

Ф. Л. Литвин

ТЕОРИЯ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ



Ф. Л. ЛИТВИН

Теория зубчатых зацеплений

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Оглавление

Предисловие ко второму изданию	8
Введение	9
 Часть первая	
Теория зацеплений	
Глава I	
Матрицы. Преобразования координат	
§ 1. Исходные сведения о матрицах	13
§ 2. Сложение и умножение матриц	15
§ 3. Дифференцирование матриц	17
§ 4. Матричный способ преобразования координат	17
§ 5. Определение обратной матрицы	22
 Глава II	
Теория плоских зацеплений	
§ 6. Уравнения плоской кривой, касательной и нормали	25
§ 7. Центроиды колес	28
§ 8. Теорема Виллиса	32
§ 9. Сопряженные профили	34
§ 10. Применяемые системы координат	36
§ 11. Уравнения огибающей семейства кривых	39
§ 12. Расчет плоских зацеплений по Х. И. Гохману	42
§ 13. Кинематический способ определения уравнения зацепления профилей	45
§ 14. Метод профильных нормалей	47
§ 15. Эволюты профилей	49
§ 16. Уравнение Эйлера — Савари	55
§ 17. Параметры движения контактной точки в плоском зацеплении	59
§ 18. Определение кривизны огибающей семейства профилей	62
§ 19. Подрезание в плоских зацеплениях	66
§ 20. Переходные кривые	74
§ 21. Определение закона движения плоского зубчатого механизма	77
 Глава III	
Теория пространственных зацеплений	
§ 22. Преобразования пространственных координат	83
§ 23. Векторный способ определения скорости относительного движения звеньев	88
§ 24. Матричный способ определения скорости относительного движения звеньев	90
§ 25. Ось относительного винтового движения, аксоиды и начальные поверхности колес	96
	1*

§ 26. Уравнения поверхности зубцов, касательной плоскости и нормали . .	106
§ 27. Уравнение геликоида	109
§ 28. Уравнения огибающей семейства поверхностей	111
§ 29. Метод Х. И. Гохмана определения линий контакта и огибающей поверхности	115
§ 30. Кинематический метод	118
§ 31. Оси зацепления	124
§ 32. Узловые линии зацепления	137
§ 33. Параметры движения контактной точки	140
§ 34. Кривизны поверхностей зубцов при однопараметрическом огибании . .	151
§ 35. Кривизны поверхностей зубцов при двухпараметрическом огибании . .	167
§ 36. Подрезание в пространственных зацеплениях	168
§ 37. Пятно контакта поверхностей зубцов	184
§ 38. Синтез сопряженных зацеплений	192
§ 39. Синтез приближенных зацеплений с оптимальными условиями зацепления в окрестности заданной точки контакта	204
§ 40. Определение закона движения пространственного зубчатого механизма	210
§ 41. Влияние погрешностей	214

Часть вторая

Геометрия зацеплений

Глава IV

Эвольвентное зацепление

§ 42. Введение. Обобщенное уравнение эвольвенты	225
§ 43. Способы образования эвольвенты и схемы нарезания зубцов	227
§ 44. Зацепление колеса с инструментом реечного типа	232
§ 45. Зацепление пары эвольвентных профилей	235
§ 46. Геометрический расчет колес, нарезанных реечным инструментом . . .	239
§ 47. Зацепление нарезаемого колеса и долбяка, находящихся во внешнем зацеплении	242
§ 48. Геометрический расчет колес внешнего зацепления, нарезанных долбяком	244
§ 49. Зацепление долбяка с колесом внутреннего зацепления	245
§ 50. Геометрический расчет передачи с внутренним зацеплением	250
§ 51. Блокирующий контур	252
§ 52. Задачи	254

Глава V

Циклоидальное зацепление

§ 53. Общие сведения. Циклические кривые	258
§ 54. Теорема Камуса	266
§ 55. Циклоидальное зацепление обычного вида	267
§ 56. Цевочные зацепления	271
§ 57. Колеса Рута	278

Глава VI

Некруглые зубчатые колеса

§ 58. Применение	286
§ 59. Расчет центроид	291
§ 60. Замкнутые центроиды	293
§ 61. Условия выпуклости центроид	296
§ 62. Сопряжение колес с одинаковыми центроидами	298
§ 63. Простой ряд	300

§ 64. Преобразованные эллиптические колеса	310
§ 65. Сопряжения эксцентричного круглого колеса с некруглым	318
§ 66. Схемы нарезания	321
§ 67. Эволюты и профили зубцов	325
§ 68. Углы давления	332

Глава VII

Цилиндрические колеса с винтовыми зубцами для передачи вращения между параллельными осями

§ 69. Условия зацепления	333
§ 70. Эвольвентные косозубые колеса	336
§ 71. Косозубые колеса с зацеплением М. Л. Новикова	350

Глава VIII

Цилиндрические колеса с винтовыми зубцами для передачи вращения между пересекающимися осями

§ 72. Условия зацепления при скрещивании осей	359
§ 73. Эвольвентные винтовые колеса	364
§ 74. Цилиндрические винтовые колеса с новым видом зацепления	380

Глава IX

Червячное зацепление при цилиндрической форме червяка

§ 75. Начальные поверхности и основные геометрические соотношения	386
§ 76. Образование сопряженных зацеплений	390
§ 77. Корригирование ортогональной червячной передачи	391
§ 78. Выбор рационального вида червячного зацепления	392
§ 79. Уравнение зацепления. Линии контакта	395
§ 80. Поле зацепления	396
§ 81. Подрезание зубцов червячного колеса	398
§ 82. Кривизна поверхностей зубцов в червячной передаче	400

Глава X

Цилиндрические червячные передачи с линейчатой винтовой поверхностью червяков

§ 83. Конвольютная винтовая поверхность	403
§ 84. Архимедова винтовая поверхность	408
§ 85. Эвольвентная винтовая поверхность	409
§ 86. Линии контакта. Поверхность зацепления	413

Глава XI

Цилиндрические червячные передачи с нелинейчатой винтовой поверхностью червяков

§ 87. Винтовая поверхность, воспроизводимая дисковым коническим инструментом	416
§ 88. Червячные передачи с шлифованными червяками вогнутого профиля (вариант I)	421
§ 89. Червячные передачи с шлифованными червяками вогнутого профиля (вариант II)	427

Глава XII

Расчет профиля инструмента для обработки цилиндрических червяков и червячных колес

§ 90. Профили летучих резцов	433
§ 91. Профилирование пальцевых фрез	441

§ 92. Расчет профиля дисковых фрез	444
§ 93. Подрезание при обработке червяков дисковыми и пальцевыми фрезами	448

Глава XIII

Глобоидное червячное зацепление

§ 94. Введение. Поверхность витков червяка	452
§ 95. Линии контакта. Поверхность зацепления	455
§ 96. Поверхность зубцов колеса	460
§ 97. Модификации глобоидных червячных передач	462

Глава XIV

Ортогональная цилиндро-гипоидная передача

§ 98. Введение	465
§ 99. Уравнение зацепления, линии контакта и поверхность зацепления цилиндро-гипоидной передачи	466
§ 100. Уравнения поверхности зубцов колеса. Определение условий отсутствия подрезания и заострения	468
§ 101. Локализация контакта	471
§ 102. Геометрический расчет	472

Глава XV

Ортогональная цилиндро-коническая передача

§ 103. Основные расчетные зависимости	474
§ 104. Геометрический расчет ортогональной цилиндро-конической передачи	476

Глава XVI

Неортогональная цилиндро-коническая передача

§ 105. Уравнение зацепления, линии контакта и поверхность зацепления	477
§ 106. Поверхность зубцов конического колеса. Определение условий отсутствия подрезания и заострения	478
§ 107. Локализация контакта в неортогональной цилиндро-конической передаче	481
§ 108. Геометрический расчет передачи	481

Глава XVII

Прямозубые конические колеса

§ 109. Аксиоды и параметры зацепления	482
§ 110. Схемы нарезания прямозубых колес	485
§ 111. Производящая поверхность и уравнение зацепления	488
§ 112. Поверхность зацепления	489
§ 113. Поверхность зубцов нарезаемого колеса	491
§ 114. Кривизна поверхности зубцов	492
§ 115. Подрезание зубцов	494

Глава XVIII

Обкатные конические колеса с круговыми зубцами

§ 116. Исходные сведения	497
§ 117. Производящая поверхность при круговых профилях зубцов	500
§ 118. Схемы нарезания зубцов	501
§ 119. Обеспечение контакта поверхностей зубцов колес 1 и 2 в заданной точке	503
§ 120. Обеспечение равенства нулю первой производной передаточного отношения колес в расчетной точке контакта	513
§ 121. Направление пятна контакта	523
§ 122. Главные кривизны поверхностей зубцов Σ_1 и Σ_2	524
§ 123. Подрезание зубцов	526
§ 124. Равновысокие зубцы	530

Г л а в а XIX

Полубо́катные конические колеса с геликоидальной поверхностью зубцов колеса (helixform)

§ 125. Схемы парезания и применяемые системы координат	533
§ 126. Уравнения производящих поверхностей и ортов нормалей к ним	537
§ 127. Обеспечение линейчатого касания производящих поверхностей	541
§ 128. Определение значений вспомогательных параметров	545
§ 129. Установки нарезаемых колес на станке	546
§ 130. Установка резцовых головок	548

Г л а в а XX

Конические колеса с циклоидальным продольным профилем зубца производящего колеса

§ 131. Схема нарезания	552
§ 132. Уравнения производящих поверхностей. Обеспечение сопряженности зацепления	553
§ 133. Расчет параметров установок резцовых головок и производящих поверхностей	560
§ 134. Определение условий зацепления	569
Литература	571
Предметный указатель	581

Предисловие ко второму изданию

При подготовке книги к настоящему изданию она была почти полностью переработана и значительно дополнена. Необходимость в столь радикальной переработке книги была вызвана стремлением отразить новые результаты, достигнутые в теории и геометрии зацепления благодаря трудам отечественных и иностранных ученых.

Книга состоит из двух частей: 1) Теория зацеплений, 2) Геометрия зацеплений.

В первой части книги изложены общие методы анализа и синтеза зубчатых зацеплений. В содержание этой части впервые включены эффективные методы определения кривизны взаимогнбаемых поверхностей, условий отсутствия их подрезания, методы образования сопряженных зацеплений, синтез приближенных зацеплений с улучшенными параметрами, образование зубчатых зацеплений с применением двухпараметрического огнбания и т. д.

Расширено применение матричного исчисления, с помощью которого в книге нового издания выполняются не только преобразования координат точки и проекций векторов, но определяются также скорости и ускорения.

Существенной переработке подверглась также и вторая часть книги, охватывающая исследование и геометрический расчет отдельных видов зубчатых передач. Полностью переработаны и значительно дополнены главы, посвященные эвольвентному зацеплению, винтовым и червячным передачам, передачам с коническими колесами, впервые в книге изложены цилиндрико-конические передачи, передачи с зацеплением М. Л. Новикова, конические колеса, нарезаемые: а) по способу непрерывного деления, б) по способу геликсформ.

При подготовке книги к настоящему изданию большую помощь автору оказали: Л. В. Коростелев — рецензент и редактор книги, а также, Я. С. Давыдов, М. Л. Ерихов, И. А. Болотовский, П. Т. Халевский, К. И. Гуляев, И. П. Бернацкий, Л. Я. Либуркин, Г. А. Лившиц, В. А. Зискиндович, В. В. Шульц и Б. Д. Зильберман, которые прочли отдельные главы книги в рукописи и высказали ряд ценных советов и замечаний.

Автор книги выражает упомянутым лицам свою искреннюю признательность за труд, который они приняли на себя.

Автор книги заранее благодарит читателей за советы и замечания, которые он просит направлять по адресу: Москва, Ленинский пр., 15, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука».

Автор

Введение

Из механических передач, применяющихся в машинах и приборах, наиболее распространенными являются зубчатые. Механизмы с зубчатыми колесами позволяют осуществить передачу вращательного движения между параллельными, пересекающимися и скрещивающимися осями, иными словами, при всех видах расположения осей, которые нашли применение в практике конструирования. Можно отметить необычайное разнообразие конструктивных форм элементов зубчатых зацеплений: известны колеса с прямыми, косыми, винтовыми зубцами; в червячных передачах зубцам колес, а иногда и червякам придается глобоидная форма; боковые поверхности зубцов выполняются как цилиндрические и конические поверхности, линейчатые и нелинейчатые.

До последнего времени преимущественно применялись зубчатые механизмы с постоянным отношением скоростей ведущего и ведомого звеньев. В последние годы используются некруглые зубчатые колеса, посредством которых осуществляется передача вращательного движения с переменным отношением скоростей звеньев. Такие колеса используются в машиностроении в различных машинах-автоматах; в приборостроении механизм, составленный из некруглых колес, используется как функциональное устройство для воспроизведения функций одной независимой переменной.

Стремление повысить нагрузочную способность зубчатых передач, производительность нарезания зубцов, точность, патентные соображения приводят к появлению все новых видов зацеплений, более совершенных, чем применявшиеся ранее. Так, в СССР было разработано зацепление М. Л. Новикова [244, 245], в США появилось спироидное зацепление, новый способ нарезания конических колес (helixform), в ФРГ и в СССР разработаны червячные передачи с вогнутым профилем червяка и т. д.

Непрерывно совершенствуются методы изготовления зубчатых колес. Для нарезания колес широко применяется метод обкатки, при котором изделие и инструмент находятся в непрерывном зацеплении. В станкостроении были предприняты значительные усилия для повышения точности зуборезных станков, были разработаны новые методы нарезания и новые виды оборудования, все шире осваиваются методы чистовой отделки поверхностей зубцов: шевингование, притирка, шлифование.

Прогресс в области синтеза и производства зубчатых передач стал возможным в результате разработки теории зацеплений и ее приложений.

Разработка новых видов зацеплений немыслима без знания основных законов образования сопряженных между собой поверхностей зубцов и требует подробного исследования характера касания таких поверхностей для оценки работоспособности разрабатываемых передач. Конструктор-инструментальщик использует теорию зацеплений при расчете профиля зуборезного инструмента. Конструктор зуборезного станка основывается на схеме нарезания зубцов, разработанной на основе теории

зацеплений. Из всего этого следует, что теория зубчатых зацеплений тесно связана с практикой, ее задачи рождаются из запросов производства, а результаты их решений широко используются инженерами.

Успешное развитие теории зубчатых зацеплений достигнуто благодаря усилиям большого коллектива ученых. Не имея возможности дать достаточно полный исторический обзор развития теории зацеплений, мы ограничимся лишь краткими сведениями по этому вопросу.

Ла-Гиру, Понселе и Камусу принадлежит заслуга разработки метода огибающих кривых и рулетт для получения сопряженных профилей зубцов в плоском зацеплении. Л. Эйлер [279] предложил для цилиндрических колес эвольвентное зацепление, нашедшее впоследствии необычайно широкое применение в промышленности.

В работах Э. Бакингема [14], Х. Ф. Кетова [113], Я. И. Дикера [65], В. Н. Кудрявцева [145, 148], В. А. Гавриленко [32, 33, 34], И. А. Болотовского и его соавторов [24] геометрия эвольвентного зацепления была разработана с почти исчерпывающей полнотой.

Основы пространственной теории зацеплений были заложены трудами великого французского геометра Оливье [288] и русского ученого Х. И. Гохмана [45].

Оливье ввел общий способ огибающих поверхностей для получения сопряженных поверхностей зубцов, обосновал возможность получения таких поверхностей (при линейчатом и точечном касании) посредством вспомогательной поверхности. Однако Оливье при разработке этих вопросов ограничился лишь геометрическими образами; более того, Оливье утверждал, что «...вопрос о зацеплениях принадлежит всецело начертательной геометрии...». Отмечая бесспорные заслуги Оливье, Гохман справедливо ставил ему в упрек такой отрыв теории зацепления от анализа.

Большой заслугой Х. И. Гохмана является разработка им основ аналитической теории зацеплений. В связи с постановкой задачи о разработке общего аналитического метода исследования зацеплений Х. И. Гохман писал:

«Довольно странное явление в математической литературе представляет теория зацеплений, несмотря на всю ее практическую важность, а может быть, и благодаря ей. В самом деле, в то время как почти в каждом более или менее важном математическом вопросе господствует одна общая руководящая идея, обнимающая собой все стороны его и позволяющая исследователю держаться раз избранного им пути, по которому он твердо подвигается, одна теория зацеплений страдает отсутствием общей руководящей идеи — общих формул, в силу чего исследователю приходится идти как бы ощупью, ища на каждом шагу новых точек опоры, иногда даже безуспешно». Задача, поставленная Х. И. Гохманом, была им решена с большим успехом; результатом этого явилось создание нового метода исследования зубчатых зацеплений, сущности которого посвящены §§ 12 и 29 настоящей книги. Последователями Х. И. Гохмана в советское время явились Н. И. Колчин [119] и И. А. Фрайфельд [247]. В работах Н. И. Колчина дан расчет многих видов современных пространственных зацеплений, увязанный со способами их нарезания и видом применяемого инструмента. И. А. Фрайфельд успешно использовал метод Х. И. Гохмана для профилирования зуборезного инструмента, работающего по методу обкатки. Важную по значению работу в области теории зубчатых зацеплений выполнил А. Ф. Николаев [214]. В. Н. Кедринский и К. М. Писманник [110], Н. Ф. Кабатов и Г. А. Лопато [101], М. Г. Сегаль [233–237],

В. М. Денисов [63-64], М. Д. Злотополюский [94-96] выполнили ряд работ, посвященных коническим зацеплениям.

Методы анализа зубчатых зацеплений (составление уравнения зацепления, определение характеристик и огибающих поверхностей) были после Х. И. Гохмана упрощены применением так называемого кинематического метода, которому в СССР были посвящены работы В. А. Шишкова [258, 260], Я. С. Давыдова [55] и автора [167]. За границей такой подход к исследованию пространственных зацеплений нашел отражение в работах Д. В. Дадлея и Х. Поритского [278], О. Саари [292]. Главной особенностью кинематического метода явилось использование теоремы о том, что в точке контакта взаимноогibaемых поверхностей вектор скорости v относительного движения перпендикулярен нормали n и $nv = 0$.

Большое значение для развития теории механизмов и ее раздела — теории зубчатых зацеплений имело применение тензорных методов, которым были посвящены работы Ю. Ф. Морошкина [209], С. Г. Кислицына [115], Д. Манжерона [285], Чжан Цы-сянь [234], автора [170] и др. Матричный способ преобразования координат (с матрицами четвертого порядка для пространственных зацеплений) был изложен автором книги в первом ее издании, в настоящем издании он использован также для нахождения скоростей и ускорений.

Можно отметить ряд серьезных успехов по разработке методов синтеза пространственных зацеплений. М. Л. Новиков [244, 245] предложил оригинальный метод синтеза пространственных зацеплений с точечным касанием. Я. С. Давыдов [60] и В. И. Васильев разработали метод синтеза зацеплений с помощью двух образующих кривых. Н. Н. Крылов [140] и М. Л. Ерихов [78-82] успешно разрабатывают методы синтеза пространственных зацеплений с двухпараметрическим огибанием.

Достигнуты значительные успехи по разработке методов определения кривизны взаимноогibaемых поверхностей, изложенные в работах Н. И. Колчина [122, 123], А. М. Павлова [215, 216], Л. В. Коростелева [127, 128, 129], И. И. Дусева [73, 74], В. М. Васильева [28], М. Л. Ерихова [81, 82], Е. Г. Гинзбурга [42], Чжан Цы-сянь [177], автора [177, 185] и др. Решена одна из труднейших задач теории пространственных зацеплений — подрезание поверхностей зубцов, чему были посвящены работы И. И. Дусева [71, 72], В. М. Васильева [27, 30], М. Л. Ерихова [77, 78, 80] и автора [178, 185, 195].

В работах ряда исследователей были разработаны вопросы геометрии многих новых видов зацеплений.

Геометрии конических колес, нарезаемых по методу непрерывного деления, посвящены работы Н. Б. Фируна [174, 196], К. И. Гуляева [53-54, 196] и автора [174, 196]. Геометрии полуобкатных конических колес, нарезаемых при винтовом движении производящего колеса (способ *helixform*), посвящены работы Спира, Кинга и Бакстера [294], М. Г. Сегалю [237], Б. Д. Зильбермана и автора [194].

Геометрия винтовых колес с повышенной нагрузочной способностью разработана В. В. Шульцем и автором книги [188].

Червячным передачам с вогнутым профилем червяка посвящены работы И. С. Кривенко [136], И. П. Бернацкого [16, 19-20, 190] и автора [182, 190].

Цилиндро-коническим колесам посвящены работы Я. С. Давыдова [55, 56], К. А. Боголюбовского, Л. Я. Либуркина [156-159] и др.

Интенсивно разрабатываются методы синтеза приближенных конических и гипоидных зацеплений. Этой проблеме посвящены исследования

К. М. Писманика [110, 219, 221, 222], В. Н. Кедринского [110], Н. Ф. Кабатова [97–104], М. Г. Сегалю [233–237], Ю. И. Шурыгина [264], А. А. Заостровского [90], Г. И. Шевелевой [256] и автора [174, 184, 186, 187, 189, 192].

Методы теории зацепления были успешно использованы и в смежных областях. Так, И. А. Фрайфельд [247] применил такие методы для профилирования инструмента, предназначенного для нарезания шлицевых валов. В. А. Зискиндович [93] успешно использовал методы теории зацепления для исследования пространственных кулачковых механизмов и для обоснования (вместе с автором книги) способа воспроизведения поверхностей колес центробежных насосов.

Этими названиями список многих интересных и глубоких работ далеко не исчерпан. Ссылки на многие исследования, в том числе и на работы, посвященные геометрии ранее предложенных видов зацеплений, приведены в тексте книги и в списке литературы.

Теория зацеплений

Глава I

Матрицы. Преобразования координат

В последние годы находят все более широкое применение тензорные методы определения функций перемещения, скоростей и ускорений пространственных механизмов. Это нашло отражение в работах отечественных ученых: А. И. Лурье [203], Ю. Ф. Морошкина [209], С. Г. Кислицына [115], автора книги [170] и др., — в работах иностранных ученых: Денавита [275], Манжерона [285], Бейера [269], Бегса [268] и др.

Заслуживает особого упоминания метод винтов, подробные сведения о котором можно найти в книге Ф. М. Диментберга [70].

Наибольшее распространение получил матричный способ, позволяющий упорядочить выполняемые действия при многократных преобразованиях координат и контролировать эти действия, простым образом осуществить обратное преобразование посредством обратной матрицы. Наиболее перспективным, по нашему мнению, является применение для пространственных координат матриц четвертого порядка (предполагается, что координаты точки записываются как однородные). Матрицей четвертого порядка при переходе к другой координатной системе описывается не только поворот вокруг координатной оси, но и смещение начала координат. При многократных преобразованиях координат действия над матрицами сводятся только к их умножению. Матрицы четвертого порядка в теории зубчатых зацеплений были применены автором книги в 1954 г. [170]. Для пространственных шарнирных механизмов такие матрицы использовал Чжан Цы-сянь в работах, выполненных под руководством автора книги [254].

В настоящей главе приводятся краткие сведения о матрицах и действиях над ними. Более подробно с этим можно ознакомиться по работам Гантмахера [35], Фрезера, Дункана и Коллара [249].

§ 1. Исходные сведения о матрицах

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, расположенных определенным образом по строкам и столбцам. В книге используются матрицы только с вещественными числами.

Примером матрицы может служить таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

При двухиндексном обозначении элементов a_{ij} матрицы первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент a_{ij} . Например, индексы элемента a_{34}

указывают, что он находится в третьей строке (первый индекс — 3), на пересечении этой строки с четвертым столбцом (второй индекс — 4).

При равенстве числа строк и столбцов матрица называется квадратной.

Матрица, состоящая из m элементов, расположенных в одном столбце, называется столбцовой матрицей. Так, например, координаты точки в трехмерном пространстве могут быть записаны матрицей

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где r — обозначение столбцовой матрицы радиуса-вектора r .

Порядок матрицы указывает на содержащиеся в ней числа строк и столбцов. Приведенная выше столбцовая матрица r является матрицей (3,1)-порядка. Матрица A , представленная выражением (1.1), — квадратная матрица четвертого порядка.

Единичной матрицей E называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали элементы — единицы, а все остальные элементы равны нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Транспонированная матрица A' образуется из матрицы A по следующему правилу: строками матрицы A' служат соответствующие столбцы исходной матрицы A . Так, например, если исходная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

В симметрической матрице элементы a_{ij} и a_{ji} равны. Так, например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$a_{12} = a_{21} = 2, \quad a_{13} = a_{31} = 3, \quad a_{23} = a_{32} = -1.$$

В кососимметрической матрице ее элементы связаны соотношением $a_{ij} = -a_{ji}$, а диагональные элементы равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{12} = -a_{21} = 1, \quad a_{13} = -a_{31} = 2, \quad a_{23} = -a_{32} = 3.$$

Симметрическая и кососимметрическая матрицы являются квадратными.

§ 2. Сложение и умножение матриц

Сложение прямоугольных матриц производится по следующему правилу: *сумма двух матриц одинакового порядка (m, n) представляет матрицу такого же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов суммируемых матриц.*

Следовательно, если даны матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

то

$$C = A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}.$$

Сумма матриц обладает переместительным и сочетательным свойствами

$$A + B = B + A, \\ (A + B) + C = A + (B + C).$$

При умножении матрицы A на число α образуется новая матрица B , элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число α

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \alpha A = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{vmatrix}.$$

Операция умножения двух прямоугольных матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй. В дальнейшем нам встретятся операции умножения квадратных матриц, квадратной матрицы и столбцовой матрицы одной высоты.

Операция умножения записывается так:

$$C = AB. \quad (2.1)$$

Произведением двух квадратных матриц одного порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

является квадратная матрица того же порядка

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы C определяются из уравнения

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + a_{i4}b_{4j}. \quad (2.2)$$

Пусть, например, требуется определить элемент c_{ij} , содержащийся в третьей строке матрицы C на пересечении со вторым столбцом. Этот

элемент ($i=3, j=2$) на основании (2.2) определится так:

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42}.$$

Нетрудно видеть, что искомый элемент c_{32} представляет сумму произведений элементов третьей строки матрицы A ($i=3$) и соответствующих элементов второго столбца матрицы B ($j=2$). Соответствующие элементы в матрицах A, B и C заключены в рамки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boxed{a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & \boxed{c_{32}} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Правило перемножения двух матриц A и B можно кратко сформулировать как правило «умножения строки на столбец». Под этим понимается, что для определения элемента c_{ij} матрицы $C = AB$ нужно найти сумму произведений элементов, содержащихся в i -й строке матрицы A (первый индекс искомого элемента c_{ij}), и соответствующих элементов, содержащихся в j -м столбце матрицы B (второй индекс элемента c_{ij}).

Операция умножения квадратной и столбцовой матриц также выполняется по указанному правилу. Произведение таких матриц представляет столбцовую матрицу (см. пример 2).

Произведение матриц не обладает переместительным свойством, т. е. это произведение зависит от порядка сомножителей. Иными словами, кроме исключительных случаев,

$$AB \neq BA.$$

Правило определения произведения двух матриц можно распространить на случай любого числа сомножителей. При этом является справедливым сочетательный закон, т. е. сомножители можно объединить в группы. Например,

$$(AB)C = A(BC).$$

В первом случае $[(AB)C]$ сначала ищется произведение $D = AB$, а затем произведение DC (но не CD); во втором случае сначала ищется произведение $F = BC$, а затем произведение AF (но не FA).

Особый интерес представляет произведение матриц такого вида, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A . Обратная матрица A^{-1} может существовать лишь в том случае, если определитель данной матрицы $\det A \neq 0$ (см. § 4). Способ вычисления обратной матрицы по данной применительно к случаю преобразования координат в трех- и двухмерном пространствах будет указан в § 5.

Пример 1. Найти произведение двух матриц

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ.

$$C = AB = \begin{vmatrix} 8 & 19 & 10 & 8 \\ 13 & 12 & 5 & -8 \\ 24 & 40 & 22 & 13 \\ 20 & 35 & 36 & 37 \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение квадратной и столбцевой матриц

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{vmatrix}.$$

Ответ.

$$AB = \begin{vmatrix} 30 \\ 19 \\ 76 \\ 72 \end{vmatrix}.$$

§ 3. Дифференцирование матриц

Сведения о матрицах, изложенные в предыдущих параграфах, понадобятся для преобразования координат.

Необходимость в дифференцировании матриц возникнет при определении скоростей движения (см. § 24).

Элементы матрицы могут быть функциями некоторого переменного t . Производная матрицы A , выражаемой (1.1), определится так:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \frac{da_{13}}{dt} & \frac{da_{14}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{23}}{dt} & \frac{da_{24}}{dt} \\ \frac{da_{31}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} & \frac{da_{34}}{dt} \\ \frac{da_{41}}{dt} & \frac{da_{42}}{dt} & \frac{da_{43}}{dt} & \frac{da_{44}}{dt} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

При дифференцировании произведения $C = AB$ нужно руководствоваться следующим правилом:

$$\frac{dC}{dt} = A \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} B. \quad (3.2)$$

§ 4. Матричный способ преобразования координат

Здесь и ниже используются декартовы системы координат правого направления. В правой системе для наблюдателя, смотрящего с положительного направления оси z , поворот от оси x к оси y совершается против часовой стрелки.

Пусть заданы две системы координат $S_j (x_j, y_j, z_j)$ и $S_i (x_i, y_i, z_i)$. Система S_i отличается от S_j поворотом вокруг оси x_j на угол φ и смещением начала координат (рис. 1). В последующих записях a , b и c — арифметические величины, определяющие положение старого начала O_j в новой системе координат.

Координаты одной и той же точки M в системах S_j и S_i , используя обычные правила аналитической геометрии, свяжем следующими уравнениями:

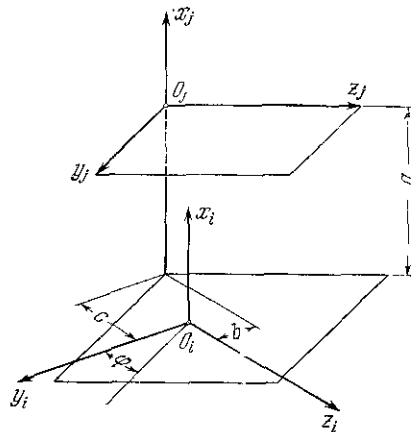


Рис. 1.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_j + a, \\ y_i &= y_j \cos \varphi - z_j \sin \varphi - b, \\ z_i &= y_j \sin \varphi + z_j \cos \varphi - c. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Если φ , a , b и c — функции от времени t , уравнения (4.1) представляют траекторию точки M в системе S_i при движении этой системы относительно S_j . Координаты точки $M (x_j, y_j, z_j)$ рассматриваются в этом случае как постоянные.

Как станет яснее ниже, коэффициенты при координатах x_j, y_j, z_j удобно представить в виде элементов матрицы четвертого порядка. Для того чтобы воспользоваться матрицами такого порядка, нужно предварительно ввести так называемые однородные координаты. При однородных координатах положение точки в системе x_j, y_j, z_j задается четырьмя величинами: x'_j, y'_j, z'_j, t'_j . Четыре новые величины не равны одновременно нулю и связаны с x_j, y_j, z_j соотношениями:

$$x_j = \frac{x'_j}{t'_j}, \quad y_j = \frac{y'_j}{t'_j}, \quad z_j = \frac{z'_j}{t'_j}.$$

Следовательно, из четырех новых величин: x'_j, y'_j, z'_j, t'_j — независимыми являются только три.

Аналогично, для определения положения точки в системе x_i, y_i, z_i будем пользоваться однородными координатами: x'_i, y'_i, z'_i, t'_i , где

$$x_i = \frac{x'_i}{t'_i}, \quad y_i = \frac{y'_i}{t'_i}, \quad z_i = \frac{z'_i}{t'_i}.$$

Условимся, что $t'_j = t'_i = 1$. Это позволит нам просто совершать переход от однородных координат к обычным и обратный переход. Тогда при однородных координатах положение точки M в соответствующих системах координат можно записывать так:

$$M(x_j, y_j, z_j, t_j) \text{ и } M(x_i, y_i, z_i, t_i),$$

где $t_j = t_i = 1$. С учетом новых обозначений формулы (4.1) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_j + t_j a, \\ y_i &= y_j \cos \varphi - z_j \sin \varphi - t_j b, \\ z_i &= y_j \sin \varphi + z_j \cos \varphi - t_j c, \\ t_i &= t_j = 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Запишем коэффициенты, стоящие перед x_j, y_j, z_j, t_j в выражениях для x_i, y_i, z_i, t_i , в виде элементов матрицы такого вида:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & -b \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Индексы « ij » в обозначении матрицы M_{ij} указывают, что совершается переход к системе координат x_i, y_i, z_i от x_j, y_j, z_j . Соответственно, если бы матрица была обозначена через M_{ji} , эта запись указывала бы, что переход совершается к x_j, y_j, z_j от x_i, y_i, z_i .

Матрицу M_{ij} в двухиндексной системе можно записать так:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Присвоим осям x, y, z в обеих системах координат номера 1, 2, 3.

В матрице M_{ij} элемент a_{kl} ($k = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) есть косинус угла, образуемого новой осью номера k со старой осью номера l . Номера $k = 1, 2, 3$ присвоены соответственно новым осям x_i, y_i, z_i , а $l = 1, 2, 3$ обозначают номера старых осей x_j, y_j, z_j . При таких обозначениях элемент, например, $a_{23} = \cos(y_i, z_j)$. Элементы a_{14}, a_{24}, a_{34} — проекции в новой системе (x_i, y_i, z_i) начала O_j старой системы координат (x_j, y_j, z_j) .

Формулы (4.2) можно представить как результат умножения матрицы на столбцовый вектор:

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ t_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ t_j \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

В сокращенной записи

$$r_i = M_{ij} r_j, \quad (4.5)$$

где r_i и r_j — столбцовые матрицы радиусов-векторов одной и той же точки в системах координат S_i и S_j .

Нужно заметить, что матрица M_{ij} должна находиться обязательно слева по отношению к столбцовой матрице r_j . Это правило должно соблюдаться, так как произведение матриц не обладает переместительным свойством, т. е. это произведение зависит от порядка сомножителей.

В дальнейшем придется устанавливать связь между проекциями одного и того же вектора в различных системах координат. Пусть, например, известны проекции n_{xj}, n_{yj}, n_{zj} вектора нормали в системе $S_j (x_j, y_j, z_j)$ и требуется определить проекции n_{xi}, n_{yi}, n_{zi} этого вектора в системе $S_i (x_i, y_i, z_i)$. Так как проекции вектора не меняются при сдвиге начала координат, формулы преобразования определяются так:

$$\left. \begin{aligned} n_{xi} &= a_{11}n_{xj} + a_{12}n_{yj} + a_{13}n_{zj}, \\ n_{yi} &= a_{21}n_{xj} + a_{22}n_{yj} + a_{23}n_{zj}, \\ n_{zi} &= a_{31}n_{xj} + a_{32}n_{yj} + a_{33}n_{zj}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Представим эти формулы как результат умножения матрицы на столбцовый вектор

$$\begin{pmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{xj} \\ n_{yj} \\ n_{zj} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

В сокращенной записи:

$$n_i = L_{ij} n_j. \quad (4.8)$$

Матрица L_{ij} получается из M_{ij} , если в последней зачеркнуть четвертую строку и четвертый столбец.

Вернемся к рассмотрению уравнений (4.2). При фиксированных значениях φ , a , b и c правые части уравнений (4.2) являются линейными относительно координат x_j , y_j , z_j , t_j . Задав их значениями этих координат,

однозначно определим координаты x_i , y_i , z_i , t_i . Уравнения (4.2) выражают линейное отображение точки системы S_j в систему S_i .

Покажем, что обратное отображение — системы S_i в систему S_j — будет однозначным, если $|M_{ij}| \neq 0$ (определитель матрицы M_{ij} не равен нулю.)

Пусть в уравнениях (4.2) заданы x_i , y_i , z_i , t_i и требуется найти x_j , y_j , z_j , t_j . Для этого нужно решить систему (4.2) из

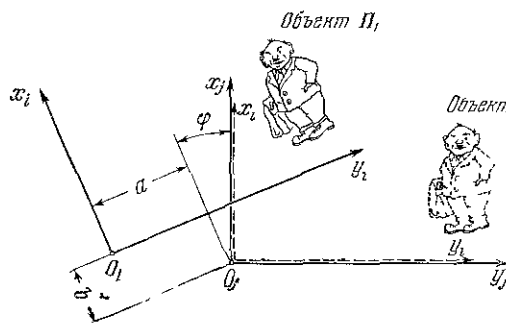


Рис. 2.

четырех линейных уравнений. Из линейной алгебры известно, что решение будет однозначным, если $|M_{ij}| \neq 0$.

Отсюда вывод: для взаимнооднозначного отображения необходимо, чтобы определитель матрицы M_{ij} не был равен нулю.

Линейное взаимнооднозначное отображение, описываемое уравнениями (4.2), можно трактовать как движение.

Обратимся к рис. 2, предполагая в целях наглядности, что движение плоское. Пусть в начале, когда системы S_i и S_j совпадают, объекты Π_j и Π_i , связанные соответственно с S_j и S_i , занимают положения, изображенные сплошной и пунктирной линиями. Придав определенные значения элементам матрицы M_{ij} , мы тем самым считаем, что система S_i займет такое новое положение по отношению к S_j , при котором Π_i совместится с Π_j .

В теории зубчатых зацеплений возникает необходимость в многократном преобразовании координат. Переход от системы S_1 к системе S_n осуществляется через ряд промежуточных систем координат и записывается так:

$$r_n = M_{n(n-1)} \cdots M_{32} M_{21} \cdot r_1. \quad (4.9)$$

Преимущества применения матриц четвертого порядка для вывода формул преобразования координат заключаются в следующем: а) каждой матрицей учитывается одновременно поворот и смещение соответствующей системы координат; б) при использовании формулы (4.9) над матрицами производятся действия одного вида — умножения.

Следует иметь в виду, что из девяти элементов матрицы, определяющих косинусы углов между старыми и новыми осями, независимыми являются только три.

Пусть

$$L_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{x_i, x_j}) & \cos(\widehat{x_i, y_j}) & \cos(\widehat{x_i, z_j}) \\ \cos(\widehat{y_i, x_j}) & \cos(\widehat{y_i, y_j}) & \cos(\widehat{y_i, z_j}) \\ \cos(\widehat{z_i, x_j}) & \cos(\widehat{z_i, y_j}) & \cos(\widehat{z_i, z_j}) \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

Обозначим орты $\mathbf{i}_j, \mathbf{j}_j, \mathbf{k}_j$ координатных осей системы S_j после перехода в систему S_i через $\mathbf{a}_i(a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}), \mathbf{b}_i(b_{xi}, b_{yi}, b_{zi}), \mathbf{c}_i(c_{xi}, c_{yi}, c_{zi})$. Эта запись указывает, что орты $\mathbf{i}_j, \mathbf{j}_j, \mathbf{k}_j$ разложены по осям системы S_i . На основании (4.10) матрицы этих векторов таковы:

$$\mathbf{a}_i = \begin{vmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{vmatrix} b_{xi} \\ b_{yi} \\ b_{zi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c}_i = \begin{vmatrix} c_{xi} \\ c_{yi} \\ c_{zi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

Так как $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i$ — единичные и взаимно перпендикулярные векторы, то

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \\ \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i &= a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \\ \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i &= a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ \mathbf{a}_i \mathbf{c}_i &= a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \\ \mathbf{b}_i \mathbf{c}_i &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Шесть уравнений (4.12) связывают девять элементов матрицы (4.10). Следовательно, независимыми являются только три.

При многократных преобразованиях координат для контроля правильности выполненных действий целесообразно использовать соотношения, связывающие элементы матрицы L_{ij} . Помимо зависимостей (4.12), можно получить еще шесть зависимостей для указанных элементов.

Обозначим через $\mathbf{a}_j(a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}), \mathbf{b}_j(b_{xj}, b_{yj}, b_{zj}), \mathbf{c}_j(c_{xj}, c_{yj}, c_{zj})$ орты осей системы S_i , разложенные по осям системы S_j . На основании (4.10)

$$\mathbf{a}_j = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{vmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c}_j = \begin{vmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.13)$$

Так как векторы $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ и $\mathbf{c}_j$ — единичные и взаимно перпендикулярные, то

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \\ \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \\ \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\ \mathbf{a}_j \mathbf{c}_j &= a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\ \mathbf{b}_j \mathbf{c}_j &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

На основании (4.12) и (4.14) можно указать следующее правило контроля верности элементов матрицы L_{ij} :

а) сумма квадратов элементов, содержащихся в одной и той же строке (в одном и том же столбце), равна единице;

б) сумма произведений соответственных элементов двух строк (двух столбцов) равна нулю.

§ 5. Определение обратной матрицы

Дана матрица M_{nm} , которой описывается переход от системы S_m к S_n , осуществленный через ряд промежуточных преобразований. Известно, что $\det M_{nm} \neq 0$, отображение является взаимнооднозначным, и матрица M_{mn} обратного перехода (от S_n к S_m) существует. Найдем правило, по которому элементы искомой матрицы M_{nm} можно выразить через элементы данной матрицы M_{mn} . Переход от системы S_m к S_n и обратный переход описываются следующими матричными равенствами:

$$r_n = M_{nm} r_m, \quad (5.1)$$

$$r_m = M_{mn} r_n. \quad (5.2)$$

Подставив (5.1) в (5.2), получим

$$r_m = M_{mn} M_{nm} r_m. \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что

$$M_{mn} M_{nm} = E, \quad (5.4)$$

где E — единичная матрица.

Пусть в матрице

$$M_{nm} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

известны все элементы. Требуется элементы матрицы

$$M_{mn} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

выразить через элементы матрицы M_{nm} .

Докажем предварительно, что матрица L_{nm} и обратная матрица L_{mn} , используемые для преобразований проекций векторов, являются транспонированными друг по отношению к другу. Эти матрицы получим из матриц M_{nm} и M_{mn} , если, как указывалось в § 4, зачеркнуть в них последнюю строку и последний столбец.

$$L_{nm} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad L_{mn} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \quad (5.7)$$

Элементы матриц L_{nm} и L_{mn} представляют косинусы углов, образуемых новыми и старыми осями, что приведено в таблице I.

Т а б л и ц а I

$\cos(x_n, x_m) = a_{11}$	$\cos(x_n, y_m) = a_{12}$	$\cos(x_n, z_m) = a_{13}$
$\cos(y_n, x_m) = a_{21}$	$\cos(y_n, y_m) = a_{22}$	$\cos(y_n, z_m) = a_{23}$
$\cos(z_n, x_m) = a_{31}$	$\cos(z_n, y_m) = a_{32}$	$\cos(z_n, z_m) = a_{33}$

$\cos(x_m, x_n) = b_{11}$	$\cos(x_m, y_n) = b_{12}$	$\cos(x_m, z_n) = b_{13}$
$\cos(y_m, x_n) = b_{21}$	$\cos(y_m, y_n) = b_{22}$	$\cos(y_m, z_n) = b_{23}$
$\cos(z_m, x_n) = b_{31}$	$\cos(z_m, y_n) = b_{32}$	$\cos(z_m, z_n) = b_{33}$

Из сопоставления этих таблиц следует, что $b_{11} = a_{11}$, $b_{12} = a_{21}$, $b_{13} = a_{31}$ и т. д., т. е. матрица L_{mn} является транспонированной

$$L_{mn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Произведение матриц $L_{nm}L_{mn} = E$.

Равенство (5.4) в развернутом виде можно представить так

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} b_{14} &= -(a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34}), \\ b_{24} &= -(a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34}), \\ b_{34} &= -(a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34}). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Основываясь на изложенном, можно указать простое правило для составления обратной матрицы M_{nm} по заданной матрице M_{mn} . Если

$$M_{nm} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

то

$$M_{mn} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -(a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34}) \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -(a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34}) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -(a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Пример 3. Найти элементы матрицы M_{ji} ; исходная матрица M_{ij} представлена выражением (4.3).

О т в е т.

$$M_{ji} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & b \cos \varphi + c \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & -b \sin \varphi + c \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Глава II

Теория плоских зацеплений

§ 6. Уравнения плоской кривой, касательной и нормали

Плоская кривая определяется в общем виде уравнением

$$F(x, y) = 0. \quad (6.1)$$

Для всех точек, за исключением тех, в которых одновременно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (6.2)$$

уравнение (6.1) может быть разрешено относительно y в виде

$$y = f(x). \quad (6.3)$$

Точка кривой, одновременно удовлетворяющая уравнениям (6.1) и (6.2), называется особой (см. § 19).

