + A_2 = 0,$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2}.$$

Рассмотрим геометрический смысл введенного параметра A_1 . Для этого представим зависимость, определяющую этот параметр в виде

$$2A_1 = \frac{1}{2} [L - \pi d_c],$$

где $d_c = \frac{d_1 + d_2}{2}$ — средний диаметр шкивов.

Из рисунка 99 видно, что правая часть рассматриваемой зависимости выражает межцентровое расстояние передачи с одинаковыми шкивами, диаметры которых равны среднему

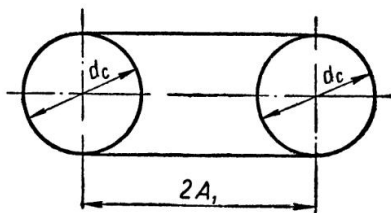


Рис. 99.

арифметическому действительных диаметров шкивов. Параметр A_1 является половиной этого расстояния.

В последнем можно убедиться непосредственно из рассмотрения решения квадратного уравнения. Действительно, при $d_1 = d_2 = d_c$, $A_2 = 0$ и, если перед корнем взять знак плюс, то

$$x = 2A_1.$$

При разных диаметрах шкивов второй параметр в решении дает уменьшение межцентрового расстояния в результате наклона ветвей ремня. Знак минус перед корнем не отвечает условию задачи, так как хотя оба корня и будут положительными при $A_1 > 0$ и $A_2 \geq 0$, что всегда имеет место в реальных передачах, но при малых углах наклона ветвей ремня, когда только выведенное уравнение и будет справедливым при принятых допущениях, действительное межцентровое расстояние не может быть меньше A_1 . Следовательно,

$$x = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2}.$$

При проектировании клиноременных передач расчет обычно производят в следующей последовательности:

1) из условия обеспечения требуемого передаточного отношения и передачи необходимой мощности определяют диаметры шкивов, округляя полученные значения до стандартных;

2) по конструктивным соображениям задаются межцентровым расстоянием;

3) расчетом находят необходимую длину ремня;

4) округляют расчетную длину ремня до стандартного значения;

5) считая длину ремня заданной, рассчитывают окончательное межцентровое расстояние.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть диаметры шкивов $d_1 = 200$ мм; $d_2 = 560$ мм и предварительно заданное межцентровое расстояние $x_1 = 600$ мм.

Необходимая длина ремня:

$$\begin{aligned} L_1 &= 2x_1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4x_1} + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) = \\ &= 2 \cdot 600 + \frac{(560 - 200)^2}{4 \cdot 600} + \frac{\pi}{2}(560 + 200) \approx 2440 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Ближайшие стандартные длины клиновых ремней по ГОСТу 1284-57: 1700 мм; 1800 мм; 1900 мм; 2000 мм; 2120 мм; 2240 мм; 2360 мм; 2500 мм; 2650 мм и т. д. (ГОСТ охватывает длины от 500 до 14 000 мм). Принимаем, округляя до стандартного значения, длину ремня $L = 2500$ мм.

Параметры:

$$A_1 = \frac{1}{4} \left[L - \frac{\pi}{2} (d_2 + d_1) \right] = \frac{1}{4} \left[2500 - \frac{\pi}{2} (560 + 200) \right] \approx 326,5,$$

$$A_2 = \frac{1}{8} (d_2 - d_1)^2 = \frac{1}{8} (560 - 200)^2 \approx 16\,200.$$

Уточненное межцентровое расстояние:

$$x = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2} \approx 326,5 + \sqrt{326,5^2 - 16\,200} \approx 627,2 \text{ мм.}$$

59. При падении груз пройдет путь:

$$H = h + \Delta l.$$

Работа силы тяжести на этом пути:

$$A = QH = Q(h + \Delta l).$$

В процессе удара вся работа перейдет в потенциальную энергию растяжения стержня, т. е. $A = \Pi_p$,

$$\text{или } Q \left(h + \frac{\sigma l}{E} \right) = \frac{\sigma^2 Fl}{2E},$$

$$\text{откуда } \sigma^2 - 2 \frac{Q}{F} \sigma - 2 \frac{Q}{F} \cdot \frac{h}{l} E = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\sigma_{1,2} = \frac{Q}{F} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{F^2} + 2 \frac{Q}{F} \cdot \frac{h}{l} E}.$$

Так как напряжение в рассматриваемый момент полного растяжения стержня не может быть отрицательным, то

$$\sigma = \sigma_1 = \frac{Q}{F} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{EF \cdot h}{Ql}} \right).$$

Напряжения в стержне при статическом приложении силы Q , равной весу груза: $\sigma_0 = \frac{Q}{F}$.

Удлинение стержня под действием той же силы:

$$\Delta l_0 = \frac{lQ}{EF}.$$

После простейших преобразований для определения напряжений в стержне при ударе груза имеем:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{\Delta l_0}} \right).$$

Если величина Δl_0 мала по сравнению с h , то напряжения в стержне при ударе во много раз больше напряжений при статическом приложении такой же силы. Это указывает на опасность динамических нагрузок для прочности конструкций. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим числовой пример, приняв

$$Q = 50 \text{ кг}; F = 1 \text{ см}^2;$$

$$l = 800 \text{ мм}; h = 500 \text{ мм} \text{ и } E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

В этом случае

$$\sigma_0 = \frac{Q}{F} = \frac{50}{1} = 50 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\Delta l_0 = \frac{Ql}{EF} = \frac{50 \cdot 80}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см},$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{\Delta l_0}} \right) = 50 \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{500}{2 \cdot 10^{-3}}} \right) \approx \\ &\approx 11250 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \end{aligned}$$

Такие высокие напряжения могут выдержать только стержни из высокопрочных сталей.

60. При деформации бруса в пределах упругости его жесткость: $c = \frac{P}{\delta}$,

где δ — прогиб середины бруса под действием силы P .

Высота падения груза с учетом прогиба бруса после удара:

$$H = h + \delta = h + \frac{P}{c}.$$

Работа силы тяжести на этом пути: $A = QH$.

При ударе вся эта работа перейдет в потенциальную энергию изгиба бруса, т. е. $A = \Pi$,

$$\text{или } \frac{P^2}{2c} = Q \left(h + \frac{P}{c} \right).$$

После простейших преобразований $P^2 - 2QP - 2Qch = 0$,

$$\text{откуда } P = Q \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2ch}{Q}} \right).$$

Если перед корнем взять знак минус, то сила P получается отрицательной, что не имеет физического смысла в данном случае, следовательно,

$$P = Q \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2ch}{Q}} \right),$$

$$\text{или } P = k_d Q,$$

где k_d — коэффициент динамичности.

Коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2ch}{Q}}$$

показывает, во сколько раз сила P больше веса груза Q .

В упругой области деформации бруса и напряжения в нем будут пропорциональны действующей силе, следовательно, $\delta = \delta_0 k_d$ и $\sigma = \sigma_0 k_d$,

где σ_0 — напряжения в бруссе при действии статически приложенной силы Q ; δ_0 — деформации бруса при действии той же силы Q .

Из формулы для определения коэффициента динамичности видно, что он зависит от жесткости c . Чем меньше жесткость, тем коэффициент динамичности будет также меньше, т. е. тем мягче будет удар. Для смягчения ударов вводят упругие элементы в виде пружин и рессор.