Продифференцируем уравнение (6.1), в результате чего получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \quad (6.4)$$

Учитывая, что dx и dy — проекции вектора dt элементарного перемещения, уравнение (6.4) представим в таком виде:

$$\mathbf{n} dt = 0. \quad (6.5)$$

Здесь

$$dt = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.5) выражает перпендикулярность векторов $\mathbf{n}$ и dt , где $\mathbf{n}$ и dt — векторы нормали и касательной к плоской кривой. Орт нормали к плоской кривой определяется уравнением

$$\mathbf{e} = k\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} \right). \quad (6.8)$$

Нормирующий множитель k определяется из условия, что $\mathbf{e}$ — единичный вектор и $e_x^2 + e_y^2 = 1$.

Радиус-вектор текущей точки касательной к плоской кривой определяется уравнением (рис. 3)

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} + \lambda t, \quad (6.9)$$

где ρ — радиус-вектор плоской кривой в точке касания, t — вектор касательной, коэффициент λ определяет положение текущей точки на касательной, R — радиус-вектор текущей точки касательной.

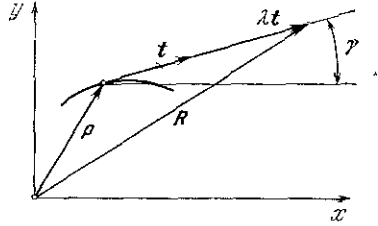


Рис. 3.

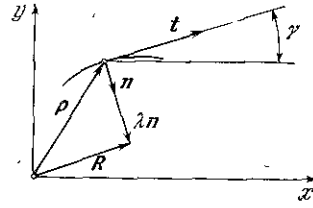


Рис. 4.

На основании (6.9)

$$R - \rho = \lambda t. \quad (6.10)$$

Переходя к проекциям и обозначив через X и Y координаты текущей точки касательной, уравнение касательной к плоской кривой запишем в такой форме:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}. \quad (6.11)$$

Учитывая, что согласно выражению (6.4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (6.12)$$

получим

$$(X-x) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (6.13)$$

Аналогично (6.9) уравнение радиуса-вектора текущей точки нормали к плоской кривой (рис. 4) определится так:

$$R = \rho + \lambda n. \quad (6.14)$$

Переходя к проекциям, уравнение нормали запишем так:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (6.15)$$

Если плоская кривая задана уравнением (6.1) (или (6.3)), то

$$e_x = k \frac{\partial F}{\partial x} = \sin \gamma, \quad e_y = k \frac{\partial F}{\partial y} = -\cos \gamma,$$

где γ — угол, образуемый касательной с осью x (рис. 4),

$$\operatorname{tg} \gamma = y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (6.16)$$

Касательная и нормаль определяются соответственно уравнениями:

$$Y - y = y' (X - x), \quad (6.17)$$

$$(Y - y) y' + X - x = 0. \quad (6.18)$$

Чаще всего плоская кривая в теории зацеплений задается в параметрическом виде

$$\rho = \rho(u) \quad (6.19)$$

либо, переходя к проекциям,

$$\begin{aligned} x &= f(u), \\ y &= \psi(u). \end{aligned} \quad (6.20)$$

В этом случае вектор касательной

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}, \quad (6.21)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(u)}{f'(u)}, \quad (6.22)$$

$$n_x = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad n_y = -\frac{\partial x}{\partial u}. \quad (6.23)$$

Уравнения касательной и нормали примут такой вид:

$$(X-x) \frac{\partial y}{\partial u} - (Y-y) \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad (6.24)$$

$$\frac{X-x}{\frac{\partial y}{\partial u}} = -\frac{Y-y}{\frac{\partial x}{\partial u}}. \quad (6.25)$$

В ряде случаев целесообразно кривую задавать в полярной форме

$$r = r(\vartheta), \quad (6.26)$$

где ϑ — полярный угол, образуемый радиусом-вектором с полярной осью.

Угол μ , образуемый радиусом-вектором с положительным направлением касательной, определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\vartheta}}. \quad (6.27)$$

За положительное направление касательной принимается направление, совпадающее с направлением отсчета полярных углов ϑ .

Для удобства обозрения сведем основные полученные формулы в таблицу II.

Таблица II

Уравнения кривой	Уравнения касательной	Уравнения нормали	Проекция вектора и орта нормали	
$F(x, y) = 0$	$(X-x) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial F}{\partial y} = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$	$n_x = \frac{\partial F}{\partial x}$	$n_y = \frac{\partial F}{\partial y}$
$y = f(x)$	$Y-y = y'(X-x)$ $(X-x) \sin \gamma - (Y-y) \cos \gamma = 0$	$(Y-y)y' + X-x = 0$ $(X-x) \cos \gamma + (Y-y) \sin \gamma = 0$	$\operatorname{tg} \gamma = y'$	
			$e_x = \sin \gamma$	$e_y = -\cos \gamma$
$x = f(u)$ $y = \psi(u)$	$(X-x) \frac{\partial y}{\partial u} - (Y-y) \frac{\partial x}{\partial u} = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial y}{\partial u}} = -\frac{Y-y}{\frac{\partial x}{\partial u}}$	$n_x = \frac{\partial y}{\partial u}$	$n_y = -\frac{\partial x}{\partial u}$

§ 7. Центроиды колес

Рассмотрим плоские зацепления, используемые для передачи движения между параллельными осями с переменным в общем случае отношением скоростей.

Полученные результаты будут, конечно, приложимы и к наиболее часто встречающемуся в практике случаю передачи движения с постоянным отношением скоростей.

Функция передаточного отношения определяет отношение мгновенных угловых скоростей колес в зависимости от угла φ_1 поворота первого колеса.

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1}{dt} : \frac{d\varphi_2}{dt} = f(\varphi_1).$$

Аналогично

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{f(\varphi_1)}.$$

В области изменения φ_1 функция $i_{12} = f(\varphi_1)$ имеет ограниченные и притом положительные значения (см. § 59).

Пусть требуется передать вращательное движение от оси O_1 к оси O_2 (рис. 5). В плоскости, перпендикулярной осям O_1 и O_2 , относительное движение звеньев 1 и 2 сводится к перекатыванию друг по другу двух сопряженных кривых, носящих название *центроид*.

Геометрическое место точек касания центроид в неподвижной плоскости — линия зацепления центроид — называется *бицентроидой*.

Как это следует из самого определения, бицентроида представляет геометрическое место мгновенных центров вращения в неподвижной плоскости.

Мгновенным центром вращения является такая точка P в неподвижной плоскости, в которой скорость v_{12} относительного движения звеньев равна нулю, т.е.

$$v_{12} = v_1 - v_2 = 0,$$

где v_1 и v_2 — векторы окружных скоростей одной и той же точки P при вращении ее соответственно вокруг O_1 и O_2 .

Скорость относительного движения v_{12} равна нулю в той точке неподвижной плоскости, в которой равны по величине и направлению векторы скоростей v_1 и v_2 . Очевидно, что эта точка (P) должна лежать на линии

O_1O_2 , так как только в точках, принадлежащих этой линии, скорости v_1 и v_2 могут иметь общее направление; затем точка P должна делить межцентровое расстояние на отрезки O_1P и O_2P так, чтобы удовлетворялось равенство $|v_1| = |v_2|$, т.е. чтобы

$$\frac{O_2P}{O_1P} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Из этого следует: *мгновенный центр вращения P звеньев 1 и 2 в относительном движении лежит в неподвижной плоскости на межцентровой*

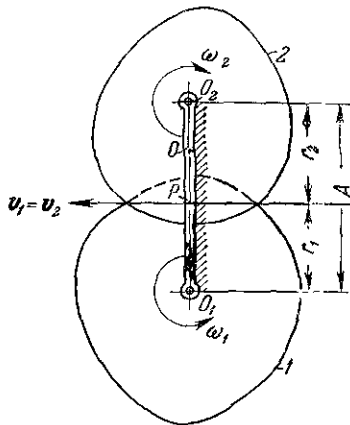


Рис. 5.

линии O_1O_2 и делит это расстояние на отрезки, отношение которых обратно пропорционально отношению мгновенных угловых скоростей колес.

В теории зацеплений мгновенному центру вращения P присвоено название *полюса зацепления*. При переменном передаточном отношении полюс зацепления при передаче вращения перемещается по межцентральной линии.

Центроида каждого из колес представляет геометрическое место мгновенных центров вращения в системе координат, связанной с этим колесом.

Введем обозначения $O_1P = r_1$ и $O_2P = r_2$. Тогда

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = f(\varphi_1).$$

Межцентровое расстояние: $A = r_2 \pm r_1$.

Здесь и ниже верхний знак относится к случаю *внешнего*, а нижний — к случаю *внутреннего* зацепления, при этом предполагается, что $r_2 > r_1$.

Учитывая, что $i_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{A \mp r_1}{r_1}$, уравнение центроиды первого колеса запишем так:

$$r_1 = \frac{A}{i_{12} \pm 1} = \frac{A}{f(\varphi_1) \pm 1}. \quad (7.1)$$

Найдем уравнение центроиды второго колеса.

При каждом фиксированном значении угла поворота φ_1 можно определить расстояние r_2 мгновенного центра вращения P от оси второго колеса

$$r_2 = A \mp r_1 = A \frac{i_{12}}{i_{12} \mp 1}.$$

Определим значение угла поворота φ_2 , соответствующее найденной величине r_2 :

$$i_{12} = \frac{d\varphi_1}{dt} : \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$

следовательно,

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}}.$$

На этом основании уравнение центроиды второго колеса запишем так:

$$r_2 = A \frac{i_{12}}{i_{12} \pm 1}, \quad \varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}}, \quad (7.2)$$

где $i_{12} = f(\varphi_1)$.

Следует оговорить, что углы φ поворота колес и полярные углы ϑ центроид равны по величине, но отсчитывать их нужно в противоположных направлениях. На рис. 6 отсчет полярных углов производится в направлениях, указанных пунктиром.

Угол μ , образуемый радиусом-вектором с положительным направлением касательной, определяется из уравнения (6.27)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

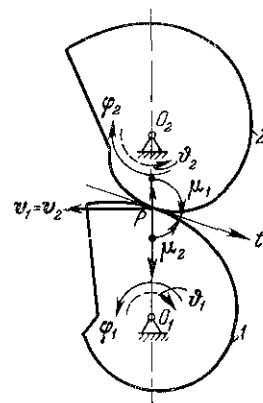


Рис. 6.

Для первой центроиды, используя уравнение (7.1), получим

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{r_1}{\frac{dr_1}{d\varphi_1}} = - \frac{i_{12} \pm 1}{i'_{12}}. \quad (7.3)$$

В этом уравнении и ниже

$$i'_{12} = \frac{d}{d\varphi_1} (i_{12}).$$

Применительно ко второй центроиде

$$\operatorname{tg} \mu_2 = \frac{r_2}{\frac{dr_2}{d\varphi_2}} = \frac{r_2}{\frac{dr_2}{d\varphi_1} i_{12}} = \pm \frac{i_{12} \pm 1}{i'_{12}}. \quad (7.4)$$

Уравнениями (7.3) и (7.4) подтверждается, что центроиды колес имеют в мгновенном полюсе зацепления общую касательную Pt (рис. 6), а углы μ_1 и μ_2 связаны зависимостью

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= \pi \quad (\text{для внешнего зацепления}), \\ \mu_1 &= \mu_2 \quad (\text{для внутреннего зацепления}). \end{aligned}$$

В случае передачи вращательного движения при $i_{12} = \text{const}$ центроидами колес являются окружности с радиусами r_1 и r_2 . Очевидно, что при этом $\mu_1 = \mu_2 = \pi/2$.

Рассмотрим теперь случай преобразования вращательного движения в поступательное (рис. 7). Введем обозначение

$$\psi(\varphi_1) = \frac{ds}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt},$$

где ds/dt — скорость перемещения звена 2. Применяя доказательство, аналогичное приведенному ранее, найдем, что

$$O_1P = \frac{v_2}{\omega_1} = \psi(\varphi_1).$$

В передаче, предназначенной для преобразования вращательного движения в поступательное, мгновенный полюс зацепления P лежит на линии O_1n , перпендикулярной направлению поступательного перемещения, и отстоит от центра вращения на расстоянии, определяемом отношением мгновенных значений: скорости в поступательном и угловой скорости во вращательном движениях.

Такая передача представляет сочетание некруглого колеса с рейкой (рис. 8).

Центроида некруглого колеса определяется уравнением

$$r_1 = \psi(\varphi_1). \quad (7.5)$$

Центриду рейки удобнее задавать в прямоугольной системе координат, у которой направление оси x совпадает с направлением

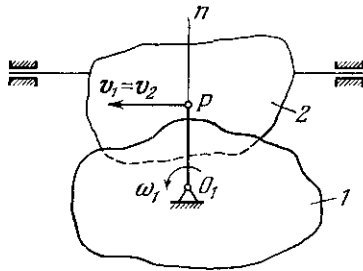


Рис. 7.

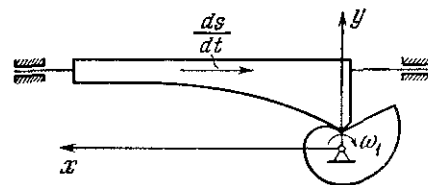


Рис. 8.

поступательного движения:

$$x = \int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1, \quad y = r_1. \quad (7.6)$$

При передаче движения с постоянным отношением скоростей звеньев $\psi(\varphi_1) = \text{const}$; центроида колеса представляет в этом случае окружность радиуса $r_1 = v_2/\omega_1$, а центроидой рейки является прямая, касательная к этой окружности.

Выше уже было сказано, что в относительном движении центроиды колес перекатываются друг по другу. Для того чтобы найти угловую скорость перекатывания, воспользуемся методом обращения движения.

Сообщим всем звеньям механизма вращение со скоростью, равной по величине и противоположной по направлению скорости вращения первой центроиды. Тогда звено 1 (рис. 9) станет неподвижным, а звено 2 будет участвовать в двух движениях: в переносном — во вращении вместе с водилом со скоростью ω_1 в направлении стрелки s_1 и в относительном — во вращении вокруг своей собственной оси со скоростью ω_2 в направлении стрелки s_2 .

Найдем угловую скорость ω_{21} в относительном движении.

Скорость точки O_2 звена 2 при вращении вокруг мгновенного центра P равна

$$v_{O_2} = \omega_{21} O_2 P.$$

Скорость этой же точки можно определить, считая, что движение звена 2 состоит из вращения вместе с водилом вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1 и вращения относительно водила с угловой скоростью ω_2 вокруг оси O_2

$$v_{O_2} = \omega_1 (O_1 P + O_2 P).$$

Следовательно,

$$\omega_{21} O_2 P = \omega_1 (O_1 P + O_2 P).$$

Так как $\frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12}$, получим

$$\omega_{21} = \omega_1 + \omega_2.$$

При внутреннем зацеплении

$$\omega_{21} = |\omega_1 - \omega_2|.$$

Аналогичным образом можно доказать, что центроиды колеса и рейки перекатываются друг по другу с угловой скоростью $\omega_{21} = \omega_1$.

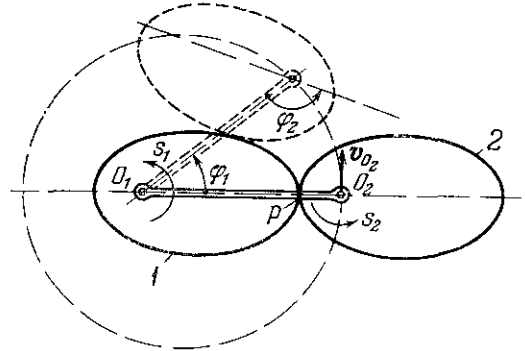


Рис. 9.

Пример 4. Найдём центроиды рейки и колеса, если их перемещения связаны зависимостью *)

$$s = \frac{mz}{2} \varphi_1 + a \sin \varphi_1, \quad (7.7)$$

где z — число зубцов колеса, $m = \frac{t}{\pi}$ — модуль зубцов (t — шаг зубцов).

В рассматриваемом случае

$$\psi(\varphi_1) = \frac{ds}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{ds}{d\varphi_1} = \frac{mz}{2} + a \cos \varphi_1. \quad (7.8)$$

На основании (7.5) центроиду колеса выразим уравнением

$$r_1 = \frac{mz}{2} + a \cos \varphi_1. \quad (7.9)$$

Используя (7.6), уравнения центроиды рейки запишем так:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1 = s = \frac{mz}{2} \varphi_1 + a \sin \varphi_1, \\ y &= r_1 = \frac{mz}{2} + a \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Центроиды колеса и рейки изображены на рис. 27.

§ 8. Теорема Виллиса

Центроиды колес можно было бы использовать для передачи движения, выполнив по их очертаниям фрикционные диски.

При большой величине передаваемого момента и $i_{12} = \text{const}$ нужно обеспечить значительную силу трения круговых дисков, и для этой цели приходится прикладывать значительную по величине силу нажатия дисков, что вызывает чрезмерную загрузку подшипников. По этой причине фрикционная передача заменяется зубчатой.

Основной теоремой зацепления (теоремой Виллиса) определяются геометрические условия сопряжения профилей, передающих движение с заданным законом изменения передаточного отношения.

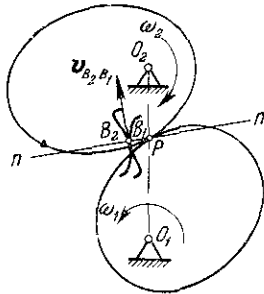


Рис. 10.

Пусть центроиды колес, касающиеся друг друга в точке P (рис. 10), снабжены профилями, которые должны передавать вращение между осями O_1 и O_2 с заданным отношением мгновенных угловых скоростей, определяемым из условия

$$i_{12} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Линия $n-n$ является общей нормалью к профилям зубцов в точке их касания. Скорость точки B_2 профиля зубца второго колеса относительно точки B_1 профиля зубца первого колеса на основании ранее установленной зависимости может

быть найдена как произведение мгновенной угловой скорости ω_{12} на величину радиуса вращения PB_2 . Направление скорости $v_{B_2B_1}$ как отно-

*) Такая зависимость имеет место при нарезании круглых колес на зубофрезерном станке при наличии эксцентриситета червячной шестерни цепи деления ([172], стр. 287 и [106]).

сительной скорости должно совпадать с направлением общей касательной к профилям в точке B , так как, если это условие не будет соблюдено, профили будут врезаться или отходить друг от друга. Из этого следует, что *мгновенный радиус вращения PB имеет направление общей нормали к соприкасающимся профилям.*

Это и является доказательством основной теоремы зацепления, известной в теории зубчатых передач под названием теоремы Виллиса, справедливой для плоских зацеплений как с постоянным, так и с переменным передаточным числом.

Этой теореме можно придать следующую формулировку: *профили, передающие вращение между параллельными осями с отношением угловых скоростей, изменяющимся по заданному закону, должны быть таковы, чтобы общая нормаль к профилям в точке их касания проходила через мгновенный полюс зацепления.*

Ранее было доказано, что мгновенным полюсом зацепления является точка на линии межцентрового расстояния, делящая его на отрезки, находящиеся в отношении, обратно пропорциональном отношению мгновенных угловых скоростей.

В случае передачи движения с постоянным отношением скоростей полюс зацепления занимает постоянное положение в неподвижной плоскости. Сопряженные профили должны быть при этом таковы, чтобы общая нормаль в точке их касания пересекала линию межцентрового расстояния в одной и той же точке.

Закон изменения передаточного отношения полностью определяется очертаниями взаимодействующих профилей.

Из основной теоремы зацепления следует, что при заданных профилях полюсом зацепления является точка пересечения нормали к профилям с линией межцентрового расстояния. Рассмотрим, например, взаимодействие двух рычагов, вступающих в соприкосновение друг с другом профилями $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ (рис. 11). Пусть в начальном положении профили касаются друг друга в точке B_1 ; мгновенное передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P_1}{O_1 P_1},$$

где P_1 — мгновенный полюс зацепления — точка пересечения нормали $n_1 - n_1$ с линией межцентрового расстояния $O_1 O_2$. В новом положении рычагов, изображенном на рис. 11 пунктиром, профили касаются друг друга в новой точке B_2 , а нормаль $n_2 - n_2$ к профилям пересекает линию межцентрового расстояния в точке P_2 . Передаточное отношение в новом положении рычагов окажется равным

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P_2}{O_1 P_2}.$$

Очевидно, что при указанных на рис. 11 профилях передача вращения будет осуществляться с переменным отношением скоростей.

3 Ф. Л. Литвин

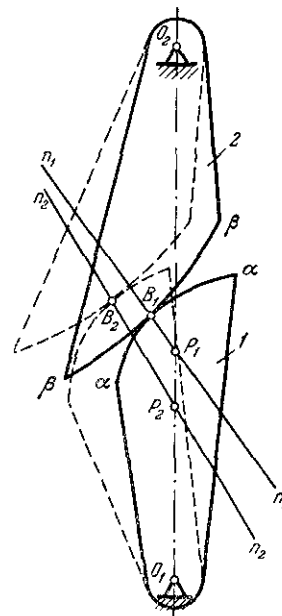


Рис. 11.

§ 9. Сопряженные профили

Хотя заданной функции передаточного отношения при фиксированном значении межцентрового расстояния соответствует единственная пара центроид, мы располагаем свободой выбора *сопряженных* между собой *профилей зубцов*, удовлетворяющих основной теореме зацепления, которыми должны быть снабжены эти центроиды. Целесообразность выбора тех или иных профилей зубцов во многом определяется возможностью осуществления простой схемы нарезания, основывающейся на использовании метода обкатки.

Из основной теоремы зацепления следует, что выбираемой схемой нарезания зубцов можно обеспечить на центроидах взаимосвязанное

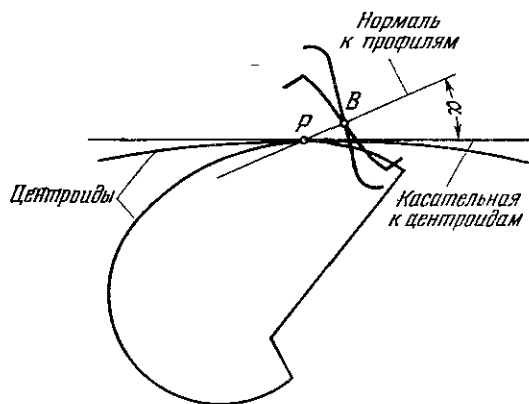


Рис. 12.

распределение нормалей к профилям зубцов, называемых в последующем *профильными нормальными*.

Это достигается соблюдением следующего принципа нарезания зубцов:

Сопряженные профили зубцов могут быть нарезаны по методу обкатки, если относительное движение режущей кромки инструмента сводится к перекатыванию одной и той же центроиды инструмента (при едином начале перекатывания) по центроидам сопряженных колес.

К такому результату можно прийти, рассматривая зацепление некруглого колеса с инструментальной рейкой (рис. 12).

Пусть центроиды инструмента и нарезаемого колеса касаются друг друга в точке P и профильная нормаль отклоняется от касательной к центроидам на некоторый угол α . Введем понятие о *соответственных точках центроид* колес как о точках, отстоящих на одинаковом дуговом расстоянии от выбранного на центроидах колес начала отсчета. Именно в соответственных точках происходит касание центроид колес на межцентровой линии.

В соответственной точке центроиды второго колеса при соблюдении единого начала обкатывания центроида инструмента коснется центроиды колеса той же точкой, что и при нарезании первого колеса, а профильная нормаль PB отклонится от касательной к центроиду на тот же угол α .

При вращении нарезанных таким образом колес соответственные точки их центроид выйдут на линию межцентрового расстояния и сольются в одной точке — в мгновенном полюсе зацепления. В этот же момент профили их зубцов коснутся друг друга в точке B и общая профильная нормаль PB действительно пройдет через мгновенный полюс зацепления.

При нарезании по методу обкатки центроида инструмента может иметь различные очертания; важно лишь, чтобы обкатывание инструмента производилось по тем же центроидам нарезаемых колес, которые будут

у колес при сцеплении друг с другом *). Связь между движениями инструмента и нарезаемого колеса в процессе нарезания зубцов существенно упрощается, если центроида инструмента будет иметь простую форму.

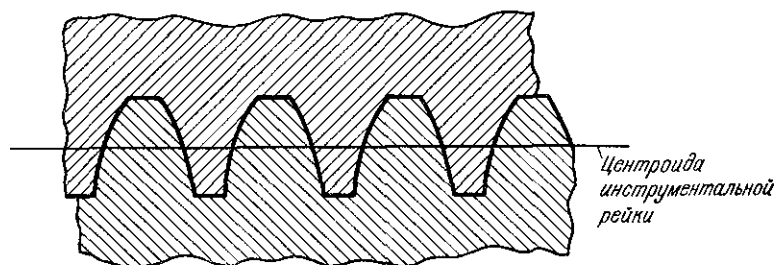


Рис. 13.

Типовым зуборезным инструментом являются: а) инструментальная рейка, б) инструментальное колесо (долбяк); при нарезании центроидами

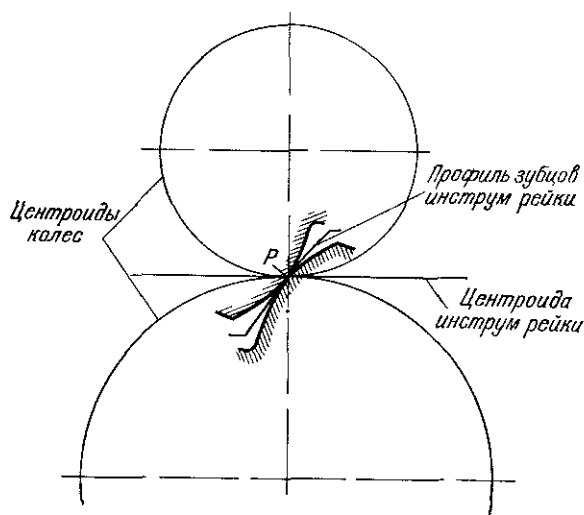


Рис. 14.

инструмента являются: прямая линия для рейки, окружность для долбяка. В общем случае для нарезания пары сопряженных колес нужно использовать две инструментальные рейки, входящие друг в друга как шаблон и контршаблон (рис. 13).

В случае нарезания круглых колес профили зубцов инструментальной рейки можно представить в виде некоторого математического контура, помещенного между профилями зубцов колес передачи (рис. 14). Профили зубцов колес и рейки будут иметь совпадающие точки контакта, общим полюсом при зацеплении рейки с колесами и колес между собой явится точка P .

*) Исключение составляет эвольвентное зацепление, в котором центроида колеса при нарезании зубцов и центроида колеса в передаче могут не совпадать друг с другом (см. гл. IV).

По аналогии с инструментальной рейкой можно было бы представить также инструментальное колесо как некоторый математический контур, помещенный между профилями зубцов колес.

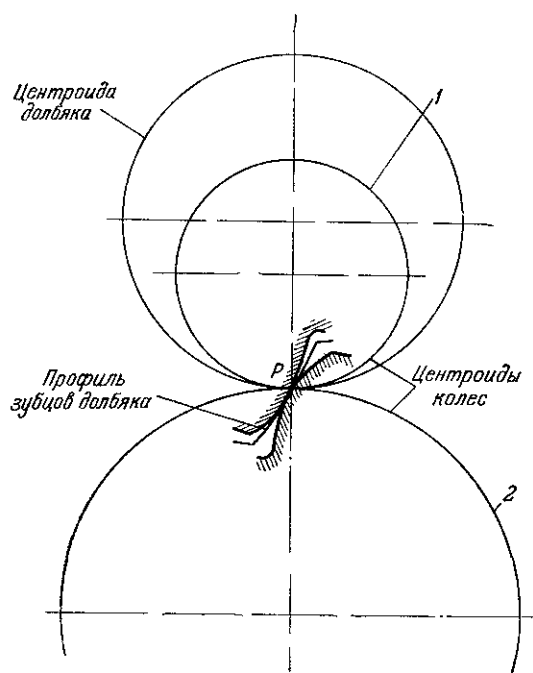


Рис. 15.

При нарезании колеса 1 долбяк и колесо должны находиться во внутреннем, при нарезании колеса 2 — во внешнем зацеплении (рис. 15). Осуществление такого принципа образования сопряженных профилей на практике требует применения двух долбяков с одинаковыми профилями; один из этих долбяков должен иметь внешнее, а другой — внутреннее зацепление. Ввиду значительных трудностей изготовления долбяка с внутренним зацеплением, практическое осуществление такого принципа образования сопряженных профилей является нецелесообразным. Для нарезания зубцов на сопряженных колесах применяются два долбяка внешнего зацепления, в общем случае различных размеров и с различными профилями зубцов. У одного из этих долбяков профили зубцов являются сопряженными

профилями зубцов колеса 1, а у другого — профилям зубцов колеса 2; при этом профили зубцов долбяков также должны быть сопряженными между собой.

Нужно сразу же оговорить, что задача образования сопряженных профилей зубцов существенно упрощается для эвольвентного зацепления. В этом случае одним инструментом (рейкой или долбяком) можно осуществить нарезание зубцов не только для одной пары, но и для группы сопряженных колес.

§ 10. Применяемые системы координат

При исследовании плоского зацепления вводятся в рассмотрение: подвижные системы координат $S_1(x_1, y_1)$ и $S_2(x_2, y_2)$, жестко связанные соответственно с первым и вторым колесом механизма, неподвижная система координат $S(x, y)$, жестко связанная со стойкой. Стойке присвоен номер «0». Для краткости записей индекс «0» в обозначениях S_0, x_0, y_0, r_0 опущен, но сохранен в матрице перехода.

Если передача движения происходит с постоянным отношением скоростей, полюс зацепления занимает постоянное положение на линии центров. В этом случае начало O неподвижной системы координат S можно поместить в полюсе зацепления (рис. 16). Системы S_1 и S_2 отличаются от неподвижной системы поворотами на углы φ_1 и φ_2 и смещениями

по оси y на величины r_1 и r_2 . Указанное выше совмещение начала O неподвижной координаты с полюсом зацепления не является обязательным. В частности, начало O системы S можно совместить с началом O_1 подвижной системы S_1 .

Переход от S_1 к S описывается матричным равенством

$$\rho = M_{01}\rho_1. \quad (10.1)$$

Здесь ρ и ρ_1 — столбцевые матрицы радиусов-векторов ρ и ρ_1 . В обозначении матрицы перехода M_{01} индексы «01» указывают, что переход совершается от S_1 к S .

На основании правил составления матриц перехода, указанных в § 4, матрица M_{01} определится так:

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & -r_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (10.2)$$

где r_1 — радиус центроиды колеса 1.

Формулы перехода от S_1 к S на основании (10.1) и (10.2) представим в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 - r_1, \\ t &= t_1 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Переход от системы S к S_2 описывается матричным равенством

$$\rho_2 = M_{20}\rho. \quad (10.4)$$

Матрица

$$M_{20} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & r_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -r_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.5)$$

Сопоставив выражения (10.4) и (10.1), переход от S_1 к S_2 запишем матричным равенством

$$\rho_2 = M_{20}\rho = M_{20}M_{01}\rho_1 = M_{21}\rho_1. \quad (10.6)$$

Произведение матриц $M_{20}M_{01} = M_{21}$ найдем, используя правило, указанное в § 2:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos (\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin (\varphi_1 + \varphi_2) & A \sin \varphi_2 \\ \sin (\varphi_1 + \varphi_2) & \cos (\varphi_1 + \varphi_2) & -A \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.7)$$

Здесь $A = r_1 + r_2$ — межцентровое расстояние колес.

Формулы перехода от S_1 к S_2 , на основании уравнений (10.6) и (10.7) запишем так:

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos (\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin (\varphi_1 + \varphi_2) & A \sin \varphi_2 \\ \sin (\varphi_1 + \varphi_2) & \cos (\varphi_1 + \varphi_2) & -A \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ t_1 \end{vmatrix},$$

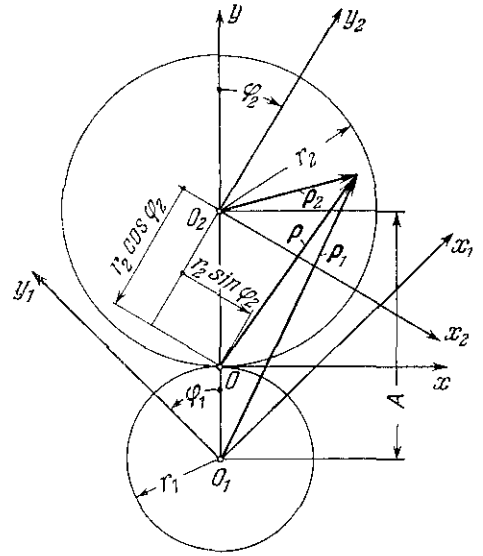


Рис. 16.

или

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - y_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + A \sin \varphi_2, \\ y_2 &= x_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - A \cos \varphi_2, \\ t_2 &= t_1 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Для перехода от S_2 к S_1 нужно воспользоваться обратной матрицей M_{12} . Элементы этой матрицы выразим через элементы матрицы M_{21} , используя правило, указанное в § 5:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & A \sin \varphi_1 \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & A \cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.9)$$

Формулы перехода от S_2 к S_1 определяются так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + y_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + A \sin \varphi_1, \\ y_1 &= -x_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + A \cos \varphi_1, \\ t_1 &= t_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Найдем теперь формулы связи между системой координат $S_2(x_2, y_2)$, связанной с колесом, и $S_1(x_1, y_1)$, связанной с рейкой (рис. 17). Рассмотрим два случая: а) переход от S_2 к S_1 , б) обратный переход — от S_1 к S_2 .

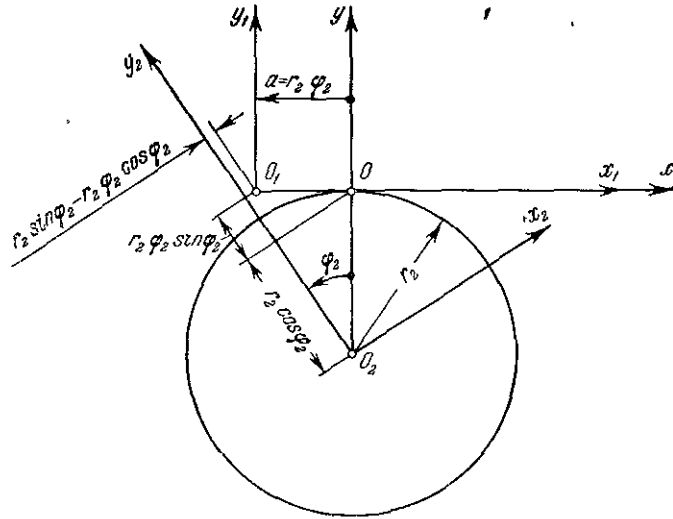


Рис. 17.

Для перехода от S_2 к S_1 воспользуемся матричным равенством

$$\rho_1 = M_{12} \rho_2, \quad (10.11)$$

где

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & r_2 \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.12)$$

На основании (10.11) и (10.12)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2 + r_2 \varphi_2, \\ y_1 &= x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2 - r_2, \\ t_1 &= t_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Для перехода от S_2 к S воспользуемся уравнениями (10.13), положив в них $r_2 \varphi_2 = 0$ (см. рис. 17). Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2, \\ y &= x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2 - r_2, \\ t &= t_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Обратная матрица перехода M_{21} определится так (см. § 5):

$$M_{21} = \left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & r_2 (\sin \varphi_2 - \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & r_2 (\cos \varphi_2 + \varphi_2 \sin \varphi_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (10.15)$$

§ 11. Уравнения огибающей семейства кривых

Профили зубцов колес рассматриваются как взаимноогibaемые в относительном движении. Это иллюстрируется построениями рис. 18, где 2 — неподвижная центроида, 1 — подвижная центроида, перекатываемая по центроиде 2; α — α — профиль, связанный с центроидой 1. При перекатывании центроид друг по другу образуется семейство профилей α — α ; искомый профиль β — β представляет огибающую семейства профилей α — α .

Рассмотрим аналитический способ определения огибающей семейства кривых, принятый в дифференциальной геометрии.

Пусть в системе координат x_1, y_1 задано уравнение профиля зубцов α — α первого колеса в таком виде:

$$F_1(x_1, y_1) = 0. \quad (11.1)$$

Предполагается, что кривая (11.1) состоит только из обыкновенных точек (см. § 19). С колесами 1 и 2 жестко связаны системы S_1 и S_2 . Колеса вращаются вокруг своих осей; текущие углы поворота колес обозначим через φ_1 и φ_2 .

Запишем уравнение заданного профиля α — α в системе S_2 с помощью формул перехода от x_2, y_2 к x_1, y_1 , согласно которым

$$x_1 = x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}),$$

$$y_1 = y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}).$$

Подставив эти выражения в (11.1), получим

$$F_1[x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}), y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})] = 0.$$

В результате уравнение семейства заданных профилей в системе S_2 в общем виде представим так:

$$F_2(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}) = 0. \quad (11.2)$$

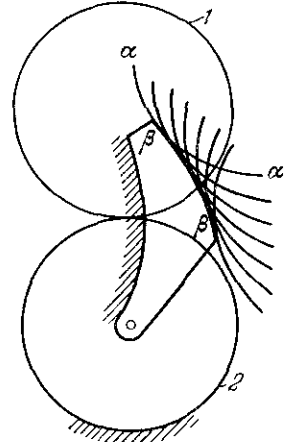


Рис. 18.

При написании этого уравнения мы приняли, что параметром семейства заданных профилей является φ_1 , а φ_2 зависит от φ_1 , так как

$$\varphi_2 \doteq \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}},$$

где

$$i_{12} = \frac{d\varphi_1}{dt} : \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}.$$

Очевидно, что при передаче вращения с постоянным отношением скоростей ($i_{12} = \text{const}$) $\varphi_2 = \varphi_1/i_{12}$.

При фиксированном значении параметра φ_1 уравнение (11.2) определяет профиль зубцов первого колеса в системе x_2, y_2 после поворота первого колеса на угол φ_1 .

Как известно из дифференциальной геометрии, *огibaющая семейства кривых* выражается следующими уравнениями:

$$F_2(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}) = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_1}(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}) = 0. \quad (11.3)$$

При фиксированном значении φ_1 уравнения (11.3) выражают такую точку в системе x_2, y_2 , в которой касаются друг друга сопряженные профили $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$. Очевидно, что семейство таких точек, вычисляемых при различных значениях параметра φ_1 , и представит искомый профиль $\beta - \beta$.

Уравнения (11.3) можно трактовать как аналитическое выражение совокупности точек контакта сопряженных профилей в системе координат x_2, y_2 . Если уравнения (11.3) записать в неподвижной системе координат x, y , то совокупность точек контакта в этой системе представит линию зацепления профилей. Уравнения (11.3), записанные в системе x_1, y_1 , выражают совокупность точек контакта в этой системе, причем положение каждой точки контакта указывается в зависимости от угла поворота φ_1 первого колеса.

Если профиль зубца первого колеса задан уравнением

$$y_1 = f(x_1), \quad (11.4)$$

то для определения *огibaющей* нужно воспользоваться приведенными выше уравнениями, приняв, что

$$F_1(x_1, y_1) = y_1 - f(x_1) = 0. \quad (11.5)$$

Рассмотрим теперь, как определяется *огibaющая*, если профиль зубца задан параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(u_1), \quad y_1 = y_1(u_1). \quad (11.6)$$

Семейство заданных профилей в системе S_2 получим, используя формулы связи между системами координат S_1 и S_2 , согласно которым

$$x_2 = x_2(x_1, y_1, \varphi_1), \quad y_2 = y_2(x_1, y_1, \varphi_1). \quad (11.7)$$

Подставим в (11.7) выражения (11.6). В результате в системе S_2 получим семейство профилей такого вида:

$$x_2 = x_2(u_1, \varphi_1), \quad y_2 = y_2(u_1, \varphi_1). \quad (11.8)$$

Огибающая такого семейства определится, если найти связь между параметрами u_1 и φ_1 в виде зависимости

$$f_1(u_1, \varphi_1) = 0. \quad (11.9)$$

С учетом зависимости (11.9) уравнения (11.8) запишем так:

$$x_2 = x_2[u_1, \varphi_1(u_1)], \quad y_2 = y_2[u_1, \varphi_1(u_1)]. \quad (11.10)$$

В векторной форме

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2[u_1, \varphi_1(u_1)]. \quad (11.11)$$

Вектор скорости перемещения точки контакта по огибающей (11.11) определится уравнением

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{du_1} \right) \frac{du_1}{dt}. \quad (11.12)$$

Напомним, что при фиксированном значении параметра движения φ_1 уравнение (11.8) определяет огибаемую кривую — профиль зуба звена I . Вектор скорости перемещения по этому профилю определится уравнением

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt}. \quad (11.13)$$

В точке касания огибаемых кривых векторы скоростей, определяемые (11.12) и (11.13), должны быть коллинеарны. Поэтому

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{du_1} \right) = \lambda \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial u_1}. \quad (11.14)$$

Переходя к проекциям, получим

$$\frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{du_1}}{\frac{\partial x_2}{\partial u_1}} = \frac{\frac{\partial y_2}{\partial u_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{du_1}}{\frac{\partial y_2}{\partial u_1}} = \lambda. \quad (11.15)$$

Из выражений (11.15) после преобразований получим

$$\frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1}} = \frac{\frac{\partial y_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1}}. \quad (11.16)$$

Основываясь на выражении (11.16), можно получить искомую связь (11.9) между параметрами u_1 и φ_1 .

Уравнение (11.16) в кинематическом отношении можно трактовать так. Вектор

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial y_2}{\partial u_1} \mathbf{j}_2 \right) \frac{du_1}{dt} = \mathbf{t}_2,$$

где $\mathbf{t}_2$ — вектор скорости перемещения по профилю.
Вектор

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \mathbf{j}_2 \right) \frac{d\varphi_1}{dt} = \mathbf{v}_2^{(12)},$$

где $\mathbf{v}_2^{(12)}$ — записанный в системе S_2 вектор скорости относительного движения точки системы S_1 относительно такой же точки системы S_2 . Проекции вектора $\mathbf{v}_2^{(12)}$ находятся дифференцированием выражений (11.7).

Так как согласно выражениям (11.16) векторы t_2 и $v_2^{(12)}$ коллинеарны, это означает, что в точках контакта взаимноогibaемых поверхностей

$$n_2 v_2^{(12)} = n_2 v_2^{(21)} = 0, \quad (11.17)$$

где n_2 — вектор нормали.

Это уравнение будет нами использовано в § 13.

§ 12. Расчет плоских зацеплений по Х. И. Гохману

При исследовании плоских зацеплений решаются следующие задачи: а) определение профиля, сопряженного заданному, что сводится к нахождению огибающей семейства кривых, б) отыскание линии зацепления сопряженных профилей. Решение этих задач методами дифференциальной геометрии было изложено в предыдущем параграфе.

Метод Х. И. Гохмана позволяет решить эти задачи более простым путем, основывающимся на том, что сначала определяются уравнения контактной точки на профиле зубца колеса 1. Указанные уравнения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, y_1) &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1} [x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}), y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

В этих уравнениях $x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})$, $y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})$ — функции от x_2, y_2 , выражаемые через формулы преобразования координат.

При таком подходе мы временно считаем как бы заданным профиль зубцов ведомого звена $F_2(x_2, y_2) = 0$. Уравнение

$$F_1(x_1, y_1) = 0,$$

где

$$x_1 = x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}), \quad y_1 = y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}),$$

выражает в системе x_1, y_1 семейство кривых с параметром φ_1 .

Уравнения (12.1) можно записать в такой форме:

$$F_1(x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = 0, \quad (12.2)$$

где

$$x_1 = x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}), \quad y_1 = y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}),$$

а $\partial x_1 / \partial \varphi_1$ и $\partial y_1 / \partial \varphi_1$ — частные производные функции $x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})$, $y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})$.

Нужно отметить, что в выражения для частных производных $\partial x_1 / \partial \varphi_1$ и $\partial y_1 / \partial \varphi_1$ входят координаты x_2, y_2 . Для того чтобы в выражениях для $\partial x_1 / \partial \varphi_1$ и $\partial y_1 / \partial \varphi_1$ выразить x_2, y_2 через x_1, y_1 , нужно воспользоваться формулами преобразования координат вида

$$x_2 = x_2(x_1, y_1, \varphi_1, i_{12}), \quad y_2 = y_2(x_1, y_1, \varphi_1, i_{12}).$$

Уравнения (12.2) позволяют найти положение точки контакта на профиле зубца ведущего колеса в зависимости от угла поворота φ_1 .

Для того чтобы найти линию зацепления, уравнения (12.2) надо записать в системе координат x, y , используя формулы связи между системами x_1, y_1 и x, y . Если же уравнения (12.2) записать в системе x_2, y_2 , мы получим параметрические уравнения искомого профиля как совокупности контактных точек в системе x_2, y_2 .

Уравнения (12.2) легко истолковать кинематически, придав им следующий смысл: *в точке касания профилей вектор элементарного перемещения в относительном движении должен быть перпендикулярен вектору нормали к профилям в контактной точке*. Это условие можно записать так:

$$\alpha \cdot n = 0, \quad (12.3)$$

где α — вектор элементарного перемещения в относительном движении, n — вектор нормали к профилям.

В координатной форме в системе x_1, y_1 имеем:

$$a_{x1}n_{x1} + a_{y1}n_{y1} = 0. \quad (12.4)$$

У кривой, заданной уравнением $F_1(x_1, y_1) = 0$, проекции вектора нормали n_{x1} и n_{y1} пропорциональны значениям $\partial F_1 / \partial x_1$ и $\partial F_1 / \partial y_1$. Выражения

$$x_1 = x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}), \quad y_1 = y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12})$$

представляют в системе x_1, y_1 проекции вектора конечного перемещения в относительном движении. Очевидно, что выражения $\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1$ и $\frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1$ представляют проекции вектора *элементарного* перемещения в относительном движении. Отсюда

$$a_{x1} = \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1, \quad a_{y1} = \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1.$$

На основании изложенного можно констатировать эквивалентность уравнений

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = 0$$

и

$$a_{x1}n_{x1} + a_{y1}n_{y1} = 0.$$

Форма уравнений для определения *контактной точки* определяется тем, в какой форме записывается уравнение профиля зубцов колеса. Уравнения (12.2) контактной точки соответствуют случаю, когда профиль задан уравнением $F_1(x_1, y_1) = 0$. Продифференцировав выражение для F_1 , получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 = 0. \quad (12.5)$$

Отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx_1}. \quad (12.6)$$

В случае, когда профиль зубцов задан уравнением $y_1 = f(x_1)$, для определения контактной точки нужно на основании формул (12.2) и (12.6) воспользоваться уравнениями

$$y_1 = f(x_1), \quad - \frac{dy_1}{dx_1} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда уравнения профиля зубцов заданы в параметрической форме:

$$x_1 = f_1(u), \quad y_1 = f_2(u).$$

Используя зависимость

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{f'_2(u)}{f'_1(u)},$$

уравнения контактной точки запишем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(u), \quad y_1 = f_2(u), \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} f'_2(u) - \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} f'_1(u) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Частные производные $\partial x_1/\partial \varphi_1$ и $\partial y_1/\partial \varphi_1$ определяются так же, как и в предыдущих случаях.

Методика Х. И. Гохмана была применена И. А. Фрайфельдом [247] для расчета профиля зубцов инструмента.

Пример 5. Найдем уравнения профиля зубцов инструмента для обработки шлицевого вала (рис. 19). Предполагается, что обработка производится посредством долбяка, представляющего круглое колесо, либо ролика (в случае накатывания).

Уравнение профиля $\alpha-\alpha$ изделия имеет вид

$$x_1 - h = 0. \quad (12.8)$$

Будем считать, что при обработке изделия его центроидой является окружность радиуса r_1 , а центроидой инструмента является окружность радиуса r_2 . Это означает, что углы поворота изделия и инструмента связаны зависимостью

$$i_{12} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

При решении задачи воспользуемся тремя системами координат: x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x, y , расположение которых приведено на рис. 16.

Зависимости между системами координат x_1, y_1 и x_2, y_2 мы ранее представили выражениями (10.8) и (10.10)

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - y_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + A \sin \varphi_2, \\ y_2 &= x_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - A \cos \varphi_2, \\ x_1 &= x_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + y_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + A \sin \varphi_1, \\ y_1 &= -x_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + y_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + A \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения (12.2) контактной точки профиля в системе x_1, y_1 мы записали так:

$$F_1(x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = 0,$$

где

$$x_1 = x_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}), \quad y_1 = y_1(x_2, y_2, \varphi_1, i_{12}).$$

На основании (12.8)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 0.$$

На основании (10.10), учитывая, что $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = i_{21} = \frac{1}{i_{12}}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} &= -x_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) (1 + i_{21}) + y_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) (1 + i_{21}) + A \cos \varphi_1, \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} &= -x_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) (1 + i_{21}) - y_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) (1 + i_{21}) - A \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

На основании выражений (10.10) для x_1 и y_1 получим

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = y_1 (1 + i_{21}) - A i_{21} \cos \varphi_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = -x_1 (1 + i_{21}) + A i_{21} \sin \varphi_1.$$

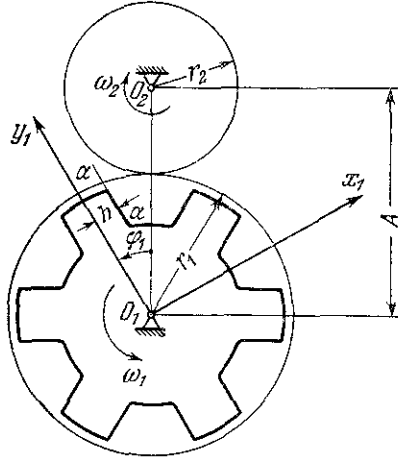


Рис. 19.

Уравнения контактной точки в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 - h &= 0, \\ y_1 &= A \frac{i_{21}}{1 + i_{21}} \cos \varphi_1 = r_1 \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Для определения контактной точки в системе x_2, y_2 нужно совместно рассмотреть уравнения (12.9) и (10.8)

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= h \cos (\varphi_1 + \varphi_2) - r_1 \cos \varphi_1 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + A \sin \varphi_2, \\ y_2 &= h \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + r_1 \cos \varphi_1 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) - A \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Уравнения (12.10) являются параметрическими уравнениями профиля зубцов инструмента.

Легко показать, что уравнения (12.10) выражают уравнения кривой, экидистантной эпициклоиде, отстоящей от нее на величину h по направлению нормали. К такому результату можно прийти, исходя из следующих соображений. Прямая $x_1 = 0$, проходящая через центр колеса, представляет собой частный случай гипоциклоиды, которая может быть образована при качении по окружности r_1 некоторой вспомогательной окружности радиуса r ; радиус вспомогательной окружности $r = r_1/2$ и перекатываемые окружности должны находиться во внутреннем касании (см. § 54). При перекатывании этой же вспомогательной окружности по окружности радиуса r_2 инструмента образуется эпициклоида. Два таких профиля, очерченных по эпициклоиде и гипоциклоиде, являются сопряженными профилями (см. § 55). Если вместо гипоциклоиды частного вида ($x_1 = 0$) выбрать экидистантный профиль $x_1 = h$, сопряженный профиль будет очерчен по кривой, экидистантной эпициклоиде и отстоящей от нее по нормали на величину h .

§ 13. Кинематический способ определения уравнения зацепления профилей

Основываясь на материалах § 12 и уравнении (11.17), для определения уравнения зацепления можно исходить из следующего положения: в точке касания взаимогнбаемых профилей вектор скорости относительного движения должен быть перпендикулярен вектору нормали. Следовательно,

$$n_i v_i^{(12)} = 0, \quad (13.1)$$

где n_i — вектор нормали, $v_i^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения. Индекс i указывает, в какой из систем координат записаны проекции векторов.

Будем считать заданными: уравнение профиля зубцов звена 1 в системе координат S_1 , абсолютные движения звеньев 1 и 2 относительно стойки. Требуется найти: а) профиль зубцов звена 2, огибающий в относительном движении профиль зубцов звена 1, б) линию зацепления обоих профилей.

Примем для определенности, что профиль зубцов звена 1 задан в параметрической форме

$$\rho_1 = \rho_1(u_1). \quad (13.2)$$

Угловые скорости вращения звеньев 1 и 2 определены векторами $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$. На рис. 20 изображены системы координат S_1, S и S_2 , ранее представленные на рис. 16, и векторы угловых скоростей $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$.

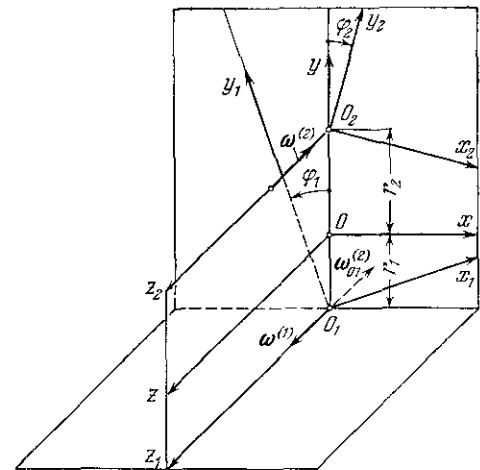


Рис. 20.

Уравнение зацепления можно определить, рассматривая зацепление в подвижной системе координат S_1 , либо в неподвижной системе S .

Будем вначале исходить из того, что зацепление рассматривается в системе S_1 . Для определения вектора скорости относительного движения $v_1^{(12)}$ приведем сначала вектор $\omega^{(2)}$ к точке O_1 . В результате приведения получим вектор $\omega_{O_1}^{(2)}$ с линией действия, проходящей через O_1 (рис. 20), и вектор-момент

$$m_1^{(2)} = A \times \omega^{(2)}. \quad (13.3)$$

Здесь A — радиус-вектор в системе S_1 произвольной точки линии действия $O_2 z_2$ вектора $\omega^{(2)}$, $m_1^{(2)}$ — вектор скорости поступательного движения в точке O_1 . Вектор скорости относительного движения

$$\begin{aligned} v_1^{(12)} &= v_1^{(1)} - v_1^{(2)} = \omega^{(1)} \times \rho_1 - (\omega_{O_1}^{(2)} \times \rho_1 + A \times \omega^{(2)}) = \\ &= (\omega^{(1)} - \omega_{O_1}^{(2)}) \times \rho_1 + \omega^{(2)} \times A. \end{aligned} \quad (13.4)$$

В приведенных записях $v_1^{(1)}$ — вектор окружной скорости точки звена 1 при вращении вокруг $O_1 z_1$ с угловой скоростью $\omega^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ — вектор окружной скорости такой же точки звена 2 при вращении вокруг оси $O_1 z_1$ с угловой скоростью $\omega_{O_1}^{(2)}$ и поступательном движении со скоростью $m_1^{(2)}$, ρ_1 — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Векторы $\omega^{(1)}$, $\omega_{O_1}^{(2)}$ и A определяются следующими выражениями:

$$\omega^{(1)} = \omega_1 k_1, \quad \omega_{O_1}^{(2)} = \omega^{(2)} = -\omega_2 k_1,$$

$$A = A \sin \varphi_1 i_1 + A \cos \varphi_1 j_1, \quad \rho_1 = x_1 i_1 + y_1 j_1,$$

где i_1 , j_1 и k_1 — орты координатных осей x_1 , y_1 , z_1 .

Проектируя преобразования, вектор $v_1^{(12)}$ определим следующим уравнением:

$$v_1^{(12)} = -[y_1 \omega^{(1)} + (y_1 - A \cos \varphi_1) \omega^{(2)}] i_1 + [x_1 \omega^{(1)} + (x_1 - A \sin \varphi_1) \omega^{(2)}] j_1. \quad (13.5)$$

Проекция вектора нормали n_1 согласно таблице II определяются так:

$$n_{x1} = \frac{\partial y_1}{\partial u_1}, \quad n_{y1} = -\frac{\partial x_1}{\partial u_1}. \quad (13.6)$$

На основании (13.4) и (13.5), учитывая, что $\omega^{(2)} = \omega^{(1)} i_{21}$, уравнение зацепления представим в следующей форме:

$$n_{x1} [y_1 (1 + i_{21}) - A i_{21} \cos \varphi_1] - n_{y1} [x_1 (1 + i_{21}) - A i_{21} \sin \varphi_1] = 0. \quad (13.7)$$

После подстановки в это уравнение выражений (13.6) для n_{x1} и n_{y1} и (13.2) для x_1 и y_1 , получим зависимость такого вида:

$$f_1(u_1, \varphi_1) = 0. \quad (13.8)$$

Это уравнение связывает значение параметра u_1 точки контакта с углом φ_1 поворота звена 1.

Уравнение (13.8) можно получить и несколько иным способом, рассматривая зацепление в неподвижной системе координат S .

Найдем вектор скорости относительного движения $v^{(12)}$, приведя предварительно векторы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ к точке O :

$$v^{(12)} = v^{(1)} - v^{(2)} = (\omega^{(1)} \times \rho + r_1 \times \omega_1^{(1)}) - (\omega^{(2)} \times \rho + r_2 \times \omega_2^{(2)}). \quad (13.9)$$

В этой записи ρ — радиус-вектор точки профиля в системе S , $r_1 = -r_1 i$ и $r_2 = r_2 i$ — радиусы-векторы точек O_1 и O_2 в системе S . Проектируя пре-

образования, учитывая, что $\omega^{(1)}r_1 = \omega^{(2)}r_2$, получим

$$\mathbf{v}^{(12)} = -y(\omega^{(1)} + \omega^{(2)})\mathbf{i} + x(\omega^{(1)} + \omega^{(2)})\mathbf{j}. \quad (13.10)$$

Формулы связи систем координат S и S_1 найдем с помощью матричного равенства

$$\rho = M_{01}\rho_1, \quad (13.11)$$

где

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & -r_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.12)$$

На этом основании получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 - r_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

Связь между проекциями векторов нормали $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ определится из матричного равенства

$$\mathbf{n} = L_{01}\mathbf{n}_1, \quad (13.14)$$

где

$$L_{01} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (13.15)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} n_x &= n_{x1} \cos \varphi_1 - n_{y1} \sin \varphi_1, \\ n_y &= n_{x1} \sin \varphi_1 + n_{y1} \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

Подставим (13.13), (13.16) в выражение $\mathbf{n}\mathbf{v}^{(12)} = 0$ и учтем при преобразованиях, что $r_1(\omega_1 + \omega_2) = Ai_{21}\omega_1$. В результате получим уравнение, тождественное уравнению (13.8), полученному ранее.

Укажем теперь путь действий для определения профиля зубцов звена 2. Этот профиль представляет семейство контактных точек в системе S_2 и определяется уравнениями:

$$f_1(u_1, \varphi_1) = 0, \quad \rho_1 = \rho_1(u_1), \quad \rho_2 = M_{21}\rho_1. \quad (13.17)$$

Если учесть, что элементы матрицы M_{21} содержат φ_1 , то профиль зубца звена 2 определится уравнениями:

$$\rho_2 = \rho_2(u_1, \varphi_1), \quad f_1(u_1, \varphi_1) = 0. \quad (13.18)$$

Линия зацепления профилей представит совокупность точек контакта в неподвижной системе S и определится уравнениями:

$$f_1(u_1, \varphi_1) = 0, \quad \rho_1 = \rho_1(u_1), \quad \rho = M_{01}\rho_1. \quad (13.19)$$

В общем виде линия зацепления записывается уравнениями:

$$\rho = \rho(u_1, \varphi_1), \quad f_1(u_1, \varphi_1) = 0. \quad (13.20)$$

§ 14. Метод профильных нормалей

Кинематический метод определения уравнения зацепления особенно эффективен при переменном отношении скоростей, когда $i_{21} \neq \text{const}$. Это имеет, в частности, место при наличии погрешностей в передаче (см. § 41).

При постоянном отношении скоростей ($i_{21} = \text{const}$) полюс зацепления занимает постоянное положение на линии центров, и в этом случае

для определения уравнения зацепления наиболее предпочтительным является метод профильных нормалей, излагаемый в настоящем параграфе.

Основная теорема зацепления позволяет установить взаимосвязь между положением контактной точки на заданном профиле и углом поворота колеса.

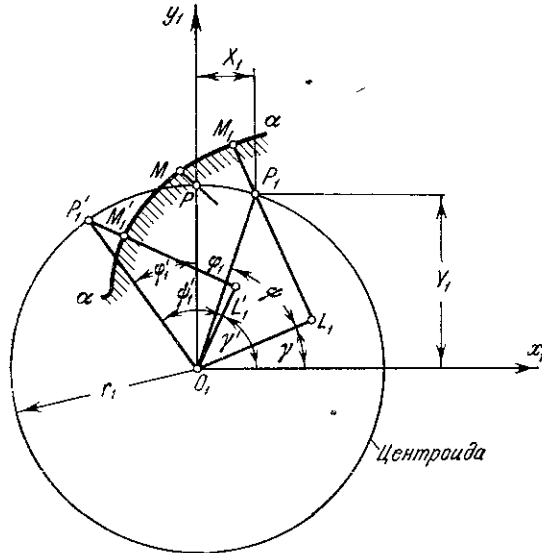


Рис. 21.

Пусть $\alpha - \alpha$ — заданный профиль в системе координат x_1, y_1 , жестко связанной с колесом, точка P , заданная в неподвижной системе координат, — полюс зацепления (рис. 21).

Предполагается, что задан левый профиль зубца, а углы поворота колеса отсчитываются в направлении против часовой стрелки. В положении, изображенном на чертеже, контактной точкой профиля является точка M , так как нормаль в этой точке проходит через полюс зацепления P . Для того чтобы контактной точкой явилась M_1 , необходимо, чтобы точка P_1 пересечения профильной нормали с центроидой колеса совпала бы с полюсом зацепления. Для этого необходимо,

чтобы колесу вместе с профилем был сообщен поворот на угол φ_1 . Соответственно точка M_1 профиля станет контактной точкой после поворота колеса на угол φ_1 , в результате которого точка P_1 центроиды совпадает с полюсом зацепления P .

Уравнение нормали в текущей точке профиля, согласно данным таблицы II, имеет следующий вид:

$$(X_1 - x_1) \cos \gamma + (Y_1 - y_1) \sin \gamma = 0. \quad (14.1)$$

Через (x_1, y_1) обозначены координаты выбранной точки профиля, а через (X_1, Y_1) — координаты произвольной точки нормали. В дальнейшем через X_1, Y_1 будем обозначать координаты точки пересечения нормали с центроидой. Угол γ составлен касательной к профилю с осью $O_1 x_1$. В зависимости от формы уравнения профиля для определения γ нужно воспользоваться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1), & \operatorname{tg} \gamma &= y_1', \\ F_1(x_1, y_1) &= 0, & \operatorname{tg} \gamma &= -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}, \\ x_1 &= f_1(u), & & \\ y_1 &= f_2(u), & \operatorname{tg} \gamma &= \frac{f_2'(u)}{f_1'(u)}. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

На основании построений, показанных на рис. 21, легко получить, что

$$X_1 \cos \gamma + Y_1 \sin \gamma = r_1 \cos \psi. \quad (14.3)$$

Используя уравнения (14.1) и (14.3), получим

$$\cos \psi = \frac{x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma}{r_1}. \quad (14.4)$$

Угол поворота φ_1 , в результате которого точка (x_1, y_1) станет контактной, найдем из уравнения

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - (\gamma + \psi).$$

Углы φ_1 должны отсчитываться против движения часовой стрелки. Связь между положением контактной точки на профиле и углом поворота колеса выразим следующей системой уравнений:

$$\cos \psi = \frac{x_1 \cos \gamma - y_1 \sin \gamma}{r_1}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - (\gamma + \psi). \quad (14.5)$$

Для точки M'_1 профиля угол φ_1 , определенный из формул (14.5), имеет отрицательное значение. Это указывает, что точка M'_1 профиля станет контактной, если колесо повернуть на угол φ_1 в направлении вращения часовой стрелки.

Для того чтобы найти уравнения профиля, сопряженного заданному, координаты контактной точки нужно записать в системе координат, связанной с ведомым колесом; для определения же линии зацепления координаты контактной точки нужно записать в неподвижной системе координат (см. § 10).

Метод профильных нормалей был впервые использован В. А. Шишковым [258] для расчета плоских зацеплений; в его же работе рассмотрены графические способы построения сопряженного профиля.

§ 15. Эволюты профилей

Напомним предварительно основные сведения из дифференциальной геометрии об эволютах кривых.

Эволюта для заданной кривой представляет геометрическое место центров ее кривизны. Как известно, центр кривизны кривой есть центр окружности, соприкасающейся с данной кривой. Поэтому эволюта является одновременно и геометрическим местом центров окружностей, соприкасающихся с рассматриваемой кривой (рис. 22).

Нормали исходной кривой совпадают с касательными к эволюте в соответствующих точках. Эволюту можно также определить как огибающую семейства нормалей исходной кривой.

Пусть точкам M_1 и M_2 эвольвенты (рис. 22) соответствуют радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 . Точки N_1 и N_2 — центры кривизны эвольвенты в точках M_1 и M_2 . На основании приведенного выше определения

$$\widehat{N_2 N_1} = M_2 N_2 - M_1 N_1 = \rho_2 - \rho_1.$$

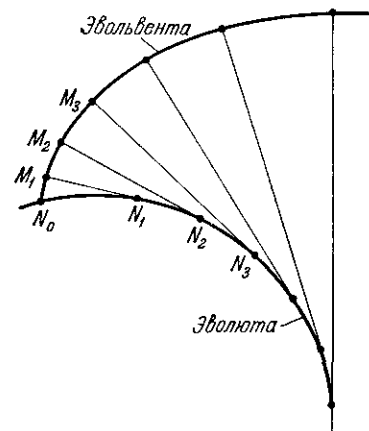


Рис. 22.

Будем искать эволюту профилей как огибающую семейства профильных нормалей. Уравнение эволюты профилей найдем *кинематическим методом*, введя в рассмотрение кулисный механизм (рис. 25, а), посредством которого будем воспроизводить закон распределения профильных нормалей на центроиде колеса, заданный уравнением $\lambda = \lambda(\vartheta)$, где ϑ — полярный угол центроиды. В этом механизме центр вращения O кулисы 1 совпадает с началом полярной системы координат. Ползун 2 связан со стойкой так называемой высшей парой, один из элементов которой, в виде направляющего паза на стойке, определяется центроидой колеса, а другой элемент, принадлежащий ползуну 2, представляет цилиндрическую поверхность с диаметром, соответствующим ширине направляющего паза. С ползуном 2 шарнирно связано звено 3, направление которого в каждый момент времени должно совпадать с направлением профильной нормали. Для этого при повороте кулисы 1 на полярный угол ϑ центроиды звено 3 повернем вокруг ползуна так, чтобы направления звеньев 1 и 3 образовали между собой угол, равный углу λ между радиусом-вектором центроиды и профильной нормалью. Во избежание ошибок в принятых нами наименованиях правых и левых профилей зубцов полярный угол ϑ центроиды необходимо отсчитывать в направлении часовой стрелки.

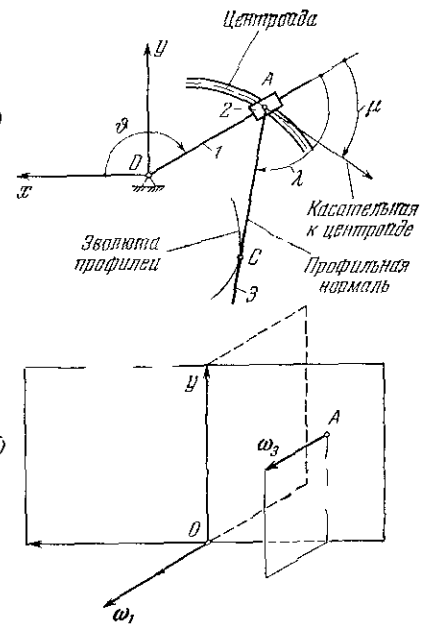


Рис. 25.

Используя принятые обозначения, представим скорость вращения кулисы через $\omega = d\vartheta/dt$, а скорость вращения звена 3 через $\omega_3 = d\lambda/dt$.

В точке C касания профильной нормали с эволютой направление абсолютной скорости точки C звена 3 должно совпадать с направлением профильной нормали. Это вытекает из того, что эволюта профилей является огибающей семейства профильных нормалей.

Вектор абсолютной скорости точки C звена 3 представляет геометрическую сумму следующих скоростей составляющих движений: а) скорости v_e вращения вместе с звеном 1 и 2 вокруг O ; б) скорости v_r поступательного движения вместе с звеном 2 по направляющим звена 1; в) скорости v_{32} вращения звена 3 вокруг точки A звена 2.

Введем обозначения: $r = \overline{OA}$, $l = \overline{AC}$. Очевидно, что

$$v_c = v_e + v_r + v_{32} = \omega_1 \times (r + l) + \frac{dr}{dt} + \omega_3 \times l = \omega_1 \times r + (\omega_1 + \omega_3) \times l + \frac{dr}{dt}. \quad (15.3)$$

В этом уравнении

$$\omega_1 = -\frac{d\vartheta}{dt} k, \quad \omega_3 = -\frac{d\lambda}{dt} k,$$

$$r = r \cos \vartheta i + r \sin \vartheta j, \quad l = l \cos (\vartheta + \lambda) i + l \sin (\vartheta + \lambda) j,$$

i, j, k — орты координатных осей.

Учитывая, что

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\vartheta}} = \operatorname{tg} \mu,$$

имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = r \operatorname{ctg} \mu \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Вектор

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -r \operatorname{ctg} \mu \frac{d\vartheta}{dt} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j}).$$

После преобразований проекции вектора $\mathbf{v}_c$ определим следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} v_{xc} &= r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + l \sin (\vartheta + \lambda) \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \right) - r \operatorname{ctg} \mu \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}, \\ v_{yc} &= -r \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} - l \cos (\vartheta + \lambda) \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \right) - r \operatorname{ctg} \mu \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Так как векторы $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{l}$ коллинеарны, то

$$\frac{v_{xc}}{v_{yc}} = \frac{l_x}{l_y} = \frac{\cos (\vartheta + \lambda)}{\sin (\vartheta + \lambda)}. \quad (15.5)$$

На основании (15.4) и (15.5) получим

$$l = r \frac{\sin (\lambda - \mu)}{\left(1 + \frac{d\lambda}{d\vartheta} \right) \sin \mu}. \quad (15.6)$$

Используя уравнение (15.6), можно найти эволюту профилей для плоского зацепления любого вида как с постоянным, так и с переменным передаточным отношением.

Для того чтобы записать уравнение эволюты профилей в прямоугольных координатах, воспользуемся векторным уравнением (рис. 26)

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{l},$$

где $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор эволюты профилей, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центроида, $\mathbf{l}$ — вектор, определяющий расстояние между соответствующими точками центроида и эволюты, измеренное по направлению профильной нормали.

Проектируя последнее уравнение на оси координат (рис. 26), получим

$$\left. \begin{aligned} x_a &= r \cos \vartheta + l \cos (\vartheta + \lambda), \\ y_a &= r \sin \vartheta + l \sin (\vartheta + \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где l определяется из уравнения (15.6).

Пример 6. Найдем уравнение эволюты профилей круглого колеса, центроид которого представляет окружность радиуса $r = mz/2$, а распределение профильных нормалей на центроиде колеса выражается уравнениями (15.2). Здесь z — число зубцов колеса, $m = t/\pi$ — модуль зубцов, где t — шаг между профилями одного

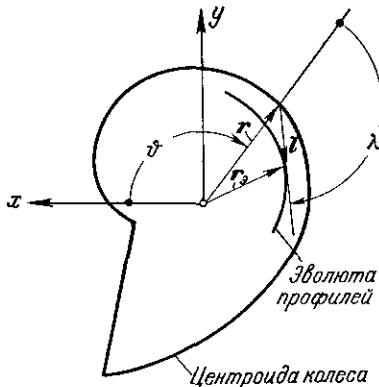


Рис. 26.

направления, измеренный по центроиде колеса. Напомним, что такой закон распределения профильных нормалей соответствует случаю обкатки по центроиде колеса прямолинейной центроиды инструментальной рейки. Профили зубцов рейки очерчены прямыми линиями.

Уравнения центроиды колеса запишем в такой форме:

$$x = \frac{mz}{2} \cos \vartheta, \quad y = \frac{mz}{2} \sin \vartheta,$$

где ϑ — полярный угол центроиды.

Опираясь на уравнения (15.2), поскольку $\lambda = \text{const}$, имеем $d\lambda/d\vartheta = 0$. Положив в уравнении (15.6) $\mu = \pi/2$ и $d\lambda/d\vartheta = 0$, получим:

$$l = -\frac{mz}{2} \cos \lambda.$$

Используя выражения (15.2) для λ , найдем, что как для правых, так и для левых профилей

$$l = -\frac{mz}{2} \sin \alpha_n.$$

Величина l — значение радиуса кривизны профиля в точке пересечения его с центроидой колеса.

Уравнения эволюты профилей на основании (15.7) при найденном значении l

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \frac{mz}{2} [\cos \vartheta \mp \sin \alpha_n \sin (\vartheta \pm \alpha_n)], \\ y_a &= \frac{mz}{2} [\sin \vartheta \pm \sin \alpha_n \cos (\vartheta \pm \alpha_n)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

В этом уравнении в местах применения двойных знаков верхний знак относится к эволюте левых, а нижний — к эволюте правых профилей.

Нетрудно видеть, что эволютой правых и левых профилей является окружность радиуса

$$r_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \frac{mz}{2} \cos \alpha_n.$$

Пример 7. Найдем эволюты профилей колеса, нарезанного инструментальной рейкой с прямолинейными профилями; зависимость между перемещениями колеса и рейки выражается уравнением (7.7), приведенным в примере 4.

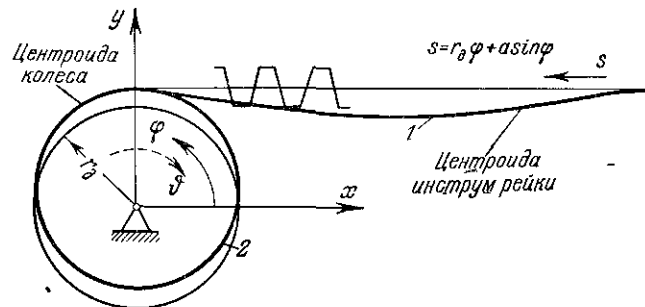


Рис. 27.

Центроиды колеса и рейки выражены уравнениями (7.9) и (7.10) (пример 4) и приведены на рис. 27. В рассматриваемом случае распределение профильных нормалей выражается теми же уравнениями (15.2), как и в случае круглой центроиды. Доказывается это так: касание центроид колеса и рейки происходит на линии O_1n , перпендикулярной направлению $s-s$ движения рейки (рис. 28); на этой линии и располагается мгновенный полюс зацепления. Направление линии O_1n одновременно определяет положение текущего радиуса-вектора центроиды колеса в момент касания центроид инструмента и изделия.

Хотя профили каждого зуба имеют различные очертания, биение колеса относительно центра вращения O мерительным наконечником с очертаниями зуба

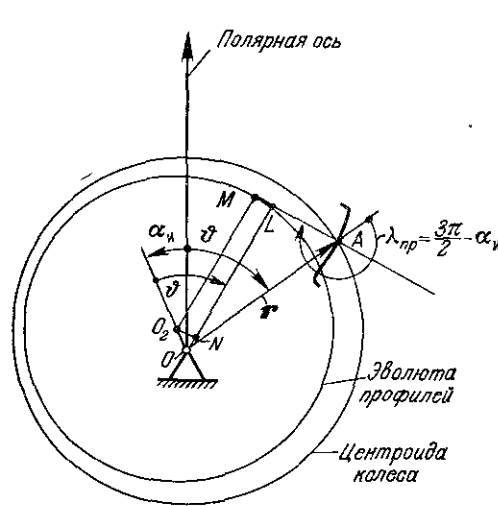


Рис. 29.

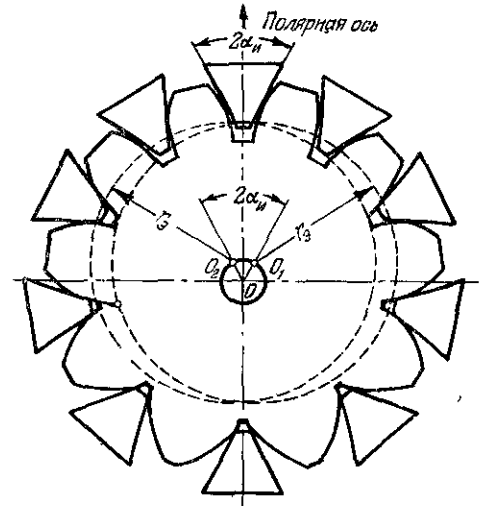


Рис. 30.

инструментальной рейки обнаружить невозможно. Это является результатом того, что зубец инструментальной рейки находился при нарезании колеса на постоянном расстоянии от O .

§ 16. Уравнение Эйлера — Савари

Уравнением Эйлера — Савари определяются соотношения между радиусами кривизны профилей и радиусами кривизны центроид.

Пусть заданы центроиды колес, вращающихся соответственно вокруг осей O_1 и O_2 (рис. 31). В некотором положении колес их мгновенным центром вращения в относительном движении является точка P . Линия $t-t$ — общая касательная к центроидам в точке P . Прямая $n-n$, проходящая через мгновенный полюс зацепления, является нормалью к профилям в точке M .

Связь между радиусами кривизны профилей и радиусами кривизны центроид определяется следующей теоремой.

Прямые, соединяющие центры кривизны центроид и соответственные центры кривизны сопряженных профилей, должны пересекаться в одной точке с линией, проведенной через точку касания центроид перпендикулярно профильной нормали.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся заменяющим четырехшарнирным механизмом $A_1A_2B_2B_1$, в котором A_1P и A_2P — радиусы кривизны центроид в точке P , а MB_1 и MB_2 — радиусы кривизны профилей.

Относительное движение колес представляет качение центроид друг по другу. Это относительное движение может быть также осуществлено вращением их вокруг соответствующих центров кривизны A_1 и A_2 с отношением угловых скоростей, определяемым из условия

$$\frac{\omega_{A1}}{\omega_{A2}} = \frac{A_2P}{A_1P}. \quad (16.1)$$

Как известно из теории механизмов и машин [8], отношение угловых скоростей вращения звеньев A_1B_1 и A_2B_2 шарнирного четырехзвенника $A_1B_1B_2A_2$ определяется отношением отрезков A_2P и A_1P , на которые делится стойка A_1A_2 шатуном B_1B_2 . Следовательно, отношение угловых скоростей этих звеньев удовлетворяет уравнению (16.1).

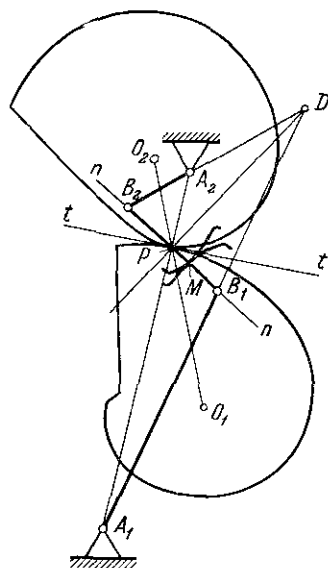


Рис. 31.

Если центрами вращения центроид являются их центры кривизны A_1 и A_2 , то при бесконечно малых углах поворота полюс зацепления P не должен перемещаться вдоль линии стойки A_1A_2 . Это означает, что в заменяющем четырехзвеннике скорость точки P шатуна должна быть направлена вдоль линии шатуна.

Движение шатуна как звена, совершающего сложное плоское движение, может быть сведено к вращению вокруг некоторого мгновенного центра. Исходя из указанного направления скорости точки P шатуна, очевидно, что мгновенный центр вращения должен лежать на перпендикуляре к шатуну, проведенном через P . С другой стороны, скорости точек B_1 и B_2 шатуна в абсолютном движении должны быть перпендикулярны соответственно направлениям A_1B_1 и A_2B_2 . Следовательно, мгновенные радиусы вращения точек B_1 и B_2 шатуна должны иметь те же направления, что и звенья A_1B_1 и A_2B_2 . Это и является доказательством сформулированной выше теоремы.

Построение, приведенное на рис. 31, позволяет найти центр кривизны одного из сопряженных профилей, если заданы радиусы кривизны центроид и положение центра кривизны другого профиля. Пусть, например, известны центры кривизны A_1 и A_2 центроид и центр кривизны B_1 одного из профилей на профильной нормали $n-n$. Для того чтобы найти центр кривизны B_2 другого профиля, нужно поступить так: 1) соединить центр кривизны A_1 первой центроиды с центром кривизны B_1 профиля зубца первой центроиды, 2) провести в точке P перпендикуляр к линии $n-n$ и найти точку D пересечения линий A_1B_1 и PD ; 3) искомый центр кривизны B_2 найдется как точка пересечения продолженной линии A_2D с линией $n-n$.

В аналитической форме уравнение, связывающее кривизны центроид и профилей, найдем, используя построения рис. 32.

Из подобия треугольника B_2PD и треугольника $B_2E_2A_2$ следует

$$PD = A_2E_2 \frac{PB_2}{B_2E_2}. \quad (16.2)$$

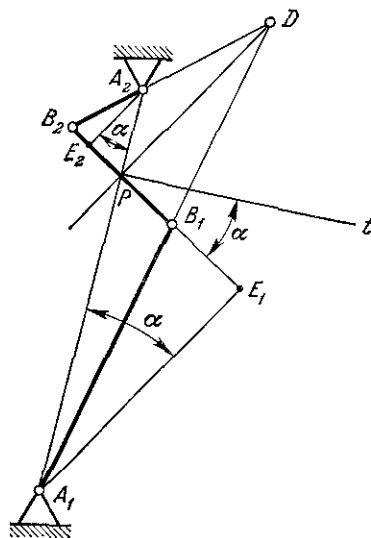


Рис. 32.

Из подобия треугольников PDB_1 и $A_1E_1B_1$ имеем

$$PD = A_1E_1 \frac{PB_1}{B_1E_1}. \quad (16.3)$$

Введем обозначения: α — угол, образуемый профильной нормалью $n-n$ с касательной Pt к центроидам, $A_1P = \rho_1$, $A_2P = \rho_2$, $PB_1 = l_1$ и $PB_2 = l_2$.

Заметим также, что

$$\begin{aligned} A_1E_1 &= \rho_1 \cos \alpha, & A_2E_2 &= \rho_2 \cos \alpha, \\ B_1E_1 &= \rho_1 \sin \alpha - l_1, & B_2E_2 &= l_2 - \rho_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

На основании уравнений (16.2) и (16.3), используя введенные обозначения, получим

$$\rho_1 \cos \alpha \frac{l_1}{\rho_1 \sin \alpha - l_1} = \rho_2 \cos \alpha \frac{l_2}{l_2 - \rho_2 \sin \alpha}.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \sin \alpha. \quad (16.4)$$

Через l_1 и l_2 были обозначены расстояния центров кривизны профилей от полюса зацепления P . Очевидно (рис. 31), что

$$\begin{aligned} l_1 &= B_1M + PM = \rho_{\text{пр}1} + x, \\ l_2 &= B_2M - PM = \rho_{\text{пр}2} - x, \end{aligned}$$

где x — расстояние между точкой касания профилей и полюсом зацепления, измеренное по профильной нормали, а $\rho_{\text{пр}1}$ и $\rho_{\text{пр}2}$ — радиусы кривизны профилей.

Отсюда следует

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \left(\frac{1}{\rho_{\text{пр}1} \mp x} + \frac{1}{\rho_{\text{пр}2} \pm x} \right) \sin \alpha. \quad (16.5)$$

В том случае, когда центроиды находятся во внутреннем касании, радиус кривизны вогнутой центроиды нужно считать в уравнении (16.5) отрицательным. Аналогично нужно считать отрицательным радиус кривизны вогнутого профиля в случае сопряжения выпуклого и вогнутого профилей.

Уравнение (16.5) носит название уравнения Эйлера — Савари, вывод которого в теоретической механике дается способом, отличным от приведенного.

Построение, приведенное на рис. 31, аналогично построению, предложенному Бобиле для геометрической интерпретации уравнения Эйлера — Савари.

При расчетах зубцов на контактную прочность используется так называемый приведенный радиус кривизны профилей зубцов. В полюсе зацепления ($x = 0$)

$$\rho_{\text{прив}} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_{\text{пр}1}} + \frac{1}{\rho_{\text{пр}2}}} = \frac{\rho_{\text{пр}1} \rho_{\text{пр}2}}{\rho_{\text{пр}1} + \rho_{\text{пр}2}}.$$

На основании (16.5) при $x = 0$

$$\rho_{\text{прив}} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sin \alpha.$$

Это означает, что при заданном межцентровом расстоянии и передаточном отношении (при заданных радиусах центров) величина $\rho_{\text{пр}}$ определяется углом α профильной нормали.

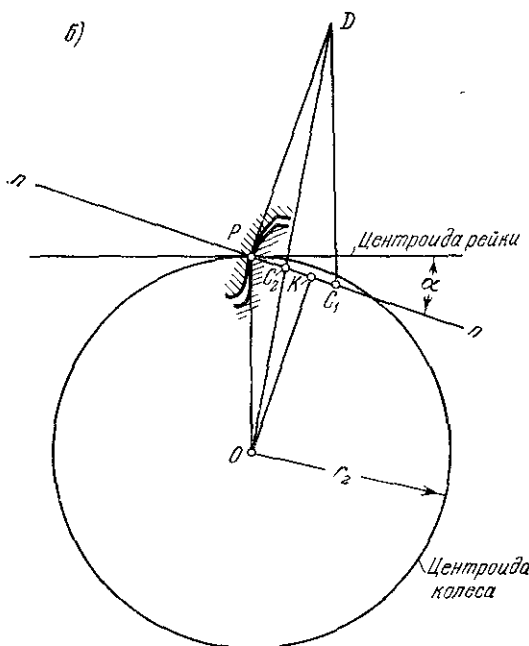
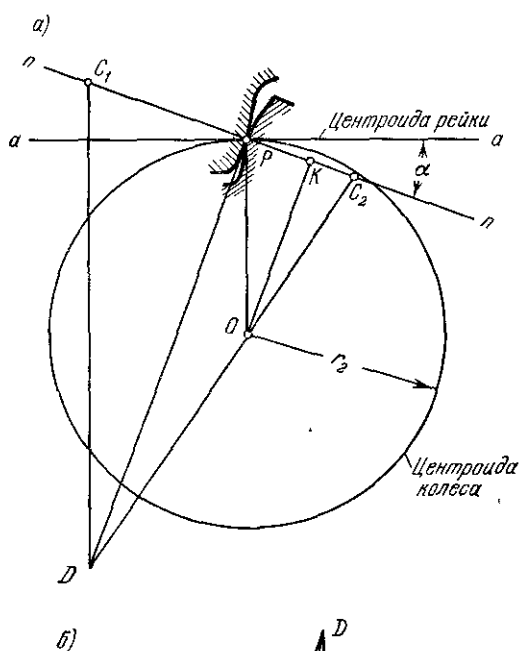


Рис. 33.

Пример 8. Найдём в графической и аналитической формах связь между кривизнами профилей зубцов для колеса и рейки, перемещения которых связаны линейной зависимостью

$$s_1 = \frac{mz_2}{2} \varphi_2;$$

m — модуль зубцов, z_2 — число зубцов колеса, φ_2 — угол поворота колеса.

Центроида колеса в рассматриваемом случае представляет на основании (7.5) окружность радиуса

$$r_2 = \frac{mz_2}{2},$$

так как

$$\psi(\varphi_2) = \frac{ds_1}{d\varphi_2} = \frac{mz_2}{2}.$$

Центроида рейки представляет прямую линию, касательную к окружности радиуса r_2 .

При этих условиях

$$r_2 = \rho_2, \quad \rho_1 = \infty$$

и уравнение (16.4) примет следующую форму:

$$\frac{2}{mz_2} = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \sin \alpha. \quad (16.6)$$

После преобразований получим

$$l_1 = l_2 \frac{1}{\frac{2l_2}{mz_2 \sin \alpha} - 1}. \quad (16.7)$$

Будем считать, что профили зубцов рейки и колеса касаются друг друга в полюсе зацепления и тогда l_1 и l_2 — радиусы кривизны профилей. Анализируя уравнение (16.7), можно заметить следующее:

1) радиус кривизны l_1 профиля зубца рейки становится равным бесконечности — профиль зубца переходит в прямую линию, если $l_2 = \frac{mz_2}{2} \sin \alpha$ (случай эвольвентного зацепления);

2) при $l_2 < \frac{mz_2}{2} \sin \alpha$ $l_1 < 0$,

следовательно, профиль зубца рейки

вогнутый; соответственно при $l_2 > \frac{mz_2}{2} \sin \alpha$ $l_1 > 0$ и профиль зубца рейки выпуклый.