В рассматриваемом случае коэффициент динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 500 \cdot 50}{20}} \approx 51$$

и

$$P = k_d Q \approx 51 \cdot 20 = 1020 \text{ кг}.$$

61. Вертикальное положение диагонали BD пласта (рис. 48,б) является предельным, при котором пласт не заваливается обратно в борозду. Из подобия треугольников BDE и BAC следует, что $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BE}$,

так как $BC = b$; $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$; $BE = b$ и $AC = a$,

$$\text{то } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{b},$$

$$\text{или } b^2 = a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Разделим обе части этого равенства на a^2 и введем обозначение:

$$x = \frac{b}{a},$$

тогда

$$x^2 = \sqrt{1 + x^2},$$

или

$$x^4 - x^2 - 1 = 0.$$

Введем новое неизвестное: $t = x^2$, тогда полученное биквадратное уравнение сведется к квадратному: $t^2 - t - 1 = 0$, решение которого дает:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Знак минус перед вторым слагаемым не удовлетворяет условию задачи, так как решение не может быть мнимым, поэтому

$$t = t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Отбрасываем отрицательное значение корня, как не удовлетворяющее условию, и окончательно получаем:

$$\frac{b}{a} = x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,27.$$

Величина x зависит от конструкции плуга, размеры которого обычно подбираются так, чтобы $1,27 < x < 2$.

62. Обозначим расход воды в трубе B через q_1 , в трубе C через q_2 .

$$\text{Потеря напора в трубе } B: h_1 = 0,083 \lambda_1 L_1 \frac{q_1^2}{d_1^5},$$

$$\text{в трубе } C: h_2 = 0,083 \lambda_2 L_2 \frac{q_2^2}{d_2^5}.$$

По условию задачи потеря напора в параллельных ветвях трубопровода должна быть одинаковой, следовательно, $h_1 = h_2$,

$$\text{или } \lambda_1 L_1 \frac{q_1^2}{d_1^5} = \lambda_2 L_2 \frac{q_2^2}{d_2^5}.$$

Расход воды в трубопроводе: $q = q_1 + q_2$.

Таким образом, искомые величины q_1 и q_2 могут быть найдены из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} q_2^2 = \frac{\lambda_1 L_1}{\lambda_2 L_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5 q_1^2, \\ q_1 + q_2 = q. \end{cases}$$

Для сокращения письма введем обозначение:

$$\text{тогда } A = \frac{\lambda_1 L_1}{\lambda_2 L_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5,$$

$$\begin{cases} q_2^2 = A q_1^2, \\ q_1 + q_2 = q. \end{cases}$$

Решая второе уравнение относительно q_2 и подставляя полученное значение в первое уравнение системы, получаем:

$$(q - q_1)^2 = A \cdot q_1^2,$$

или, извлекая из обеих частей квадратные корни,

$$q - q_1 = \pm \sqrt{A} \cdot q_1,$$

откуда количество воды, протекающей в единицу времени через трубу B_1 :

$$q_1 = \frac{q}{1 \pm \sqrt{A}}.$$

Количество воды, протекающей в единицу времени через трубу C : $q_2 = q - q_1$,

$$\text{или } q_2 = q - \frac{q}{1 \pm \sqrt{A}} = \frac{\pm \sqrt{A}}{1 \pm \sqrt{A}} q.$$

Перед корнем следует взять знак плюс, так как в противном случае расход воды через одну из труб будет отрицательным, что не удовлетворяет условию задачи, тогда

$$q_1 = \frac{q}{1 + \sqrt{A}} \text{ и } q_2 = \frac{\sqrt{A}}{1 + \sqrt{A}} q.$$

Отрицательное значение $q_{1,2}$ показывает, что направление течения воды в соответствующей трубе обратно заданному.

В рассматриваемом случае

$$A = \frac{\lambda_1 L_1}{\lambda_2 L_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5 = \frac{0,04 \cdot 30}{0,03 \cdot 50} \left(\frac{100}{50} \right)^5 \approx 25,6;$$

$$\sqrt{A} \approx \sqrt{25,6} \approx 5,06; \quad q_1 = \frac{25}{1 + 5,06} \approx 4,13 \frac{\text{л}}{\text{сек}}$$

$$\text{и } q_2 = \frac{5,06}{1 + 5,06} 25 \approx 20,87 \frac{\text{л}}{\text{сек}}.$$

Для проверки числовых результатов воспользуемся вторым уравнением системы. После подстановки полученных значений расходов имеем:

$$q = 4,13 + 20,87 = 25 \frac{\text{л}}{\text{сек}}.$$

63. Разность высот точек подвеса можно определить непосредственно из заданной зависимости, которую представим в виде

$$\frac{H}{2q l^2} h^2 - \frac{h}{2} + \frac{q l^2}{8H} - f = 0,$$

$$\text{или } h^2 - 2 \frac{q l^2}{2H} h + \frac{q^2 l^4}{4H^2} - \frac{2q l^2 f}{H} = 0,$$

$$\text{откуда } \left(h - \frac{q l^2}{2H} \right)^2 = \frac{2q l^2 f}{H}.$$

Извлечем из обеих частей квадратные корни, тогда

$$h - \frac{q l^2}{2H} = \pm l \sqrt{\frac{2q f}{H}}$$

и

$$h = \frac{q l^2}{2H} \pm l \sqrt{\frac{2q f}{H}}.$$

Учитывая, что высота второй точки подвеса над уровнем воды $h_2 = h_1 + h$,

$$\text{окончательно имеем: } h_2 = h_1 \pm \frac{q l^2}{2H} + l \sqrt{\frac{2q f}{H}}.$$

В рассматриваемом случае

$$h_2 = 15 + \frac{2 \cdot 200^2}{2 \cdot 1000} \pm 200 \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{1000}} \approx 55 \pm 28,3$$

и оба корня $h'_2 = 83,3$ м и $h''_2 = 26,7$ м удовлетворяют условию задачи. Так как вторую опору желательно иметь возможно меньших размеров, то следует принять:

$$h_2 = 26,7 \text{ м.}$$

64. Для определения глубины шахты H и времени падения камня τ имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} H = \frac{g \tau^2}{2}, \\ H = c(t - \tau). \end{cases} \quad (1)$$

Исключая H , получаем:

$$\frac{g \tau^2}{2} = c(t - \tau),$$

$$\text{или } \tau^2 + \frac{2c}{g} \tau - \frac{2ct}{g} = 0,$$

$$\text{откуда } \tau_{1,2} = -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}}.$$

Время падения камня не может быть отрицательным, следовательно,

$$\tau = \tau_1 = \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}} - \frac{c}{g} = \frac{c}{g} \left[\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}} - 1 \right]. \quad (2)$$

Подставляя найденное время τ во второе уравнение системы (1), найдем глубину шахты:

$$H = c \left[t - \frac{c}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}} - 1 \right) \right]. \quad (3)$$

Рассмотрим числовой пример, приняв $t = 5 \text{ сек}$; $c = 340 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$
и $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$.

При этих значениях исходных величин время падения камня

$$\tau = \frac{340}{9,81} \left[\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 5}{340}} - 1 \right] \approx 4,68 \text{ сек.}$$

Для определения глубины шахты, когда время падения камня известно, проще всего воспользоваться первым уравнением системы (1), тогда

$$H = \frac{9,81 \cdot 4,68^2}{2} \approx 108 \text{ м.}$$

В тех случаях, когда требуется найти только глубину шахты, удобней использовать формулу (3).

65. Высота, потерянная парашютистом при свободном падении: $H_1 = \frac{g t_1^2}{2}$.

Остаток пути, пройденный на парашюте: $H_2 = v t_2$.

Учитывая, что $H = H_1 + H_2$, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{g t_1^2}{2} + v t_2 = H, \\ t_1 + t_2 = t_0, \end{cases}$$

откуда, исключая t_2 , после простейших преобразований

$$t_1^2 - \frac{2v}{g} t_1 - \frac{2}{g} (H - v t_0) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем время опускания без парашюта:

$$t_1 = \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2(H - v t_0)}{g}}.$$

При мгновенном раскрытии парашюта $H = v t_0$.

Если имеет место затяжной прыжок, то $H > v t_0$.

В последнем случае условию задачи удовлетворяет только один корень:

$$t_1 = \frac{v}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2g(H - v t_0)}{v^2}} \right],$$

так как если перед корнем взять знак минус, то время опускания без парашюта будет отрицательным.