Построение Бобилье, позволяющее найти в графической форме связь между кривизнами профилей зубцов колеса и рейки, представлено на рис. 33. В первом

случае (рис. 33, а)

$$l_2 = PC_2 > PK = \frac{mz_2}{2} \sin \alpha.$$

Линия PD перпендикулярна направлению профильной нормали $n - n$. Точка D найдена как точка пересечения с PD продолженной линией OC_2 , соединяющей центр O кривизны центроиды с центром кривизны C_2 профиля. Линия DC_1 , соединяющая центр кривизны C_1 профиля рейки и центр кривизны ее центроиды, проведена перпендикулярно центроиде рейки.

Поскольку центроид рейки представляет прямую линию $a - a$, центр кривизны центроиды должен лежать на перпендикуляре к $a - a$. На этом основании линия, соединяющая центр кривизны C_1 профиля рейки и центр кривизны ее центроиды, проведена перпендикулярно центроиде. На рис. 33, а оба профиля — колеса и рейки — являются выпуклыми.

Во втором случае (рис. 33, б) $PC_2 = l_2 < PK = \frac{mz_2}{2} \sin \alpha$ и профиль зубца рейки является вогнутым.

§ 17. Параметры движения контактной точки в плоском зацеплении

Излагаемые в настоящем параграфе материалы служат основой аналитического способа определения кривизны огибающей семейства профилей, условий отсутствия подрезания, а также способа исследования условий зацепления в окрестности точки контакта (§§ 18, 19 и 21).

В более общем виде, применительно к пространственным зацеплениям, параметры движения контактных точек взаимоогibaемых поверхностей будут рассмотрены в § 33.

Пусть в системах S_1 и S_2 заданы уравнения двух кривых, взаимоогibaющих друг друга в относительном движении. Примем для определенности, что эти кривые заданы в параметрической форме и в неподвижной системе координат определяются уравнениями:

$$\rho^{(1)} = \rho^{(1)}(u_1, \varphi_1), \quad (17.1)$$

$$\rho^{(2)} = \rho^{(2)}(u_2, \varphi_2). \quad (17.2)$$

Здесь u_i — параметр, определяющий положение точки на профиле, φ_i — параметр движения ($i = 1, 2$).

Скорость перемещения контактной точки в неподвижной системе координат S_0 определится так:

$$\dot{\rho}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}_e^{(i)} + \mathbf{v}_r^{(i)} = \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt}. \quad (17.3)$$

В этом уравнении

$$\mathbf{v}_e^{(i)} = \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} \quad (17.4)$$

есть вектор скорости перемещения контактной точки в переносном движении вместе с профилем,

$$\mathbf{v}_r^{(i)} = \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} \quad (17.5)$$

является вектором скорости перемещения контактной точки в относительном движении по профилю. Индекс $i = 1, 2$ означает, что приведенные выражения справедливы как для профиля зубцов звена 1, так и для профиля зубцов звена 2.

Орт нормали перпендикулярен вектору $\mathbf{v}_r^{(i)}$, так как последний направлен по касательной к профилю. На этом основании

$$\mathbf{e}^{(i)} \mathbf{v}_r^{(i)} = 0$$

или

$$\left(e_x^{(i)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_i} + e_y^{(i)} \frac{\partial y^{(i)}}{\partial u_i} \right) \frac{du_i}{dt} = 0.$$

Аналогично выражениям (13.6) проекции орта нормали определяются уравнениями:

$$e_x^{(i)} = k \frac{\partial y^{(i)}}{\partial u_i}, \quad e_y^{(i)} = -k \frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_i}. \quad (17.6)$$

Нормирующий множитель k , при котором $|\mathbf{e}^{(i)}| = 1$, определяется из зависимости

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^{(i)}}{\partial u_i} \right)^2}}. \quad (17.7)$$

В общем виде, так как частные производные $\partial x^{(i)}/\partial u_i$ и $\partial y^{(i)}/\partial u_i$ содержат u_i и φ_i , выражения ортов нормалей запишем так:

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}(u_i, \varphi_i). \quad (17.8)$$

Пусть профили касаются друг друга в некоторой точке. Тогда

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(2)}, \quad (17.9)$$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)}. \quad (17.10)$$

Сообщим бесконечно малые повороты профилям вокруг их центров вращения. Так как уравнения (17.9) и (17.10) должны соблюдаться и в новой точке контакта, то

$$\dot{\mathbf{p}}^{(1)} = \dot{\mathbf{p}}^{(2)}, \quad (17.11)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^{(1)} = \dot{\mathbf{e}}^{(2)}. \quad (17.12)$$

Здесь $\dot{\mathbf{p}}^{(i)}$ и $\dot{\mathbf{e}}^{(i)}$ — скорости перемещения точки контакта и конца орта нормали в неподвижном пространстве.

Очевидно, что вектор $\dot{\mathbf{p}}^{(i)}$ направлен по касательной к линии зацепления — траектории, описываемой точкой контакта в неподвижной системе координат.

Продифференцировав (17.8), получим

$$\dot{\mathbf{e}}^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_e^{(i)} + \dot{\mathbf{e}}_r^{(i)} \quad (i = 1, 2). \quad (17.13)$$

В этом уравнении

$$\dot{\mathbf{e}}_e^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} \quad (17.14)$$

есть вектор скорости конца орта нормали в переносном движении при вращении вместе с профилем,

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} \quad (17.15)$$

является вектором скорости конца орта нормали при движении контактной точки по профилю.

Вектор $\dot{e}_e^{(i)}$ можно представить и таким уравнением

$$\dot{e}_e^{(i)} = \omega_i \times e^{(i)}. \quad (17.16)$$

Аналогией для (17.16) является выражение вектора линейной скорости

$$v = \omega \times r,$$

где r — радиус вращения.

Развертывая выражения (17.11) и (17.12), получим

$$v^{(1)} = v_e^{(1)} + v_r^{(1)} = v^{(2)} - v_e^{(2)} + v_r^{(2)}, \quad (17.17)$$

$$\dot{e}^{(1)} = \dot{e}_e^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)} = \dot{e}^{(2)} = \dot{e}_e^{(2)} + \dot{e}_r^{(2)}. \quad (17.18)$$

Заметим, что

$$v_e^{(1)} - v_e^{(2)} = v^{(12)}, \quad (17.19)$$

где $v^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения точки M , жестко связанной со звеном 1, относительно точки M , жестко связанной со звеном 2. На этом основании, используя (17.17) и (17.19), получим

$$v_r^{(2)} = v_r^{(1)} + v^{(12)}. \quad (17.20)$$

На основании (17.18) и (17.16), учитывая, что в точке касания $e^{(1)} = e^{(2)}$, получим

$$\dot{e}_r^{(2)} = \dot{e}_r^{(1)} + (\omega_1 - \omega_2) \times e^{(1)}. \quad (17.21)$$

Уравнения (17.20) и (17.21) связывают соответственно скорости движения $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ контактных точек по профилям и скорости $\dot{e}_r^{(1)}$ и $\dot{e}_r^{(2)}$ концов ортов нормалей в том же движении. Эти важные уравнения будут использованы в §§ 18, 19 и 21.

В заключение докажем следующую теорему: *если профили зубцов касаются друг друга в полюсе зацепления и передают вращение таким образом, что производная передаточного отношения равна нулю, касательная к линии зацепления совпадает с нормалью к профилям.*

Исходя из основной теоремы зацепления, согласно выражению (13.1)

$$nv^{(12)} = 0, \quad ev^{(12)} = 0.$$

Подставив в это уравнение выражение (13.4), получим

$$e[(\omega^{(1)} - \omega_{O_1}^{(2)}) \times \rho^{(1)} + \omega^{(2)} \times A] = 0. \quad (17.22)$$

Продифференцируем уравнение (17.22), приняв во внимание, что $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ и A — постоянные векторы

$$\dot{e}v^{(12)} + e[(\omega^{(1)} - \omega_{O_1}^{(2)}) \times \dot{\rho}^{(1)}] = 0. \quad (17.23)$$

В полюсе зацепления скорость относительного движения $v^{(12)} = 0$. Поэтому из (17.23) следует, что

$$[e, \omega^{(12)}, \dot{\rho}^{(1)}] = 0, \quad (17.24)$$

где

$$\omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega_{O_1}^{(2)}.$$

Из векторной алгебры известно, что смешанное произведение трех векторов, ни один из которых не является нулевым, становится равным нулю, если: а) все три вектора компланарны, б) два из трех векторов коллинеарны. В плоском зацеплении вектор $\omega^{(12)}$ перпендикулярен плоскости, проведенной через e и $\dot{r}^{(1)}$ (рис. 34), следовательно, предположение о компланарности векторов $\omega^{(12)}$, e и $\dot{r}^{(1)}$ должно быть отброшено. Справедливым является другое предположение — о коллинеарности векторов e и $\dot{r}^{(1)}$. Но вектор

$$v^{(1)} = \dot{r}^{(1)} = v_e^{(1)} + \bar{v}_r^{(1)}$$

определяет скорость перемещения точки контакта в неподвижном пространстве, и он совпадает с направлением касательной к линии зацепления. Коллинеарность векторов e и $\dot{r}^{(1)}$ является, следовательно, доказательством, что нормаль и касательная к линии зацепления совпадают.

§ 18. Определение кривизны огибающей семейства профилей

Уравнения огибающей, как правило, сложнее, чем уравнения огибаемой кривой. Эта особенность проявляется, в частности, при расчете профиля зубца нарезаемого колеса.

Огибаемая кривая — профиль зубца инструмента имеет обычно простые очертания. Нарезаемый же профиль, огибающий в относительном движении семейство профилей зубцов инструмента, определяется гораздо более сложными уравнениями, чем сам профиль зубца инструмента.

Возникает задача такого вида: определить кривизну огибающей, не составляя формально ее уравнений, исходя лишь из кривизны огибаемой кривой и параметров относительного движения при огибании. Такой способ определения кривизны огибающей является, как будет показано ниже, особенно эффективным в случае пространственных зацеплений.

Изучение настоящего параграфа полезно, во-первых, потому, что позволяет ознакомиться еще с одним способом определения кривизны огибающей семейства плоских кривых, дополняющим изложенные ранее (в §§ 15, 16), во-вторых, это может облегчить усвоение способа определения кривизны огибающей семейства поверхностей (§ 34).

Для плоской кривой, заданной уравнением $r = r(s)$, где s — длина дуги центроиды, в дифференциальной геометрии известны формулы Френэ

$$\frac{de_r}{ds} = -\kappa \frac{dr}{ds}, \quad (18.1)$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \kappa e. \quad (18.2)$$

Здесь κ — кривизна плоской кривой, e — единичный вектор нормали к кривой, de_r — вектор, определяющий изменение положения орта нормали при смещении точки по плоской кривой.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= \frac{de_r}{ds} \frac{ds}{dt}, & \dot{r}_r &= v_r = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}, \\ \ddot{r}_r &= a_r = \frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 & \text{при} & \quad \frac{ds}{dt} = \text{const.} \end{aligned}$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}}_r$, $\ddot{\mathbf{r}}_r$ — скорость и ускорение точки при перемещении по кривой, $\dot{\mathbf{e}}_r$ — скорость конца орта нормали при движении точки по кривой.

При этих обозначениях формулы (18.1) и (18.2) примут следующий вид:

$$\kappa \mathbf{v}_r = -\dot{\mathbf{e}}_r, \quad (18.3)$$

$$\kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{e} = \mathbf{a}_r. \quad (18.4)$$

Наиболее удобной для практических расчетов является формула (18.3), которой мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Представим себе, что для профиля Σ_1 зубцов инструмента известны выражения $\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(1)}$, определяемые по уравнениям (17.15) и (17.5). Кривизна профиля зубца инструмента определится уравнением

$$\kappa_1 \mathbf{v}_r^{(1)} = -\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}. \quad (18.5)$$

Для определения кривизны огибающей Σ_2 (профиля зубцов нарезаемого колеса) воспользуемся уравнением

$$\kappa_2 \mathbf{v}_r^{(2)} = -\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}. \quad (18.6)$$

В предыдущем параграфе были получены зависимости (17.20) и (17.21), связывающие $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\mathbf{v}_r^{(1)}$, $\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$.

Подставив в зависимость (18.6) выражения (17.20) и (17.21), уравнение для определения кривизны Σ_2 запишем в таком виде:

$$\kappa_2 (\mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)}) = -[\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} + (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{e}^{(1)}]. \quad (18.7)$$

На основании уравнений (18.5)–(18.7) получим

$$\kappa_2 (\mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)}) = \kappa_1 \mathbf{v}_r^{(1)} - (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{e}^{(1)}. \quad (18.8)$$

Уравнение (18.8) позволяет определить кривизну κ_2 огибающей, если известны кривизна κ_1 огибаемой кривой и параметры относительного движения.

При вычислениях κ_1 и κ_2 по приведенным формулам нужно учесть следующее: положительный знак для κ означает, что направление радиуса кривизны совпадает с положительным направлением нормали. Для кривой, заданной в параметрической форме, проекции вектора нормали определяются уравнениями (13.6).

Зависимость между кривизнами κ_1 и κ_2 принимает особенно простую форму, если профили касаются друг друга в полюсе зацепления. Тогда на основании (18.8), учитывая, что в полюсе зацепления $\mathbf{v}^{(12)} = 0$, получим

$$(\kappa_1 - \kappa_2) \mathbf{v}_r^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{e}^{(1)}, \quad (18.9)$$

где

$$\boldsymbol{\omega}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}.$$

Нетрудно убедиться, что векторы $\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(1)}$ коллинеарны. Это следует из того, что в плоском зацеплении векторы $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$, $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(1)}$ образуют пространственную систему трех взаимно перпендикулярных векторов.

Основываясь на формуле (18.9), можно получить уравнение (16.4), известное как уравнение Эйлера — Савари.

Рассмотрим сначала случай, когда профили касаются друг друга в полюсе зацепления P (рис. 34). Примем, что зацепление является внешним и колеса 1 и 2 вращаются соответственно вокруг осей O_1 и O_2 . Относительное движение колес представляет вращение вокруг мгновенной оси P с угловой скоростью $\omega^{(12)}$. Орт нормали составляет с линией центров угол $90^\circ + \alpha$. Из плана скоростей следует, что вектор $\mathbf{v}_r^{(1)}$ параллелен вектору $\omega^{(12)} \times \mathbf{e}^{(1)}$. Модули этих векторов таковы:

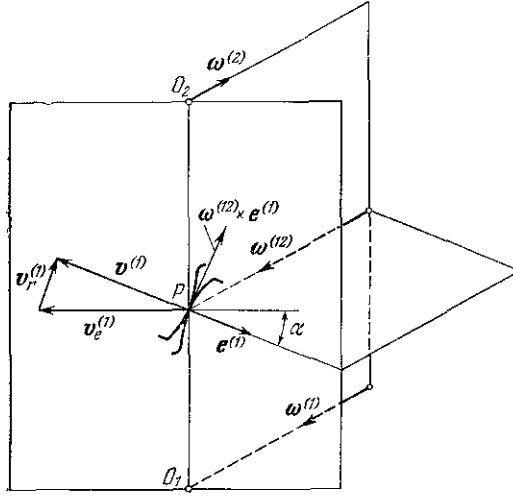


Рис. 34.

$$|\omega^{(12)} \times \mathbf{e}^{(1)}| = \omega_{12},$$

$$|\mathbf{v}_r^{(1)}| = v_{e1} \sin \alpha = \omega^{(1)} r_1 \sin \alpha.$$

Здесь $r_1 = O_1P$, $r_2 = O_2P$. Из (18.9) следует

$$\begin{aligned} \kappa_1 - \kappa_2 &= \frac{\omega^{(12)}}{\omega^{(1)} r_1 \sin \alpha} = \frac{\omega^{(1)} + \omega^{(2)}}{\omega^{(1)} r_1 \sin \alpha} = \\ &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Обозначим $\kappa_1 = 1/\rho_1$, $\kappa_2 = -1/\rho_2$. Знак минус для κ_2

определяется тем, что профиль зубцов колеса 2 очерчен выпуклой кривой и радиус кривизны ρ_2 противоположен по направлению орту нормали. В результате получим уравнение

$$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \sin \alpha = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \quad (18.11)$$

Рассмотрим теперь случай, когда профили зубцов касаются друг друга в точке, не совпадающей с полюсом зацепления. Предположим, что нам известны точка M линии зацепления и орт нормали $\mathbf{e}^{(1)}$ (рис. 35). Закон движения не изменится, если заменить профили другими, изображенными на чертеже пунктиром, с точкой касания в полюсе зацепления P . Радиусы кривизны обеих пар профилей, точками касания которых являются соответственно M и P , отличаются на величину $PM = x$. Для вновь введенных профилей справедлива зависимость (16.4). Соотношение между радиусами кривизны ρ_1 и ρ_2 основной пары профилей определяется уравнением

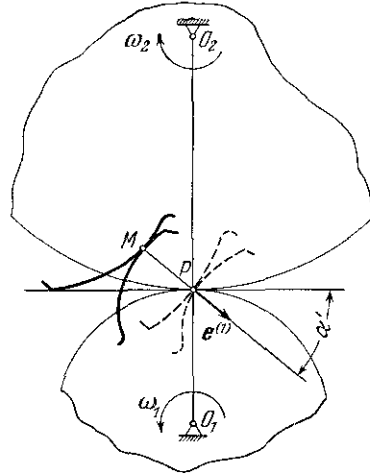


Рис. 35.

$$\left(\frac{1}{\rho_1 - x} + \frac{1}{\rho_2 + x} \right) \sin \alpha' = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \quad (18.12)$$

Это уравнение совпадает с приведенным ранее уравнением (16.5). Следует иметь в виду, что угол α' , определяющий направление нормали

к профилям с точкой касания M , в общем случае зависит от выбора этой точки на линии зацепления профилей и не совпадает с углом α при касании профилей в полюсе зацепления.

Итак, для определения кривизны огибающей можно использовать:

а) уравнение (18.8), записанное в векторной форме,

б) уравнение Эйлера — Савари (18.12).

Простота уравнения Эйлера — Савари только кажущаяся, и для того, чтобы им воспользоваться, необходимо задаться положением точки касания профилей на линии зацепления, вычислить значение α' , длину отрезка $PM = x$, радиус кривизны ρ_1 огибаемой. Только после этого может быть вычислено значение ρ_2 . По нашему мнению, предпочтительнее для вычислений использовать скалярно-векторное уравнение (18.8), преимущества которого мы видим, в частности, в том, что при вычислениях автоматически определяется знак кривизны κ_2 .

Пример 9. Найдем выражение для радиуса кривизны профиля кулачка 2, взаимодействующего с плоским толкателем 1 (рис. 36). Перемещение s_1 толкателя, измеренное по оси y , и угол поворота φ_2 кулачка связаны функциональной зависимостью $s_1 = s_1(\varphi_2)$.

Профиль толкателя — прямая линия, совпадающая с осью x_1 , и профиль кулачка являются взаимноогibaемыми кривыми в относительном движении. Хотя профиль кулачка и его радиус кривизны можно определить, исходя из простейших соображений, сделаем это, используя путь расчета, изложенный в §§ 13 и 18. Это облегчит усвоение методики, изложенной в упомянутых параграфах.

Уравнения толкателя в системе $S_1(x_1, y_1)$ таковы:

$$x_1 = u_1, \quad y_1 = 0. \quad (18.13)$$

Проекция нормали в системе S_1 на основании зависимостей (13.6) определяется формулами

$$n_{x1} = \frac{\partial y_1}{\partial u_1} = 0, \quad n_{y1} = -\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = -1. \quad (18.14)$$

Выражения (18.14) являются одновременно выражениями проекций орта нормали, т. е. $n_1 = e_1$.

В системе $S(x, y)$ профиль толкателя и орт нормали определяется уравнениями:

$$x = u_1, \quad y = s_1, \quad (18.15)$$

$$e_x = 0, \quad e_y = -1. \quad (18.16)$$

Найдем выражения вектора относительной скорости в системе S :

$$v^{(12)} = v_e^{(1)} - v_e^{(2)} = \frac{ds_1}{dt} - \omega^{(2)} \times r, \quad (18.17)$$

где $\frac{ds_1}{dt}$ — скорость перемещения толкателя, $\omega^{(2)}$ — угловая скорость вращения кулачка, $r = u_1 i + s_1 j$ — радиус-вектор точки M контакта профилей,

$$v_x^{(12)} = \omega^{(2)} s_1, \quad v_y^{(12)} = \frac{ds_1}{dt} - \omega^{(2)} u_1. \quad (18.18)$$

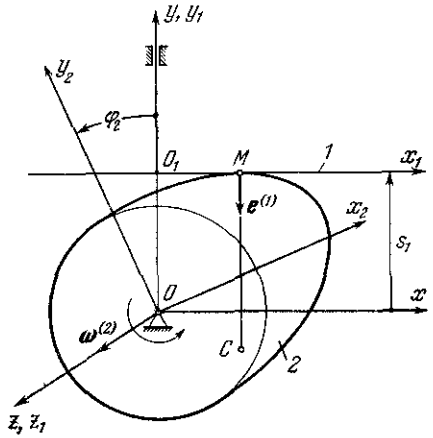


Рис. 36.

Уравнение зацепления получим на основании (13.1), согласно которому $e v^{(12)} = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{ds_1}{dt} - \omega^{(2)} u_1 = 0 \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{ds_1}{d\varphi_2}. \quad (18.19)$$

Уравнения профиля кулачка найдем в системе S_2 как семейство точек контакта M . Формулы перехода от S к S_2 таковы:

$$\rho_2 = M_{20} \rho, \quad (18.20)$$

где матрица

$$M_{20} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (18.21)$$

На основании (18.15), (18.19), (18.20) и (18.21), получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= u_1 \cos \varphi_2 + s_1 \sin \varphi_2 = \frac{ds_1}{d\varphi_2} \cos \varphi_2 + s_1 \sin \varphi_2, \\ y_2 &= -u_1 \sin \varphi_2 + s_1 \cos \varphi_2 = -\frac{ds_1}{d\varphi_2} \sin \varphi_2 + s_1 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

Выражение для кривизны профиля кулачка получим, используя формулу (18.8). Учтем при этом, что, так как профиль толкателя очерчен прямой линией, $\kappa_1 = 0$. Толкатель совершает поступательное движение и $\omega^{(1)} = 0$.

В результате получим

$$\kappa_2 (v^{(1)} + v^{(12)}) = \omega^{(2)} \times e^{(1)}. \quad (18.23)$$

Скорость $v_r^{(1)}$ движения контактной точки по профилю толкателя согласно зависимости (18.13) определится так:

$$v_{xr}^{(1)} = \frac{du_1}{dt}, \quad v_{yr}^{(1)} = 0. \quad (18.24)$$

Продифференцировав (18.19), получим, что

$$\frac{du_1}{dt} = \omega^{(2)} \frac{d^2 s_1}{d\varphi_2^2} \quad \text{и} \quad v_{xr}^{(1)} = \omega^{(2)} \frac{d^2 s_1}{d\varphi_2^2}, \quad v_{yr}^{(1)} = 0. \quad (18.25)$$

На основании зависимостей (18.23) — (18.25) получим

$$\kappa_2 = \frac{1}{s_1 + \frac{d^2 s_1}{d\varphi_2^2}}. \quad (18.26)$$

Положительный знак для κ_2 указывает, что направление радиуса кривизны MC (рис. 36) совпадает с положительным направлением орта нормали $e^{(1)}$. Формула (18.26) была получена впервые Я. Л. Геронимусом [39] из рассмотрения плана ускорений кулачкового механизма с плоским толкателем и вошла затем в учебники по теории механизмов.

§ 19. Подрезание в плоских зацеплениях

Профиль зубца нарезаемого колеса является огибающим семейства профилей зубца инструмента. Огибающий профиль должен состоять только из обыкновенных точек. Наличие на огибающем профиле особых точек (точек излома, возврата и других видов особых точек) указывает, что нарезание зубцов будет сопровождаться подрезанием (см. § 20).

Чаще всего в теории зацеплений кривая задается в параметрической форме

$$x = f(u), \quad y = \psi(u). \quad (19.1)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что точка кривой (19.1) является заведомо обыкновенной, если в точке с параметром u_0 не обращаются одновременно в нуль производные $f'(u_0)$ и $\psi'(u_0)$. Признак

$$f'(u_0) = \psi'(u_0) = 0 \quad (19.2)$$

является необходимым условием существования особой точки с параметром u_0 .

В особой точке параметризованной кривой направление нормали и касательной к кривой является неопределенным.

Для кривой, заданной уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (19.3)$$

особыми могут быть лишь те точки, в которых одновременно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (19.4)$$

В таких точках направление нормали и касательной становится неопределенным, поскольку

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{0}{0}.$$

Отыскание направления нормали требует раскрытия этой неопределенности.

Профиль зубцов нарезасмого колеса, как это было показано в § 13, определяется уравнениями (13.18), согласно которым

$$\rho_2 = \rho_2(u_1, \varphi_1), \quad f_1(u_1, \varphi_1) = 0. \quad (19.5)$$

В первом уравнении содержатся два параметра (u_1 и φ_1), на которые наложена связь, определяемая вторым уравнением.

Исследование уравнений (19.5) для выявления особых точек представляет существенные трудности. Решение такой задачи может быть значительно облегчено, если воспользоваться следующей теоремой:

На огибающем профиле не появится особой точки, если исключить из огибаемого профиля такую точку, в которой

$$\mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)} = 0. \quad (19.6)$$

Здесь $\mathbf{v}_r^{(1)}$ — скорость движения контактной точки на огибаемом профиле, $\mathbf{v}^{(12)}$ — скорость относительного движения (скорость движения точки M , жестко связанной с огибаемым профилем, относительно той же точки, жестко связанной с огибающим профилем).

Для доказательства этой теоремы обратимся к признаку (19.2), который является необходимым условием существования особой точки с параметром u_0 кривой (19.4).

Скорость перемещения контактной точки по огибающей кривой, определяемой уравнениями (19.4), выражается так:

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = v_x^{(2)} \mathbf{i} + v_y^{(2)} \mathbf{j} = [f'(u) \mathbf{i} + \psi'(u) \mathbf{j}] \frac{du}{dt}. \quad (19.7)$$

Особая точка кривой удовлетворяет уравнениям (19.2) и в ней $\mathbf{v}_r^{(2)} = 0$. Иными словами, скорость движения контактной точки в особой точке становится равной нулю.

Огибающая кривая принадлежит звену 2, и параметры ее движения снабжаются индексом 2. Скорости движения контактной точки по взаимно-огibaемым кривым связаны уравнением (17.20), согласно которому

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)}. \quad (19.8)$$

В особой точке огибающей кривой $\mathbf{v}_r^{(2)} = 0$, и поэтому для такой точки справедливо уравнение (19.6), сформулированная выше теорема доказана.

Во избежание появления на огибающем профиле особых точек огибаемый профиль зубца инструмента должен быть ограниченным отрезком. Уравнение (19.6) позволяет найти граничную точку этого отрезка, которая образует особую точку на огибающем профиле. Для этого предлагается исходить из уравнения огибаемого профиля и параметров относительного движения, не прибегая, как уже указывалось, к формальному составлению уравнений огибающего профиля.

Будем исходить из предположения, что уравнение (19.6) решается в системе S_1 , жестко связанной с огибаемым профилем. Следовательно,

$$\mathbf{v}_{r1}^{(1)} + \mathbf{v}_1^{(12)} = 0. \quad (19.9)$$

В системе S_1 задано уравнение огибаемого профиля

$$\rho_1 = \rho_1(u_1). \quad (19.10)$$

Звенья 1 и 2 совершают заданные движения, и известна скорость относительного движения $\mathbf{v}_1^{(12)}$. В точке контакта профилей

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{v}_1^{(12)} = 0, \quad (19.11)$$

где $\mathbf{n}_1$ — вектор нормали к огибаемому профилю.

Связь между параметрами u_1 и φ_1 (φ_1 — параметр движения) выражается уравнением

$$f_1(u_1, \varphi_1) = 0. \quad (19.12)$$

Скорость $\mathbf{v}_{r1}^{(1)}$ движения контактной точки определяется уравнением

$$\mathbf{v}_{r1}^{(1)} = \frac{d\rho_1}{du_1} \frac{du_1}{dt} = \left(\frac{dx_1}{du_1} \mathbf{i}_1 + \frac{dy_1}{du_1} \mathbf{j}_1 \right) \frac{du_1}{dt}, \quad (19.13)$$

где $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{j}_1$ — орты координатных осей.

Из выражения (19.7) следует

$$\frac{\frac{dx_1}{du_1} \frac{du_1}{dt}}{v_{x1}^{(12)}} = \frac{\frac{dy_1}{du_1} \frac{du_1}{dt}}{v_{y1}^{(12)}} = -1. \quad (19.14)$$

Дифференцируя (19.12), получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = 0. \quad (19.15)$$

В уравнениях (19.14), (19.15) и (19.12) входят четыре неизвестные: u_1 , φ_1 , du_1/dt и $d\varphi_1/dt$. Независимых уравнений в системе (19.14) только одно, так как векторы $\mathbf{v}_{r1}^{(1)}$ и $\mathbf{v}_1^{(12)}$ имеют определенное направление, перпендикулярное вектору нормали $\mathbf{n}_1$.

Это означает, что $(\mathbf{v}_{r1}^{(1)} + \mathbf{v}_1^{(12)}) \mathbf{n}_1 = 0$.

Следовательно, для определения u_1 , φ_1 , du_1/dt и $d\varphi_1/dt$ в нашем распоряжении имеются три уравнения: (19.15), (19.12) и одно из уравнений системы (19.14).

Примем во внимание, что скорость движения $d\varphi_1/dt$ может быть задана произвольной величины, так как обе части уравнений (19.14) и (19.15) можно разделить на $d\varphi_1/dt$. Поэтому, придав какое-нибудь значение $d\varphi_1/dt$, например $d\varphi_1/dt = 1 \text{ рад/сек}$, можно найти остальные неизвестные (φ_1 , u_1 , du_1/dt), используя указанную выше систему трех уравнений.

Предположим, что из системы (19.14) используется первое уравнение. Искомые неизвестные определяются из следующей системы уравнений:

$$f_1(u_1, \varphi_1) = 0, \quad (19.16)$$

$$\frac{dx_1}{du_1} \frac{du_1}{dt} = -v_{x1}^{(12)}, \quad (19.17)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt}. \quad (19.18)$$

Рассмотрим подсистему из двух уравнений: (19.17) и (19.18). Если u_1 и φ_1 уже известны, а величина $d\varphi_1/dt$ назначена, эти два уравнения являются линейными относительно du_1/dt . Представим уравнения (19.17) и (19.18) в такой форме:

$$a_{11}\eta_1 = b_1, \quad (19.19)$$

$$a_{12}\eta_1 = b_2, \quad (19.20)$$

где $a_{11} = \frac{dx_1}{du_1}$, $a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}$, $\eta_1 = \frac{du_1}{dt}$, $b_1 = -v_{x1}^{(12)}$, $b_2 = -\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt}$.

Если особая точка на огибающем профиле существует, уравнения (19.16)–(19.18) соблюдаются и система из двух линейных уравнений (19.19) и (19.20) является совместной, т. е. можно найти такое значение $\eta_1 = du_1/dt$, при котором уравнения (19.17) и (19.18) соблюдаются. Из линейной алгебры известно, что если система $n - 1$ линейных уравнений, содержащая n неизвестных, совместна, то определитель, составленный из свободных членов и коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю, т. е. в нашем случае

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (19.21)$$

Из (19.21) следует

$$a_{11}b_2 - a_{12}b_1 = 0,$$

или

$$v_{x1}^{(12)} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{dx_1}{du_1} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = 0. \quad (19.22)$$

Уравнению (19.22) можно придать и другую форму, если воспользоваться соотношениями (19.14):

$$v_{y1}^{(12)} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{dy_1}{du_1} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = 0. \quad (19.23)$$

Уравнения (19.22) и (19.16), так же как и (19.23) и (19.16), содержат u_1 и φ_1 . Определив из этих уравнений u_1 , находим граничную точку огибаемого профиля, т. е. крайнюю точку, которой он должен быть ограничен во избежание появления особой точки на огибающем профиле.

Помимо этого, из огибаемого профиля нужно исключить собственную особую точку, для определения которой к уравнению профиля

$$\rho_1 = \rho_1(u_1)$$

нужно присоединить зависимость

$$v_{r1}^{(1)} = 0.$$

Учитываем, что

$$v_{r1}^{(1)} = \frac{d\rho_1}{du_1} \frac{du_1}{dt},$$

это равносильно требованию

$$\frac{d\rho_1}{du_1} = 0.$$

Резюмируя, можно утверждать, что для исключения особых точек на огибающем и огибаемом профиле, необходимо, чтобы из рабочей части огибаемого профиля были исключены точки, в которых

$$v_{r1}^{(1)} = 0, \quad v_{r1}^{(1)} + v^{(12)} = 0.$$

В частном случае обоим приведенным уравнениям может удовлетворять одна точка огибаемого профиля. Это означает, что особая точка огибаемого профиля вступает в зацепление с особой точкой огибающего. Примером этого может явиться такой случай эвольвентного зацепления, когда центроидами колес служат основные окружности, а профили касаются в полюсе зацепления.

Граничным точкам огибаемого профиля соответствуют граничные точки линии зацепления. Докажем теорему: *граничными точками линии зацепления являются такие точки, в которых нормаль к линии зацепления перпендикулярна переносной скорости вращения одного из колес*. Пусть $v_{ri}^{(2)} = 0$. Индекс $i = 1, 0, 2$ указывает, что движение может быть рассмотрено в одной из трех систем координат: S_1, S, S_2 . Скорость перемещения точки контакта по линии зацепления определяется уравнениями

$$v_i = v_{ri}^{(1)} + v_{ei}^{(1)} = v_{ri}^{(2)} + v_{ei}^{(2)}.$$

При $v_{ri}^{(2)} = 0$ получим $v_i = v_{ei}^{(2)}$, т. е. скорость перемещения точки контакта по линии зацепления равна скорости $v_{ei}^{(2)}$ этой точки в движении вместе с колесом 2. Так как вектор v_i направлен по касательной к линии зацепления, нормаль к линии зацепления и скорость $v_{ei}^{(2)}$ взаимно перпендикулярны.

Аналогично при $v_{ri}^{(1)} = 0$ получим, что граничной точкой линии зацепления явится такая точка, в которой нормаль к линии зацепления перпендикулярна скорости $v_{ei}^{(1)}$ колеса i . Если колеса 1 и 2 совершают вращательные движения, граничными точками линии зацепления явятся точки, нормаль в которых проходит через центр вращения одного из колес.

В заключение отметим, что признак $v_{ri}^{(2)} = 0$ является необходимым, но недостаточным условием существования особой точки. Если точка на огибающем профиле особая, то в ней $v_{ri}^{(2)} = 0$. Обратное утверждение, что при $v_{ri}^{(2)} = 0$ точка огибающего профиля особая, не всегда является верным.

Представим такой случай, когда касательная t к линии зацепления и скорость $v_{ei}^{(2)}$ переносного движения контактной точки совпадают по направлению, а касательная к профилям зубцов в контактной точке, и, следовательно вектор скорости $v_{ri}^{(2)}$, не совпадает с t . Так как вектор $v_i^{(2)}$ скорости движения контактной точки в абсолютном движении направлен по касательной к линии зацепления и коллинеарен t , то при указанных выше условиях векторы $v_{ei}^{(2)}$ и $v_i^{(2)}$ равны по величине и направлению,

а вектор

$$\mathbf{v}_i^{(2)} = \mathbf{v}_i^{(2)} - \mathbf{v}_{e_i}^{(2)} = 0.$$

Скорость движения контактной точки по огибающему профилю становится равной нулю, если $\mathbf{v}_i^{(2)} = \mathbf{v}_{e_i}^{(2)}$ вне зависимости от того, является ли эта точка особой или обыкновенной.

В подтверждение этого рассмотрим указанный Л. В. Коростелевым [132] случай зацепления, характеризующийся следующими особенностями: а) профили находятся в зацеплении в полюсе P ; б) точка P огибаемого профиля α — особая, кривизна профиля в этой точке $\kappa_1 = \infty$, в) хотя точка особая, нормаль к профилю α — α имеет определенное направление и перпендикулярна линии центров O_1 и O_2 вращения колес (рис. 37).

Из уравнения (17.20) следует, что в рассматриваемом случае $\mathbf{v}_r^{(2)} = 0$, так как $\mathbf{v}^{(12)} = 0$ (касание профилей происходит в полюсе зацепления), $\mathbf{v}_r^{(1)} = 0$ (точка P огибаемого профиля особая).

Основываясь на построении Бобилье, аналогичном изображенному на рис. 31, можно удостовериться, что при совпадении центра кривизны огибаемого профиля α — α с точкой P центр B_2 кривизны огибающего профиля β — β может занимать любое положение на линии $n - n$, проведенной через P перпендикулярно линии центров вращения A_1 и A_2 . Кривизна κ_2 огибающего профиля в точке P может иметь любое значение, точка P может быть как особой, так и обыкновенной точкой. Из уравнения (18.7) для кривизны κ_2 следует, что в рассматриваемом случае при $\mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)} = 0$ $\kappa_2 = 0/0$, т. е. имеет неопределенное значение, если

$$\dot{e}_r^{(1)} + (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times e^{(1)} = 0.$$

Аналитическое исследование представленного случая зацепления изложено в примере 13 (§ 21).

Рассмотрим несколько примеров определения граничных точек огибаемого профиля зубца инструмента.

Пример 10. Найдем условия отсутствия подрезания эвольвентных зубцов колеса, паразеваемых рейкой прямолинейного профиля с углом профиля α_n . Полюсом зацепления является точка P (рис. 38), центроиды колеса и рейки — окружность радиуса r_2 и прямая линия, касательная к этой окружности.

В рассматриваемом случае условия отсутствия подрезания зубцов можно найти из элементарных соображений, но мы воспользуемся для этой цели изложенной методикой, чтобы облегчить ее усвоение читателем.

Огибаемый профиль в системе S_1 определяется уравнениями:

$$x_1 = u_1 \sin \alpha_n, \quad y_1 = u_1 \cos \alpha_n. \quad (19.24)$$

Орт нормали

$$e_1^{(1)} = \cos \alpha_n i_1 - \sin \alpha_n j_1. \quad (19.25)$$

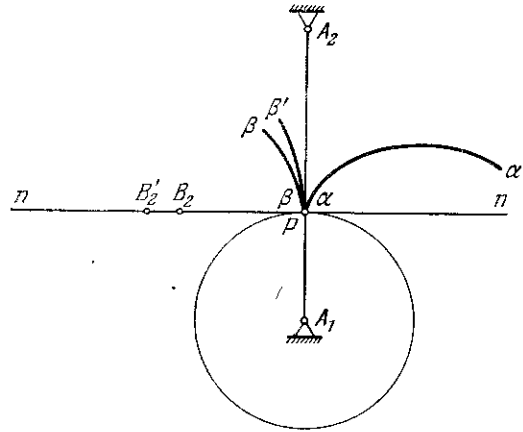


Рис. 37.

Рейка перемещается со скоростью

$$v_1^{(1)} = \omega^{(2)} r_2 i_1. \quad (19.26)$$

Скорость точки колеса 2 в системе S_1

$$v_1^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times r_1 + R_1 \times \omega_1^{(2)} \quad (19.27)$$

Здесь r_1 — радиус-вектор точки в системе S_1 ; $\omega_1^{(2)} = -\omega^{(2)} k_1$; $R_1 = -r_2 \varphi_2 i_1 - r_2 j_1$ — радиус-вектор в системе S_1 точки O_2 линии действия вектора $\omega_1^{(2)}$; i_1, j_1, k_1 — орты координатных осей x_1, y_1, z_1 .

Вектор скорости относительного движения

$$v_1^{(12)} = v_1^{(1)} - v_1^{(2)} = \omega^{(2)} [-y_1 i_1 + (x_1 + r_2 \varphi_2) j_1] = \omega^{(2)} [-u_1 \cos \alpha_n i_1 + (u_1 \sin \alpha_n + r_2 \varphi_2) j_1]. \quad (19.28)$$

На основании уравнения зацепления

$$e_1^{(1)} \cdot v_1^{(12)} = 0$$

зависимость между параметрами u_1 и φ_2 определится уравнением

$$f_1(u_1, \varphi_2) = u_1 + r_2 \varphi_2 \sin \alpha_n = 0. \quad (19.29)$$

Этот результат можно получить сразу, если принять во внимание, что в точке M контакта профилей нормаль к ним должна проходить через полюс зацепления P (рис. 38).

Уравнение (19.22) в нашем случае примет такой вид:

$$v_{x1}^{(12)} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{dx_1}{du_1} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = 0. \quad (19.30)$$

Учитывая, что

$$v_{x1}^{(12)} = -\omega^{(2)} u_1 \cos \alpha_n, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = 1,$$

$$\frac{dx_1}{du_1} = \sin \alpha_n, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = r_2 \sin \alpha_n,$$

получим

$$u_1 = -\frac{r_2 \sin^2 \alpha_n}{\cos \alpha_n}. \quad (19.31)$$

Знак минус в этом выражении указывает, что параметр u_1 для граничной точки профиля должен отсчитываться в направлении, противоположном направлению вектора u_1 на рис. 38.

Для точки K профиля зубца рейки с высотой, равной fm , $u_1 = -fm/\cos \alpha_n$.

Для того чтобы точка K была выше граничной точки профиля, необходимо, чтобы

$$\frac{fm}{\cos \alpha_n} < \frac{r_2 \sin^2 \alpha_n}{\cos \alpha_n} = \frac{mz_2 \sin^2 \alpha_n}{2 \cos \alpha_n},$$

где m — модуль зубцов.

Отсюда вытекает известное условие отсутствия подрезания эвольвентных зубцов инструментальной рейкой

$$z_2 > \frac{2f}{\sin^2 \alpha_n}. \quad (19.32)$$

Пример 11. Найдем условия отсутствия подрезания зубцов колеса 2 инструментальной рейкой 1, очерченной дугой окружности (рис. 39). В системе S_1 , связанной с рейкой, профиль ее зубцов определяется уравнениями

$$x_1 = x_{1k} + \rho \cos u_1, \quad y_1 = y_{1k} + \rho \sin u_1, \quad (19.33)$$

где x_{1k}, y_{1k} — координаты центра K окружности радиуса ρ .

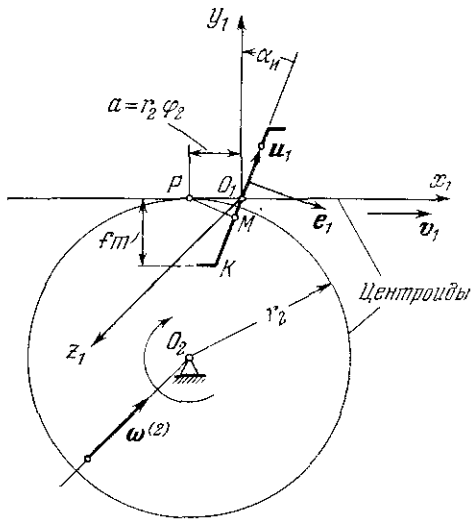


Рис. 38.

После преобразований получим

$$r_1^2 \geq u_{1e}^2 + \left(\frac{1+i_{21}}{2+i_{21}} \right)^2 h_1^2, \quad (19.40)$$

где u_{1e} — радиус окружности выступов шлицевого вала.

Из уравнения (19.40) следует, что подрезания зубцов шлицевого вала можно избежать, управляя двумя параметрами: а) передаточным отношением i_{21} — это равносильно назначению числа зубцов долбяка z_2 , б) радиусом центроиды шлицевого вала.

Если $h_1 = 0$, то $r_1 \geq u_{1e}$, каково бы ни было значение передаточного отношения i_{21} . Этот результат становится очевидным, если учесть, что профиль $\alpha - \alpha$ при $h = 0$ представляет частный случай гипоциклоиды, а профилем зубцов долбяка является эписциклоида. У эписциклоиды особой точкой является точка пересечения этой кривой с окружностью радиуса r_2 (см. § 55).

§ 20. Переходные кривые

Профили зубцов при нарезании по методу обкатки содержат (рис. 40) три характерных участка: $a - a$, являющийся огибающим по отношению к профилю зубцов инструмента; $b - c$, очерченный по дуге окружности и представляющий дно впадины; участок профиля $a - b$, соединяющий участки $a - a$ и $b - c$ профиля, очерчен так называемой *переходной кривой*.

Переходные кривые образуются закруглением на вершине зуба инструмента или его острием (если закругление отсутствует).

При нарезании изделий рейкой с острой вершиной L переходная кривая воспроизводится как траектория точки L при обкатывании рейки (рис. 41). Переходная кривая представляет в этом случае *удлиненную эвольвенту**). Граничные точки переходной кривой

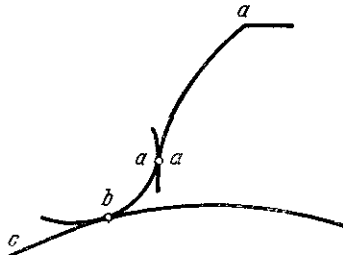


Рис. 40.

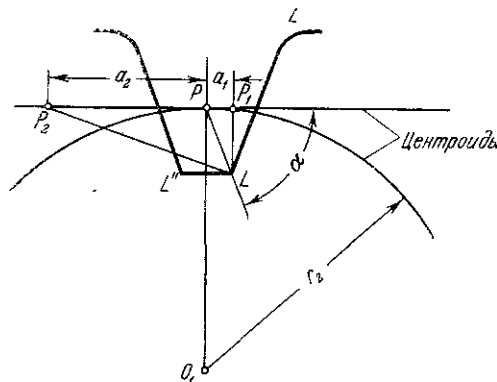


Рис. 41.

соответствуют таким положениям рейки, когда мгновенными центрами являются соответственно точка P_1 и точка P_2 . Точка P_1 находится как точка пересечения с центроидой рейки нормали P_1L к режущей кромке $L'L$. Соответственно P_2 находится как точка пересечения центроиды рейки с нормалью P_2L к режущей кромке LL .

В том случае, если переходная кривая образуется закруглением на вершине рейки, эта кривая является эквидистантной по отношению к траектории, описываемой центром закругления. Следовательно, переходная кривая эквидистантна удлиненной эвольвенте.

*) При нарезании корригированных колес (см. § 44), если коэффициент смещения $\xi > \frac{P_1L}{m}$, переходная кривая представляет укороченную эвольвенту.

При использовании в качестве инструмента долбяка, переходная кривая, образуемая острой вершиной, представляет или *удлиненную эпициклоиду* при нарезании колес внешнего зацепления, или *удлиненную гипоциклоиду* в случае изготовления колес внутреннего зацепления.

При отсутствии подрезания переходная кривая и рабочий участок профиля плавно сопрягаются между собой. Подрезание зубцов приводит к тому, что рабочий профиль и переходная кривая не имеют в общей точке

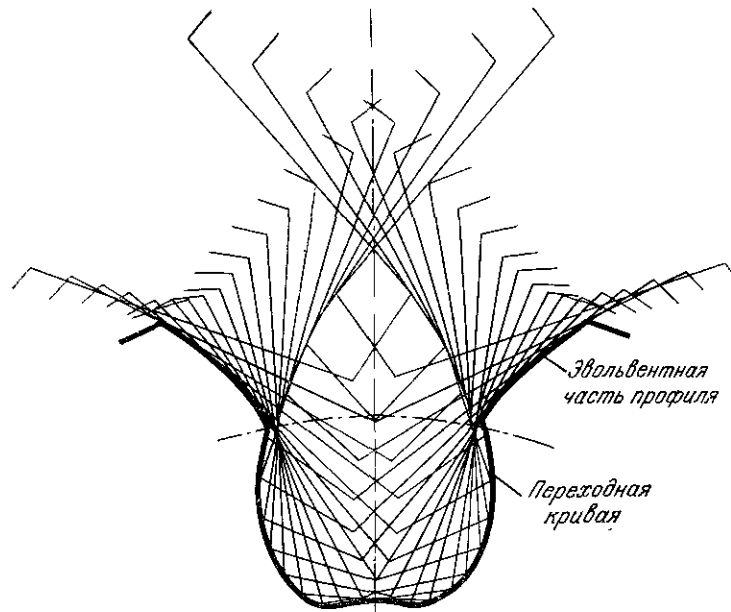


Рис. 42.

плавного сопряжения. Это можно увидеть из построений, изображенных на рис. 42, на котором представлено нарезание эвольвентных зубцов рейкой.

Переходная кривая, образуемая закруглением на вершине инструмента, может быть определена как огибающая закругленного участка с помощью методов, изложенных в предыдущих параграфах. Проиллюстрируем это на примере образования переходной кривой при нарезании зубцов рейкой (рис. 43).

С рейкой свяжем подвижную систему координат x_1, y_1 . Положение рейки в неподвижной системе координат x, y определяется отрезком a . Начало P неподвижной системы координат является одновременно полюсом зацепления.

В положении рейки, изображенном на чертеже, контактной точкой закругленной части профиля зубца рейки является K . Точка K_1 закругления будет контактной точкой в таком положении рейки, когда P_1 совпадет с полюсом зацепления, т. е. когда $a = 0$. Соответственно, при таком сдвиге рейки, тогда P_2 совпадает с P , контактной точкой станет K_2 .

Нужно заметить, что в некоторых положениях рейки переходная кривая образуется одновременно с рабочей частью профиля зубца изделия, и у профиля зубца рейки имеются две контактные точки. Так, при

смещении рейки на величину a (рис. 43), помимо контактной точки K на закругленной части профиля, контактной окажется и точка M прямолинейного участка профиля.

Закругленный участок профиля зубца рейки — дуга K_1KK_2 на рис. 43 — определяется уравнениями:

$$x_1 = r_3 \cos \alpha, \quad y_1 = -d + r_3 (\sin \alpha_n - \sin \alpha). \quad (20.1)$$

Здесь d определяет расстояние точки K_2 конца прямолинейного участка профиля зубца от центроида рейки, α — угол, определяющий направление нормали к профилю в контактной точке.

В системе координат S уравнения профиля K_1KK_2 будут таковы:

$$\begin{aligned} x &= r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2, \\ y &= -d + r_3 (\sin \alpha_n - \sin \alpha). \end{aligned} \quad (20.2)$$

Орт e нормали к профилю в контактной точке определится уравнением

$$e = \cos \alpha i - \sin \alpha j. \quad (20.3)$$

Уравнение зацепления получим из условия прохождения нормали через полюс зацепления P :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1 L}{PP_1} = \frac{(d - r_3 \sin \alpha_n)}{a}$$

или

$$f(\alpha, \varphi_1) = r_2 \varphi_2 \operatorname{tg} \alpha - (d - r_3 \sin \alpha_n) = 0. \quad (20.4)$$

Вектор скорости относительного движения $v^{(12)}$ определим, исходя из того, что относительное движение рейки представляет вращение вокруг P с угловой скоростью $\omega_p^{(2)}$ (рис. 43):

$$\begin{aligned} v_x^{(12)} &= -\omega^{(2)} y = \omega^{(2)} [d - r_3 (\sin \alpha_n - \sin \alpha)], \\ v_y^{(12)} &= \omega^{(2)} x = \omega^{(2)} (r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2), \end{aligned} \quad (20.5)$$

где $\omega^{(2)} = d\varphi_2/dt$ — угловая скорость вращения колеса 2 — модуль вектора $\omega^{(2)}$.

Переходная кривая в системе S_2 , связанной с колесом, определится как совокупность точек контакта в этой системе. Уравнения переходной кривой будут таковы:

$$\rho_2 = M_{20} \rho, \quad r_2 \varphi_2 \operatorname{tg} \alpha - (d - r_3 \sin \alpha_n) = 0. \quad (20.6)$$

Матрица перехода

$$M_{20} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -r_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & r_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (20.7)$$

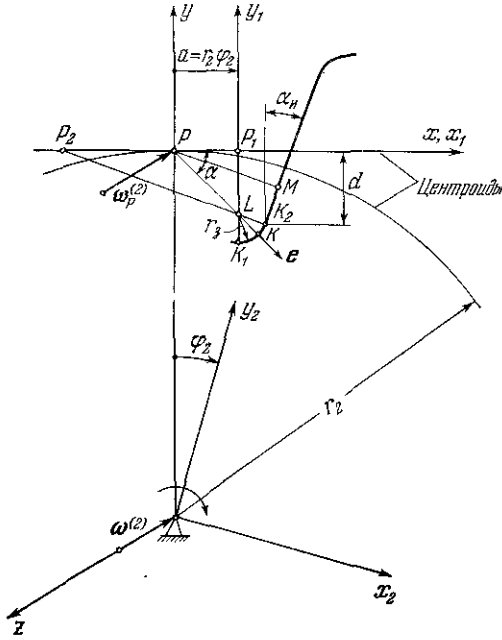


Рис. 43.

На основании выражений (20.6), (20.7) и (20.2) уравнения переходной кривой определяются так:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2) \cos \varphi_2 + [d - r_3 (\sin \alpha_n - \sin \alpha)] \sin \varphi_2 - \\ &\quad - r_2 \sin \varphi_2, \\ y_2 &= (r_3 \cos \alpha + r_2 \varphi_2) \sin \varphi_2 - [d - r_3 (\sin \alpha_n - \sin \alpha)] \cos \varphi_2 + \\ &\quad + r_2 \cos \varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad (20.8)$$

$$r_2 \varphi_2 \operatorname{tg} \alpha - (d - r_3 \sin \alpha_n) = 0.$$

Радиус кривизны переходной кривой в контактной точке найдем с помощью уравнения (18.7), в которое подставим выводимые ниже выражения.

На основании (20.3) получим

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} = -\frac{d\alpha}{dt} (\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}). \quad (20.9)$$

На основании (20.2)

$$\mathbf{v}_r^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -r_3 \frac{d\alpha}{dt} (\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}). \quad (20.10)$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = 0$, а $\boldsymbol{\omega}^{(2)} = -\omega^{(2)} \mathbf{k}$, получим, что

$$(\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{e}^{(1)} = \omega^{(2)} (\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}). \quad (20.11)$$

Вектор $\mathbf{v}^{(12)}$ был ранее представлен уравнениями (20.5).

Связь между производными $d\alpha/dt$ и $\omega^{(2)} = d\varphi_2/dt$ определим, продифференцировав уравнение (20.4):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\varphi_2} \omega^{(2)}. \quad (20.12)$$

После преобразований кривизна κ_2 переходной кривой определится уравнением

$$\kappa_2 = -\frac{\sin \alpha (\varphi_2 + \sin \alpha \cos \alpha)}{r_3 \sin \alpha (\varphi_2 + \sin \alpha \cos \alpha) + (d - r_3 \sin \alpha_n) \varphi_2}. \quad (20.13)$$

Знак минус указывает, что направление радиуса кривизны переходной кривой противоположно направлению орта нормали $\mathbf{e}$. Напомним, что параметры α и φ_2 связаны зависимостью (20.4). При нарезании колеса без коррекции (см. § 48) $d = m$. Если рейка не имеет закругления, в уравнениях (20.8) и (20.13) нужно положить $r_3 = 0$; размер d определяет при этом полную высоту головки зубца рейки.

Отметим в заключение, что радиус кривизны переходной кривой можно было бы определить и иным путем, используя уравнение (16.4) Эйлера — Савари для кривизн взаимноогibaемых поверхностей.

§ 21. Определение закона движения плоского зубчатого механизма

Предыдущие параграфы были посвящены решению задачи синтеза трехзвенного плоского зубчатого механизма в такой постановке: заданы схема механизма, его закон движения и профиль зубцов одного из подвижных звеньев; требуется найти профиль зубцов другого подвижного звена.

Обратная задача — задача анализа плоского трехзвенного зубчатого механизма — ставится так: задана схема механизма, известны профили зубцов обоих подвижных звеньев; требуется найти закон движения механизма в виде функции, связывающей перемещения обоих звеньев.

Используем, как и ранее, три системы координат: подвижные системы S_1 и S_2 , жестко связанные с подвижными звеньями, неподвижную систему S , жестко связанную со стойкой. Пусть в системе S_i ($i = 1, 2$) заданы уравнения профилей зубцов и ортов нормалей

$$\rho_i = \rho_i(u_i), \quad (21.1)$$

$$e_i = e_i(u_i). \quad (21.2)$$

В неподвижной системе координат профили зубцов и орты нормалей определяются уравнениями:

$$\rho^{(i)} = \rho^{(i)}(u_i, \varphi_i), \quad (21.3)$$

$$e^{(i)} = e^{(i)}(u_i, \varphi_i), \quad (21.4)$$

где φ_1 и φ_2 — углы поворота колес относительно стойки.

В точке касания профилей у них должны быть равны радиусы-векторы и орты нормалей (предполагается, что орты нормалей $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ одинаково направлены). Основываясь на этом, получим следующие уравнения:

$$\rho^{(1)}(u_1, \varphi_1) = \rho^{(2)}(u_2, \varphi_2), \quad (21.5)$$

$$e^{(1)}(u_1, \varphi_1) = e^{(2)}(u_2, \varphi_2). \quad (21.6)$$

Перейдем к проекциям на оси координат, учтя, что зацепление плоское и векторы $\rho^{(i)}$ и $e^{(i)}$ находятся в плоскости, перпендикулярной осям вращения. Из векторного уравнения (21.5) можно получить два, а из (21.6) только одно независимое скалярное уравнение, поскольку $|e^{(1)}| = |e^{(2)}|$.

В нашем распоряжении будут, следовательно, три независимых скалярных уравнения, связывающих четыре параметра: φ_1 , u_1 , φ_2 , u_2 . Задавая угол поворота φ_1 , из указанной системы скалярных уравнений найдем остальные, как функции от φ_1 . Зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$, определенная хотя бы в табличной форме, и представит искомый закон движения механизма, точнее функцию его перемещения.

Для определения функции передаточного отношения можно использовать два способа:

а) продифференцировать функцию перемещения, имея в виду, что

$$i_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \varphi_2'(\varphi_1),$$

б) использовать основное положение кинематического метода (§ 13), согласно которому в контактной точке вектор нормали и скорость относительного перемещения взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим подробнее второй способ определения передаточного отношения. Пусть после решения системы из трех скалярных уравнений для текущей точки контакта определены параметры u_1 , u_2 , φ_2 ; параметру φ_1 было придано фиксированное значение.

Согласно основной теореме зацепления

$$e^{(i)} v^{(12)} = e^{(i)} [(\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times \rho^{(i)} + r^{(1)} \times \omega^{(1)} - r^{(2)} \times \omega^{(2)}] = 0. \quad (21.7)$$

В этом уравнении $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$ — радиусы-векторы точек приложения векторов $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, $\rho^{(i)}$ — радиус-вектор текущей точки контакта. При известных значениях параметров u_i и φ_i векторы $\rho^{(i)}$ и $e^{(i)}$ полностью

определены. У векторов угловых скоростей $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ известны линии их действия, но неизвестны их модули. Определив из уравнения (21.7) отношение модулей этих векторов

$$\frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(1)}} = i_{21}, \quad (21.8)$$

найдем искомое передаточное отношение.

Иногда возникает необходимость в исследовании условий зацепления в окрестности заданной точки контакта, не прибегая к определению всей функции перемещения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Представим, что решение задачи ограничивается требованием определить для данной точки контакта профиля мгновенное значение передаточного отношения i_{21} и производную $\frac{d}{d\varphi_1}(i_{21})$.

Если для данной точки контакта известны значения u_i и φ_i , то мгновенное значение передаточного отношения i_{21} , как уже было показано, находится в результате решения уравнения (21.7).

Рассмотрим, как найти производную передаточного отношения.

Продифференцируем уравнения (21.5) и (21.6)

$$\dot{\rho}^{(1)} = \dot{\rho}^{(2)}, \quad (21.9)$$

$$\dot{e}^{(1)} = \dot{e}^{(2)}. \quad (21.10)$$

На основании материалов § 17 имеем

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt}, \quad (21.11)$$

$$\frac{\partial e^{(1)}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial e^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial e^{(2)}}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\partial e^{(2)}}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt}. \quad (21.12)$$

Перейдя к проекциям, получим четыре скалярных уравнения, содержащих четыре неизвестные: производные $d\varphi_1/dt$, $d\varphi_2/dt$, du_1/dt и du_2/dt . Из этих четырех скалярных уравнений независимыми являются только два, так как в точке контакта известен орт нормали $e^{(1)}$ (поскольку известны параметры u_i и φ_i) и в точке контакта соблюдается уравнение

$$e^{(i)} \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} = e^{(i)} v_r^{(i)} = 0. \quad (21.13)$$

Поэтому из каждой пары скалярных уравнений, получаемых из векторных уравнений (21.11), (21.12), для определения неизвестных используется лишь одно. Отношение производных

$$\frac{d\varphi_2}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt} = i_{21}$$

уже известно в результате решения уравнения (21.7). Одной из этих производных, например $d\varphi_1/dt$, следует задаться, другая производная, $d\varphi_2/dt$, найдется из выражения

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} i_{21};$$

остальные две производные, du_1/dt и du_2/dt , будут найдены в результате решения двух скалярных уравнений, получаемых из (21.9) и (21.10). После определения указанных выше четырех производных нетрудно определить искомую производную передаточного отношения. Продифференцируем уравнение (21.7), предполагая, что $\omega^{(1)} = \text{const}$, а у вектора $\omega^{(2)}$ изменяется лишь модуль. Это означает, что при зацеплении

в окрестности точки контакта вращение звена 1 осуществляется с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, а звено 2 вращается с переменной угловой скоростью тоже вокруг неподвижной оси. Проделав это, получим

$$\dot{e}^{(1)} v^{(12)} + e^{(1)} [(\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times \dot{\rho}^{(1)} - (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) \times \dot{\omega}^{(2)}] = 0. \quad (21.14)$$

Согласно уравнениям (17.3) и (17.13)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(1)} &= \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt}, \\ \dot{e}^{(1)} &= \frac{\partial e^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial e^{(1)}}{\partial \varphi_1} \frac{du_1}{dt}. \end{aligned}$$

Неизвестной величиной, подлежащей определению из уравнения (21.14), является $\dot{\omega}^{(2)}$.

Учитывая, что векторы $\omega^{(2)}$ и $\dot{\omega}^{(2)}$ коллинеарны, обозначим

$$\dot{\omega}^{(2)} = \varepsilon \omega^{(2)}. \quad (21.15)$$

Продифференцировав зависимость (21.8), получим

$$\frac{d\omega^{(2)}}{dt} = \omega^{(1)} \frac{d}{d\varphi_1} (i_{21}) \frac{d\varphi_1}{dt} = [\omega^{(1)}]^2 i'_{21}, \quad (21.16)$$

где

$$i'_{21} = \frac{d}{d\varphi_1} (i_{21}).$$

На основании выражений (21.15) и (21.16)

$$i'_{21} = \frac{\varepsilon i_{21}}{[\omega^{(1)}]^2}. \quad (21.17)$$

Искомое значение производной передаточного отношения определим, найдя предварительно ε из уравнения (21.15), а затем i'_{21} из (21.17). Полезно отметить, что при исследовании условий зацепления в окрестности точки контакта можно попутно определить и направление касательной к линии зацепления. Направление такой касательной совпадает с направлением скорости перемещения точки контакта в неподвижном пространстве, выражаемой вектором

$$v^{(i)} = \dot{\rho}^{(i)} = \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt}.$$

Пример 13. Определим закон движения зубчатого механизма, у которого профиль зубцов звена 1 — эвольвентный, профиль зубцов звена 2 — окружность радиуса ρ (рис. 44, а). Звенья 1 и 2 вращаются соответственно вокруг центров O_1 и O_2 . С звеньями 1 и 2 жестко связаны подвижные системы координат $S_1(x_1, y_1)$ и $S_2(x_2, y_2)$, со стойкой — неподвижная система координат $S(x, y)$ (рис. 44, б).

Эвольвентный профиль и орт нормали в системе S_1 определяются уравнениями (см. § 42):

$$x_1 = \frac{r_0}{\cos \alpha} \sin \theta, \quad y_1 = \frac{r_0}{\cos \alpha} \cos \theta, \quad (21.18)$$

где

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha, \quad e_{x1} = \cos(\alpha + \theta), \quad e_{y1} = -\sin(\alpha + \theta). \quad (21.19)$$

Профиль зубца звена 2 и орт нормали в системе S_2 определяются в системе S_2 уравнениями:

$$x_2 = -\rho (1 - \cos \vartheta), \quad y_2 = -(r_2 - \rho \sin \vartheta), \quad (21.20)$$

$$e_{x2} = \cos \vartheta, \quad e_{y2} = \sin \vartheta, \quad (21.21)$$

где $r_2 = O_2O$.

Профиль $O\alpha$ и орт нормали в системе S определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 = -\frac{r_0}{\cos \alpha} \sin (\theta - \varphi_1), \\ y^{(1)} &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 - r_0 = r_0 \left[\frac{\cos (\theta - \varphi_1)}{\cos \alpha} - 1 \right], \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x^{(1)} &= e_{x1} \cos \varphi_1 - e_{y1} \sin \varphi_1 = \cos (\alpha + \theta - \varphi_1), \\ e_y^{(1)} &= e_{x1} \sin \varphi_1 + e_{y1} \cos \varphi_1 = -\sin (\alpha + \theta - \varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (21.23)$$

Профиль $O\beta$ и орт нормали в системе S определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 = \rho [\cos (\vartheta - \varphi_2) - \cos \varphi_2] - r_2 \sin \varphi_2, \\ y^{(2)} &= -x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2 + r_2 = \rho [\sin (\vartheta - \varphi_2) + \sin \varphi_2] + r_2 (1 - \cos \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x^{(2)} &= e_{x2} \cos \varphi_2 + e_{y2} \sin \varphi_2 = \cos (\vartheta - \varphi_2), \\ e_y^{(2)} &= -e_{x2} \sin \varphi_2 + e_{y2} \cos \varphi_2 = \sin (\vartheta - \varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (21.25)$$

Функция перемещения определится в результате решения следующих трех уравнений:

$$x^{(1)} = x^{(2)}, \quad y^{(1)} = y^{(2)}, \quad e_x^{(1)} = e_x^{(2)}, \quad (21.26)$$

либо

$$x^{(1)} = x^{(2)}, \quad y^{(1)} = y^{(2)}, \quad e_y^{(1)} = e_y^{(2)}. \quad (21.27)$$

В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_0}{\cos \alpha} \sin (\theta - \varphi_1) &= \rho [\cos (\alpha + \theta - \varphi_1) - \cos \varphi_2] - r_2 \sin \varphi_2, \\ r_0 \left[\frac{\cos (\theta - \varphi_1)}{\cos \alpha} - 1 \right] &= \rho [-\sin (\alpha + \theta - \varphi_1) + \sin \varphi_2] + r_2 (1 - \cos \varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (21.28)$$

Фиксируя в системе уравнений (21.28) параметр α , можно найти значения φ_1 и φ_2 и определить искомую функцию перемещения $\varphi_2 = \varphi_2(\alpha)$.

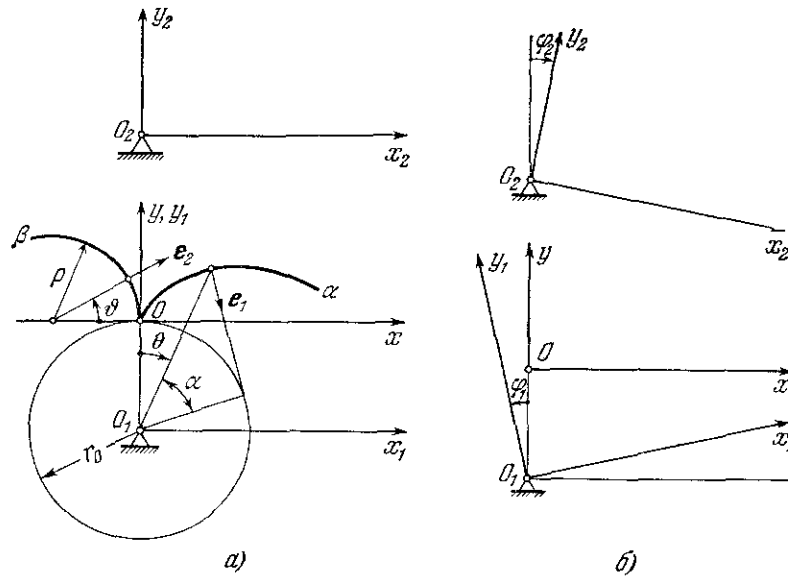


Рис. 44.

Исследуем условия зацепления профилей в окрестности точки контакта O , используя для этого уравнения (21.9) и (21.10). Продифференцировав выражения

(21.22) — (21.25), получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(1)} &= \frac{r_0 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \sin (\theta - \varphi_1) \frac{d\alpha}{dt} + \frac{r_0}{\cos \alpha} \cos (\theta - \varphi_1) \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), \\ \dot{y}^{(1)} &= \frac{r_0 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos (\theta - \varphi_1) \frac{d\alpha}{dt} - \frac{r_0}{\cos \alpha} \sin (\theta - \varphi_1) \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), \\ \dot{e}_x^{(1)} &= -\sin (\alpha + \theta - \varphi_1) \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), \\ \dot{e}_y^{(1)} &= -\cos (\alpha + \theta - \varphi_1) \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), \\ \dot{x}^{(2)} &= -\rho \sin (\vartheta - \varphi_2) \left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + \rho \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - r_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt}, \\ \dot{y}^{(2)} &= \rho \cos (\vartheta - \varphi_2) \left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + \rho \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + r_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt}, \\ \dot{e}_x^{(2)} &= -\sin (\vartheta - \varphi_2) \left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right), \\ \dot{e}_y^{(2)} &= \cos (\vartheta - \varphi_2) \left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right).\end{aligned}$$

Для точки контакта O профилей в приведенных выражениях нужно положить $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\alpha = 0$, $\theta = 0$, $\vartheta = 0$. Так как параметры α и θ связаны зависимостью $\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$, то при $\alpha = 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Для точки контакта O получим

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(1)} &= -r_0 \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \dot{y}^{(1)} = 0, \quad \dot{e}_x^{(1)} = 0, \\ \dot{e}_y^{(1)} &= -\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), \quad \dot{x}^{(2)} = -r_2 \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \dot{y}^{(2)} = \rho \frac{d\vartheta}{dt}, \\ \dot{e}_x^{(2)} &= 0, \quad \dot{e}_y^{(2)} = \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt}.\end{aligned}$$

Исследование условий зацепления в окрестности точки контакта приводит к следующим результатам:

1) Производная $d\vartheta/dt = 0$, скорость $v_r^{(2)}$ движения контактной точки равна нулю, хотя точка O огибающего профиля — обыкновенная точка. Этим подтверждается отмеченный в § 19 факт, что при $v_r^{(2)} = 0$ точкой огибающего профиля может явиться не только особая, но и обыкновенная точка.

2) Поскольку $\dot{\rho}^{(1)} = v_e^{(1)}$, касательная к линии зацепления совпадает с вектором $v_e^{(1)}$ переносной скорости и перпендикулярна линии центров $O_1 - O_2$.

3) Из уравнения (21.14) следует, что при касании профилей в точке O $\omega^{(2)} = 0$ и производная передаточного отношения равна нулю.

4) Можно удостовериться, что приведенное в § 19 уравнение

$$\dot{e}_r^{(1)} + (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times e^{(1)} = 0$$

для точки O действительно соблюдается.

Глава III

Теория пространственных зацеплений

§ 22. Преобразования пространственных координат

Пространственные зацепления используются для передачи движений между параллельными, пересекающимися и перекрещивающимися осями. В первом случае применяются цилиндрические колеса с винтовыми зубцами (см. гл. VII); в случае пересекающихся осей используются конические колеса (см. гл. XVII—XX); передача вращения между перекрещивающимися осями осуществляется посредством червячного зацепления, гипоидных колес и цилиндрических колес с винтовыми зубцами (см. гл. VIII, IX, X, XI). Исследование перечисленных видов зацеплений, даже в том случае, когда оси колес параллельны, производится в пространстве трех измерений.

Относительное движение звеньев передачи может определяться одним или двумя независимыми параметрами, в соответствии с чем поверхность зубцов одного из звеньев явится огибающей однопараметрического или двухпараметрического семейства поверхностей другого звена. Относительное движение с двумя независимыми параметрами имеет, как правило, место при нарезании зубцов инструментом, когда, помимо движения обкатки, существует еще подача инструмента.

Рассмотрим сначала случай передачи вращения между перекрещивающимися осями, предполагая, что относительное движение определяется одним параметром и бесконечно малые углы поворота звеньев, а также их угловые скорости связаны таким соотношением:

$$i_{12} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

где i_{12} и i_{21} — соответствующие передаточные отношения.

Нужно сразу же заметить, что излагаемый метод преобразования координат распространяется и на случай передачи движения с переменным передаточным отношением, когда

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}(\varphi_1)}.$$

Для исследования зацепления с перекрещивающимися осями используем три системы координат (рис. 45): подвижные системы x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , связанные соответственно с звеньями 1 и 2, и неподвижную систему x, y, z , относительно которой будем задавать положения подвижных систем координат. Осями вращения звеньев являются соответственно z_1 и z_2 , γ — угол перекрещивания осей, A — кратчайшее межосевое

расстояние. Переход от системы координат x, y, z к x_2, y_2, z_2 совершим в два приема: а) перенесем начало координат в O_2 и повернем систему координат вокруг оси x с тем, чтобы угол между осями z и z_p (угол перекрещивания осей) стал равен γ ; тогда система x, y, z займет положение x_p, y_p, z_p ; б) затем повернем систему x_p, y_p, z_p вокруг z_p на угол φ_2 , в результате чего система x_p, y_p, z_p перейдет в x_2, y_2, z_2 . Система координат x_p, y_p, z_p является вспомогательной и используется лишь при выводе формул преобразования.

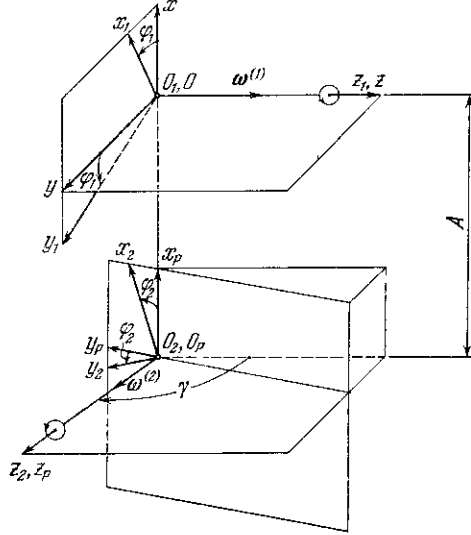


Рис. 45.

На рис. 45 изображен случай, когда для наблюдателя, смотрящего с положительных направлений осей z_1 и z_2 , звенья 1 и 2 вращаются против направления часовой стрелки. Если при том же направлении вращения звена 1 звено 2 будет вращаться в обратном направлении, в приводимых ниже зависимостях должны быть изменены на противоположные знаки перед φ_2 , i_{12} и i_{21} .

Вывод формул преобразований координат, предполагая, что переход совершается от системы координат S_1 к S_2 , основывается на такой записи:

$$r_2 = M_{2p} M_{p0} M_{01}, \quad r_2 = M_{21} r_1. \quad (22.1)$$

Здесь r_1 и r_2 — столбцевые матрицы радиусов-векторов r_1 и r_2 одной и той же точки в системах S_1 и S_2 , M_{01} — матрица перехода от системы координат S_1 к S_0 , M_{p0} — матрица перехода от S_0 к S_p , M_{2p} — матрица перехода от S_p к S_2 , M_{21} — результирующая матрица для непосредственного перехода от S_1 к S_2 . Индекс «0» для системы S_0 сохраняется лишь в обозначениях матриц перехода. Для самих координат x, y, z этот индекс для краткости записи опускается.

Используя указанное в § 4 правило составления матриц, запишем

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (22.2)$$

$$M_{p0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (22.3)$$

$$M_{2p} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (22.4)$$

Найдем произведения матриц по правилу умножения «строка на столбец» (см. § 2):

$$M_{20} = M_{2p} M_{p0} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 \cos \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \sin \varphi_2 & A \cos \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 \cos \gamma \cos \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & -A \sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (22.5)$$

$$M_{21} = (M_{2p} M_{p0}) M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + & -\sin \gamma \sin \varphi_2 & A \cos \varphi_2 \\ + \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & + \cos \gamma \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & & \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & -A \sin \varphi_2 \\ + \cos \gamma \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & + \cos \gamma \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ \sin \gamma \sin \varphi_1 & \sin \gamma \cos \varphi_1 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (22.6)$$

Связь между координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + y_1 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \gamma \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) - \\ &\quad \quad \quad - z_1 \sin \gamma \sin \varphi_2 + A \cos \varphi_2, \\ y_2 &= x_1 (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \gamma \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) + \\ &\quad + y_1 (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \gamma \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) - \\ &\quad \quad \quad - z_1 \sin \gamma \cos \varphi_2 - A \sin \varphi_2, \\ z_2 &= x_1 \sin \gamma \sin \varphi_1 + y_1 \sin \gamma \cos \varphi_1 + z_1 \cos \gamma, \\ t_2 &= t_1 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

Обратный переход от S_2 к S_1 определяется матричным равенством

$$r_1 = M_{12} r_2. \quad (22.8)$$

Элементы матрицы M_{12} , обратной по отношению к матрице M_{21} , определяются по правилу, приведенному в § 5.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + & \sin \gamma \sin \varphi_1 & -A \cos \varphi_1 \\ + \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & + \cos \gamma \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + & \sin \gamma \cos \varphi_1 & A \sin \varphi_1 \\ + \cos \gamma \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & + \cos \gamma \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ -\sin \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (22.9)$$

Формулы перехода от S_1 к S_2 имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + y_2 (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \gamma \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) + \\ &\quad \quad \quad + z_2 \sin \gamma \sin \varphi_1 - A \cos \varphi_1, \\ y_1 &= x_2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \gamma \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + y_2 (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \gamma \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) + \\ &\quad \quad \quad + z_2 \sin \gamma \cos \varphi_1 + A \sin \varphi_1, \\ z_1 &= -x_2 \sin \gamma \sin \varphi_2 - y_2 \sin \gamma \cos \varphi_2 + z_2 \cos \gamma, \\ t_1 &= t_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.10)$$

Формулы связи между системами S и S_2 определяются матричными равенствами

$$r_2 = M_{2p} M_{p0} r = M_{20} r. \quad (22.11)$$

Используя выражение (22.5) для матрицы M_{20} , получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x \cos \varphi_2 + y \cos \gamma \sin \varphi_2 - z \sin \gamma \sin \varphi_2 + A \cos \varphi_2, \\ y_2 &= -x \sin \varphi_2 + y \cos \gamma \cos \varphi_2 - z \sin \gamma \cos \varphi_2 - A \sin \varphi_2, \\ z_2 &= y \sin \gamma + z \cos \gamma, \\ t_2 &= t_0 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.12)$$

Переход от S_2 к S_0 определяется матричным равенством

$$r = M_{02} r_2. \quad (22.13)$$

Матрица M_{02} , обратная матрице M_{20} , выражается так:

$$M_{02} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & -A \\ \cos \gamma \sin \varphi_2 & \cos \gamma \cos \varphi_2 & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (22.14)$$

Формулы перехода определяются так:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2 - A, \\ y &= x_2 \cos \gamma \sin \varphi_2 + y_2 \cos \gamma \cos \varphi_2 + z_2 \sin \gamma, \\ z &= -x_2 \sin \gamma \sin \varphi_2 - y_2 \sin \gamma \cos \varphi_2 + z_2 \cos \gamma, \\ t &= t_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.15)$$

Аналогичным образом определим формулы перехода от S к S_1 и обратно:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \\ z &= z_1, \\ t &= t_1 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.16)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1, \\ y_1 &= -x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1, \\ z_1 &= z, \\ t_1 &= t = 1. \end{aligned} \right\} \quad (22.17)$$

Рассмотрим теперь случай передачи движения с двумя параметрами. Пусть, как и в ранее рассмотренном случае, звенья 1 и 2 вращаются вокруг перекрещивающихся осей и углы их поворота связаны соотношением $i_{12} = d\varphi_1/d\varphi_2$. Кроме того, звено 1 движется вдоль оси z_2 звена 2; текущая величина этого перемещения обозначается через ψ (рис. 46). Значения ψ и φ_i ($i = 1, 2$) между собой не связаны, и поэтому они являются двумя независимыми параметрами. Описанная схема движений имеет место при нарезании зубцов цилиндрических колес посредством червячной фрезы, перемещение ψ фрезы представляет ее так называемую подачу.

Введем, как и ранее, в рассмотрение подвижные системы координат S_1 и S_2 , связанные со звеньями 1 и 2, неподвижную систему координат S , вспомогательную неподвижную систему S_p .

Расположение систем S_1 , S и S_p такое же, как и на рис. 45. Система S_2 смещена по

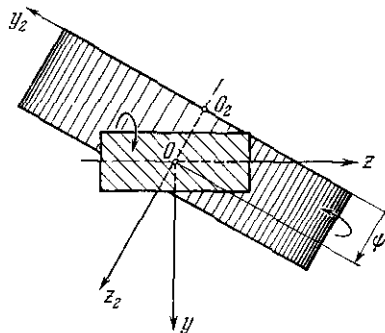


Рис. 46.

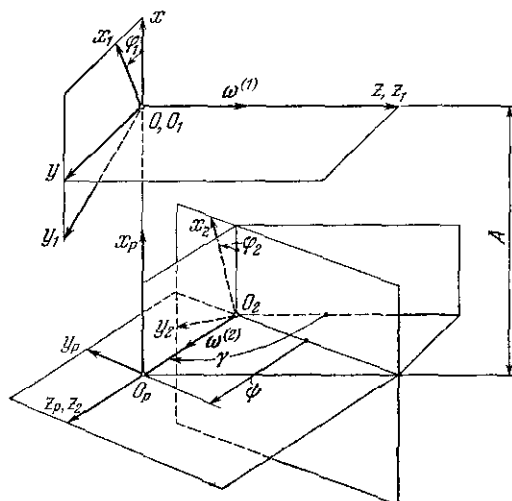


Рис. 47.

отношению к S_p по оси z_p на величину ψ и повернута на угол φ_2 вокруг этой оси (рис. 47). Матрицы перехода M_{01} и M_{p0} остаются прежними, матрица M_{2p} имеет такой вид:

$$M_{2p} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.18)$$

Матрица перехода от системы S_1 к S_2 определится так:

$$M_{21} = M_{2p} M_{p0} M_{01} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + & -\sin \gamma \sin \varphi_2 & A \cos \varphi_2 \\ + \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & + \cos \gamma \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & & \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & -A \sin \varphi_2 \\ + \cos \gamma \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & + \cos \gamma \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & \\ \sin \gamma \sin \varphi_1 & \sin \gamma \cos \varphi_1 & \cos \gamma & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.19)$$

Переход от S_2 и S_1 определяется матрицей M_{12} , обратной по отношению к матрице M_{21} :

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + & \sin \gamma \sin \varphi_1 & -A \cos \varphi_1 - \\ + \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & + \cos \gamma \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & & -\psi \sin \gamma \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + & \sin \gamma \cos \varphi_1 & A \sin \varphi_1 - \\ + \cos \gamma \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & + \cos \gamma \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & & -\psi \sin \gamma \cos \varphi_1 \\ -\sin \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & \cos \gamma & -\psi \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.20)$$

Найдем проекции $v^{(12)}$, приняв во внимание, что

$$\omega_O^{(1)} = \omega^{(1)} k, \quad \omega_O^{(2)} = \omega^{(2)} \sin \gamma j + \omega^{(2)} \cos \gamma k, \quad (23.5)$$

$$\omega_O^{(12)} = -\omega^{(2)} \sin \gamma j + (\omega^{(1)} - \omega^{(2)} \cos \gamma) k, \quad (23.6)$$

$$A = -Ai, \quad (23.7)$$

где i, j, k — орты координатных осей.

Не нарушая общности, примем, что $\omega^{(1)} = 1$ рад/сек, а $\omega^{(2)} = \omega^{(1)} i_{21} = i_{21}$ рад/сек. В результате получим

$$\begin{aligned} v_x^{(12)} &= -y(1 - i_{21} \cos \gamma) - z i_{21} \sin \gamma, \\ v_y^{(12)} &= x(1 - i_{21} \cos \gamma) - A i_{21} \cos \gamma, \\ v_z^{(12)} &= (x + A) i_{21} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Для того чтобы получить истинные значения проекций скорости относительного движения, правые части выражений (23.8) необходимо умножить на величину $\omega^{(1)}$ угловой скорости вращения первого звена.

Отметим, что здесь и ниже знак перед i_{21} нужно изменить на обратный, если звено 2 (или звено 1) вращается в направлении, противоположном принятому на рис. 48.

В последующем нам понадобятся также выражения проекций скорости относительного движения $v_1^{(12)}$ в системе S_1 , жестко связанной со звеном 1. Воспользуемся для этого матричным равенством

$$v_1^{(12)} = L_{10} v^{(12)}. \quad (23.9)$$

Матрица L_{10} для преобразований проекций вектора может быть получена из матрицы M_{10} для преобразований координат точки (см. § 4)

$$L_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (23.10)$$

Используя выражения (23.9), (23.10) и (23.8), получим

$$\left. \begin{aligned} v_{x1}^{(12)} &= -y_1(1 - i_{21} \cos \gamma) - z_1 i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1, \\ v_{y1}^{(12)} &= x_1(1 - i_{21} \cos \gamma) + z_1 i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1, \\ v_{z1}^{(12)} &= i_{21} \sin \gamma (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A). \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

Выражения (23.8) и (23.11) распространяются и на случаи передачи вращения между параллельными и пересекающимися осями. При передаче движения между параллельными осями в этих зависимостях нужно принять $\gamma = 0$; в случае пересекающихся осей $A = 0$, $\gamma = \delta$, где δ — угол между пересекающимися осями вращения.

Найдем скорость относительного движения при передаче движения с двумя независимыми параметрами. Обозначим через $v^{(12, \varphi)}$ скорость относительного движения звена 1 по отношению к звену 2 при $\psi = \text{const}$; $v^{(12, \psi)}$ — скорость относительного движения при $\varphi = \text{const}$.

Вектор $v^{(12, \varphi)}$ определяется, как и ранее, выражениями (23.8) и (23.4). Отметим, что смещение системы S_2 вдоль оси z_p не сказывается на величине вектора-момента $m_O(\omega^{(2)})$, так как радиус-вектор из точки приведения может быть проведен к любой точке линии действия вектора ω_{O2} .

Найдем вектор $v^{(12, \psi)}$. Системы S и S_1 при $\psi = \text{const}$ движутся вдоль оси z_p со скоростью $d\psi/dt$. Следовательно,

$$v^{(12, \psi)} = (\sin \gamma j + \cos \gamma k) \frac{d\psi}{dt}. \quad (23.12)$$

В системе S_1 вектор скорости относительного движения $v_1^{(12, \psi)}$ определяется выражениями (23.11). Вектор $v_1^{(12, \psi)}$ определится так:

$$v_1^{(12, \psi)} = (\sin \gamma \sin \varphi_1 i_1 + \sin \gamma \cos \varphi_1 j_1 + \cos \gamma k_1) \frac{d\psi}{dt}. \quad (23.13)$$

§ 24. Матричный способ определения скорости относительного движения звеньев

В предыдущем параграфе был рассмотрен векторный способ определения относительной скорости движения звеньев, основывающийся на приведении скользящих векторов.

Рассмотрим теперь матричный способ определения относительной скорости.

Введем в рассмотрение две системы координат: S_n , занимающую фиксированное положение в неподвижном пространстве, и S_m , движущуюся относительно S_n . Движение S_m относительно S_n описывается матрицей перехода от S_m к S_n

$$r_n = M_{nm} r_m. \quad (24.1)$$

Выберем в системе S_m некоторую точку, жестко связанную с этой системой ($r_m = \text{const}$), и найдем ее скорость при движении S_m относительно S_n . Продифференцировав для этого выражение (24.1), получим

$$\dot{r}_n = v_n^{(mn)} = \frac{dM_{nm}}{dt} r_m. \quad (24.2)$$

В столбцовой матрице скорости $v_n^{(mn)}$ верхние индексы (mn) указывают, что рассматривается движение S_m относительно S_n , нижний индекс (n) указывает, что компоненты скорости записываются в системе S_n . Для того чтобы компоненты скорости были записаны в системе S_m , воспользуемся матрицей перехода

$$v_m^{(mn)} = M_{mn} v_n^{(mn)}. \quad (24.3)$$

Предполагается, что столбцовые матрицы скоростей записаны так:

$$v_m^{(mn)} = \begin{Bmatrix} v_{xm}^{(mn)} \\ v_{ym}^{(mn)} \\ v_{zm}^{(mn)} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad v_n^{(mn)} = \begin{Bmatrix} v_{xn}^{(mn)} \\ v_{yn}^{(mn)} \\ v_{zn}^{(mn)} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Подставив выражение (24.3) в (24.2), получим

$$v_m^{(mn)} = M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt} r_m. \quad (24.4)$$

Во избежание последующих недоразумений, необходимо твердо запомнить, что рассматривается движение S_m относительно S_n , на что указывает читаемый справа налево порядок индексов в матрице M_{mn} .

Итак, для определения скорости $v_n^{(mn)}$ необходимо составить матрицы M_{mn} и M_{nm} , продифференцировать M_{nm} , а затем найти произведение $M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt}$.