После подстановки числовых значений

$$t_1 = \frac{7}{9,81} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9,81 (5000 - 7 \cdot 300)}{7^2}} \right] \approx 25 \text{ сек.}$$

Время опускания на парашюте:

$$t_2 = t_0 - t_1 \approx 300 - 25 = 275 \text{ сек.}$$

66. Вес детали:

$$P = \gamma V = \frac{\gamma \pi}{4} (d^2 x + D^2 y),$$

где x и y — соответственно длина участков детали диаметром d и D .

Расстояние от торца цилиндрического участка диаметром D до центра тяжести детали:

$$a = \frac{\gamma \frac{\pi}{4} \left[\frac{D^2 y^2}{2} + d^2 x \left(\frac{x}{2} + y \right) \right]}{P}.$$

После преобразований получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{4 P}{\pi \gamma d^2} = x + \frac{D^2}{d^2} y, \\ \frac{4 a P}{\pi \gamma d^2} = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{d^2} y^2. \end{cases}$$

Исключая из уравнений x , имеем:

$$y^2 - 2Ay + B = 0,$$

где для сокращения введены параметры:

$$A = \frac{4P}{\pi \gamma D^2} \text{ и } B = A \frac{A \frac{D^2}{d^2} - 2a}{\frac{D^2}{d^2} - 1}.$$

Параметр A имеет простой геометрический смысл. Он представляет высоту цилиндра диаметром D , имеющего вес P .

Решая полученное квадратное уравнение, находим длину участка диаметром D :

$$y = A \pm \sqrt{A^2 - B},$$

или после преобразований

$$y = A \left[1 \pm \sqrt{\frac{\frac{2a}{A} - 1}{\frac{D^2}{d^2} - 1}} \right].$$

Так как $2a > A$ и $D > d$, то оба корня вещественные, но A должно быть больше y . В противном случае вес детали при принятой конструкции будет больше P . Следовательно,

$$y = A \left[1 - \sqrt{\frac{\frac{2a}{A} - 1}{\frac{D^2}{d^2} - 1}} \right].$$

Длину участка детали диаметром d найдем из первого уравнения системы:

$$x = \frac{D^2}{d^2} A - \frac{D^2}{d^2} y = \frac{D^2}{d^2} (A - y).$$

При заданных числовых значениях

$$A = \frac{4 \cdot 85 \cdot 10^3}{\pi \cdot 7,85 \cdot 18^2} \approx 42,6 \text{ см};$$

$$y \approx 42,6 \left[1 - \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 28}{42,6} - 1}{\frac{18^2}{10^2} - 1}} \right] \approx 26,6 \text{ см};$$

$$x \approx \frac{18^2}{10^2} (42,6 - 26,6) \approx 52 \text{ см}.$$

ПРОГРЕССИИ

67. Длина витка первого слоя (по средней линии) $\pi(D + d)$.

Длина витка каждого из последующих слоев на $2\pi d$ больше предыдущего.

Длина всех витков первого слоя $\pi m(D + d)$.

Длина всех витков каждого из последующих слоев на $2\pi dm$ больше предыдущего. Очевидно, общая длина каната представится суммой первых n членов арифметической прогрессии, разность которой суть $2\pi dm$.

Первый член прогрессии $\pi m(D + d)$.
 n -й член прогрессии:

$$\pi m(D + d) + (n - 1)2\pi dm = \pi m[D + (2n - 1)d].$$

Общая длина каната:

$$L = \frac{\pi m(D + d) + \pi m[D + (2n - 1)d]}{2} \cdot n = \pi mn(D + nd).$$

68. Из подобных треугольников ABC и AB_1C_1 имеем:

$$B_1C_1 = BC \frac{AB_1}{AB} = h \frac{l}{nl} = \frac{h}{n};$$

из $\triangle ABC$ и $\triangle AB_2C_2$ имеем:

$$B_2C_2 = BC \frac{AB_2}{AB} = h \frac{2l}{nl} = \frac{2h}{n};$$

.....

из $\triangle ABC$ и $\triangle AB_{n-1}C_{n-1}$ имеем:

$$B_{n-1}C_{n-1} = BC \frac{AB_{n-1}}{AB} = h \frac{(n-1)l}{nl} = \frac{(n-1)h}{n}.$$

Сумма длин всех стоек:

$$\begin{aligned} L &= B_1C_1 + B_2C_2 + \dots + B_{n-1}C_{n-1} = \\ &= \frac{(n-1) \left[\frac{h}{n} + (n-1) \frac{h}{n} \right]}{2} = h \frac{(n-1)}{2} = 1 \frac{5-1}{2} = 2 \text{ м.} \end{aligned}$$

69. Обозначим искомое время через x минут. Так как компрессор делает в минуту $n=150$ оборотов, то количество воздуха, поданное в ресивер в течение одной минуты $V_{\text{мин}} = n \cdot \Delta V$.

Общий объем воздуха, поданного в ресивер за вре-

мя x минут вместе с тем воздухом, который был в ресивере до начала работы компрессора, представится последним $(x + 1)$ членом арифметической прогрессии, где первый член $-V_p$, а разность прогрессии $-V_{мин}$:

$$V = V_p + xV_{мин}.$$

Но в ресивере этот воздух сожмется до объема V_p , причем его давление вырастет.

При постоянной температуре по закону Бойля—Мариотта

$$PV_p = P_0 V,$$

где $P_0 = 1 \text{ атм}$ — атмосферное давление.

$$\text{Таким образом, } V = \frac{p}{p_0} V_p, \text{ или } V_p + xV_{мин} = \frac{p}{p_0} V_p,$$

откуда

$$x = \frac{V_p}{V_{мин}} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) = \frac{V_p}{n \cdot \Delta V} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) = \frac{100}{150 \cdot 0,5} \left(\frac{4}{1} - 1 \right) = 4 \text{ мин.}$$

70. Пусть n — количество звеньев цепи. Усилие при подъеме первого звена: $P_1 = \frac{Q}{2n}$. Работа на подъем первого звена: $A_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{n} \frac{L}{n} = \frac{QL}{2n^2}$. Второе звено: $P_2 = \frac{Q}{2n} + \frac{Q}{n}$; $A_2 = \frac{QL}{2n^2} + \frac{QL}{n^2}$.

Третье звено: $P_3 = \frac{Q}{2n} + 2 \frac{Q}{n}$; $A_3 = \frac{QL}{2n^2} + 2 \frac{QL}{n^2}$.

.....

n -е звено: $P_n = \frac{Q}{2n} + (n-1) \frac{Q}{n}$; $A_n = \frac{QL}{2n^2} + (n-1) \frac{QL}{n^2}$.

Работа, затраченная на подъем всей цепи, представится в виде суммы n членов арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \frac{A_1 + A_n}{2} \cdot n = \\ &= \frac{QL}{n^2} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n - 1}{2} n = \frac{QL}{2}. \end{aligned}$$

71. Радон, помещенный в запаянную ампулу, будет убывать вследствие распада по закону геометрической про-

грессии, первый член которой $N_0 = 0,5 \text{ кг}$, знаменатель $q = \frac{1}{2}$, а число членов $n = \frac{t}{T} + 1 = \frac{38,25}{3,825} + 1 = 11$. Количество радона в ампуле через $t = 38,25$ суток будет равно последнему (одиннадцатому) члену этой прогрессии:

$$N = N_0 q^{n-1} = 0,5 \cdot 0,5^{11-1} \approx 0,00049 \text{ кг}.$$

Заметим, что полученное равенство было бы справедливым и в том случае, если бы t не делилось на T нацело. Вообще равенство

$$N = N_0 q^{n-1} = N_0 \cdot 0,5^{\frac{t}{T}}$$

тождественно основному уравнению радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где $e = 2,7183$ — основание натуральных логарифмов; λ — постоянная радиоактивного распада, равная для радона $2,097 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{сек}}$.

В тождественности указанных равенств читатель легко может убедиться самостоятельно.