Зависимость (24.4) может быть заменена другой, более простого вида, если учесть (доказательство следует ниже), что

$$M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{zm} & \omega_{ym} & d_{14} \\ \omega_{zm} & 0 & -\omega_{xm} & d_{24} \\ -\omega_{ym} & \omega_{xm} & 0 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (24.5)$$

$$\begin{vmatrix} d_{14} \\ d_{24} \\ d_{34} \\ 0 \end{vmatrix} = M_{mn} \begin{vmatrix} \frac{da_{14}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{24}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{34}^{(nm)}}{dt} \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (24.6)$$

Столбцевая матрица в правой части уравнения (24.6) находится дифференцированием четвертого столбца матрицы M_{nm} :

$$M_{nm} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(nm)} & a_{12}^{(nm)} & a_{13}^{(nm)} & a_{14}^{(nm)} \\ a_{21}^{(nm)} & a_{22}^{(nm)} & a_{23}^{(nm)} & a_{24}^{(nm)} \\ a_{31}^{(nm)} & a_{32}^{(nm)} & a_{33}^{(nm)} & a_{34}^{(nm)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (24.7)$$

Верхние индексы в элементах матрицы указывают, что при составлении этих элементов рассматривается переход от S_m к S_n .

Приведем доказательство справедливости выражений (24.5) и (24.6). Очевидно, что

$$\begin{aligned} M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt} &= \begin{vmatrix} a_{11}^{(mn)} & a_{12}^{(mn)} & a_{13}^{(mn)} & a_{14}^{(mn)} \\ a_{21}^{(mn)} & a_{22}^{(mn)} & a_{23}^{(mn)} & a_{24}^{(mn)} \\ a_{31}^{(mn)} & a_{32}^{(mn)} & a_{33}^{(mn)} & a_{34}^{(mn)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{da_{14}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{12}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{13}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{14}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{24}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{22}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{23}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{24}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{34}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{32}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{33}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{34}^{(nm)}}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}^{(mn)} & a_{12}^{(mn)} & a_{13}^{(mn)} & 0 \\ a_{21}^{(mn)} & a_{22}^{(mn)} & a_{23}^{(mn)} & 0 \\ a_{31}^{(mn)} & a_{32}^{(mn)} & a_{33}^{(mn)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{da_{11}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{12}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{13}^{(nm)}}{dt} & 0 \\ \frac{da_{21}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{22}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{23}^{(nm)}}{dt} & 0 \\ \frac{da_{31}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{32}^{(nm)}}{dt} & \frac{da_{33}^{(nm)}}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}^{(mn)} & a_{12}^{(mn)} & a_{13}^{(mn)} & 0 \\ a_{21}^{(mn)} & a_{22}^{(mn)} & a_{23}^{(mn)} & 0 \\ a_{31}^{(mn)} & a_{32}^{(mn)} & a_{33}^{(mn)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{da_{14}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{24}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{34}^{(nm)}}{dt} \\ 0 \end{vmatrix} = T_{mn} \frac{dT_{nm}}{dt} + M_{mn} \begin{vmatrix} \frac{da_{14}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{24}^{(nm)}}{dt} \\ \frac{da_{34}^{(nm)}}{dt} \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (24.8)$$

Матрицы T_{mn} и dT_{nm}/dt получаются из матриц M_{mn} и dM_{nm}/dt , если элементы последнего столбца сделать равными нулю.

Рассмотрим произведение матриц $T_{mn} \frac{dT_{nm}}{dt}$.

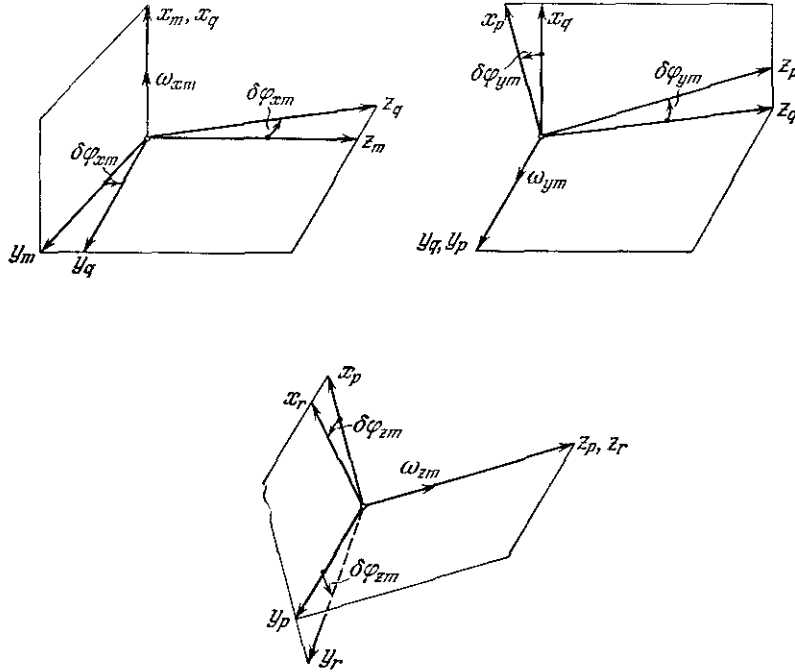


Рис. 49.

Представим, что имеется матрица перехода T_{mn} от S_n к S_m . Сообщим системе S_m повороты вокруг координатных осей на углы $\delta\varphi_{xm}$, $\delta\varphi_{ym}$, $\delta\varphi_{zm}$ и определим, как в связи с этим изменятся элементы матрицы T_{mn} (рис. 49). Очевидно, что

$$T_{mn} + \delta T_{mn} = D_{rp} D_{pq} D_{qm} T_{mn} = D_{rm} T_{mn}, \quad (24.9)$$

где D_{qm} , D_{pq} , D_{rp} — матрицы бесконечно малых углов поворота.

С точностью бесконечно малых первого порядка, принимая, что

$$\sin \delta\varphi \approx \delta\varphi, \text{ а } \cos \delta\varphi \approx 1,$$

матрицы поворотов на бесконечно малые углы представим следующими

выражениями:

$$D_{qm} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\varphi_{xm} & 0 \\ 0 & -\delta\varphi_{xm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_{pq} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\delta\varphi_{ym} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \delta\varphi_{ym} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_{rq} = \begin{vmatrix} 1 & \delta\varphi_{zm} & 0 & 0 \\ -\delta\varphi_{zm} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Произведение матриц $D_{rm} = D_{rq}D_{pq}D_{qm}$ при бесконечно малых углах поворота не зависит от порядка перемножения, не зависит, следовательно, от того, в каком порядке выполняются повороты вокруг осей системы S_m :

$$D_{rm} = \begin{vmatrix} 1 & \delta\varphi_{zm} & -\delta\varphi_{ym} & 0 \\ -\delta\varphi_{zm} & 1 & \delta\varphi_{xm} & 0 \\ \delta\varphi_{ym} & -\delta\varphi_{xm} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.10)$$

Умножим обе части уравнения (24.9) на T_{nm} . Учитывая, что $T_{mn}T_{nm} = E$, где E — единичная матрица, получим

$$E + \delta T_{mn}T_{nm} = D_{rm}. \quad (24.11)$$

На основании выражений (24.10) и (24.11) получим

$$\delta T_{mn}T_{nm} = \begin{vmatrix} 0 & \delta\varphi_{zm} & -\delta\varphi_{ym} & 0 \\ -\delta\varphi_{zm} & 0 & \delta\varphi_{xm} & 0 \\ \delta\varphi_{ym} & -\delta\varphi_{xm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.12)$$

Разделив обе части выражения (24.12) на δt и переходя к пределу, получим

$$\frac{dT_{mn}}{dt} T_{nm} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{zm} & -\omega_{ym} & 0 \\ -\omega_{zm} & 0 & \omega_{xm} & 0 \\ \omega_{ym} & -\omega_{xm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.13)$$

Легко показать, что

$$T_{mn} \frac{dT_{nm}}{dt} = - \frac{dT_{mn}}{dt} T_{nm}. \quad (24.14)$$

Действительно, поскольку

$$T_{mn}T_{nm} = E,$$

то

$$\frac{dT_{mn}}{dt} T_{nm} + T_{mn} \frac{dT_{nm}}{dt} = 0.$$

Из выражений (24.14) и (24.13) следует

$$T_{mn} \frac{dT_{nm}}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{zm} & \omega_{ym} & 0 \\ \omega_{zm} & 0 & -\omega_{xm} & 0 \\ -\omega_{ym} & \omega_{xm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.15)$$

После подстановки выражения (24.15) в (24.8) можно удостовериться, что выражение (24.5) является верным и столбцевая матрица скорости может быть представлена следующей формулой:

$$v_m^{(mn)} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{zm} & \omega_{ym} & d_{14} \\ \omega_{zm} & 0 & -\omega_{xm} & d_{24} \\ -\omega_{ym} & \omega_{xm} & 0 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} r_m. \quad (24.16)$$

Выражения (24.6) для d_{14} , d_{24} и d_{34} были приведены выше. В сокращенной записи

$$v_m^{(mn)} = P_m^{(mn)} r_m, \quad (24.17)$$

где $P_m^{(mn)}$ — матрица с компонентами скорости относительного движения при движении системы S_m по отношению к S_n .

Отметим, что

$$v_m^{(nm)} = -v_m^{(mn)}, \quad M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt} = -\frac{dM_{mn}}{dt} M_{nm}.$$

С учетом этого

$$v_m^{(nm)} = \frac{dM_{mn}}{dt} M_{nm} r_m = P_m^{(nm)} r_m, \quad (24.18)$$

где $P_m^{(nm)} = -P_m^{(mn)}$.

В дальнейшем (§ 33) нам понадобится выражение для $\frac{d^2 M_{mn}}{dt^2} M_{nm}$. Используем для выводов зависимости

$$M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt} = P_m^{(mn)} = -P_m^{(nm)}, \quad (24.19)$$

$$\frac{dM_{mn}}{dt} M_{nm} = P_m^{(nm)}. \quad (24.20)$$

Продифференцируем зависимость (24.20)

$$\frac{d^2 M_{mn}}{dt^2} M_{nm} + \frac{dM_{mn}}{dt} \frac{dM_{nm}}{dt} = \frac{dP_m^{(nm)}}{dt} = A_m^{(nm)}. \quad (24.21)$$

Здесь $A_m^{(nm)}$ — обозначение матрицы с компонентами ускорения, полученной дифференцированием матрицы $P_m^{(nm)}$.

Легко удостовериться, что

$$\frac{dM_{mn}}{dt} \frac{dM_{nm}}{dt} = \left(\frac{dM_{mn}}{dt} M_{nm} \right) \left(M_{mn} \frac{dM_{nm}}{dt} \right). \quad (24.22)$$

Это следует из того, что $M_{nm} M_{mn} = E$, где E — единичная матрица. Используя выражения (24.19), (24.20) и (24.22), найдем

$$\frac{dM_{mn}}{dt} \frac{dM_{nm}}{dt} = -[P_m^{(nm)}]^2. \quad (24.23)$$

Подставив выражение (24.23) в (24.21), получим

$$\frac{d^2 M_{mn}}{dt^2} M_{nm} = [P_m^{(nm)}]^2 + A_m^{(nm)}. \quad (24.24)$$

Применим полученные результаты для определения в передаче со скрепляющимися осями $v_1^{(12)}$ скорости относительного движения в системе S_1 .

Используем формулы (24.16) и (24.6), приняв в них $n=2$ (зафиксирована система S_2), $m=1$ (движется система S_1). Матрицы перехода M_{21}

и M_{12} были представлены выражениями (22.6) и (22.9). В неподвижной системе координат главный вектор угловой скорости системы S_1 в относительном движении был определен выражением (23.6), согласно которому

$$\omega_0^{(12)} = -\omega^{(2)} \sin \gamma \mathbf{j} + (\omega^{(2)} - \omega^{(2)} \cos \gamma) \mathbf{k}.$$

Определим вектор $\omega_1^{(12)}$ в системе S_1 с помощью формул, аналогичных (22.17), приняв, что $\omega^{(1)} = 1 \text{ рад/сек}$, $\omega^{(2)} = i_{21} \text{ рад/сек}$:

$$\omega_1^{(12)} = -i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 \mathbf{i}_1 - i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 \mathbf{j}_1 + (1 - i_{21} \cos \gamma) \mathbf{k}_1. \quad (24.25)$$

На основании (22.6)

$$\begin{vmatrix} \frac{da_{14}^{(21)}}{dt} \\ \frac{da_{24}^{(21)}}{dt} \\ \frac{da_{34}^{(21)}}{dt} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Ai_{21} \sin \varphi_2 \\ -Ai_{21} \cos \varphi_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (24.26)$$

После преобразований, на основании (24.6), (22.9) и (24.26), получим

$$\begin{vmatrix} d_{14} \\ d_{24} \\ d_{34} \\ 0 \end{vmatrix} = M_{12} \begin{vmatrix} \frac{da_{14}^{(21)}}{dt} \\ \frac{da_{24}^{(21)}}{dt} \\ \frac{da_{34}^{(21)}}{dt} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Ai_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1 \\ -Ai_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1 \\ Ai_{21} \sin \gamma \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица

$$P_1^{(12)} = \begin{vmatrix} 0 & -(1 - i_{21} \cos \gamma) & -i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 & -Ai_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1 \\ 1 - i_{21} \cos \gamma & 0 & i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 & -Ai_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1 \\ i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 & -i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 & 0 & Ai_{21} \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.27)$$

Легко удостовериться, что матричное равенство

$$v_1^{(12)} = P_1^{(12)} r_1$$

приводит к ранее полученным выражениям (23.11).

Полезно отметить, что при матричном способе скорости относительного движения в целях упрощения выкладок лучше определить так. Сначала в системе S нужно найти столбцевые матрицы $v_0^{(10)} = P_0^{(10)} r_0$, $v_0^{(20)} = P_0^{(20)} r_0$, а затем определить

$$v_0^{(12)} = v_0^{(10)} - v_0^{(20)} = P_0^{(12)} r_0. \quad (24.28)$$

Опуская выводы, приведем выражение для $P_0^{(12)}$

$$P_0^{(12)} = \begin{vmatrix} 0 & -(1 - i_{21} \cos \gamma) & -i_{21} \sin \gamma & 0 \\ 1 - i_{21} \cos \gamma & 0 & 0 & -Ai_{21} \cos \gamma \\ i_{21} \sin \gamma & 0 & 0 & Ai_{21} \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.29)$$

Перейдем теперь к определению относительной скорости при передаче движения с двумя параметрами. Воспользуемся для этого следующими

формулами:

$$v_1^{(12, \varphi)} = P_1^{(12, \varphi)} r_1, \quad (24.30)$$

$$v_1^{(12, \psi)} = P_1^{(12, \psi)} r_1. \quad (24.31)$$

Матрицы $P_1^{(12, \psi)}$ ($\psi = \text{const}$) и $P_1^{(12, \varphi)}$ ($\varphi = \text{const}$) определяются в общем виде следующими выражениями:

$$P_1^{(12, \varphi)} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{z1}^{(\varphi)} & \omega_{y1}^{(\varphi)} & d_{14}^{(\varphi)} \\ \omega_{z1}^{(\varphi)} & 0 & -\omega_{x1}^{(\varphi)} & d_{24}^{(\varphi)} \\ -\omega_{y1}^{(\varphi)} & \omega_{x1}^{(\varphi)} & 0 & d_{34}^{(\varphi)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.32)$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} d_{14}^{(\varphi)} \\ d_{24}^{(\varphi)} \\ d_{34}^{(\varphi)} \\ 0 \end{vmatrix} = M_{12} \begin{vmatrix} \frac{\partial a_{14}^{(21)}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial a_{24}^{(21)}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial a_{34}^{(21)}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (24.33)$$

Верхний индекс (φ) в элементах матрицы указывает, что при составлении матрицы было принято $\psi = \text{const}$.

Аналогичным образом может быть составлена матрица $P_1^{(12, \psi)}$, элементы которой отличаются от элементов матриц (24.32) и (24.33) заменой φ на ψ в верхних индексах элементов, в частных производных $\frac{\partial a_{k4}^{(21)}}{\partial \varphi}$ ($k = 1, 2, 3$) и в производной $d\varphi/dt$.

В нашем случае матрица $P_1^{(12, \varphi)}$ совпадает с матрицей (24.27). Матрица

$$P_1^{(12, \psi)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin \gamma \sin \varphi_1 \frac{d\psi}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & \sin \gamma \cos \varphi_1 \frac{d\psi}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma \frac{d\psi}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.34)$$

Легко удостовериться, что найденные матричным способом скорости $v_1^{(12, \varphi)}$ и $v_1^{(12, \psi)}$ определяются зависимостями (23.11) и (23.13), полученными векторным способом.

§ 25. Ось относительного винтового движения, аксонды и начальные поверхности колес

1°. При передаче вращения между перекрещивающимися осями относительное движение звеньев, как известно из теоретической механики, является винтовым.

Найдем положение винтовой оси в неподвижной системе координат.

В § 23 было показано, что относительное движение определяется вектором $\omega_O^{(12)}$ и вектором-моментом — m_O , полученными в результате приведения скользящих векторов $\omega_O^{(1)}$ и $\omega_O^{(2)}$ к точке O .

Выбор точки приведения сказывается лишь на величине и направлении главного вектора-момента; величина же и направление вектора угловой скорости $\omega^{(12)}$ остаются неизменными. При определенной точке приведения можно добиться, что главный вектор и главный вектор-момент будут иметь одну линию действия, т. е. вращения звена 1 вокруг пересекающихся осей Oz и a — a можно будет свести к винтовому движению

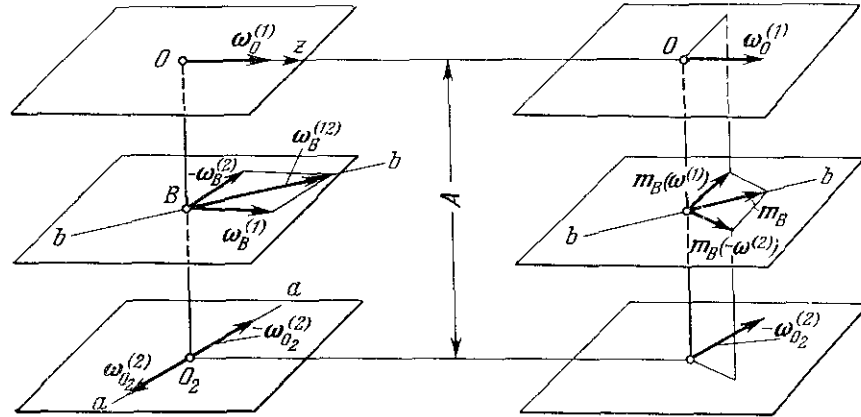


Рис. 50.

вокруг некоторой оси. Это можно уяснить из построений рис. 50, на котором $b-b$ — ось винтового движения с вектором угловой скорости $\omega_B^{(12)}$ и вектором-моментом

$$m_B = m_B(\omega^{(1)}) + m_B(-\omega^{(2)}).$$

Скорость относительного движения, представленного как винтовое движение, равна геометрической сумме скоростей вращательного движения вокруг винтовой оси и поступательного движения со скоростью m_B вдоль этой же оси.

Итак, мы имеем возможность определить скорость точек звена 1 двумя способами: а) используя главный вектор $\omega_O^{(12)}$ (с точкой приложения O) и вектор-момент m_O ; линейная скорость может быть в этом случае определена из уравнений (23.8); б) через винт с вектором угловой скорости $\omega_B^{(12)}$ (с точкой приложения B) и вектор-моментом m_B . Сопоставляя скорости, вычисляемые двумя такими способами, можно найти положение винтовой оси (оси мгновенного вращения-скольжения) в неподвижной системе координат.

Для точек винтовой оси $b-b$ (рис. 50) вектор скорости $v^{(12)}$ равен вектору поступательного движения вдоль оси винта, так как вектор скорости вращения вокруг винтовой оси в этих точках равен нулю. Поскольку векторы $v^{(12)}$ и m_B имеют одну линию действия, то в неподвижном пространстве в каждый момент времени должна существовать такая ось ($b-b$), все точки которой имеют скорости $v^{(12)}$, направленные параллельно вектору $\omega^{(12)}$, т. е. для точек этой оси должно соблюдаться, что

$$\omega^{(12)} \times v^{(12)} = 0.$$

В проекциях на координатные оси, используя уравнения (23.6) и (23.8), получим

$$\omega_y^{(12)} v_z^{(12)} - \omega_z^{(12)} v_y^{(12)} = -(i_{21} \sin \gamma)^2 (x + A) - (1 - i_{21} \cos \gamma) [(1 - i_{21} \cos \gamma) x - A i_{21} \cos \gamma] = 0, \quad (25.1)$$

$$\omega_z^{(12)} v_x^{(12)} - \omega_x^{(12)} v_z^{(12)} = -(1 - i_{21} \cos \gamma) [(i_{21} \sin \gamma) z + (1 - i_{21} \cos \gamma) y] = 0, \quad (25.2)$$

$$\omega_x^{(12)} v_y^{(12)} - \omega_y^{(12)} v_x^{(12)} = -i_{21} \sin \gamma [(i_{21} \sin \gamma) z + (1 - i_{21} \cos \gamma) y] = 0. \quad (25.3)$$

После преобразований, обозначая координаты точек искомой оси через X , Y , Z , получим

$$X = -A \frac{(i_{21} - \cos \gamma) i_{21}}{1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2}, \quad Y = -Z \frac{i_{21} \sin \gamma}{1 - i_{21} \cos \gamma}. \quad (25.4)$$

Уравнения (25.4) определяют в неподвижной системе координат положение оси мгновенного вращения-скольжения (винтовой оси), в точках которой линейные скорости $v^{(12)}$ точек звена 1 направлены параллельно вектору угловой скорости $\omega_B^{(12)}$. Напомним, что $v^{(12)}$ — скорости относительного движения точки звена 1 по отношению к точке звена 2.

Ось мгновенного вращения-скольжения в неподвижной системе координат лежит в плоскости, перпендикулярной оси x (линии кратчайшего межосевого расстояния). Для точек, принадлежащих этой оси, вектор скорости $v^{(12)}$ также лежит в плоскости, перпендикулярной оси x . Очевидно, что для этих точек $v_x^{(12)} = 0$, в чем можно удостовериться, если в уравнении (23.9) положить для $v_x^{(12)}$ $z = Z$, $y = Y$ и учесть связь между Z и Y согласно уравнению (25.4).

Для определения параметра винтового движения p_B , к которому сводится относительное движение звена 1, воспользуемся тем, что в точках, принадлежащих винтовой оси,

$$v^{(12)} = p_B \omega_B^{(12)}.$$

Следовательно,

$$p_B = \frac{v_y^{(12)}}{\omega_y^{(12)}} = \frac{v_z^{(12)}}{\omega_z^{(12)}}.$$

После преобразования получим

$$p_B = A \frac{i_{21} \sin \gamma}{1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2}. \quad (25.5)$$

Если направление вращения звена 2 противоположно указанному на рис. 48, в формулах (25.4) и (25.5) следует изменить знак перед i_{21} ; это приведет к изменению знака перед p_B , так как винт относительного движения станет винтом левого направления; изменение знака перед X укажет, что мгновенная ось вращения-скольжения пересекает ось x вне отрезка $O_1 O_2$ кратчайшего межосевого расстояния.

При передаче вращательного движения между параллельными осями в зависимостях (25.4) и (25.5) нужно положить $\gamma = 0$. В результате получим

$$X = -A \frac{i_{21}}{1 - i_{21}}, \quad Y = 0, \quad p_B = 0. \quad (25.6)$$

Это означает, что относительное движение сводится к вращательному движению вокруг оси, параллельной оси z .

В случае пересекающихся осей, приняв в зависимостях (25.4) и (25.5) $A = 0$, $\gamma = \delta$, где δ — угол между осями вращения, найдем параметры

мгновенной оси вращения, определяемые выражениями:

$$X = 0, \quad Y = -Z \frac{i_{21} \sin \delta}{1 - i_{21} \cos \delta}, \quad P_B = 0. \quad (25.7)$$

При внешнем зацеплении колес направление вращения колеса 2 противоположно принятому на рис. 48 и в выражениях (25.6) и (25.7) должен быть изменен знак перед i_{21} .

2°. Аксоиды звеньев 1 и 2 представляют два гиперboloида, каждый из которых образуется как геометрическое место мгновенных осей вращения-скольжения в подвижной системе координат, связанной с соответствующим звеном. При вращении колес аксоиды перекачиваются друг по другу вокруг оси (25.4) и скользят вдоль этой оси. Линия касания гиперboloидов в неподвижном пространстве является осью (25.4) винтового движения.

В параметрической форме ось винтового движения в системе S определяется следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= -r_0 = -A \frac{(i_{21} - \cos \gamma) i_{21}}{1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2}, \\ y &= -u \sin \beta, \\ z &= u \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (25.8)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{i_{21} \sin \gamma}{1 - i_{21} \cos \gamma} \quad (0 \leq \beta \leq \pi).$$

Здесь β — угол, образуемый винтовой осью с осью z , u — переменный параметр, определяющий положение точки на винтовой оси, r_0 — кратчайшее расстояние между винтовой осью и осью z (радиус горловины гиперboloида).

Для определения поверхности аксоида звена 1 нужно воспользоваться формулами связи (22.17) между системами координат S и S_1 . После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -r_0 \cos \varphi_1 - u \sin \beta \sin \varphi_1, \\ y_1 &= r_0 \sin \varphi_1 - u \sin \beta \cos \varphi_1, \\ z_1 &= u \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

Поверхность (25.9) является однополостным гиперboloидом вращения с осью z_1 . Осевое сечение гиперboloида, например сечение плоскостью $y_1 = 0$, представляет гиперболу, определяемую уравнением

$$\frac{x_1^2}{r_0^2} - \frac{z_1^2}{r_0^2 \operatorname{ctg}^2 \beta_1} = 1. \quad (25.10)$$

При $z_1 = 0$ $x_1 = \pm r_0$, где r_0 — радиус горловины.

Для определения поверхности аксоида звена 2 воспользуемся формулами связи (22.12) между системами координат S и S_2 . В результате получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (A - r_0) \cos \varphi_2 - u \sin (\beta + \gamma) \sin \varphi_2, \\ y_2 &= -(A - r_0) \sin \varphi_2 - u \sin (\beta + \gamma) \cos \varphi_2, \\ z_2 &= u \cos (\beta + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (25.11)$$

Поверхность (25.11) также является однополостным гиперboloидом вращения с осью z_2 ; радиус горловины этого гиперboloида равен $A - r_0$.

Легко удостовериться, что соответственно при $\gamma = 0$ и $A = 0$ аксоиды (25.9) и (25.11) являются круговыми цилиндрами и конусами.

3°. С каждой точкой неподвижного пространства S можно связать вектор скорости $\mathbf{v}^{(12)}$ относительного движения. Согласно уравнению (23.8) $\mathbf{v}^{(12)}$ является векторной функцией от радиуса-вектора $\mathbf{r}(x, y, z)$, определяющего положение точки в неподвижном пространстве. Следовательно, $\mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{v}^{(12)}(\mathbf{r})$ — векторное поле скоростей относительного движения. Такое векторное поле может быть представлено в виде семейства соосных цилиндров Q , на которых нанесены винтовые линии с параметром p_v , определяемым уравнением (25.5); осью цилиндров является ось винтового движения (25.4). Скорость относительного движения $\mathbf{v}^{(12)}$ является касательной к винтовой линии цилиндра Q ; винтовые линии цилиндров Q — векторные линии поля скоростей относительного движения.

В теории пространственных зацеплений используется понятие о так называемых начальных поверхностях. Этот термин не получил еще законченного обоснования и определения, что иногда является причиной различного истолкования этого понятия.

Начальными условимся называть поверхности H_1 и H_2 , жестко связанные с подвижными звеньями механизма и удовлетворяющие следующим требованиям: а) ось вращения начальной поверхности совпадает с осью вращения подвижного звена; б) поверхности H_1 и H_2 касаются друг друга в заданной точке P неподвижного пространства, а скорость относительного движения звеньев 1 и 2 в точке P направлена по общей касательной к винтовым линиям на поверхностях H_1 , H_2 и Q .

Второе требование, наложенное на начальные поверхности, определяет, по существу, лишь то, что они имеют в выбранной точке P общую нормаль, а вектор скорости относительного движения $\mathbf{v}^{(12)}$ принадлежит общей касательной плоскости к H_1 и H_2 . Это означает, что для H_1 и H_2 определено их строение вблизи точки P только до элементов первого порядка включительно. При $i_{12} = \text{const}$ за начальные поверхности вблизи могут быть выбраны любые поверхности вращения, если только: а) осью вращения H_i ($i = 1, 2$) является ось вращения i -го звена, б) общая касательная плоскость к H_1 и H_2 содержит $\mathbf{v}^{(12)}$.

Для аналитического определения H_1 и H_2 достаточно использовать следующие условия:

$$\mathbf{e}^{(i)} \mathbf{v}^{(12)} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (25.12)$$

$$[\mathbf{e}^{(i)}, \boldsymbol{\omega}^{(i)}, \mathbf{r}^{(i)}] = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (25.13)$$

где $\mathbf{r}^{(i)}$ — радиус-вектор, проведенный из точки P касания начальных поверхностей к произвольной точке линии действия вектора $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$.

Условие (25.12) определяет, что начальные поверхности H_1 и H_2 имеют в точке касания общую плоскость, содержащую $\mathbf{v}^{(12)}$; условие (25.13) определяет, что общий орг нормали к поверхностям H_1 и H_2 пересекает обе оси вращения; за H_1 и H_2 могут быть избраны поверхности вращения.

В теории зацеплений, не ограничиваясь рассмотрением малых кусков поверхностей H_1 и H_2 вблизи P , задают эти поверхности в целом, придавая им чаще всего форму цилиндров и конусов в зависимости от того, параллелен ли вектор $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ касательной плоскости или образует с ней некоторый угол. Такое толкование является возможным, но необязательным: за поверхности H_1 и H_2 можно избрать и другие поверхности вращения, лишь бы только эти поверхности имели в точке P общую касательную плоскость. Тем не менее, исходя из конструктивной формы зубчатых венцов, на практике удобно за начальные поверхности избирать именно

цилиндры (для червяков, цилиндрических колес), конусы (для конических и гипоидных колес).

Во избежание возможных недоразумений нужно сразу же отметить следующие положения: а) в общем случае не следует отождествлять начальные поверхности с аксоидами; такое отождествление возможно для передач с параллельными и пересекающимися осями, но недопустимо для передач с перекрещивающимися осями вращения; б) поверхности

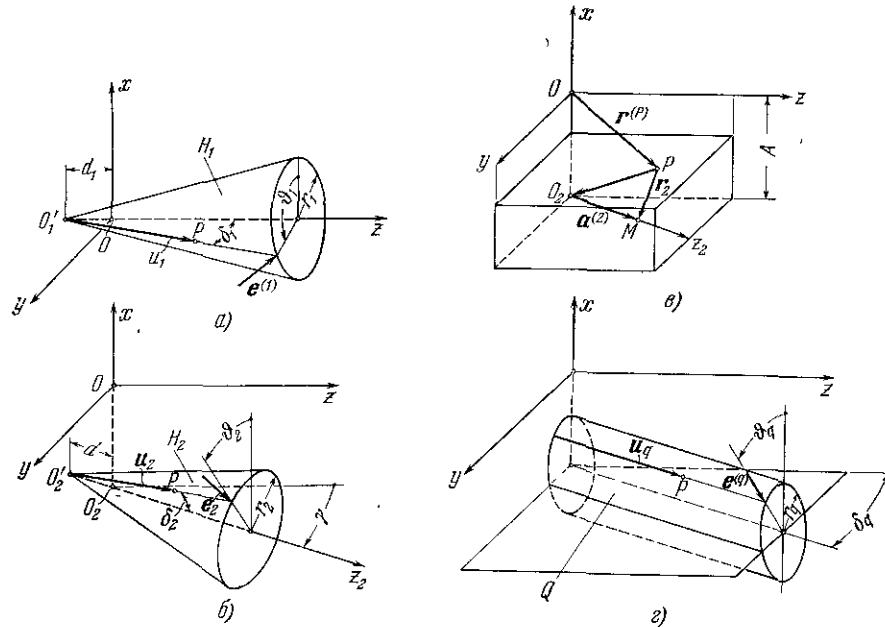


Рис. 51.

зубцов Σ_1 и Σ_2 не совпадают с начальными поверхностями. Хотя Σ_1 и Σ_2 также должны касаться друг друга в точке P , но орты нормалей $e^{(\Sigma_1)}$ и $e^{(H_1)}$ имеют различные направления. Однако общая касательная плоскость к поверхностям Σ_1 и Σ_2 в точке P , хотя и не совпадает с касательной плоскостью к H_1 и H_2 , также проходит через $v^{(12)}$; в) одновременное касание трех поверхностей: H_1 , H_2 и Q в точке P в ряде случаев является возможным, но необязательным.

При определении начальных поверхностей H_1 и H_2 мы будем в дальнейшем предполагать, что они являются круговыми конусами. Поверхность H_1 в виде кругового цилиндра получим как частный случай кругового конуса, приняв, что цилиндр и конус имеют в точке P один и тот же радиус $r^{(p)}$, но угол δ_i между образующей и осью конуса равен нулю в случае цилиндрической поверхности.

Предположим, что H_1 — круговой конус, осью которого является ось z вращения звена 1, а вершина смещена по отношению к началу координат O (рис. 51, а). Поверхность H_1 определяется уравнением

$$r^{(1)} = [u_1 \sin \delta_1 (\cos \vartheta_1 i + \sin \vartheta_1 j) + (u_1 \cos \delta_1 - d_1) k]. \quad (25.14)$$

Вектор нормали к поверхности (25.14) определяется уравнением (см. § 26)

$$n^{(1)} = \frac{\partial r^{(1)}}{\partial u_1} \times \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \vartheta_1}. \quad (25.15)$$

Орт нормали

$$e^{(1)} = -\cos \delta_1 (\cos \vartheta_1 i + \sin \vartheta_1 j - \operatorname{tg} \delta_1 k). \quad (25.16)$$

Начальный конус H_1 и цилиндр Q (рис. 50, *з*) имеют общую точку P ($r_{H_1}^{(p)} = r_Q^{(p)}$), но требование коллинеарности векторов нормалей к H_1 и Q в точке P , как уже указывалось выше, не является обязательным.

Учитывая, что $x^{(p)} = r_1 \cos \vartheta_1$, $y^{(p)} = r_1 \sin \vartheta_1$, где $r_1 = r^{(p)}$ — радиус окружности конуса в точке P (рис. 50, *а*), орт нормали представим следующим уравнением:

$$e^{(1)} = -\cos \delta_1 \left(\frac{x^{(p)}}{r^{(p)}} i + \frac{y^{(p)}}{r^{(p)}} j - \operatorname{tg} \delta_1 k \right). \quad (25.17)$$

В точке P согласно (25.12) $e^{(1)} v^{(12)} = 0$. Используя выражения (23.8) для $v^{(12)}$, после преобразований получим

$$\operatorname{tg} \delta_1 = -\frac{x^{(p)} z^{(p)} \sin \gamma + A y^{(p)} \cos \gamma}{r^{(p)} (x^{(p)} + A) \sin \gamma}, \quad (25.18)$$

где $r^{(p)} = \sqrt{[x^{(p)}]^2 + [y^{(p)}]^2}$.

Значение d_1 , определяющее смещение вершины конуса H_1 , определяется из уравнения

$$d_1 = r^{(p)} \operatorname{ctg} \delta_1 - z^{(p)}. \quad (25.19)$$

Скорость относительного движения $v^{(12)}$ направлена по касательной к винтовой линии на начальном конусе H_1 . Угол β_1 между образующей начального конуса H_1 и касательной к винтовой линии на этом конусе определим из уравнения

$$\cos \beta_1 = \frac{\tau^{(1)} v^{(12)}}{|v^{(12)}|}. \quad (25.20)$$

Здесь $\tau^{(1)}$ — единичный вектор, направленный по образующей конической поверхности (25.14)

$$\tau^{(1)} = \sin \delta_1 \cos \vartheta_1 i + \sin \delta_1 \sin \vartheta_1 j + \cos \delta_1 k.$$

После преобразований, учитывая, что $\cos \vartheta_1 = x^{(p)}/r^{(p)}$, $\sin \vartheta_1 = y^{(p)}/r^{(p)}$, получим

$$\cos \beta_1 = \frac{(x^{(p)} + A) i_{21} \sin \gamma}{\cos \delta_1 |v^{(12)}|}. \quad (25.21)$$

Перейдем теперь к определению параметров начального конуса H_2 , осью которого является ось вращения z_2 звена 2 (рис. 51, *б*). В системе S его поверхность определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= u_2 \sin \delta_2 \cos \vartheta_2 - A, \\ y^{(2)} &= u_2 (\sin \delta_2 \sin \vartheta_2 \cos \gamma + \cos \delta_2 \sin \gamma) - d_2 \sin \gamma, \\ z^{(2)} &= u_2 (-\sin \delta_2 \sin \vartheta_2 \sin \gamma + \cos \delta_2 \cos \gamma) - d_2 \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (25.22)$$

Орт нормали к поверхности (25.22) определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} e_x^{(2)} &= -\cos \delta_2 \cos \vartheta_2, \\ e_y^{(2)} &= \sin \delta_2 \sin \gamma - \cos \delta_2 \sin \vartheta_2 \cos \gamma, \\ e_z^{(2)} &= \sin \delta_2 \cos \gamma + \cos \delta_2 \sin \vartheta_2 \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (25.23)$$

На основании (25.23)

$$e_y^{(2)} \sin \gamma + e_z^{(2)} \cos \gamma = \sin \delta_2. \quad (25.24)$$

Так как в точке P конусы H_1 и H_2 касаются друг друга и $e^{(1)} = -e^{(2)}$, получим

$$\sin \delta_2 = -(e_y^{(1)} \sin \gamma + e_z^{(1)} \cos \gamma) = \frac{y^{(p)}}{r^{(p)}} \cos \delta_1 \sin \gamma - \sin \delta_1 \cos \gamma. \quad (25.25)$$

Радиус r_2 конуса H_2 в точке P определим как длину перпендикуляра, опущенного из точки P на ось z_2 (рис. 51, в).

Воспользуемся тем, что

$$|\overline{PO}_2 \times a^{(2)}| = |r_2 \times a^{(2)}| = r_2. \quad (25.26)$$

Здесь $a^{(2)} = \sin \gamma j + \cos \gamma k$ — единичный вектор оси z_2 ,

$$\overline{PO}_2 = \overline{O_1O}_2 - r^{(p)} = -(x^{(p)} + A) i - y^{(p)} j - z^{(p)} k.$$

После преобразований получим

$$r_2 = \sqrt{(x^{(p)} + A)^2 + (y^{(p)} \cos \gamma - z^{(p)} \sin \gamma)^2}. \quad (25.27)$$

Из построений рис. 50, б и в следует:

$$d_2 = O_2'M - O_2M = r_2 \operatorname{ctg} \delta_2 - \sqrt{(PO_2)^2 - r_2^2}.$$

Угол β_2 , составленный образующей конуса H_2 с направлением касательной к винтовой линии (с вектором $v^{(12)}$), определим, проделав такие же выводы, как при нахождении β_1 . При этом

$$\cos \beta_2 = \frac{\tau^{(2)} v^{(12)}}{|v^{(12)}|}. \quad (25.28)$$

Здесь

$$\tau^{(2)} = \sin \delta_2 \cos \vartheta_2 i + (\sin \delta_2 \sin \vartheta_2 \cos \gamma + \cos \delta_2 \sin \gamma) j + \\ + (-\sin \delta_2 \sin \vartheta_2 \sin \gamma + \cos \delta_2 \cos \gamma) k.$$

Для последующих преобразований отметим, что при $e^{(1)} = -e^{(2)}$

$$\tau^{(2)} = -\frac{1}{r^{(p)} \cos \delta_2} [x^{(p)} \cos \delta_1 \sin \delta_2 i + (y^{(p)} \cos \delta_1 \sin \delta_2 - r^{(p)} \sin \gamma) j - \\ - r^{(p)} (\cos \gamma + \sin \delta_1 \sin \delta_2) k]. \quad (25.29)$$

В результате получим

$$\cos \beta_2 = \frac{1}{|v^{(12)}| r^{(p)} \cos \delta_2} \cdot [x^{(p)} z^{(p)} i_{21} \sin \gamma \cos \delta_1 \sin \delta_2 + \\ + x^{(p)} r^{(p)} \sin \gamma (1 - i_{21} \cos \gamma) + A y^{(p)} i_{21} \cos \delta_1 \sin \delta_2 - A i_{21} r^{(p)} \sin \gamma \cos \gamma + \\ + (x^{(p)} + A) \cdot r^{(p)} i_{21} \sin \gamma (\cos \gamma + \sin \delta_1 \sin \delta_2)]. \quad (25.30)$$

Более простую зависимость для β_2 можно найти, если учесть, что единичные векторы $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ образуют угол $\nu = |\beta_1 \pm \beta_2|$. Верхний и нижний знаки соответствуют одноименному и разноименному направлениям винтовых линий. Для определения ν воспользуемся выражением

$$|\cos \nu = \tau^{(1)} \tau^{(2)} = -\frac{\sin^2 \delta_1 \cdot i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \cos \delta_2 \cos \delta_1}. \quad (25.31)$$

Если выдвинуть требование, что в точке P должны касаться друг друга не только H_1 и H_2 , но H_1 , H_2 и Q , это приводит, как будет показано ниже, к наложению связи между значениями $x^{(p)}$, $y^{(p)}$ и $z^{(p)}$.

Осью цилиндра Q является ось винтового движения (25.4). Поверхность цилиндра Q в системе S определяется уравнением (рис. 51, z)

$$\left. \begin{aligned} x^{(q)} &= r_q \cos \vartheta_q - A \frac{(i_{21} - \cos \gamma) i_{21}}{1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2}, \\ y^{(q)} &= r_q \sin \vartheta_q \cos \delta_q + u_q \sin \delta_q, \\ z^{(q)} &= -r_q \sin \vartheta_q \sin \delta_q + u_q \cos \delta_q, \end{aligned} \right\} \quad (25.32)$$

где

$$\operatorname{tg} \delta_q = - \frac{i_{21} \sin \gamma}{1 - i_{21} \cos \gamma}.$$

Орт нормали к поверхности (25.32)

$$e^{(q)} = \cos \vartheta_q i + \sin \vartheta_q \cos \delta_q j - \sin \vartheta_q \sin \delta_q k. \quad (25.33)$$

Так как цилиндр Q должен пройти через точку P , то $r^{(q)} = r^{(p)}$. С учетом этого на основании (25.32) и (25.33) после преобразований получим

$$\cos \vartheta_q = \frac{x^{(p)} + A \frac{(i_{21} - \cos \gamma) i_{21}}{1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2}}{r_q}, \quad (25.34)$$

$$\sin \vartheta_q = \frac{y^{(p)} \cos \delta_q - z^{(p)} \sin \delta_q}{r_q}. \quad (25.35)$$

В точке P касания начального конуса H_1 и цилиндра Q соблюдаются следующие уравнения:

$$r^{(1)} = r^{(q)} = r^{(p)}, \quad (25.36)$$

$$e^{(1)} = -e^{(q)}. \quad (25.37)$$

На основании (25.37), (25.33), (25.34), (25.35) и (25.17) получим следующее выражение для угла δ_1 начального конуса H_1 :

$$\operatorname{tg} \delta_1 = - \frac{i_{21} \sin \gamma}{1 - i_{21} \cos \gamma} \frac{y^{(p)}}{r^{(p)}} = - \frac{x^{(p)} z^{(p)} \sin \gamma + A y^{(p)} \cos \gamma}{r^{(p)} (x^{(p)} + A) \sin \gamma}, \quad (25.38)$$

где $r^{(p)} = \sqrt{[x^{(p)}]^2 + [y^{(p)}]^2}$.

Из трех координат $x^{(p)}$, $y^{(p)}$, $z^{(p)}$ точки P теперь уже независимыми являются только две, так как

$$y^{(p)} = \frac{x^{(p)} z^{(p)} \sin \gamma (1 - i_{21} \cos \gamma)}{x^{(p)} i_{21} \sin^2 \gamma + A (i_{21} - \cos \gamma)}. \quad (25.39)$$

Найдем соотношения между углами δ_1 и δ_2 начальных конусов для случая, когда в полюсе зацепления P касаются друг друга все три поверхности: H_1 , H_2 и Q . На основании зависимостей (25.25) и (25.38) получим, что

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = i_{21}.$$

При выполнении преобразований знак перед i_{21} в выражении (25.38) был изменен на обратный, поскольку вращение звена 2 совершается в направлении, противоположном принятому на рис. 45. Зависимость, связывающая δ_1 и δ_2 , совпадает с зависимостью для расчета углов аксоидов (начальных конусов) при передаче вращения между пересекающимися осями.