72. Натяжения в ветвях полиспаста:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{P}{k}, \\ S_2 = \frac{P}{k^2}, \\ \dots \\ S_n = \frac{P}{k^n}. \end{array} \right.$$

Получаем геометрическую прогрессию, знаменатель которой $\frac{1}{k}$, а число членов с учетом ходового конца $(n+1)$.

Приложенная к нижней обойме сила Q уравновешивается суммой натяжений ветвей и ходового конца каната:

$$Q = P + S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{P - \frac{P}{k^{n+1}}}{1 - \frac{1}{k}} = P \frac{k^{n+1} - 1}{k^n (k - 1)},$$

откуда
$$P = Q \frac{k^n (k - 1)}{k^{n+1} - 1}.$$

73. Натяжения ветвей полиспаста:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{P}{k}, \\ S_2 = \frac{P}{k^2}, \\ \dots \\ S_n = \frac{P}{k^n}. \end{array} \right.$$

Получаем геометрическую прогрессию, знаменатель которой $\frac{1}{k}$, а число членов n .

Сила Q , приложенная к нижней обойме, уравнивается суммой натяжений ветвей:

$$Q = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{\frac{P}{k} - \frac{P}{k^{n+1}}}{1 - \frac{1}{k}} = P \frac{k^n - 1}{k^n(k - 1)},$$

откуда

$$P = S_n k^n = 243 \cdot 1,02^4 \approx 263 \text{ кг};$$

$$Q = S_n \frac{k^n - 1}{k - 1} = 243 \frac{1,02^4 - 1}{1,02 - 1} \approx 1000 \text{ кг}.$$

74. Расход в первую секунду:

$$q_1 = AH_1.$$

Расход во вторую секунду:

$$q_2 = AH_2 = A \left(H_1 - \frac{q_1}{F} \right) = AH_1 \left(1 - \frac{A}{F} \right).$$

Расход в третью секунду:

$$q_3 = AH_3 = A \left(H_2 - \frac{q_2}{F} \right) = A \left[H_1 \left(1 - \frac{A}{F} \right) - H_1 \frac{A}{F} \left(1 - \frac{A}{F} \right) \right] = AH_1 \left(1 - \frac{A}{F} \right)^2.$$

Расход в четвертую секунду:

$$\begin{aligned} q_4 = AH_4 &= A \left(H_3 - \frac{q_3}{F} \right) = A \left[H_1 \left(1 - \frac{A}{F} \right)^2 - H_1 \frac{A}{F} \left(1 - \frac{A}{F} \right)^2 \right] = \\ &= AH_1 \left(1 - \frac{A}{F} \right)^3. \end{aligned}$$

Расход в t -ю секунду:

$$q_t = AH_1 \left(1 - \frac{A}{F}\right)^{t-1}.$$

Замечаем, что секундный расход уменьшается по убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\left(1 - \frac{A}{F}\right)$, первый член $q_1 = AH_1$, последний член $q_t = AH_1 \left(1 - \frac{A}{F}\right)^{t-1}$. Общий расход выразится суммой первых t членов этой прогрессии:

$$Q = \frac{AH_1 - AH_1 \left(1 - \frac{A}{F}\right)^{t-1} \left(1 - \frac{A}{F}\right)}{1 - \left(1 - \frac{A}{F}\right)} = AH_1 \frac{1 - \left(1 - \frac{A}{F}\right)^t}{\frac{A}{F}} =$$

$$= FH_1 \left[1 - \left(1 - \frac{A}{F}\right)^t\right].$$

Так как $FH_1 = V_1$ — первоначальный объем жидкости в баке, формулу можно переписать в следующем виде:

$$Q = V_1 \left[1 - \left(1 - \frac{A}{F}\right)^t\right]^*.$$

ЛОГАРИФМЫ

75. По условию задачи: $\frac{V_2}{V_1} = 5$, $T = 100 + 273 = 373^\circ$,

поэтому $A = 29,27 \cdot 373 \ln 5 \approx 17\,600 \frac{\kappa\Gamma_m}{\kappa\Gamma}$.

76.
$$nh = \left(\frac{c}{R + mA}\right)^{\frac{1}{0.3}},$$

* При $A \leq \frac{1}{2}F$ и $t \geq 10$ сек, т.е. в подавляющем большинстве практических случаев, погрешность выведенной приближенной формулы по сравнению с точной формулой, полученной на основе интегрального исчисления

$$Q = V_1 \left(1 - e^{-\frac{A}{F}t}\right),$$

не превышает 1%.

откуда

$$\begin{aligned}\lg(nh) &= \frac{1}{0,3} \lg \left(\frac{c}{R + mA} \right) = \\ &= \frac{1}{0,3} \lg \left(\frac{210\,000}{700 + 1,5 \cdot 100} \right) \approx 7,9760,\end{aligned}$$

тогда $nh \approx 94\,600\,000$.

Долговечность подшипника: $h \approx \frac{94\,600\,000}{5000} \approx 18\,900$ час.

77. Логарифмируя формулу для определения коэффициента работоспособности, получаем:

$$\lg c = \lg A + 0,3 \lg(nh) = \lg 1000 + 0,3 \lg(700 \cdot 10\,000) \approx \\ \approx 3 + 0,3 \cdot 6,845 \approx 5,05,$$

откуда $c \approx 112\,000$.

По коэффициенту работоспособности выбираем из таблицы подшипник № 8217.

78. Логарифмируя формулу, получаем:

$$\lg v_{\text{эк}} \approx \lg 55,6 - 0,26 \lg t - 0,66 \lg S = \lg 55,6 - \\ - 0,26 \lg 1,5 - 0,66 \lg 0,3 \approx 2,044,$$

откуда $v_{\text{эк}} \approx 110,6 \frac{\text{м}}{\text{мин}}$.

79. Логарифмируя формулу, получаем:

$$\lg v_{\text{эк}} = \lg 32,6 - 0,16 \lg t - 0,38 \lg S = \lg 32,6 - 0,16 \lg 2 - \\ - 0,38 \lg 0,4 \approx 1,616,$$

откуда $v_{\text{эк}} \approx 41,3 \frac{\text{м}}{\text{мин}}$.

80. Логарифмируя формулу, получаем:

$$\begin{aligned}\lg S_{\text{max}} &= \frac{1}{y_p} (\lg 2000 + \lg M - \lg C_p - x_p \lg t - \lg D) = \\ &= \frac{1}{0,78} (\lg 2000 + \lg 30 - \lg 157 - 1 \cdot \lg 5 - \lg 50) \approx 0,3643,\end{aligned}$$

откуда $S_{\text{max}} \approx 2,3 \frac{\text{мм}}{\text{об}}$.

81. Составляем систему показательных уравнений:

$$\begin{cases} 97,5 = C_p \cdot 2^{x_p} \cdot 0,2^{y_p}; \\ 200 = C_p \cdot 3^{x_p} \cdot 0,3^{y_p}; \\ 419 = C_p \cdot 5^{x_p} \cdot 0,4^{y_p}. \end{cases}$$

После логарифмирования получаем систему:

$$\begin{cases} 1,989 \approx \lg C_p + 0,301 x_p - 0,699 y_p; \\ 2,302 \approx \lg C_p + 0,477 x_p - 0,523 y_p; \\ 2,622 \approx \lg C_p + 0,699 x_p - 0,398 y_p. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\lg C_p \approx 2,233; \quad C_p \approx 171; \quad x_p \approx 1; \quad y_p \approx 0,78.$$

$$82. \quad Q = \frac{2 \pi \lambda L (t_{\text{вн}} - t_{\text{н}})}{2,3 \lg \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{вн}}}} = \frac{2 \pi 49 \cdot 5 (70 - 68)}{2,3 \lg \frac{25}{20}} \approx 13800 \frac{\text{ккал}}{\text{час}}.$$

$$83. \quad \text{Из формулы} \quad Q = \frac{2 \pi \lambda L (t_{\text{вн}} - t_{\text{н}})}{2,3 \lg \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{вн}}}}$$