Все приведенные выше формулы для расчетов параметров начальных конусов значительно упрощаются для угла скрещивания осей $\gamma = 90^\circ$.

В формулах, содержащих i_{21} , знак перед i_{21} должен быть изменен на обратный для гипоидных, конических и цилиндрических колес внешнего зацепления, так как звено 2 в этих передачах совершает вращение, противоположное принятому на рис. 45.

Приведенные выше формулы легко распространить на случаи передачи вращения всеми видами зубчатых передач.

При координатах точки P $y^{(p)} = z^{(p)} = 0$ начальные поверхности представляют два скрещающихся цилиндра, касающихся друг друга в точке $x^{(p)} = -r^{(p)}$, где $r^{(p)}$ — радиус цилиндра H_1 . Такие цилиндры — начальные поверхности червячной передачи.

При $y^{(p)} = z^{(p)} = 0$ соблюдается уравнение (25.39), и это указывает на то, что в точке P одновременно касаются друг друга H_1 , H_2 и Q .

В случае пересекающихся осей ($A = 0$) и параллельных осей ($\gamma = 0$) точкой P касания начальных поверхностей H_1 и H_2 может явиться только такая точка, для которой $\mathbf{v}^{(12)} = 0$. С первого взгляда может создаться впечатление, что за точку P можно выбрать любую точку, принадлежащую плоскости осей вращения колес. Этим будет обеспечена возможность касания поверхностей H_1 и H_2 . Однако из анализа формул для β_1 и β_2 следует, что при этом должно быть соблюдено условие: $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$, если только P не принадлежит мгновенной оси вращения колес. В последнем случае окажется, что $\beta_1 = \beta_2$, но значения β могут быть произвольными. Так как значения $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$ неприемлемы по условиям передачи сил, единственно возможным вариантом является назначение точки P , принадлежащей мгновенной оси вращения колес ($\mathbf{v}^{(12)} = 0$). Следовательно, в случае параллельных и пересекающихся осей колес начальные поверхности совпадают с аксоидами колес.

Заметим также, что при скрещающихся осях, если назначить точкой P точку касания аксоидов (гиперболоидов вращения), все четыре поверхности — H_1 , H_2 и оба аксоида — будут касаться друг друга в P .

Иногда можно встретить указание на то, что начальные поверхности цилиндрических винтовых колес, цилиндрической червячной передачи, гипоидной передачи получаются из однополостных гиперболоидов вращения (аксоидов пространственной передачи с перекрещивающимися осями) в результате приближенной замены гиперболоидов вращения цилиндрическими или коническими поверхностями. Это является справедливым лишь в том частном случае, когда точка P касания начальных поверхностей принадлежит оси относительного винтового движения (25.4). В действительности при геометрическом расчете указанных передач точку P касания начальных поверхностей выбирают со значительным смещением по отношению к оси винтового движения.

Точка касания начальных поверхностей H_1 и H_2 явится точкой контакта поверхностей зубцов Σ_1 и Σ_2 только в том случае, если (см. § 30)

$$\mathbf{n}^{(\Sigma_i)} \mathbf{v}^{(12)} = 0, \quad (25.40)$$

где $\mathbf{n}^{(\Sigma_i)}$ — общая нормаль к поверхностям зубцов.

Представим некоторую плоскость Π , проведенную через точку P перпендикулярно $\mathbf{v}^{(12)}$. Очевидно, что если нормаль будет лежать в плоскости Π , условие (25.40) будет соблюдено и P станет точкой контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 .

Укажем еще один способ задания нормали $\mathbf{n}^{(\Sigma_i)}$. Так как вектор $\mathbf{v}^{(12)}$ должен принадлежать касательной плоскости к поверхностям Σ_1 и Σ_2 , для определения $\mathbf{n}^{(\Sigma_i)}$ достаточно задаться вектором $\mathbf{b}$, касательным

к какому-нибудь сечению поверхностей Σ_1 и Σ_2 . После этого вектор нормали $\mathbf{n}^{(\Sigma_i)}$ определится уравнением

$$\mathbf{n}^{(\Sigma_i)} = \mathbf{v}^{(12)} \times \mathbf{b}. \quad (25.41)$$

Определению начальных поверхностей в пространственных зацеплениях посвящены работы Saary [292], Baxter [267], К. М. Писманика [249], Ю. И. Шурыгина [264] и автора книги [182].

§ 26. Уравнения поверхности зубцов, касательной плоскости и нормали

Боковую поверхность зубцов наиболее целесообразно задавать в параметрической форме. Радиус-вектор текущей точки поверхности, проведенный из начала координат, определяется уравнением

$$\mathbf{r} = x(u, \vartheta) \mathbf{i} + y(u, \vartheta) \mathbf{j} + z(u, \vartheta) \mathbf{k}, \quad (26.1)$$

где u и ϑ — независимые параметры уравнения поверхности.

В дифференциальной геометрии [105, 227] доказывается, что для независимости параметров u и ϑ необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \neq 0. \quad (26.2)$$

Параметры u и ϑ являются криволинейными координатами поверхности.

Если один из параметров принять постоянным, положить, например, что $\vartheta = \vartheta_i$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, \vartheta_i)$ представит уравнение так называемой координатной линии на поверхности. Это

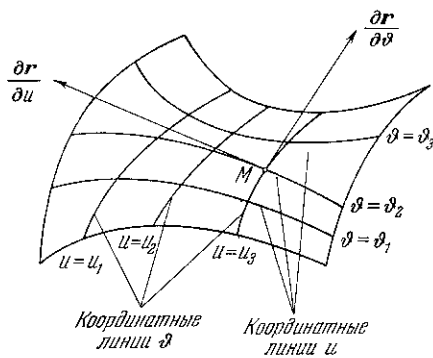


Рис. 52.

означает, что при фиксированном значении ϑ конец вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, \vartheta_i)$ при изменении параметра u будет перемещаться на поверхности по некоторой линии, называемой координатной линией u . Аналогичным образом, считая фиксированными значения параметра u и изменяя параметр ϑ , можно получить на поверхности другую координатную линию, ϑ (рис. 52).

Предполагается, что в рабочей части зубцов поверхность является непрерывной, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, \vartheta)$ является

непрерывной функцией аргументов u и ϑ ; через каждую точку M поверхности должны проходить две координатные линии: а) $u = \text{const}$, б) $\vartheta = \text{const}$, имеющие в этой точке две несовпадающие касательные.

Направления касательных к координатным линиям определяются как направления векторов $\partial \mathbf{r} / \partial u$ и $\partial \mathbf{r} / \partial \vartheta$.

Из дифференциальной геометрии известно, что точка поверхности является заведомо обыкновенной, если векторы $\partial \mathbf{r} / \partial u$ и $\partial \mathbf{r} / \partial \vartheta$ не коллинеарны и ни один из них не равен нулю. В обыкновенной точке поверхности должно соблюдаться неравенство (26.2). В особой точке поверхности это неравенство не соблюдается, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = 0. \quad (26.3)$$

Следует учесть, что точка, оказывающаяся особой при одной системе параметризации, может стать обыкновенной при другой системе параметризации [105]. Для окончательного определения характера точки требуется выполнить специальное исследование. В рабочей части поверхности зубцов должна состоять только из обыкновенных точек. Нормаль к поверхности и касательная плоскость являются определенными только в обыкновенной точке. Нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности в данной точке перпендикулярна плоскости, содержащей векторы $\partial \mathbf{r} / \partial u$, $\partial \mathbf{r} / \partial \vartheta$, следовательно,

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}. \quad (26.4)$$

В проекциях на оси координат

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{array} \right| = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ n_y &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \end{array} \right| = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ n_z &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{array} \right| = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (26.5)$$

Значения n_x , n_y , n_z пропорциональны косинусам углов, образуемых нормалью с координатными осями. Для получения самих косинусов углов α , β , γ , образуемых нормалью с осями координат, нужно воспользоваться выражениями:

$$\cos \alpha = k n_x, \quad \cos \beta = k n_y, \quad \cos \gamma = k n_z,$$

$$\text{где } k = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}.$$

Орт нормали к поверхности определяется уравнением

$$\mathbf{e} = k (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}). \quad (26.6)$$

Запишем теперь уравнение касательной плоскости в текущей точке поверхности. Обозначим через $\mathbf{R}$ радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости. Вектор $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ должен быть компланарен с векторами $\partial \mathbf{r} / \partial u$ и $\partial \mathbf{r} / \partial \vartheta$, и касательная плоскость выразится уравнением

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (26.7)$$

Это уравнение выражает условие, что вектор $(\mathbf{R} - \mathbf{r})$ лежит в касательной плоскости, проходящей через точку M поверхности ($\mathbf{r} = \overline{OM}$), и перпендикулярен вектору нормали $\mathbf{n}$ к поверхности в этой точке; вектор $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}$.

В прямоугольных координатах уравнение касательной плоскости запишем так:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = 0 \quad (26.8)$$

или

$$\begin{aligned} (X-x) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) + (Y-y) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \\ + (Z-z) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \\ = (X-x) n_x + (Y-y) n_y + (Z-z) n_z = 0. \end{aligned} \quad (26.9)$$

Напомним, что n_x , n_y , n_z — проекции вектора нормали на координатные оси, выражаемые уравнениями (26.5).

Уравнения нормали как прямой, проходящей через заданную точку $M(x, y, z)$ поверхности, имеют такой вид:

$$\frac{X-x}{\cos(n, x)} = \frac{Y-y}{\cos(n, y)} = \frac{Z-z}{\cos(n, z)},$$

где X , Y , Z — текущие координаты нормали, или

$$\frac{X-x}{n_x} = \frac{Y-y}{n_y} = \frac{Z-z}{n_z}.$$

В том случае, когда уравнение поверхности задано в неявной форме

$$F(x, y, z) = 0,$$

уравнение касательной плоскости

$$\frac{\partial F}{\partial x} (X-x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z} (Z-z) = 0, \quad (26.10)$$

а уравнение нормали записывается так:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (26.11)$$

Частные производные $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ пропорциональны направляющим косинусам нормали.

Для получения самих косинусов приведенные выше частные производные надо нормировать, используя зависимость

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2} = 1.$$

После этого косинусы углов нормали с осями координат определяются выражениями

$$\cos \alpha = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos \beta = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \delta = \lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Значения $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ и n_x , n_y , n_z связаны коэффициентом пропорциональности k/λ , т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial x} : n_x = \frac{\partial F}{\partial y} : n_y = \frac{\partial F}{\partial z} : n_z = \frac{k}{\lambda}. \quad (26.12)$$

§ 27. Уравнение геликоида

Под геликоидом понимается винтовая поверхность постоянного шага. Геликоид является одним из распространенных видов поверхностей, нашедших применение в зубчатых зацеплениях. Так, геликоидом является поверхность витков цилиндрического червяка червячной передачи, поверхность зубцов косозубых колес и т. д.

Геликоид может быть образован винтовым движением некоторой образующей кривой. Пусть в системе S_a задан торцовый профиль сечения геликоида плоскостью, перпендикулярной его оси, определяемый уравнением

$$r_a = r(0) \cos \theta i_a + r(0) \sin \theta j_a, \quad (27.1)$$

где $r = r(0)$ — уравнение полярной кривой, которой очерчен торцовый профиль.

Сообщим системе S_a винтовое движение вокруг оси z_a с винтовым параметром p (рис. 53). Напомним, что p — величина осевого перемещения

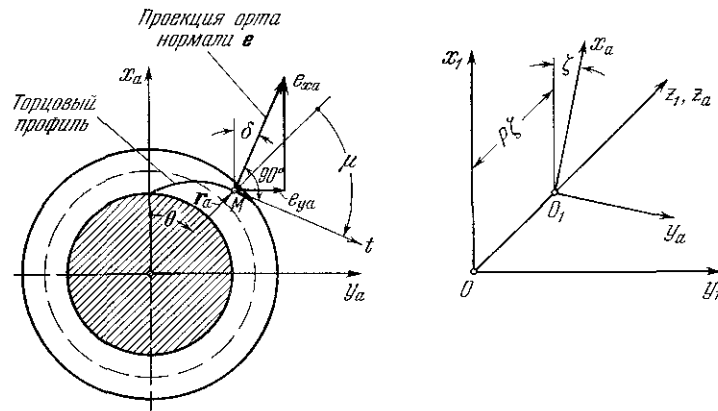


Рис. 53.

в винтовом движении при повороте на один радиан. Параметру p придается положительный или отрицательный знак в соответствии с тем, является винтовое движение правым или левым. На рис. 53 представлен случай правого винта.

Торцовый профиль при своем винтовом движении образует в системе S_1 поверхность геликоида, определяемую матричным равенством

$$r_1 = M_{1a} r_a, \quad (27.2)$$

где

$$M_{1a} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27.3)$$

На основании выражений (27.1) — (27.3) поверхность геликоида определяется уравнением

$$r_1 = r \cos(\theta + \zeta) i_1 + r \sin(\theta + \zeta) j_1 + p\zeta k_1, \quad (27.4)$$

где $r = r(0)$ — полярное уравнение торцового профиля.

На рис. 53 через μ обозначен угол между радиусом-вектором r торцового профиля и положительным направлением касательной Mt . Как уже указывалось в § 6,

$$\mu = \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \right).$$

Полезно отметить, что угол μ можно определить и другим путем, через проекции орта нормали к поверхности (27.4). Пусть эти проекции в системе S_a обозначены через e_{xa} и e_{ya} . Тогда

$$\mu = 90^\circ - \theta + \delta = 90^\circ - \theta + \operatorname{arctg} \left(\frac{e_{ya}}{e_{xa}} \right). \quad (27.5)$$

Найдем уравнение нормали к поверхности (27.4) геликоида

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \zeta}, \quad (27.6)$$

где θ и ζ — параметры поверхности геликоида. После преобразований получим

$$\mathbf{n}_1 = \frac{r}{\sin \mu} [p \sin(\theta + \zeta + \mu) \mathbf{i}_1 - p \cos(\theta + \zeta + \mu) \mathbf{j}_1 + r \cos \mu \mathbf{k}_1]. \quad (27.7)$$

Орт нормали определится уравнением

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}} [p \sin(\theta + \zeta + \mu) \mathbf{i}_1 - p \cos(\theta + \zeta + \mu) \mathbf{j}_1 + r \cos \mu \mathbf{k}_1]. \quad (27.8)$$

Важным свойством геликоида является то, что координаты его поверхности и проекции вектора (или орта) нормали удовлетворяют такому уравнению:

$$y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1} = p n_{z1}, \quad (27.9)$$

$$y_1 e_{x1} - x_1 e_{y1} = p e_{z1}. \quad (27.10)$$

В этом можно удостовериться, подставив в выражения (27.9) и (27.10) координаты поверхности (27.4) и проекции нормали (27.7) — орта нормали (27.8).

Непосредственный вывод уравнения (27.9) может быть выполнен на основании следующих соображений.

Координатными линиями геликоида (27.4) являются: а) торцовый профиль, выражаемый координатной линией θ ($\zeta = \text{const}$); б) винтовая линия — координатная линия ζ ($\theta = \text{const}$). При винтовом движении торцового профиля вектор скорости $\mathbf{v}_1$ точки этого профиля является касательной к винтовой линии, следовательно, вектор $\mathbf{v}_1$ должен находиться в касательной плоскости к поверхности геликоида. Из этого следует, что

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{v}_1 = 0. \quad (27.11)$$

При винтовом движении

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + p \boldsymbol{\omega}_1,$$

где $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{k}_1$, $\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1$, или

$$\mathbf{v}_1 = \omega_1 (-y_1 \mathbf{i}_1 + x_1 \mathbf{j}_1 + p \mathbf{k}_1). \quad (27.12)$$

На основании уравнений (27.11) и (27.12) получим

$$-n_{x1}y_1 + n_{y1}x_1 + pn_{z1} = 0,$$

что и является доказательством справедливости уравнения (27.9).

§ 28. Уравнения огибающей семейства поверхностей

В настоящем параграфе приводятся уравнения, используемые в дифференциальной геометрии для определения огибающих поверхностей. Боковые поверхности зубцов, участвующих в зацеплении, должны при передаче движения находиться в непрерывном взаимном касании; в относительном движении такие поверхности являются взаимоогibaемыми.

В зависимости от того, определяется относительное движение одним или двумя независимыми параметрами, нужно рассмотреть методы определения огибающей одно- или двухпараметрического семейства поверхностей.

Рассмотрим сначала, как определяется огибающая однопараметрического семейства поверхностей.

Пусть в системе координат x_1, y_1, z_1 задано уравнение боковой поверхности зубцов звена 1

$$F_1(x_1, y_1, z_1) = 0. \quad (28.1)$$

Мы ограничиваемся при этом обыкновенными точками поверхности, т. е. такими, где по крайней мере одна из частных производных $\partial F_1/\partial x_1$, $\partial F_1/\partial y_1$, $\partial F_1/\partial z_1$ не обращается в нуль. Как известно из дифференциальной геометрии, вблизи такой точки уравнение (28.1) можно записать в виде, разрешенном относительно одной координаты, например

$$z_1 = f(x_1, y_1). \quad (28.2)$$

Считая заданными схему механизма и закон движения звеньев, требуется найти: а) уравнение поверхности зубцов звена 2, б) уравнение характеристики — текущей линии касания поверхностей звеньев 1 и 2, в) поверхность зацепления как геометрическое место линий касания поверхностей в неподвижной системе координат.

Используя обычные методы дифференциальной геометрии, необходимо поступить следующим образом:

Записать боковую поверхность зубцов звена 1 в системе $S_2(x_2, y_2, z_2)$, связанной со звеном 2. Воспользуемся для этого формулами (22.10), согласно которым

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^*(x_2, y_2, z_2, i_{12}), \\ y_1 &= y_1(x_2, y_2, z_2, i_{12}), \\ z_1 &= z_1(x_2, y_2, z_2, i_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

Подставив выражения (28.3) в (28.1), после преобразований получим

$$F_2(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}) = 0. \quad (28.4)$$

Уравнение (28.4) выражает однопараметрическое семейство боковых поверхностей зубца звена 1 в системе S_2 ; параметром семейства является φ_1 — угол поворота звена 1.

Поверхность зубца звена 2 как огибающая однопараметрического семейства определится следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} F_2(x_2, y_2, z_2, \varphi, i_{12}) &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_1}(x_2, y_2, z_2, \varphi, i_{12}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

Уравнения (28.5) определяют боковую поверхность зубца звена 2 в параметрической форме с параметром φ_1 . При фиксированном значении параметра φ_1 уравнения (28.5) определяют контактную линию (линию касания) боковых поверхностей зубцов звеньев 1 и 2.

Из дифференциальной геометрии известно, что огибающая и огибаемая поверхности имеют в точках линии контакта общую касательную плоскость и общую нормаль.

Подставив в уравнения (28.5) формулы (22.7) связи между системами координат S_2 и S_1 , получим при фиксированном значении φ_1 уравнения линии контакта поверхностей в системе S_1 . Если же в уравнения (28.5) подставить формулы (22.12) связи между системами координат S_2 и S , получим уравнения линий контакта в системе S , т. е. уравнения поверхности зацепления.

Определим теперь уравнения огибающей однопараметрического семейства поверхностей, если огибаемая поверхность задана уравнением в двухпараметрической форме.

Пусть

$$r_1 = x_1(u_1, \vartheta_1) i_1 + y_1(u_1, \vartheta_1) j_1 + z_1(u_1, \vartheta_1) k_1 \quad (28.6)$$

— радиус-вектор поверхности зубцов звена 1; u_1 и ϑ_1 — параметры поверхности.

Используя матрицу M_{21} для перехода от S_1 к S_2 , радиус-вектор семейства поверхностей в системе S_2 определим уравнением

$$r_2 = x_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) i_2 + y_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) j_2 + z_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) k_2 = r_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_1), \quad (28.7)$$

где φ_1 — параметр семейства.

Матрица M_{21} определяется формулой, аналогичной (22.6). При фиксированном значении параметра φ_1 уравнения (28.7) определяют поверхность зубца звена 1 в системе S_2 , обозначаемую для краткости Σ_φ . Линия контакта на этой поверхности будет найдена, если определить зависимость между параметрами такого вида:

$$u_1 = u_1(\vartheta_1, \varphi_1). \quad (28.8)$$

Уравнения (28.7) и (28.8), рассмотренные совместно, определяют в системе S_2 семейство линий контакта взаимноогibaемых поверхностей, т. е. определяют огибающую E семейства поверхностей (28.7). Поверхность E определяется двумя независимыми параметрами ϑ_1 и φ_1 , если учесть, что третий параметр — u_1 — выражается через ϑ_1 и φ_1 уравнением (28.8).

Для определения уравнения (28.8) воспользуемся тем, что взаимноогibaемые поверхности Σ_φ и E имеют общую касательную плоскость. Касательная плоскость к E определяется векторами:

$$\frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial r_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta_1}, \quad (28.9)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial r_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1}. \quad (28.10)$$

Касательная плоскость Π к поверхности Σ_Φ , параметрами которой являются u_1 и ϑ_1 , определяется векторами $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \vartheta_1$ и $\partial \mathbf{r}_2 / \partial u_1$. Вектор (28.9) находится в плоскости Π ; для того же чтобы вектор (28.10) находился в плоскости Π , необходимо, чтобы векторы $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \vartheta_1$, $\partial \mathbf{r}_2 / \partial u_1$ и $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \Phi_1$ были бы компланарны и смешанное произведение этих векторов было бы равно нулю. Отсюда следует

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \Phi_1} \right] = 0. \quad (28.11)$$

Из уравнения (28.11) находится искомая зависимость (28.8).

Уравнение (28.11) можно представить в такой форме:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \Phi_1} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \vartheta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u_1} \right) = 0. \quad (28.12)$$

Если учесть, что вектор нормали к поверхности Σ_Φ

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \vartheta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u_1}, \quad (28.13)$$

а $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \Phi_1$ пропорционален вектору скорости перемещения в относительном движении, приходим к такому выражению:

$$\mathbf{n}_2 \mathbf{v}_2^{(12)} = \mathbf{n}_2 \mathbf{v}_2^{(21)} = 0. \quad (28.14)$$

Рассмотрим теперь случай передачи движения с двумя независимыми параметрами, когда поверхность зубца звена 2 является огибающей двухпараметрического семейства поверхностей зубца звена 1. Пусть, как и ранее, поверхность зубца звена 1 выражается уравнением (28.4) в координатной форме. Используя соответствующие формулы преобразования координат, семейство поверхностей в системе S_2 определим таким уравнением:

$$F_2(x_2, y_2, z_2, \varphi, \psi) = 0. \quad (28.15)$$

Здесь φ и ψ — независимые параметры движения; индексы при них для краткости записи опущены.

Из дифференциальной геометрии известно, что огибающая семейства поверхностей определится, если к уравнению (28.15) присоединить следующие два уравнения:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \psi} = 0. \quad (28.16)$$

При фиксированном значении одного из параметров движения, например ψ , координаты x_2, y_2, z_2 являются функциями от другого параметра и представляют координаты линии контакта $D^{(\varphi)}$ поверхностей зубцов звеньев 1 и 2. При фиксированном значении параметра φ координаты x_2, y_2, z_2 являются функциями от ψ и выражают линию контакта $D^{(\psi)}$ поверхностей. Каждую из взаимоогibaемых поверхностей можно покрыть сеткой из линий $D^{(\varphi)}$ и $D^{(\psi)}$. При одновременном изменении обоих параметров движения φ и ψ поверхности будут касаться друг друга в точке, являющейся точкой пересечения линий $D^{(\varphi)}$ и $D^{(\psi)}$. Такую точку контакта можно определить, фиксируя в уравнениях (28.15) и (28.16) параметры движения ψ и φ .

Определим теперь уравнение огибающей двухпараметрического семейства поверхностей, если поверхность зубца звена 1 выражается уравнением (28.6). Используя матрицу M_{21} , аналогичную матрице (22.19).

семейство поверхностей определим уравнением такого вида:

$$r_2 = r_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi), \quad (28.17)$$

где φ и ψ — независимые параметры движения.

Для определения огибающей E семейства (28.17) нужно найти u_1 и ϑ_1 в виде функций от φ и ψ :

$$u_1 = u_1(\varphi, \psi), \quad (28.18)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\varphi, \psi). \quad (28.19)$$

Пусть такие функции найдены и мы ищем касательную плоскость Π к огибающей E . Такая плоскость определится двумя векторами:

$$\frac{\partial r_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial r_2}{\partial \varphi}, \quad (28.20)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \psi} + \frac{\partial r_2}{\partial \psi}. \quad (28.21)$$

Поверхность зубца $\Sigma_{\varphi, \psi}$ звена 1 в системе S_2 определится уравнением (28.17), если параметрам φ и ψ придать фиксированные значения. Касательная плоскость к поверхности $\Sigma_{\varphi, \psi}$ определяется векторами $\partial r_2 / \partial u_1$ и $\partial r_2 / \partial \vartheta_1$. Для того чтобы поверхности E и $\Sigma_{\varphi, \psi}$ имели общую касательную плоскость, необходимо, чтобы векторы (28.20), (28.21), $\partial r_2 / \partial u_1$ и $\partial r_2 / \partial \vartheta_1$ находились в одной плоскости. Это требование будет выполнено, если будут соблюдены два следующих уравнения:

$$\left[\frac{\partial r_2}{\partial u_1}, \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad (28.22)$$

$$\left[\frac{\partial r_2}{\partial u_1}, \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \right] = 0. \quad (28.23)$$

Уравнения (28.22) и (28.23) можно истолковать следующим образом:

$$\frac{\partial r_2}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r_2}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} \right) = v_2^{(12, \varphi)} n_2 = v_2^{(21, \varphi)} n_2 = 0, \quad (28.24)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \psi} \left(\frac{\partial r_2}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1} \right) = v_2^{(12, \psi)} n_2 = v_2^{(21, \psi)} n_2 = 0. \quad (28.25)$$

В этих выражениях $v_2^{(12, \varphi)}$ и $v_2^{(21, \varphi)}$ — скорость движения звена 1 относительно звена 2 и звена 2 относительно звена 1 при фиксированном значении параметра движения ψ . Аналогично $v^{(12, \psi)}$ и $v^{(21, \psi)}$ — соответствующие скорости относительного движения звеньев при фиксированном значении параметра движения φ . Вектор нормали к поверхности $\Sigma_{\varphi, \psi}$ в системе S_2

$$n_2 = \frac{\partial r_2}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta_1}.$$

Следует учесть, что огибающая двухпараметрического семейства поверхностей является, вообще говоря, абстрагированной поверхностью по отношению к поверхности, воспроизводимой при существующих методах нарезания зубцов. Объясняется это тем, что два параметра относительного движения фактически не являются независимыми, так как кинематические цепи станка, используемые для передачи движений с обоими параметрами, связаны между собой.

Поясним это на примере нарезания прямозубых цилиндрических колес червячной фрезой. Относительное движение в рассматриваемом

случае определяется двумя параметрами: φ , выражающим повороты фрезы и колеса, и ψ , определяющим перемещение фрезы вдоль оси колеса. Параметр ψ задается, исходя из условий резания, и он определяет подачу инструмента. При каждом конкретном режиме резания ψ задается и воспроизводится на станке в виде функции от φ , так как кинематические цепи станка, управляющие вращением (параметром φ) и подачей (параметром ψ), связаны между собой. Исходя из этого, нарезаемую поверхность следовало бы при данном режиме резания определять как огибающую однопараметрического семейства поверхностей червячной фрезы, поскольку на параметры ψ и φ наложена связь. Однако, так как зависимость $\psi = \psi(\varphi)$ определяется режимом резания, который по технологическим соображениям может изменяться в широких пределах, нарезаемую поверхность целесообразно определять как огибающую двухпараметрического семейства инструментальных поверхностей, рассматривая ψ и φ как независимые параметры. Найденную таким образом абстрагированную поверхность можно мысленно воспроизвести на станке, если, не меняя настройки цепи вращения с параметром φ , многократно нарезать колесо при самых различных режимах подачи (при бесконечном множестве значений ψ). Найденная таким образом поверхность будет тем ближе к реальной, чем слабее связь между ψ и φ , т. е. чем меньше подача ψ по отношению к углу поворота φ .

§ 29. Метод Х. И. Гохмана определения линий контакта и огибающей поверхности

Работа Х. И. Гохмана [45] явилась основой аналитической теории пространственных зацеплений. Предложенный Х. И. Гохманом метод упростил определение огибающей поверхности и линий контакта взаимно-огибаемых поверхностей. Идеи Х. И. Гохмана были успешно применены и развиты Н. И. Колчиным [119] в его работе, посвященной расчету многих из современных видов пространственных зацеплений.

Пусть в системе координат x_1, y_1, z_1 задано уравнение боковой поверхности зубцов звена 1

$$F_1(x_1, y_1, z_1) = 0. \quad (29.1)$$

Требуется найти: а) уравнение сопряженной поверхности зубцов звена 2; б) поверхность зацепления как геометрическое место линий касания поверхностей зубцов в неподвижной системе координат.

Используя метод, принятый в дифференциальной геометрии, можно составить систему уравнений (28.5).

Главной особенностью метода Х. И. Гохмана является возможность определения линии контакта в системе, связанной с любым звеном передачи, и именно в той системе, где это может оказаться наиболее простым. Например, для определения контактной линии в системе координат x_1, y_1, z_1 уже не возникает необходимости предварительного перехода к системе x_2, y_2, z_2 , определения в этой системе координат уравнений (28.5) и обратного перехода затем к системе x_1, y_1, z_1 . Искомые уравнения контактной линии по Гохману записываются так:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, y_1, z_1) &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1} [x_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), y_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ &z_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12})] = 0. \end{aligned} \quad (29.2)$$

В этих уравнениях

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ y_1 &= y_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ z_1 &= z_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

— функции, выражаемые через формулы преобразования координат (22.10).

При таком способе определения контактной линии мы как бы считаем заданной поверхность зубцов ведомого звена $F_2(x_2, y_2, z_2) = 0$. При этом уравнение $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, где x_1, y_1, z_1 — функции, определяемые уравнениями (29.3), выражает семейство поверхностей с параметром φ_1 . Очевидно, что для нахождения огибающей такого семейства нужно уравнение семейства рассмотреть совместно с уравнением, полученным дифференцированием выражения $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, считая x_1, y_1, z_1 функциями от x_2, y_2, z_2 , выражаемыми через формулы преобразования координат.

Уравнения (29.2) будем записывать впредь в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, y_1, z_1) &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ y_1 &= y_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ z_1 &= z_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}). \end{aligned}$$

Выражения для частных производных $\partial x_1/\partial \varphi_1$, $\partial y_1/\partial \varphi_1$ и $\partial z_1/\partial \varphi_1$ содержат координаты x_2, y_2 и z_2 . Для того чтобы в выражениях для $\partial x_1/\partial \varphi_1$, $\partial y_1/\partial \varphi_1$ и $\partial z_1/\partial \varphi_1$ заменить x_2, y_2 и z_2 на x_1, y_1 и z_1 , нужно воспользоваться формулами преобразования координат (22.7), согласно которым

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2(x_1, y_1, z_1, \varphi_1, i_{12}), \\ y_2 &= y_2(x_1, y_1, z_1, \varphi_1, i_{12}), \\ z_2 &= z_2(x_1, y_1, z_1, \varphi_1, i_{12}). \end{aligned}$$

Применительно к случаю, когда поверхность зубцов звена 1 задана в параметрической форме, уравнения контактной линии на этой поверхности должны быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta), \\ n_{x1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + n_{y1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + n_{z1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

Переход от уравнения (29.4) к (29.5) основывается на том, что согласно уравнению (26.12)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} : n_{x1} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} : n_{y1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1} : n_{z1} = \frac{k}{\lambda}.$$

Найдем по изложенной методике уравнения контактной линии для зубчатой передачи с перекрещивающимися осями.

Используя уравнения (22.10), определим выражения частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} &= x_2(-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i_{21} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma + \\ &\quad + i_{21} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \gamma) + z_2 \cos \varphi_1 \sin \gamma - \\ &\quad - y_2(-\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i_{21} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \gamma + \\ &\quad + i_{21} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma) + A \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

На основании второго уравнения системы (22.10)

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = y_1 - i_{21} \cos \varphi_1 (x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2) + i_{21} \sin \varphi_1 \cos \gamma (x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2).$$

Используя выражения (22.7) для x_2 и y_2 , после преобразований получим

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = y_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) + z_1 i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 + A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1.$$

Применяя аналогичный путь вывода, получим

$$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = -x_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) - z_1 i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 + A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} = -i_{21} \sin \gamma (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A).$$

Уравнения (29.2) контактной линии после подстановки полученных выражений для $\partial x_1 / \partial \varphi_1$, $\partial y_1 / \partial \varphi_1$ и $\partial z_1 / \partial \varphi_1$ примут следующий вид:

$$F_1(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} [y_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) + z_1 i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 + A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1] + \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} [-x_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) - z_1 i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 + A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1] + \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} [-i_{21} \sin \gamma (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A)] = 0. \end{aligned} \quad (29.6)$$

В том случае, когда уравнения поверхности заданы в параметрической форме, контактная линия на поверхности определится выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta), \\ n_{x1} [y_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) + z_1 i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 + A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1] + \\ + n_{y1} [-x_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) - z_1 i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 + A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1] + \\ + n_{z1} [-i_{21} \sin \gamma (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.7)$$

Формулы (26.3) для n_{x1} , n_{y1} и n_{z1} были уже приведены ранее.

Выражая x_1 , y_1 , z_1 и n_{x1} , n_{y1} , n_{z1} через параметры u , ϑ поверхности, уравнения (29.7) после преобразований можно привести к зависимости

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \quad (29.8)$$

В результате для определения контактной линии на заданной поверхности нужно будет воспользоваться уравнениями:

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad x_1 = x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta). \quad (29.9)$$

Считая фиксированным значение угла поворота φ_1 звена 1, нужно, задаваясь рядом значений одного из параметров поверхности, например ϑ , определять из уравнения

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0$$

значения другого параметра (u). Используя значения ϑ и u , соответствующие фиксированному значению φ_1 , определяем из уравнений (29.9) координаты x_1 , y_1 , z_1 контактной линии.

Порядок определения поверхности зацепления, поверхности зубцов и их сечений будет изложен в следующем параграфе.

§ 30. Кинематический метод

А. Однопараметрическое огибание

Применение метода Х. И. Гохмана, как мы уже подчеркнули, упростило расчет зацеплений по сравнению с обычным методом дифференциальной геометрии. Тем не менее сам путь расчета оставался достаточно сложным, что побудило ряд исследователей, в первую очередь В. А. Шишкова [258, 260], а затем Я. С. Давыдова [55] и автора книги [167, 170], заняться поисками упрощений метода исследований зацеплений.

Общим, объединяющим признаком для работ указанных авторов явилось то, что при решении основных задач теории зацеплений они исходили из следующей теоремы пространственных зацеплений: *в точке M касания боковых поверхностей зубцов (точка M — обыкновенная для обеих поверхностей) вектор скорости относительного движения должен лежать в плоскости, касательной к сопрягающимся поверхностям*. Такое условие сопряженности вытекает из того, что в относительном движении колес поверхности зубцов как взаимно огибаемые поверхности могут лишь перекатываться и скользить друг по другу и вектор скорости относительного движения лежит в касательной плоскости к поверхностям.

Уравнения (29.4) контактной линии, полученные по методу Х. И. Гохмана, именно это условие сопряженности и выражают.

Действительно, частные производные $\partial x_1/\partial \varphi_1$, $\partial y_1/\partial \varphi_1$ и $\partial z_1/\partial \varphi_1$ мы находим дифференцированием по φ_1 зависимостей (22.10), выражающих x_1 , y_1 , z_1 как функции от x_2 , y_2 , z_2 , учитывая при этом, что $d\varphi_1/d\varphi_2 = i_{12}$. Очевидно, что вектор $d\mathbf{s}_1$ элементарного перемещения в относительном движении определится следующим выражением:

$$d\mathbf{s}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 \mathbf{j}_1 + \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 \mathbf{k}_1,$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{k}_1$ — орты координатных осей.

Напомним, что $\partial F_1/\partial x_1$, $\partial F_1/\partial y_1$, $\partial F_1/\partial z_1$ пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности. Выражение

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} = 0$$

в уравнениях (29.4) контактной линии есть не что иное, как скалярное произведение $\mathbf{n}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = 0$ в проекциях на прямоугольные оси координат.

Уравнение $\mathbf{n}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = 0$ выражает условие перпендикулярности векторов нормали $\mathbf{n}_1$ и элементарного перемещения $d\mathbf{s}_1$, т. е. сводится к требованию, что в точке M касания поверхностей зубцов вектор скорости относительного перемещения (движения) должен лежать в плоскости, касательной к поверхностям в точке M .

При непосредственном использовании основной теоремы пространственных зацеплений для определения контактной линии на поверхности зубцов звена 1 следует взять уравнения:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, \vartheta), \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{(12)} = 0. \quad (30.1)$$

Первое из этих уравнений выражает поверхность зубцов в виде вектор-функции двух скалярных параметров; второе уравнение, в котором $\mathbf{n}_1$ — вектор нормали, $\mathbf{v}_1^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения, выражает сформулированное выше условие сопряженности боковых поверхностей зубцов.

В координатной записи уравнения контактной линии выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), & y_1 &= y_1(u, \vartheta), & z_1 &= z_1(u, \vartheta), \\ n_{x1}v_{x1}^{(12)} + n_{y1}v_{y1}^{(12)} + n_{z1}v_{z1}^{(12)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

Выражения n_{x1} , n_{y1} , n_{z1} проекций нормали определяются из уравнений (26.5), приведенных выше, и зависят лишь от вида заданной поверхности зубцов. Вектор относительной скорости $v_1^{(12)}$ определяется расположением осей вращения звеньев и передаточным числом и, само собой разумеется, от вида боковой поверхности не зависит.

По методу Х. И. Голмана для определения выражений $\partial x_1/\partial \varphi_1$, $\partial y_1/\partial \varphi_1$ и $\partial z_1/\partial \varphi_1$, эквивалентных проекциям вектора элементарного перемещения, необходимо, как мы уже видели, воспользоваться довольно громоздкой и сложной процедурой:

а) Используя формулы связи между системами координат, сначала находим функции:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ y_1 &= y_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}), \\ z_1 &= z_1(x_2, y_2, z_2, \varphi_1, i_{12}). \end{aligned}$$

б) Затем находим выражения частных производных этих функций $\partial x_1/\partial \varphi_1$, $\partial y_1/\partial \varphi_1$, $\partial z_1/\partial \varphi_1$, которые содержат координаты x_2, y_2, z_2 .

в) Для замены x_2, y_2, z_2 на x_1, y_1, z_1 нужно воспользоваться функциями:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2(x_1, y_1, z_1, \varphi_1, i_{12}), \\ y_2 &= y_2(x_1, y_1, z_1, \varphi_1, i_{12}), \\ z_2 &= z_2(x_1, y_1, z_1, \varphi_1, i_{12}). \end{aligned}$$

По сути дела, все эти действия необходимы лишь для определения проекций вектора элементарного перемещения. В связи с этим возникает, естественно, такой вопрос: нельзя ли для определения вектора относительной скорости воспользоваться методами, обычно используемыми в кинематике?

Ответ на этот вопрос был дан положительный. Оказалось, что, исходя из кинематических соображений, методику исследования пространственных зацеплений можно существенно упростить. Методы такого вида, не совсем точно названные «кинематическими», были применены в различных модификациях В. А. Шишковым [258, 260], Я. С. Давыдовым [55] и автором книги [167].

Напишем, основываясь на кинематическом методе, в более подробном виде уравнения (29.4) контактной линии на боковой поверхности зубцов звена 1, если зубчатым зацеплением передается вращение между перекрещивающимися осями.

В § 23 проекции вектора $v_1^{(12)}$ скорости относительного движения в системе координат x_1, y_1, z_1 при $\omega_1 = 1 \text{ рад/сек}$ мы выразили уравнениями (23.11), согласно которым

$$\begin{aligned} v_{x1}^{(12)} &= -y_1(1 - i_{21} \cos \gamma) - z_1 i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1, \\ v_{y1}^{(12)} &= x_1(1 - i_{21} \cos \gamma) + z_1 i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1, \\ v_{z1}^{(12)} &= i_{21} \sin \gamma (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A). \end{aligned}$$

Используя эти выражения, уравнения (30.2) контактной линии запишем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta), \\ n_{x1} [-i_{21} z_1 \sin \gamma \cos \varphi_1 - y_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) - A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1] + \\ &+ n_{y1} [x_1 (1 - i_{21} \cos \gamma) + i_{21} z_1 \sin \gamma \sin \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1] + \\ &+ n_{z1} [(x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A) i_{21} \sin \gamma] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.3)$$

Содержащиеся в этих уравнениях выражения n_{x1} , n_{y1} , n_{z1} определяются так (см. (26.5)):

$$\begin{aligned} n_{x1} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}} = \frac{\partial y_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial u}, \\ n_{y1} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}} = \frac{\partial z_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u}, \\ n_{z1} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}} = \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial u}. \end{aligned}$$

Уравнения (30.3) после преобразований можно привести к зависимости $f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0$.

Уравнения контактной линии в системе координат x_1, y_1, z_1 запишем теперь так:

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad x_1 = x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta). \quad (30.4)$$

Порядок вычислений координат контактной линии был нами указан выше, в § 29.

Определим уравнения поверхности зацепления. Для этой цели запишем уравнения (30.4) контактной линии в неподвижной системе координат x, y, z , воспользовавшись формулами перехода (22.16). В векторной записи это будет выглядеть так:

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad r_1 = r_1(u, \vartheta), \quad r = M_{01} r_1. \quad (30.5)$$

В прямоугольных координатах уравнения поверхности зацепления определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} f_1(u, \vartheta, \varphi_1) &= 0, \quad x_1 = x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta), \\ x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \quad y = x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \quad z = z_1. \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

Уравнения (30.6) выражают поверхность зацепления как геометрическое место контактных линий в неподвижной системе координат. Для определения сечения поверхности зацепления какой-нибудь плоскостью, например $y = \text{const}$, найдем, исходя из выражений для y_1 и x_1 , уравнение

$$f_2(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \quad (30.7)$$

Рассматривая совместно уравнения

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad f_2(u, \vartheta, \varphi_1) = 0,$$

можно исключить один параметр, например φ_1 , и найти связь между параметрами u и ϑ . Далее, задаваясь одним из параметров поверхности, например ϑ , определим второй параметр (u), а затем, используя систему (30.6), вычислим координаты x и z . Аналогично находятся сечения поверхности зацепления плоскостями $z = \text{const}$, $x = \text{const}$.

Определим теперь уравнения боковой поверхности зубцов звена 2. В векторной форме эти уравнения выглядят так:

$$\begin{aligned} f_1(u, \vartheta, \varphi_1) &= 0, & \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(u, \vartheta), \\ r_2 &= M_{21}r_1. \end{aligned} \quad (30.8)$$

Матрица перехода M_{21} от S_1 к S_2 была представлена выражением (22.6).

В прямоугольных координатах уравнения поверхности зубцов звена 2 записываются так:

$$\left. \begin{aligned} f_1(u, \vartheta, \varphi_1) &= 0, & x_1 &= x_1(u, \vartheta), \\ y_1 &= y_1(u, \vartheta), & z_1 &= z_1(u, \vartheta), \\ x_2 &= x_1(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma) - \\ &\quad - y_1(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma) - z_1 \sin \varphi_2 \sin \gamma + A \cos \varphi_2, \\ y_2 &= x_1(-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \gamma) + \\ &\quad + y_1(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \gamma) - z_1 \cos \varphi_2 \sin \gamma - A \sin \varphi_2, \\ z_2 &= x_1 \sin \gamma \sin \varphi_1 + y_1 \sin \gamma \cos \varphi_1 + z_1 \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (30.9)$$

Эти уравнения выражают геометрическое место контактных линий в системе координат, связанной с звеном 2. Для сечения поверхности зубцов какой-нибудь плоскостью, например $y_2 = \text{const}$, нужно найти, используя выражение y_2 , связь между параметрами u , ϑ и φ_1 в виде

$$f_3(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \quad (30.10)$$

Систему уравнений

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad f_3(u, \vartheta, \varphi_1) = 0 \quad (30.11)$$

можно свести к одному уравнению связи между параметрами u и ϑ . Далее, задаваясь одним из параметров, например u , находим второй параметр ϑ , а затем, используя систему (30.9), вычисляем координаты сечения поверхности зубцов второго звена.