получаем:

$$\lg \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{вн}}} = \frac{2 \pi \lambda L (t_{\text{вн}} - t_{\text{н}})}{2,3 Q} = \frac{2 \pi 100 \cdot 4 (100 - 95)}{2,3 \cdot 40\,000} \approx 0,1365,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{вн}}} \approx 1,37.$$

$$\text{Внутренний диаметр:} \quad d_{\text{вн}} = \frac{d_{\text{н}}}{1,37} = \frac{10}{1,37} \approx 7,3 \text{ мм.}$$

$$\text{Толщина стенки трубы:} \quad S = \frac{d_{\text{н}} - d_{\text{вн}}}{2} = \frac{10 - 7,3}{2} \approx 1,35 \text{ мм.}$$

$$84. \quad \lg P = \lg \alpha + \lg \rho + 2 \lg n_s + 4 \lg D = \lg 0,18 + \\ + \lg 0,125 + 2 \lg 25 + 4 \lg 2,1 \approx 2,4368,$$

$$\text{откуда} \quad P \approx 273,4 \text{ кг.}$$

$$\lg N = \lg \beta + \lg \rho + 3 \lg n_s + 5 \lg D = \lg 0,28 + \lg 0,125 + \\ + 3 \lg 25 + 5 \lg 2,1 \approx 4,3488,$$

$$\text{откуда} \quad N = 22\,330 \frac{\text{кгм}}{\text{сек}} \approx 298 \text{ л. с.}$$

85. Подставляем в формулу числовые значения:

$$\lg \lg(v + 0,8) = 25,44 - 10,39 \lg 293,$$

или

$$\lg \lg(v + 0,8) = 25,44 - 10,39 \cdot 2,467 \approx -0,215 = \\ = \bar{1},785,$$

$$\text{затем потенцируем:} \quad \lg(v + 0,8) \approx 0,610,$$

$$\text{потенцируя еще раз, получим:} \quad v + 0,8 \approx 4,07,$$

$$\text{отсюда} \quad v \approx 3,27.$$

НЕРАВЕНСТВА

86. Из неравенства $\frac{N}{F} \leq [\sigma]$ получаем: $F \geq \frac{N}{[\sigma]}$,

но $F = \frac{\pi d^2}{4}$, следовательно,

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4000}{\pi \cdot 1600}} \approx 1,785 \text{ см.}$$

87. Из неравенства $\frac{Pl}{W} \leq [\sigma]$ получаем:

$$P \leq \frac{W[\sigma]}{l} = \frac{80,5 \cdot 1600}{150} \approx 858 \text{ кг.}$$

88. Суммарное напряжение, действующее в стержне:

$$\sigma = \sigma_{\text{из}} + \sigma_{\text{сж.}}$$

По условиям прочности действующее напряжение должно быть меньше или равно допустимому, т. е.

$$[\sigma] \geq \sigma = \sigma_{\text{из}} + \sigma_{\text{сж.}}$$

После подстановки вместо напряжений изгиба и сжатия их значений получаем:

$$[\sigma] \geq \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W},$$

откуда
$$P \leq \frac{[\sigma]}{\frac{1}{F} + \frac{e}{W}},$$

или
$$P \leq \frac{[\sigma] F}{1 + \frac{eF}{W}}.$$

Последняя формула находит применение при расчете прямых стержней, нагруженных эксцентрично приложенной силой.

89. Из неравенства

$$\frac{G_K(l_k + b) - G\delta(l - b)}{P(l - b)} \geq 1,4$$

получаем:
$$P \leq \frac{G_K(l_k + b) - G\delta(l - b)}{1,4(l - b)}.$$

90. По условию задачи должно выполняться неравенство $\Delta U^0/0 \leq 5^0/0$,

$$\text{или } \frac{Sl}{U^2} \left(\frac{a}{s} + b \right) \leq 5,$$

$$\text{откуда } s \geq \frac{a}{\frac{U^2}{Sl} \cdot 5 - b} = \frac{1430}{\frac{0,22^2 \cdot 5}{0,01 \cdot 0,5} - 24} \approx 58,7 \text{ мм}^2.$$

91. Силу веса P разложим на две составляющие (рис. 68), параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости:

$$\begin{aligned} T &= P \sin \alpha; \\ N &= P \cos \alpha. \end{aligned}$$

Сила трения: $F = Nf = Pf \cos \alpha$.

а) Условие движения: $T > F$,

$$\text{или } P \sin \alpha > Pf \cos \alpha,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha > f$.

Таким образом, для движения тела по наклонной плоскости тангенс угла наклона плоскости должен быть больше коэффициента трения.

б) Условие равновесия $T \leq F$,

$$\text{или } P \sin \alpha \leq Pf \cos \alpha,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha \leq f$.

Для равновесия тела на наклонной плоскости тангенс угла наклона плоскости должен быть меньше или равен коэффициенту трения между телом и плоскостью.

92. Сила трения на одной колодке: $F = Nf$.

Момент трения: $M_T = FD = NfD$.

После подстановки значения M_T в неравенство $M_T \geq \beta N$ получим: $NfD \geq \beta M$,

$$\text{откуда } N \geq \frac{\beta M}{fD} = \frac{1,75 \cdot 3000}{0,15 \cdot 50} = 700 \text{ кг}.$$

93. а) Условия подъема: $P > G$, или $\alpha \rho n_s^2 D^4 > G$, откуда

$$n_s > \sqrt{\frac{G}{\alpha \rho D^4}}.$$

б) Условия неподвижного висения: $P = G$, или $\alpha \rho n_s^2 D^4 = G$,

$$\text{откуда } n_s = \sqrt{\frac{G}{\alpha \rho D^4}}.$$

в) Условия спуска: $P < G$, или $\alpha \rho n_s^2 D^4 < G$,

откуда
$$n_s < \sqrt{\frac{G}{\alpha \rho D^4}}.$$

94. а) Режим набора высоты: $Y > G$, или $C_y S \frac{\rho v^2}{2} > G$,

откуда
$$v > \sqrt{\frac{2G}{C_y S \rho}};$$

б) режим горизонтального полета: $Y = G$, или $C_y S \frac{\rho v^2}{2} = G$,

откуда
$$v = \sqrt{\frac{2G}{C_y S \rho}};$$

в) режим снижения: $Y < G$, или $C_y S \frac{\rho v^2}{2} < G$, откуда

$$v < \sqrt{\frac{2G}{C_y S \rho}}.$$

БИНОМ НЬЮТОНА

95. Формулу потери напора в трубе запишем в виде

$$h = \frac{k}{d^5}.$$

Если первоначальный диаметр трубы d мм, то новый диаметр $d_1 = d + 5$ мм. Тогда находим соответствующие этим трубам потери напора:

$$h = \frac{k}{d^5} \quad \text{и} \quad h_1 = \frac{k}{(d+5)^5}.$$

Отношение потерь напора:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{(d+5)^5}{d^5} = \left(1 + \frac{5}{d}\right)^5.$$

Полученное выражение раскроем по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1} &= 1^5 + 5 \cdot 1^4 \frac{5}{d} + 10 \cdot 1^3 \cdot \frac{5^2}{d^2} + 10 \cdot 1^2 \frac{5^3}{d^3} + 5 \cdot 1 \frac{5^4}{d^4} + \\ &+ \frac{5^5}{d^5} = 1 + \frac{25}{d} + \frac{250}{d^2} + \frac{1250}{d^3} + \frac{3125}{d^4} + \frac{3125}{d^5}. \end{aligned}$$

Полученная формула показывает, во сколько раз уменьшится потеря напора h_1 по сравнению с h . Здесь диаметр d следует брать в мм.

$$96. P = \frac{1,02^n (1,02 - 1)}{1,02^n - 1} Q = \frac{1,02^n \cdot 0,02}{(1 + 0,02)^n - 1} Q =$$

$$= \frac{1,02^n \cdot 0,02}{1 + n \cdot 1 \cdot 0,02 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 1 \cdot 0,02^2 + \dots + 0,02^n - 1} Q.$$

Заметим, что $0,02^2 = 0,0004$; $0,02^3 = 0,000008$ и т. д.

Таким образом, члены разложения по формуле Ньютона быстро убывают. Практически достаточно учесть первые три числа разложения, пренебрегая последующими.

Тогда

$$P \approx \frac{1,02^n \cdot 0,02 \cdot Q}{n \cdot 0,02 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0,02^2} = \frac{1,02^n}{n [1 + (n-1)0,01]} Q.$$

Пользование этой приближенной формулой обеспечивает более высокую точность при расчетах, так как в ней нет разности высоких степеней, близких величин $(k^n - 1)^n$, имеющейся в точной формуле и крайне неудобной при вычислениях. В нашем случае

$$P = \frac{1,02^5}{5 [1 + (5-1)0,01]} 1500 \approx 318 \text{ кг}.$$

$$97. T_2 = T_1 + \Delta t, \quad p_2 = p_1 + \Delta p.$$

Подставляя значения T_2 и p_2 в формулу, получаем:

$$\frac{p_1 + \Delta p}{p_1} = \left(\frac{T_1 + \Delta T}{T_1} \right)^{\frac{1,2}{1,2-1}} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1} \right)^6 = 1 + 6 \frac{\Delta t}{T_1} +$$

$$+ 15 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^2 + 20 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^3 + 15 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^5 + \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^6.$$

Так как $\Delta t \ll T_1$, то $\frac{\Delta t}{T_1} \ll 1$, следовательно, все степени $\frac{\Delta t}{T_1}$ выше первой малы сравнительно с единицей и ими можно пренебречь без ущерба для точности расчета.

$$\text{Тогда } \frac{p_1 + \Delta p}{p_1} = 1 + \frac{\Delta p}{p_1} \approx 1 + 6 \frac{\Delta t}{T_1},$$

$$\text{откуда } \Delta P \approx 6 \frac{n_1}{T_1} \Delta t = 6 \frac{2}{300} 5 = 0,2 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}.$$

98. Обозначим через ΔP величину снижения тяги, через ΔN величину снижения мощности, тогда

$$P - \Delta P = \alpha \rho n_s^2 (D - \Delta D)^4 = \alpha \rho n_s^2 (D^4 - 4D^3 \Delta D + 6D^2 \Delta D^2 - 4D \Delta D^3 + \Delta D^4),$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta P &= \alpha \rho n_s^2 (4D^3 \Delta D - 6D^2 \Delta D^2 + 4D \Delta D^3 - \Delta D^4) = \\ &= P \left[4 \frac{\Delta D}{D} - 6 \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^3 - \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$N - \Delta N = \beta \rho n_s^3 (D - \Delta D)^5 = \beta \rho n_s^3 (D^5 - 5D^4 \Delta D + 10D^3 \Delta D^2 - 10D^2 \Delta D^3 + 5D \Delta D^4 - \Delta D^5),$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta N &= \beta \rho n_s^3 (5D^4 \Delta D - 10D^3 \Delta D^2 + 10D^2 \Delta D^3 - 5D \Delta D^4 + \Delta D^5) = N \left[5 \frac{\Delta D}{D} - 10 \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^2 + 10 \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^3 - \right. \\ &\quad \left. - 5 \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^4 + \left(\frac{\Delta D}{D} \right)^5 \right]. \end{aligned}$$

Так как $\frac{\Delta D}{D} \ll 1$, то с точностью, достаточной для нужд практики, можно пренебречь всеми степенями этого отношения, кроме первой. Тогда получим приближенные формулы:

$$\Delta P \approx 4P \frac{\Delta D}{D}; \quad \Delta N \approx 5N \frac{\Delta D}{D}.$$

99. Пусть $Q_2 = Q_1 + \Delta Q$, $T_2 = T_1 - \Delta T$, где ΔT — искомое уменьшение долговечности.

$$\text{Тогда } \frac{T_1}{T_1 - \Delta T} = \left(\frac{Q_1 + \Delta Q}{Q_1} \right)^9 = \left(1 + \frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^9,$$

$$\text{откуда } \Delta T = T_1 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^9} \right] =$$

$$\begin{aligned} &= T_1 \left[1 - \frac{1}{1 + 9 \frac{\Delta Q}{Q_1} + 36 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^2 + 82 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^3 + 126 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + 126 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^5 + 82 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^6 + 36 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^7 + 9 \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^8 + \left(\frac{\Delta Q}{Q_1} \right)^9} \right]. \end{aligned}$$

Если $\frac{\Delta Q}{Q_1} \ll 1$, формула может быть упрощена, так как степени $\frac{\Delta Q}{Q_1}$ выше первой очень малы. В этом случае

$$\Delta T \approx T_1 \left(1 - \frac{1}{1 + 9 \frac{\Delta Q}{Q_1}} \right) = \frac{9 T_1 \frac{\Delta Q}{Q_1}}{1 + 9 \frac{\Delta Q}{Q_1}}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

100. Из рисунка 73 видно, что половина высоты вырезаемого бруса является катетом треугольника OAB и потому $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2$.

$$\text{Отсюда } y = 2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = 2 \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если обозначить прочность бруса при изгибе через W , то из условия задачи можно записать, что $W = kxy^3$, или после соответствующей замены: $W = 8 kx \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}$.

Дифференцируем последнее выражение по x и приравняем к нулю:

$$\frac{dW}{dx} = 8k \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 6kx^2 \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\text{или } 8k \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(R^2 - x^2 \right) = 0.$$

Равенство нулю первой скобки нам дает: $x = 2R = D = 30$ см. Этот ответ не имеет смысла, так как брус такой ширины не будет иметь высоты. Тогда приравняем нулю вторую скобку $R^2 - x^2 = 0$ и получаем ответ: $x = R = 15$ см. В обоих случаях мы брали лишь положительные значения для x .

101. Очевидно, для ответа на вопрос задачи надо взять производную от момента M по углу φ и приравнять ее к нулю, т. е.

$$\frac{dM}{d\varphi} = 2a \sin\varphi \cos^2\varphi - a \sin^3\varphi = 0,$$

$$\text{или } a \sin\varphi (2 \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

Так как по условию задачи $\varphi \neq 0$, то приравняем нулю выражение в скобках: $2 \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$. Решаем это тригонометрическое уравнение и находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35^\circ 16'.$$

$$102. \quad t_0 = t_1 + \frac{H}{v_2} - \frac{gt_1^2}{2v_2}.$$

Первую производную от выражения общего времени по t_1 приравняем нулю: $\frac{dt_0}{dt_1} = 1 - \frac{gt_1}{v_2} = 0$,

откуда $t_1 = \frac{v_2}{g} = \frac{7}{9,8} = 0,714 \text{ сек}$; $\frac{d^2t_0}{dt_1^2} = -\frac{g}{v_2} < 0$, следовательно, имеет место максимум t_0 . Практически это решение означает, что парашют необходимо открывать немедленно после прыжка.

$$103. \text{ По условию задачи } f_1 = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^3}{2ql^2} - \frac{h}{2}.$$

Решим уравнение: $\frac{df_1}{dh} = \frac{Hh}{ql^2} - \frac{1}{2} = 0$, откуда $h = \frac{ql^2}{2H} = \frac{2 \cdot 200^2}{2 \cdot 1000} = 40 \text{ м}$.

Так как $\frac{d^2f_1}{dh^2} = \frac{H}{ql^2} > 0$, то при $h = \frac{ql^2}{2H}$ имеется минимум для f_1 , т.е.

$$f_{1\min} = \frac{ql^2}{8H} + \frac{H}{2ql^2} \cdot \frac{q^2l^4}{4H^2} - \frac{ql^2}{2 \cdot 2H} = 0.$$

Кривая провисания провода показана на рисунке 100.

$$104. \text{ Вес резервуара: } Q = \pi\gamma\delta\left[\frac{D^2}{4} + DH\right], \quad (1)$$

где γ — удельный вес стальных листов; δ — их толщина.

$$\text{Объем резервуара равен: } V = \frac{\pi}{4} D^2 H, \quad (2)$$

откуда $DH = \frac{4V}{\pi D}$. После подстановки в равенство (1)

$$\text{значения } DH \text{ получим: } Q = \pi\gamma\delta\left[\frac{D^2}{4} + \frac{4V}{\pi D}\right].$$

Составляем уравнение: $\frac{dQ}{dD} = \pi \gamma \delta \left[\frac{D}{2} - \frac{4V}{\pi D^2} \right] = 0. \quad (3)$

Выражение $\frac{D}{2} - \frac{4V}{\pi D^2}$ приравняем нулю и диаметр резервуара $D = D_m$, при котором его вес будет иметь максимум или минимум, равен:

$$D_m = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = 2 \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 2,94 \text{ м.} \quad (4)$$

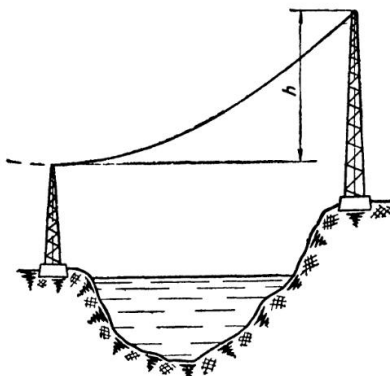


Рис. 100.

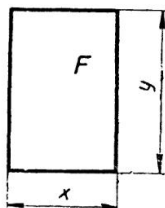


Рис. 101

Вторая производная $\frac{d^2Q}{dD^2} = \pi \gamma \delta \left[\frac{1}{2} + \frac{8V}{\pi D^3} \right]$, при $D > 0$ положительна, т.е. $\frac{d^2Q}{dD^2} > 0$, и потому при $D = D_m$ вес резервуара минимален. Из равенств (2) и (4) находится соответствующая высота резервуара:

$$H_m = \frac{4V}{\pi D_m^2} = \frac{4V}{\pi \cdot 4 \left(\frac{V}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 1,47 \text{ м,}$$

т. е. $H_m = \frac{1}{2} D_m.$

105. Обозначим через x и y стороны прямоугольного сечения (рис. 101). Площадь поперечного сечения:

$$F = x \cdot y. \quad (1)$$

Периметр $P = 2(x + y)$ или, учитывая равенство (1), имеем:

$$P = 2\left(x + \frac{F}{x}\right). \quad (2)$$

Гидравлический радиус трубопровода:

$$R = \frac{F}{P} = \frac{F}{2\left(x + \frac{F}{x}\right)}.$$

По условию задачи потери будут наименьшими, когда гидравлический радиус имеет максимум. Функция, обратная гидравлическому радиусу:

$$u = \frac{F}{R} = 2\left(x + \frac{F}{x}\right), \text{ при этом}$$

должна иметь минимум. Первую производную от u по x $\frac{du}{dx} = 2\left(1 - \frac{F}{x^2}\right)$ приравняем нулю и найдем оптимальное значение $x = x_m$:

$$1 - \frac{F}{x_m^2} = 0 \quad \text{и} \quad x_m = \sqrt{F}. \quad (3)$$

Отрицательный корень не рассматриваем, так как он не имеет физического смысла.

Вторая производная $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4F}{x^3}$ при положительном x также положительна. Следовательно, при $x = x_m$ имеет место минимум функции u и потери напора в трубопроводе. Гидравлический радиус прямоугольного сечения при этом имеет максимум.

Из равенств (1) и (3) непосредственно следует, что вторая сторона трубопровода

$$y_m = \frac{F}{x_m} = \sqrt{F} = x_m.$$

106. Разложим силу P на две составляющие (рис. 102). Горизонтальная составляющая этой силы $P_r = P \cdot \cos \alpha$. Вертикальная составляющая $P_v = P \sin \alpha$. Сила давления груза на площадку: $N = Q - P_v = Q - P \sin \alpha$. Сила трения между грузом и площадкой:

$$F = f \cdot N = f [Q - P \sin \alpha].$$

При равномерном движении груза сила трения равняется горизонтальной составляющей силы P , т. е. $F = P_r$,

или
$$P \cos \alpha = f(Q - P \sin \alpha),$$

откуда
$$P = \frac{fQ}{f \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Сила P имеет максимум, когда знаменатель дроби имеет минимум. При максимуме знаменателя сила P будет минимальной. Исследование на максимум и минимум знаменателя дроби вместо исследования самой дроби позволяет несколько упростить последующие операции. Знаменатель дроби: $u = f \sin \alpha + \cos \alpha$.

Производную от u по α приравняем к нулю:

$$\frac{du}{d\alpha} = f \cos \alpha - \sin \alpha = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha = f$ и угол $\alpha = \alpha_m$, при котором знаменатель дроби имеет максимум или минимум $\alpha_m = \arctg f$.

Вторая производная
$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -f \sin \alpha - \cos \alpha,$$

при $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ отрицательна, поэтому при $\alpha_m = \arctg f$ знаменатель дроби u имеет максимум, а сила P — минимум.

107. Положение крейцкопфа определяется координатой

$$x = OK + KB.$$

Обозначая угол, образованный шатуном с осью x , через β , получаем: $OK = r \cos \varphi$; $KB = l \cos \beta$.

Из треугольника OAB по теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{r}{l},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi; \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

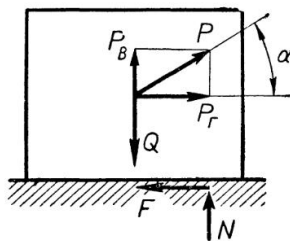


Рис. 102.

Число $\lambda^2 \sin^2 \varphi$ весьма мало по сравнению с единицей: $\lambda^2 = 0,0625$, а $\sin^2 \varphi \leq 1$. В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой, обеспечивающей достаточную для нужд практики точность:

$$\sqrt{1-a} = 1 - \frac{a}{2}, \text{ где } a \ll 1.$$

Таким образом, $\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi$,

тогда $x = r \cos \varphi + l \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi \right)$.

Угол φ , образованный кривошипом с осью x , равен произведению угловой скорости кривошипа ω на время t , т. е. $\varphi = \omega t$.

Следовательно, $x = r \cos \omega t + l \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t \right)$.

Скорость крейцкопфа, а значит, и скорость поршня равна первой производной от координаты x по времени t :

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= -r\omega \sin \omega t - l\lambda^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= -r\omega \sin \omega t (1 + \lambda \cos \omega t). \end{aligned}$$

Найдем максимум скорости. Для этого решим уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -r\omega^2 [\cos \omega t (1 + \lambda \cos \omega t) - \lambda \sin^2 \omega t] = 0,$$

$$\text{или } 2\lambda \cos^2 \omega t + \cos \omega t - \lambda = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2\lambda^2}}{4\lambda} = \frac{\pm \sqrt{1 + 8 \cdot 0,25^2} - 1}{4 \cdot 0,25} = \\ &= \pm \sqrt{1,5} - 1. \end{aligned}$$

Так как $|\cos \omega t|$ не может быть больше единицы, то

$$\cos \omega t = \sqrt{1,5} - 1 \approx 0,225 \text{ и } \omega t \approx \pm 77^\circ.$$

Вторая производная от скорости по времени

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dt^2} &= -r\omega^3 (-2\lambda \cdot 2 \cos \omega t \sin \omega t - \sin \omega t) = \\ &= r\omega^3 (\sin \omega t + 2\lambda \sin 2\omega t) \end{aligned}$$

отрицательна при $\omega t = -77^\circ$. Поэтому при этом значении аргумента скорость имеет максимум:

$$v_{\max} = -r\omega \sin(-77^\circ) [1 + 0,25 \cos(-77^\circ)] \approx 1,03 r\omega.$$

108. Длина n слоев каната, навитого на барабан:
 $L = \pi m n (D + dn)$;

вес n слоев каната, навитого на барабан: $Q_1 = qL =$
 $= \pi m q n (D + nd)$;

натяжение каната: $T = Q - Q_1 + P = Q + P -$
 $-\pi m q n (D + nd)$.

За плечо силы T будем принимать радиус витка $(n+1)$ -го слоя, полагая, что он только начал наматываться. Увеличение плеча при этом происходит без снижения величины силы T :

$$r = \frac{D + [2(n+1) - 1]d}{2} \Rightarrow \frac{D}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)d.$$

Момент силы T относительно оси барабана:

$$\begin{aligned} M = Tr &= \left[Q + P - \pi m q n (D + nd)\right] \left[\frac{D}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)d\right] = \\ &= \frac{(Q + P)(D + d)}{2} - \left[\pi m D \frac{D + d}{2} q - (Q + P)d\right] n - \\ &\quad - \frac{\pi m d (3D + d)q}{2} n^2 - \pi m d^2 q \cdot n^3. \end{aligned}$$

Решим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dn} &= - \left[\pi m D \frac{D + d}{2} q - (Q + P)d\right] - \frac{\pi m d (3D + d)q}{2} \cdot 2n - \\ &\quad - \pi m d^2 q \cdot 3n^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{или } n^2 + \left(\frac{D}{d} + \frac{1}{3}\right)n + \left[\frac{1}{6} \frac{D}{d} \left(\frac{D}{d} + 1\right) - \frac{Q + P}{3\pi m d q}\right] = 0,$$

$$\text{откуда } n = -\frac{1}{2} \left(\frac{D}{d} + \frac{1}{3}\right) \pm$$

$$\begin{aligned} &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{D}{d} + \frac{1}{3}\right)^2 - \left[\frac{1}{6} \frac{D}{d} \left(\frac{D}{d} + 1\right) - \frac{Q + P}{3\pi m d q}\right]} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{12} \frac{D^2}{d^2} + \frac{1}{36} + \frac{Q + P}{3\pi m d q} - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{d} + \frac{1}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Так как отрицательный корень не отвечает условиям задачи, то

$$n = \sqrt{\frac{1}{12} \frac{D^2}{d^2} + \frac{1}{36} + \frac{Q + P}{3\pi m d q} - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{d} + \frac{1}{3}\right)}.$$

Здесь n может получиться дробным, тогда его следует округлить до ближайшего целого числа.

109. Найдем первую производную от прогиба по длине балки и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Pb}{Cl} \left\{ \left[2l(l-x) - b^2 - (l-x)^2 \right] + x \left[-2l + 2(l-x) \right] \right\} = \\ &= \frac{Pb}{Cl} (l^2 - b^2 - 3x^2) = 0, \end{aligned}$$

откуда $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)}$.

Отрицательный корень не удовлетворяет условиям задачи.

Следовательно, $x = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)}$.

Максимальный прогиб:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{Pb}{Cl} \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \left\{ 2l \left[l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \right] - b^2 - \right. \\ &\left. \left[l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \right] \right\} = \frac{Pb}{Cl} \cdot \frac{2}{9} (l^2 - b^2) \sqrt{3(l^2 - b^2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что если сила приложена посередине балки, то и максимальный прогиб будет посередине. В самом деле,

при $b = \frac{l}{2}$: $x = \sqrt{\frac{1}{3} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right)} = \frac{l}{2}$.

Вообще максимальный прогиб расположен посередине балки во всех случаях приложения симметричной нагрузки [рис. 103 а) б) и в)].

Полученное решение можно проверить при помощи установки, которую нетрудно изготовить в школьных мастерских. Ее чертеж представлен на рисунке 104. Вся установка может быть выполнена из дерева. В качестве балки используется рейка I квадратного сечения. Для сосновой рейки с размерами сечения, указанными на рисунке 104 (сечение по $A-A$), постоянная жесткости $C = 5 \cdot 10^4 \text{ кг см}^2$. Вес груза P не должен превышать $0,5 \text{ кг}$ во избежание поломки рейки. Прогибы измеряются от струны 2, натянутой между упорами 3.

110. Пусть длина основания поперечного сечения желоба x (рис. 79). Высота желоба: $h = \frac{b-x}{2}$;

площадь поперечного сечения: $F = xh = x \frac{b-x}{2}$.

Решаем уравнение: $\frac{dF}{dx} = \frac{b}{2} -$

$-x = 0$,

откуда $\frac{b}{2} - x_m = 0$ и

$$x_m = \frac{b}{2}.$$

Вторая производная от F по x ($\frac{d^2F}{dx^2} = -1$) отрицательна. Значит, при $x = x_m$ площадь желоба максимальна и равна:

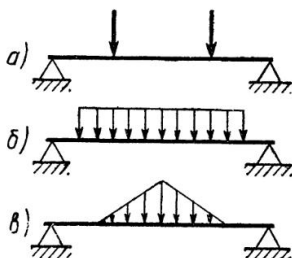


Рис. 103.

$$F_m = x_m \frac{b - x_m}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{b - \frac{b}{2}}{2} = \frac{b^2}{8} = \frac{4^2}{8} = 2 \text{ дм}^2.$$

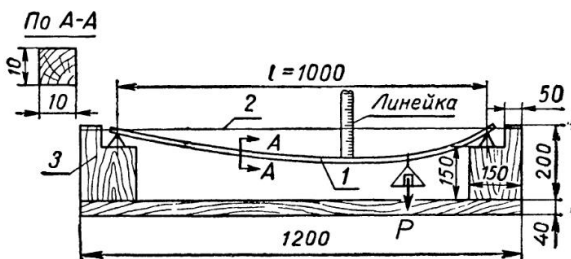


Рис. 104.

111. Возьмем сечение на расстоянии x от точки приложения силы P (рис. 105). Изгибающий момент в этом сечении:

$$M = P \cdot x. \quad (1)$$

$$\text{Высота сечения: } h = h_1 + kx, \quad (2)$$

$$\text{где } k = \frac{h_2 - h_1}{L}.$$

После подстановки равенств (1) и (2) в формулу для определения напряжений получим:

$$\sigma = \frac{6P \cdot x}{b(h_1 + kx)^2}.$$

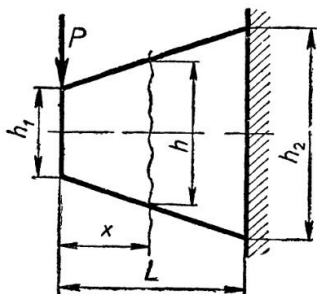


Рис. 105.

Исследуем полученную зависимость на максимум и минимум. Сбозначим

$$u = \frac{(h_1 + kx)^2}{x}.$$

В опасном сечении балки, где напряжения наибольшие, u имеет минимум. Решаем уравнение

$$\frac{du}{dx} = -\frac{h_1^2}{x^2} + k^2 = 0$$

и находим значение $x_m = \pm \frac{h_1}{k}$,

при котором u имеет максимум или минимум. Отрицательный корень не имеет физического смысла, следовательно, $x_m = \frac{h_1}{k}$.

Вторая производная $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2h_1^2}{x^3} > 0$ при $x > 0$ и функция u имеет в этом месте минимум, а обратная ей функция напряжений — максимум.

Напряжение в опасном сечении равно:

$$\sigma = \frac{6P \cdot x_m}{b(h_1 + kx_m)^2} = \frac{6P \cdot \frac{h_1}{k}}{b\left(h_1 + k \cdot \frac{h_1}{k}\right)^2} = \frac{3P}{2bh_1k}.$$

Необходимо отметить, что в очень пологих балках при $L < x_m = \frac{h_1}{k}$ напряжение все время возрастает, не достигая своего максимума. В этом случае опасное сечение будет у заделки и оно равно: $\sigma = \frac{6PL}{bh_2^2}$.