Материалы, приведенные в настоящем параграфе, достаточно полно характеризуют сущность кинематического метода и позволяют выполнить подробное исследование пространственного зацепления.

Изложенную методику исследования легко распространить, как это будет показано ниже, и на другие случаи пространственных зацеплений.

Для пространственных зацеплений некоторых видов вывод расчетных зависимостей (по сравнению со случаем передачи вращения между перекрешивающимися осями) упрощается благодаря использованию свойств осей зацепления (см. § 31).

Приведенные в настоящем параграфе уравнения контактной линии на поверхности звена 1 упрощаются, если поверхностью зубцов этого звена является геликоид. Такой вид имеют поверхности цилиндрических червяков червячных передач (гл. IX—XI), фрезы Клингелльберга для нарезания конических колес и поверхность инструмента в случае нарезания цилиндрико-конических колес косозубым долбяком [55].

В § 27 для случая геликоида мы получили соотношение (27.9)

$$\frac{n_{x1}y_1 - n_{y1}x_1}{n_{z1}} = p.$$

С учетом этого, выражения (30.3) контактной линии можно представить в такой упрощенной форме:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta), \\ n_{x1} &(-z_1 i_{21} \sin \gamma \cos \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \sin \varphi_1) + \\ &+ n_{y1}(z_1 i_{21} \sin \gamma \sin \varphi_1 - A i_{21} \cos \gamma \cos \varphi_1) + \\ &+ n_{z1}[i_{21} \sin \gamma (x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A) - p(1 - i_{21} \cos \gamma)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.12)$$

В дальнейшем путь расчета зацепления остается неизменным.

Следует также заметить, что в ряде случаев целесообразно расчет зацепления начинать с определения контактной линии в неподвижной системе координат x, y, z , а не в системе координат x_1, y_1, z_1 , как это излагалось в настоящем параграфе.

Контактная линия определится при этом выражениями:

$$r = M_{01}r_1, \quad n \cdot v^{(12)} = 0, \quad (30.13)$$

где n — вектор нормали, $v^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения в неподвижной системе координат.

В прямоугольных координатах контактная линия определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta), \\ x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \quad y = x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \quad z = z_1, \\ n_x v_x^{(12)} + n_y v_y^{(12)} + n_z v_z^{(12)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.14)$$

Проекция скорости $v^{(12)}$ были ранее представлены уравнениями (23.8)

$$\left. \begin{aligned} v_x^{(12)} &= -y(1 - i_{21} \cos \gamma) - z i_{21} \sin \gamma, \\ v_y^{(12)} &= x(1 - i_{21} \cos \gamma) - A i_{21} \cos \gamma, \\ v_z^{(12)} &= (x + A) i_{21} \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (30.15)$$

Связь между проекциями векторов нормали в системах координат x_1, y_1, z_1 и x, y, z определяется уравнением

$$n = L_{01}n_1,$$

или

$$\left. \begin{aligned} n_x &= n_{x1} \cos \varphi_1 - n_{y1} \sin \varphi_1, \\ n_y &= n_{x1} \sin \varphi_1 + n_{y1} \cos \varphi_1, \\ n_z &= n_{z1}. \end{aligned} \right\} \quad (30.16)$$

С учетом приведенных выражений уравнения контактной линии запишем так:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, \vartheta, \varphi_1), \quad y = y(u, \vartheta, \varphi_1), \quad z = z(u, \vartheta), \\ n_x &[-y(1 - i_{21} \cos \gamma) - z i_{21} \sin \gamma] + n_y [x(1 - i_{21} \cos \gamma) - A i_{21} \cos \gamma] + \\ &+ n_z [(x + A) i_{21} \sin \gamma] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.17)$$

Систему (30.17) можно свести к зависимости между параметрами u, ϑ и φ_1

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0.$$

После этого для определения поверхности зацепления нужно воспользоваться такими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} f_1(u, \vartheta, \varphi_1) &= 0, & x &= x(u, \vartheta, \varphi_1), \\ y &= y(u, \vartheta, \varphi_1), & z &= z(u, \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (30.18)$$

Для определения поверхности зубцов звена 2 нужно воспользоваться уравнениями:

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad r_2 = M_{21}r_1. \quad (30.19)$$

Матрица M_{21} была представлена ранее уравнением (22.6).

Для определения контактной линии на поверхности зубцов звена 1 нужно воспользоваться уравнениями:

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad r_1 = r_1(u, \vartheta). \quad (30.20)$$

Применительно к случаю, когда поверхность зубцов звена 1 является геликоидом, на основании уравнений (27.9) и (30.16) можно установить следующее:

$$n_x y - n_y x - n_{x1} y_1 - n_{y1} x_1 = p n_z. \quad (30.21)$$

С учетом этого, уравнения (30.17) контактной линии запишем так:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, \vartheta, \varphi_1), & y &= y(u, \vartheta, \varphi_1), & z &= z(u, \vartheta), \\ &- n_x z i_{21} \sin \gamma - n_y A i_{21} \cos \gamma + \\ &+ n_z [(x + A) i_{21} \sin \gamma - p (1 - i_{21} \cos \gamma)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.22)$$

В. Двухпараметрическое огибание

Н. Н. Крылов [140] и М. Л. Ерихов [77-82] применили кинематический метод для определения точек контакта и линии зацепления при двухпараметрическом огибании поверхностей, когда относительное движение звеньев определяется двумя независимыми параметрами φ и ψ .

В § 28 было показано, что в точке контакта поверхностей при двухпараметрическом огибании соблюдаются уравнения (28.24) и (28.25), согласно которым

$$\mathbf{v}_2^{(21, \varphi)} \mathbf{n}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_2^{(21, \psi)} \mathbf{n}_2 = 0.$$

Это означает, что в точке контакта поверхностей скорости относительного движения $\mathbf{v}^{(21, \varphi)}$ ($\psi = \text{const}$) и $\mathbf{v}^{(21, \psi)}$ ($\varphi = \text{const}$) принадлежат касательной плоскости к поверхностям, проведенной в точке контакта.

Уравнения (28.24) и (28.25) остаются справедливыми, если вектор нормали и векторы скоростей относительного движения рассматривать не в системе S_2 , но в системе S_1 , связанной с звеном 1, или в системе S , связанной со стойкой. Поэтому

$$\mathbf{n}_i \mathbf{v}_i^{(12, \varphi)} = \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i^{(21, \varphi)} = 0, \quad (30.23)$$

$$\mathbf{n}_i \mathbf{v}_i^{(12, \psi)} = \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i^{(21, \psi)} = 0, \quad (30.24)$$

где $i = 1, 0, 2$.

Приведем в развернутом виде уравнения для определения точек контакта взаимоогибаемых поверхностей при двухпараметрическом огибании. Пусть поверхность звена 1 задана уравнением

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u_1, \vartheta_1).$$

Если зацепление рассматривается в системе S_1 , точки контакта определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_1(u_1, \vartheta_1), \\ n_1 v_1^{(12, \varphi)} &= 0, \\ n_1 v_1^{(12, \psi)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.25)$$

Выразив в уравнении (30.25) n_1 через параметры поверхности u_1, ϑ_1 , а $v_1^{(12, \varphi)}$ и $v_1^{(12, \psi)}$ через u_1, ϑ_1 и параметры движения φ и ψ , получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_1(u_1, \vartheta_1), \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0, \\ f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.26)$$

Уравнения (30.26) позволяют найти положение точки контакта на поверхности Σ_1 при фиксированных значениях параметров движения φ и ψ . Если один из этих параметров зафиксировать, а другой параметр считать переменным, уравнения (30.26) определяют на поверхности Σ_1 линию контакта. Поверхность зацепления определится как совокупность точек контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 в неподвижной системе координат S . Уравнения поверхности зацепления таковы:

$$\left. \begin{aligned} r &= M_{01} r_1, \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0, \\ f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.27)$$

Матрица перехода M_{01} от S_1 к S_0 содержит оба параметра движения (φ и ψ).

Поверхность Σ_2 , огибающая заданную поверхность Σ_1 в относительном двухпараметрическом движении, определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= M_{21} r_1, \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0, \\ f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.28)$$

Сечения поверхности зацепления и поверхности Σ_2 определяются так же, как и в случае однопараметрического огибания.

§ 31. Оси зацепления

Кинематический метод расчета имеет общий характер и может быть применен для анализа различных видов зацеплений. Хотя в ряде случаев, например при исследовании червячного глобоидного зацепления, этот метод является самым эффективным, при расчете некоторых видов зацеплений можно добиться еще больших упрощений, используя наличие в передачах так называемых осей зацепления. Условимся называть осью зацепления особым образом расположенную прямую линию, через которую проходят нормали во всех точках линии мгновенного контакта взаимно-огибаемых поверхностей. Ниже будет показано, что в передачах с параллельными и пересекающимися осями ось зацепления находится в плоскости, проведенной через оси вращения. В передаче с перекрещивающимися осями ось зацепления пересекает линию кратчайшего расстояния между осями и перекрещивается с осями вращения.

А. Передачи с параллельными и пересекающимися осями

Относительное движение звеньев в механизме, предназначенном для передачи вращения между параллельными и пересекающимися осями, представляет вращение вокруг мгновенной оси — линии касания аксоидов (см. § 25). Докажем, что мгновенная ось вращения одновременно является осью зацепления.

В точке M касания поверхностей зубцов согласно уравнению зацепления

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(12)} = 0, \quad (31.1)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор общей нормали к поверхностям, $\mathbf{v}^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения. Но

$$\mathbf{v}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{r}. \quad (31.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ — вектор угловой скорости относительного движения, линией действия которого является мгновенная ось вращения L ; $\mathbf{r}$ — радиус зацепления, соединяющий точку контакта с осью L .

На основании уравнений (31.1) и (31.2)

$$\mathbf{n} (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{r}) = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}^{(12)}, \mathbf{r}] = 0. \quad (31.3)$$

Поскольку смешанное скалярно-векторное произведение векторов $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ и $\mathbf{r}$ равно нулю, это означает, что указанные три вектора лежат в одной плоскости и вектор нормали $\mathbf{n}$ пересекает вектор $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$, а следовательно, и ось мгновенного вращения L . Это и является доказательством, что L — ось зацепления. Такое утверждение остается в силе вне зависимости от формы зубцов колес, — являются ли эти зубцы прямыми, косыми или винтовыми.

Построения, изображенные на рис. 54, являются геометрической иллюстрацией приведенного доказательства. Плоскость Π_1 , является касательной плоскостью к поверхностям зубцов в точке их касания M . Вектор скорости $\mathbf{v}^{(12)}$ лежит в плоскости Π_1 , а вектор $\mathbf{n}$ — перпендикулярен плоскости Π_1 , следовательно, он перпендикулярен и вектору $\mathbf{v}^{(12)}$.

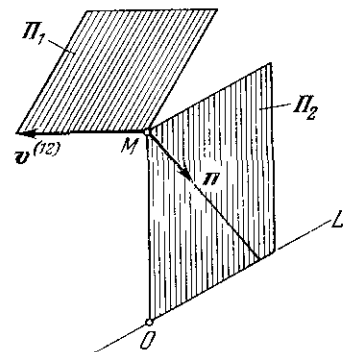


Рис. 54.

Плоскость Π_2 проведена через радиус вращения $\mathbf{r} = \overline{OM}$ и ось мгновенного вращения L . Вектор скорости $\mathbf{v}^{(12)}$ перпендикулярен плоскости Π_2 , а вектор нормали $\mathbf{n}$ находится в плоскости Π_2 и пересекает ось L .

Нужно иметь в виду, что при передаче вращения с переменным передаточным отношением ось мгновенного вращения перемещается относительно стойки, и ее положение в системе координат S стойки является функцией от угла поворота.

В. Передачи с перекрещивающимися осями

Докажем предварительно такую теорему: для того чтобы какая-либо точка поверхности зубцов явилась контактной точкой, необходимо, чтобы нормаль, проведенная в рассматриваемой точке поверхности, пересекала пару сопряженных осей составляющих вращений. Сопряженные оси (оси

составляющих вращений) находятся из условия, что относительное винтовое движение звеньев передачи раскладывается на составляющие вращения вокруг пары сопряженных осей.

В § 25 было показано, что относительное движение звеньев передачи, вращающихся вокруг перекрещивающихся осей с угловыми скоростями $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, является винтовым. Определение винта относительного движения через заданные скользящие векторы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ имеет единственное решение. Обратная задача — разложение винта относительного движения на составляющие вращения вокруг перекрещивающихся осей — имеет бесчисленное множество решений, т. е. можно подобрать бесчисленное множество пар осей, вращения вокруг которых сводятся к одному и тому же винту относительного движения. Из бесчисленного множества осей составляющих вращений можно выбрать такие пары осей, которые пересекаются нормалью в точке M поверхности зубца в том положении звеньев, когда M станет контактной точкой. Ниже будет показано, что из четырех координат, определяющих оси составляющих вращений, одна из координат может быть задана произвольно, а три другие определяются расчетом.

Следует четко различать понятия осей составляющих вращений и осей зацепления. Если MN — мгновенная линия контакта двух поверхностей, то для каждой точки линии MN может существовать своя пара осей составляющих вращений. Осями же зацепления может явиться лишь пара таких осей составляющих вращений, которые пересекаются нормалью к поверхностям во всех точках мгновенной линии контакта MN . Иными словами, координаты осей зацепления (в отличие от координат осей составляющих вращений) не зависят от выбора текущей точки на мгновенной линии контакта.

Пусть точке контакта M поверхностей соответствует пара осей составляющих вращения $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$, и вектор скорости относительного движения определяется уравнением

$$v^{(12)} = v^{(I)} + v^{(II)} = \omega^{(I)} \times r^{(I)} + \omega^{(II)} \times r^{(II)}, \quad (31.4)$$

где $\omega^{(i)}$ и $r^{(i)}$ — угловая скорость и радиус вращения точки M вокруг оси $L^{(i)}$ ($i = I, II$).

Согласно основной теореме зацепления

$$nv^{(12)} = 0.$$

Следовательно,

$$n(v^{(I)} + v^{(II)}) = 0, \quad (31.5)$$

или

$$nv^{(I)} = -nv^{(II)}. \quad (31.6)$$

Выберем одну из осей составляющих вращений, например $L^{(I)}$, так, чтобы вектор $v^{(I)}$ принадлежал плоскости, касательной к поверхностям зубцов в точке M . Тогда $nv^{(I)} = 0$. Из уравнения (31.6) следует, что и $nv^{(II)} = 0$, т. е. если вектор $v^{(I)}$ принадлежит касательной плоскости, этой же плоскости принадлежит и вектор $v^{(II)}$. Легко показать, что если при выборе одной из осей составляющих вращений (например, $L^{(I)}$) вектор $v^{(I)}$ задать принадлежащим касательной плоскости, то нормаль в точке M пересечет обе оси составляющих вращений.

Действительно, если

$$nv^{(I)} = 0,$$

то

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}^{(I)} \times \mathbf{r}^{(I)}) = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}^{(I)}, \mathbf{r}^{(I)}] = 0. \quad (31.7)$$

Одновременно согласно (31.6)

$$\mathbf{n}\mathbf{v}^{(II)} = 0$$

и

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}^{(II)} \times \mathbf{r}^{(II)}) = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}^{(II)}, \mathbf{r}^{(II)}] = 0. \quad (31.8)$$

Уравнения (31.7) и (31.8) определяют компланарность каждой тройки векторов: $\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}^{(i)}, \mathbf{r}^{(i)}$ ($i = I, II$), определяют, следовательно, что вектор нормали $\mathbf{n}$ пересекает оси составляющих вращений $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$, по которым направлены векторы угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}^{(I)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(II)}$ составляющих вращений.

Построения, приведенные на рис. 55, являются геометрической иллюстрацией приведенной теоремы. Точка M — точка контакта поверхностей, Π — касательная плоскость к поверхностям в точке M . Нормаль $\mathbf{n}$ к поверхностям пересекает в точках O_I и O_{II} оси составляющих вращений $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$. Векторы $\mathbf{v}^{(I)}$ и $\mathbf{v}^{(II)}$ скоростей составляющих вращений и векторы скорости относительного движения $\mathbf{v}^{(12)}$ принадлежат касательной плоскости Π . Π_1 и Π_2 — параллельные плоскости, в которых находятся соответственно оси составляющих вращений $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$. Заметим, что если в частном случае оси $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$ совпадут с осями вращения колес, то $\mathbf{v}^{(I)} = \mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(II)} = -\mathbf{v}^{(2)}$, где $\mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(2)}$ — окружные скорости колес в точке M . Тогда согласно (23.4) $\mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}$.

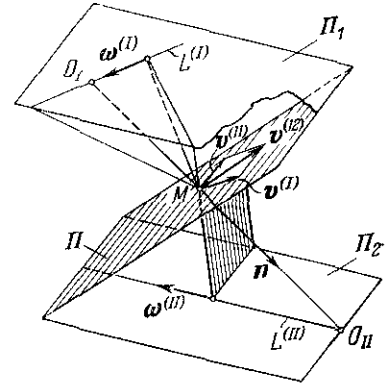


Рис. 55.

Перейдем теперь к выводу уравнений для определения координат осей $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$ составляющих вращений. Так как эти оси находятся в плоскостях, перпендикулярных линии кратчайшего межосевого расстояния x , и пересекают ось x , в качестве координат осей $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$ можно выбрать $X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)}$, где $(X^{(i)}, O, O)$ — координаты точки пересечения $L^{(i)}$ с осью x , а $X^{(i)}, Y^{(i)}$ и $Z^{(i)}$ определяют положение текущей точки оси $L^{(i)}$ ($i = I, II$). Одновременно $Y^{(i)}$ и $Z^{(i)}$ — проекции отрезка оси $L^{(i)}$ на плоскость $x = X^{(i)}$. Введем обозначение

$$K^{(i)} = \frac{Z^{(i)}}{Y^{(i)}}. \quad (31.9)$$

Тогда $X^{(i)}$ и $K^{(i)}$ ($i = I, II$) — координаты оси составляющего вращения; $X^{(i)}$ определяет плоскость, в которой находится ось $L^{(i)}$, а $K^{(i)}$ определяется направлением $L^{(i)}$ в этой плоскости.

Отметим, что вектор $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ направлен по оси $L^{(i)}$ и

$$K^{(i)} = \frac{\omega_z^{(i)}}{\omega_y^{(i)}} \quad (i = 1, 2). \quad (31.10)$$

В уравнения (31.7) и (31.8) входят векторы:

$$\omega^{(i)} = \omega_y^{(i)} (j + K^{(i)} k) \quad (i = I, II), \quad (31.11)$$

$$r^{(i)} = (x - X^{(i)}) i + y j + z k \quad (i = I, II), \quad (31.12)$$

где x, y, z — координаты точки поверхности, в которой проведена нормаль.

Используя (31.7), (31.8), (31.11) и (31.12), получим

$$X^{(i)} = \frac{K^{(i)} (x n_y - y n_x) - x n_z + z n_x}{K^{(i)} n_y - n_z} \quad (i = I, II). \quad (31.13)$$

Заметим, что выражение (31.13) можно было бы получить и другим способом, составив уравнение нормали, пересекающей ось $L^{(i)}$:

$$\frac{X^{(i)} - x}{n_x} = \frac{Y^{(i)} - y}{n_y} = \frac{K^{(i)} Y^{(i)} - z}{n_z}, \quad (31.14)$$

где $K^{(i)} Y^{(i)} = Z^{(i)}$.

Другие уравнения для определения координат $L^{(i)}$ получим, основываясь на разложении винта относительного движения на составляющие вращения. Относительное движение звеньев передачи с пересекающимися осями определяется, как это было показано в § 23, вектором угловой скорости

$$\omega_O^{(12)} = -\omega^{(2)} \sin \gamma j + (\omega^{(1)} - \omega^{(2)} \cos \gamma) k$$

и вектором-моментом

$$-m_O (\omega^{(2)}) = A \omega^{(2)} (\cos \gamma j - \sin \gamma k).$$

За точку приведения скользящих векторов была выбрана точка O — начало неподвижной системы координат S , через которую проходит вектор $\omega^{(1)}$ (рис. 48).

Примем в последующем для краткости обозначений, что $\omega^{(1)} = 1$ рад/сек, $\omega^{(2)} = \omega^{(1)} i_{21} = i_{21}$ рад/сек. Тогда

$$\omega_O^{(12)} = -i_{21} \sin \gamma j + (1 - i_{21} \cos \gamma) k, \quad (31.15)$$

$$-m_O (\omega^{(2)}) = A i_{21} (\cos \gamma j - \sin \gamma k). \quad (31.16)$$

Разложение винта относительного движения на составляющие вращения вокруг осей $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$ определяется следующими уравнениями:

$$\omega_O^{(I)} + \omega_O^{(II)} = \omega_O^{(12)}, \quad (31.17)$$

$$m_O (\omega^{(I)}) + m_O (\omega^{(II)}) = -m_O (\omega^{(2)}). \quad (31.18)$$

Точкой приведения скользящих векторов $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$ служит по-прежнему точка O (рис. 48). При определении вектора-момента $m_O (\omega^{(i)})$ ($i = I, II$) за точку приложения вектора $\omega^{(i)}$ выбрана точка с координатами: $X^{(i)}, O, O$ ($i = I, II$).

Переходя к проекциям, вместо векторных уравнений (31.17) и (31.18) получим следующие скалярные уравнения:

$$\omega_y^{(I)} + \omega_y^{(II)} = -i_{21} \sin \gamma, \quad (31.19)$$

$$K^{(I)} \omega^{(I)} + K^{(II)} \omega^{(II)} = 1 - i_{21} \cos \gamma, \quad (31.20)$$

$$X^{(I)} \omega_y^{(I)} + X^{(II)} \omega_y^{(II)} = A i_{21} \sin \gamma, \quad (31.21)$$

$$X^{(I)} K^{(I)} \omega_y^{(I)} + X^{(II)} K^{(II)} \omega_y^{(II)} = A i_{21} \cos \gamma. \quad (31.22)$$

Напомним, что согласно уравнению (31.10)

$$K^{(i)} = \frac{\omega_z^{(i)}}{\omega_y^{(i)}} \quad (i = \text{I, II}).$$

Система уравнений (31.19) — (31.22) относительно $\omega_y^{(\text{I})}$ и $\omega_y^{(\text{II})}$ является линейной. Эта система, состоящая из четырех линейных уравнений с двумя неизвестными, является, как известно из линейной алгебры, совместной, если равны ранги матриц A и B , где

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ K^{(\text{I})} & K^{(\text{II})} \\ X^{(\text{I})} & X^{(\text{II})} \\ X^{(\text{I})}K^{(\text{I})} & X^{(\text{II})}K^{(\text{II})} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -i_{21} \sin \gamma \\ K^{(\text{I})} & K^{(\text{II})} & 1 - i_{21} \cos \gamma \\ X^{(\text{I})} & X^{(\text{II})} & Ai_{21} \sin \gamma \\ X^{(\text{I})}K^{(\text{I})} & X^{(\text{II})}K^{(\text{II})} & Ai_{21} \cos \gamma \end{vmatrix}.$$

Матрица A составлена из коэффициентов при $\omega_y^{(\text{I})}$ и $\omega_y^{(\text{II})}$, в матрице B , помимо элементов матрицы A , содержатся еще свободные члены уравнений (31.19) — (31.22).

Ранг матрицы A равен двум, так как $K_{\text{I}} \neq K_{\text{II}}$, $X_{\text{I}} \neq X_{\text{II}}$. Ранг матрицы B будет равен двум, если будут равны нулю три определителя третьего порядка, составленные из элементов матрицы B , а именно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -i_{21} \sin \gamma \\ K^{(\text{I})} & K^{(\text{II})} & 1 - i_{21} \cos \gamma \\ X^{(\text{I})} & X^{(\text{II})} & Ai_{21} \sin \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -i_{21} \sin \gamma \\ K^{(\text{I})} & K^{(\text{II})} & 1 - i_{21} \cos \gamma \\ X^{(\text{I})}K^{(\text{I})} & X^{(\text{II})}K^{(\text{II})} & Ai_{21} \cos \gamma \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} K^{(\text{I})} & K^{(\text{II})} & 1 - i_{21} \cos \gamma \\ X^{(\text{I})} & X^{(\text{II})} & Ai_{21} \sin \gamma \\ X^{(\text{I})}K^{(\text{I})} & X^{(\text{II})}K^{(\text{II})} & Ai_{21} \cos \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (31.23)$$

Раскрыв приведенные определители, получим

$$(K^{(\text{II})} - K^{(\text{I})}) Ai_{21} \sin \gamma + (X^{(\text{I})} - X^{(\text{II})}) (1 - i_{21} \cos \gamma) + (X^{(\text{I})}K^{(\text{II})} - X^{(\text{II})}K^{(\text{I})}) i_{21} \sin \gamma = 0, \quad (31.24)$$

$$(K^{(\text{II})} - K^{(\text{I})}) Ai_{21} \cos \gamma + K^{(\text{I})}K^{(\text{II})}i_{21} \sin \gamma (X^{(\text{I})} - X^{(\text{II})}) + (X^{(\text{I})}K^{(\text{I})} - X^{(\text{II})}K^{(\text{II})}) (1 - i_{21} \cos \gamma) = 0, \quad (31.25)$$

$$(K^{(\text{I})}X^{(\text{II})} - X^{(\text{I})}K^{(\text{II})}) Ai_{21} \cos \gamma + X^{(\text{I})}X^{(\text{II})} (K^{(\text{II})} - K^{(\text{I})}) (1 - i_{21} \cos \gamma) + K^{(\text{I})}K^{(\text{II})} (X^{(\text{I})} - X^{(\text{II})}) Ai_{21} \sin \gamma = 0. \quad (31.26)$$

Исключив из уравнений (31.24) и (31.25) $X^{(\text{II})}$, получим

$$X^{(\text{I})} = \frac{Ai_{21} (\cos \gamma - K^{(\text{II})} \sin \gamma)}{1 - i_{21} \cos \gamma + K^{(\text{II})}i_{21} \sin \gamma}. \quad (31.27)$$

Подставим выражение (31.27) в (31.24), после чего найдем

$$X^{(\text{II})} = \frac{Ai_{21} (\cos \gamma - K^{(\text{I})} \sin \gamma)}{1 - i_{21} \cos \gamma + K^{(\text{I})}i_{21} \sin \gamma}. \quad (31.28)$$

Подставив выражения (31.27) и (31.28) в (31.26), удостоверимся, что это уравнение удовлетворяется. Следовательно, если $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ будут

связаны уравнениями (31.27) и (31.28), ранг матрицы B будет равен рангу матрицы A и система (31.19)–(31.22) совместная.

Для определения координат $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ осей составляющих вращений мы получили четыре уравнения — два уравнения (31.13), (31.27) и (31.28), — однако независимыми из них являются только три. Это вытекает из того, что из двух уравнений (31.13) независимым является только одно. Действительно, если соблюдаются уравнения зацепления (31.1) и одно из двух уравнений (31.7) и (31.8), например (31.7), то второе уравнение [(31.8)] является следствием первых двух. В самом деле, поскольку

$$nv^{(II)} = nv^{(I2)} - nv^{(I)},$$

то при $nv^{(I2)} = 0$ и $nv^{(I)} = 0$ обязательно окажется, что и $nv^{(II)} = 0$.

Так как из четырех уравнений для определения $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ ($i = I, II$) независимыми будут только три, одну из четырех координат осей составляющих вращений можно задать произвольно, и разложение винтового движения на составляющие вращения имеет бесчисленное множество решений.

Система четырех уравнений: (31.13), (31.27) и (31.28) — может быть использована и для другой цели — для определения самого уравнения зацепления, что может быть выполнено следующим образом. После преобразований, на основании (31.13), (31.27) и (31.28), получим

$$\frac{Ai_{21}(\cos \gamma - K^{(II)} \sin \gamma)}{1 - i_{21} \cos \gamma + K^{(II)} i_{21} \sin \gamma} = \frac{K^{(I)}(xn_y - yn_x) - xn_z + zn_x}{K^{(I)}n_y - n_z}, \quad (31.29)$$

$$\frac{Ai_{21}(\cos \gamma - K^{(I)} \sin \gamma)}{1 - i_{21} \cos \gamma + K^{(I)} i_{21} \sin \gamma} = \frac{K^{(II)}(xn_y - yn_x) - xn_z + zn_x}{K^{(II)}n_y - n_z}. \quad (31.30)$$

Из уравнений (31.29) и (31.30) получим следующую систему уравнений для определения $K^{(I)}$ и $K^{(II)}$:

$$\left. \begin{aligned} K^{(I)}Q + K^{(I)}K^{(II)}S + K^{(II)}R &= L, \\ K^{(II)}Q + K^{(I)}K^{(II)}S + K^{(I)}R &= L, \end{aligned} \right\} \quad (31.31)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= Ai_{21} \cos \gamma n_y - (1 - i_{21} \cos \gamma)(xn_y - yn_x), \\ S &= -Ai_{21} \sin \gamma n_y - i_{21} \sin \gamma (xn_y - yn_x), \\ R &= i_{21} \sin \gamma [(A + x)n_z - zn_x], \\ L &= Ai_{21} \cos \gamma n_z - (1 - i_{21} \cos \gamma)(xn_z - zn_x). \end{aligned}$$

Из уравнений (31.31) следует, что

$$(K^{(I)} - K^{(II)})(Q - R) = 0.$$

Так как $K^{(I)} \neq K^{(II)}$, то $Q = R$. Развертывая выражения для Q и R , получим

$$\begin{aligned} - &= n_x [(1 - i_{21} \cos \gamma)y + i_{21} \sin \gamma z] + n_y [(1 - i_{21} \cos \gamma)x - Ai_{21} \cos \gamma] + \\ &+ n_z [i_{21} \sin \gamma (x + A)] = 0. \end{aligned} \quad (31.32)$$

Уравнение (31.32) является уравнением зацепления; оно выражает зависимость между координатами x, y, z точки поверхности и проекциями вектора нормали n_x, n_y, n_z к поверхности в этой точке, необходимую для того, чтобы точка (x, y, z) поверхности стала контактной точкой. Ранее

уравнение (30.17) было нами получено кинематическим методом; сейчас уравнение зацепления получено иным путем, исходя из того, что нормаль в контактной точке должна пересекать пару осей составляющих вращений.

Вследствие того, что $Q = R$, уравнения (31.31) приводятся к одному уравнению:

$$K^{(I)}Q + K^{(I)}K^{(II)}S + K^{(II)}R = L,$$

где $Q = R$.

Итак, для определения координат $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ ($i = I, II$) сопряженных прямых в нашем распоряжении фактически имеются лишь три уравнения:

$$K^{(I)} + K^{(I)}K^{(II)}S + K^{(II)}R = L, \quad (31.33)$$

$$X^{(I)} = Ai_{21} \frac{\cos \gamma - K^{(II)} \sin \gamma}{1 - i_{21} \cos \gamma + K^{(II)}i_{21} \sin \gamma}, \quad (31.34)$$

$$X^{(II)} = Ai_{21} \frac{\cos \gamma - K^{(I)} \sin \gamma}{1 - i_{21} \cos \gamma + K^{(I)}i_{21} \sin \gamma}. \quad (31.35)$$

Очевидно, что одна из координат сопряженных прямых может быть выбрана произвольно, и, следовательно, существует бесчисленное множество сочетаний значений $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ ($i = I, II$). Это означает, что нормаль в контактной точке может пересекать бесчисленное множество сопряженных прямых. Легко установить, что при произвольном назначении одной из координат $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ ($i = I, II$), например $K^{(I)}$, две другие координаты $K^{(II)}$, $X^{(II)}$ явятся функциями от Q , S , L , определяемыми в свою очередь через координаты контактной точки.

С. Передача с перекрещивающимися осями; поверхность зубца звена 1 — геликоид

В передаче с перекрещивающимися осями координаты осей составляющих вращений зависят в общем случае от координат контактной точки. Следовательно, в такой передаче осей зацепления не существует.

Докажем, что оси зацепления существуют в передаче с перекрещивающимися осями, если поверхность зубцов одного из звеньев является геликоидом.

Для геликоида согласно уравнению (27.9) справедлива зависимость

$$xn_y - yn_x = -pn_z.$$

Уравнение зацепления (31.32) примет вследствие этого такой вид:

$$xn_z - zn_x - p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} n_z - A(\operatorname{ctg} \gamma n_y - n_z) = 0. \quad (31.36)$$

Рассмотрев совместно уравнения (31.36) и (31.13), получим

$$(X^{(i)}K^{(i)} + A \operatorname{ctg} \gamma) n_y + \left(K^{(i)}p - X^{(i)} - A + p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) n_z = 0. \quad (31.37)$$

Пара осей составляющих вращений станет парой осей зацепления, если координаты $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ не будут зависеть от координат контактной точки. Из этого следует, что

$$X^{(i)}K^{(i)} + A \operatorname{ctg} \gamma = 0, \quad (31.38)$$

$$K^{(i)}p - X^{(i)} - A + p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} = 0. \quad (31.39)$$

После простых преобразований получим

$$[K^{(i)}]^2 - K_i \left(\frac{A}{p} - \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) + \frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{p} = 0, \quad (31.40)$$

$$X^{(i)} = - \frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{K^{(i)}}. \quad (31.41)$$

Легко удостовериться, что уравнения (31.34) и (31.35) при $X^{(i)} K^{(i)} = -A \operatorname{ctg} \gamma$ становятся тождествами.

Полученные здесь результаты — условия, когда оси составляющих вращений становятся осями зацеплений, можно истолковать, пользуясь кинематическими соображениями.

Относительное движение звеньев передачи не изменится, если геликоиду вместо вращательного движения со скоростью

$$\omega^{(1)} = \omega^{(1)} k$$

сообщить поступательное движение со скоростью

$$v^{(1)} = -p \omega^{(1)} k.$$

Это эквивалентно тому, что звену 1, помимо вращательного движения со скоростью $\omega^{(1)}$, будет сообщено винтовое движение, определяемое: а) скользящим вектором $\omega^{(1)}$, б) вектором поступательного движения $p \omega^{(1)} k$ (p — параметр винтового движения).

Относительное движение звеньев пространственной передачи определится при этом вектором угловой скорости

$$\omega_O^{(12)} = -i_{21} (\sin \gamma j + \cos \gamma k)$$

и вектором поступательного движения

$$-m_O (\omega^{(2)}) - p \omega^{(1)} = -A i_{21} \cos \gamma j + (A i_{21} \sin \gamma - p) k.$$

При замене относительного винтового движения звеньев передачи составляющими вращениями вокруг осей зацепления $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$ должны быть соблюдены уравнения, аналогичные (31.7) и (31.8). Соответствующие скалярные уравнения, аналогичные системе (31.19)–(31.22), определяются так:

$$\Omega_y^{(I)} + \Omega_y^{(II)} = -i_{21} \sin \gamma, \quad (31.42)$$

$$K^{(I)} \Omega_y^{(I)} + K^{(II)} \Omega_y^{(II)} = -i_{21} \cos \gamma, \quad (31.43)$$

$$X^{(I)} \Omega_y^{(I)} + X^{(II)} \Omega_y^{(II)} = A i_{21} \sin \gamma - p, \quad (31.44)$$

$$X^{(I)} K^{(I)} \Omega_y^{(I)} + X^{(II)} K^{(II)} \Omega_y^{(II)} = A i_{21} \cos \gamma. \quad (31.45)$$

Здесь $\Omega^{(I)}$ и $\Omega^{(II)}$ — векторы угловых скоростей вращения вокруг составляющих осей вращения, не совпадающие по величине с векторами $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$.

Для совместной системы линейных уравнений (31.42)–(31.45) можно составить определители, аналогичные (31.23). В результате получим

$$(K^{(II)} - K^{(I)}) (A i_{21} \sin \gamma - p) - (X^{(I)} - X^{(II)}) i_{21} \cos \gamma + \\ + (X^{(I)} K^{(II)} - X^{(II)} K^{(I)}) i_{21} \sin \gamma = 0, \quad (31.46)$$

$$(K^{(II)} - K^{(I)}) A i_{21} \cos \gamma + K^{(I)} K^{(II)} i_{21} \sin \gamma (X^{(I)} - X^{(II)}) - \\ - i_{21} \cos \gamma (X^{(I)} K^{(I)} - X^{(II)} K^{(II)}) = 0. \quad (31.47)$$

Для определения координат $X^{(i)}$, $K^{(i)}$ ($i = I, II$) осей зацепления имеются теперь четыре уравнения: (31.46), (31.47), (31.24) и (31.25).

Используя эти уравнения, можно доказать, что координаты осей зацепления удовлетворяют уравнениям (31.40) и (31.41), полученным из анализа уравнения зацепления. Это является доказательством справедливости системы уравнений (31.42)–(31.44), составленной на основании высказанных ранее кинематических соображений.

Обратимся вновь к уравнениям (31.40) и (31.41) для определения координат осей зацепления.

Из этих уравнений следует

$$K^{(I)} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{p} - \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{p} - \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right)^2 - \frac{4A \operatorname{ctg} \gamma}{p}}, \quad (31.48)$$

$$X^{(I)} = -\frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{K^{(I)}}, \quad (31.49)$$

$$K^{(II)} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{p} - \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{p} - \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right)^2 - \frac{4A \operatorname{ctg} \gamma}{p}}, \quad (31.50)$$

$$X^{(II)} = -\frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{K^{(II)}}. \quad (31.51)$$

Для ортогональной передачи ($\gamma = \pi/2$), используя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $0/0$, получим

$$K^{(I)} = \frac{A}{p} - \frac{1}{i_{21}}, \quad (31.52)$$

$$X^{(I)} = 0, \quad (31.53)$$

$$K^{(II)} = 0, \quad (31.54)$$

$$X^{(II)} = -\left(A - \frac{p}{i_{21}}\right). \quad (31.55)$$

Как будет показано в § 75, передаточное отношение червячной передачи с цилиндрическим червяком определяется уравнением

$$i_{21} = \pm \frac{r_n \sin \lambda_n}{R_n \sin (\gamma \mp \lambda_n)}.$$

Верхний и нижний знаки относятся соответственно к червякам с правым и левым направлениями винтовых линий; r_n и R_n — радиусы начальных цилиндров; λ_n — угол подъема винтовой линии на цилиндре червяка радиуса r_n ; γ — угол скрещивания осей червяка и колеса.

Учитывая, что $A = r_n + R_n$, а $p = \pm r_n \operatorname{tg} \lambda_n$ (положительный знак при правом направлении винтовой линии), получим следующую таблицу значений $X^{(i)}$, $K^{(i)}$.

Таблица III

γ	Направление винтовой линии	$K^{(I)}$	$X^{(I)}$	$K^{(II)}$	$X^{(II)}$
$\gamma \neq \frac{\pi}{2}$	Правое	$\operatorname{ctg} \lambda_n$	$-A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_n$	$\frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{r_n}$	$-r_n$
	Левое	$-\operatorname{ctg} \lambda_n$	$A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_n$	$\frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{r_n}$	$-r_n$
$\gamma = \frac{\pi}{2}$	Правое	$\operatorname{ctg} \lambda_n$	0	0	$-r_n$
	Левое	$-\operatorname{ctg} \lambda_n$	0	0	$-r_n$

На рис. 56 изображены в двух проекциях оси зацепления ортогональной червячной передачи с правым червяком. Червяк расположен над червячным колесом, направление витка на нижней части червяка изображено пунктиром. Ось зацепления $I-I$ пересекает ось червяка и перпендикулярна направлению винтовой линии на начальном цилиндре

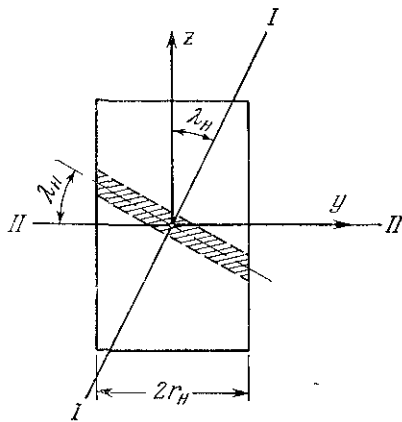
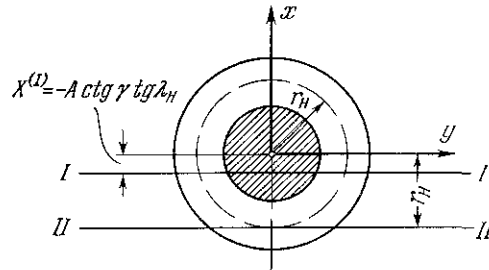
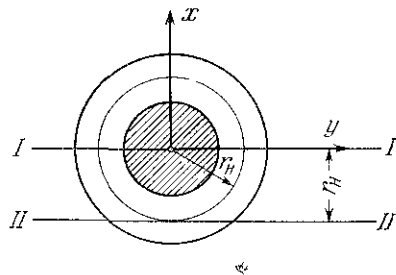


Рис. 56

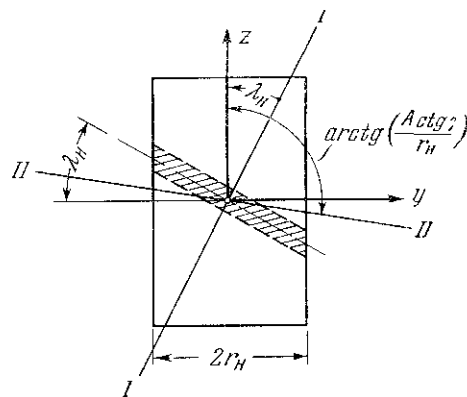


Рис. 57.

червяка радиуса r_n . Вторая ось зацепления $II-II$ перпендикулярна оси червячного колеса и касается начального цилиндра червяка.

На рис. 57 изображены в двух проекциях оси зацепления неортогональной червячной передачи, с углом перекрещивания осей $\gamma \neq 90^\circ$. Направление оси зацепления $I-I$ остается прежним, но она уже не пересекает ось червяка. Ось зацепления $II-II$ и в этом случае остается касательной к начальному цилиндру червяка, но ее направление изменяется по сравнению со случаем, когда передача ортогональная и $\gamma = 90^\circ$.

Д. Случай обработки винтовой поверхности дисковым инструментом

Винтовая поверхность, обрабатываемая дисковым инструментом (дисковой фрезой или шлифовальным камнем), является огибающей по отношению к поверхности инструмента в относительном движении. Относительное движение обрабатываемой поверхности является винтовым. Ось винтового движения совпадает с осью геликоида, а винтовой параметр — с параметром p геликоида.

Положение оси инструмента в неподвижной системе координат x, y, z (рис. 58) определяется величинами A_n и γ_n ; обычно угол перекрещивания осей γ_n выбирается равным углу подъема винтовой линии на делительном цилиндре червяка.

На рис. 58 изображено положение оси инструмента в случае обработки червяка с правым направлением винтовой линии; при левом червяке угол γ_n в приводимых ниже формулах нужно считать отрицательным.

Исследование зацепления дискового инструмента и обрабатываемой поверхности подчиняется тем же закономерностям, как и зацепление в зубчатой передаче с перекрещивающимися осями.

Согласно теореме, доказанной в настоящем параграфе, нормаль в контактной точке поверхностей инструмента и червяка должна пересекать пару сопряженных осей, на которые раскладывается винт относительного движения. Так как поверхность инструмента является поверхностью вращения, нормаль к этой поверхности в контактной точке должна пересекать ось инструмента. Следовательно, одной из сопряженных осей составляющих вращений, на которые должно быть разложено винтовое движение, явится ось инструмента.

Обозначим скорости составляющих вращений через $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$; индекс I присвоен оси, совпадающей с осью z_n инструмента. Приведем векторы $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$ к точке O , лежащей на оси z , введя при этом векторы-моменты $m_0(\omega^{(I)}) = r^{(I)} \times \omega^{(I)}$ и $m_0(\omega^{(II)}) = r^{(II)} \times \omega^{(II)}$. Через $r^{(I)}$ и $r^{(II)}$ обозначены радиусы-векторы точек приложения векторов $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$ с координатами (A_n, O, O) , $(X^{(II)}, O, O)$.

Итак, мы имеем возможность представить относительное движение дисковой фрезы двояким образом: а) как винтовое, характеризуемое векторами ω и $p\omega$; б) как сумму составляющих вращений вокруг осей зацеплений с угловыми скоростями $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$. Так как составляющие вращения $\omega^{(I)}$ и $\omega^{(II)}$ должны приводиться к винту относительного движения, то

$$\omega = \omega^{(I)} + \omega^{(II)}, \quad (31.56)$$

$$m_0(\omega^{(I)}) + m_0(\omega^{(II)}) = p\omega. \quad (31.57)$$

Проекции главного вектора угловой скорости ω выражаются так (рис. 58):

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega. \quad (31.58)$$

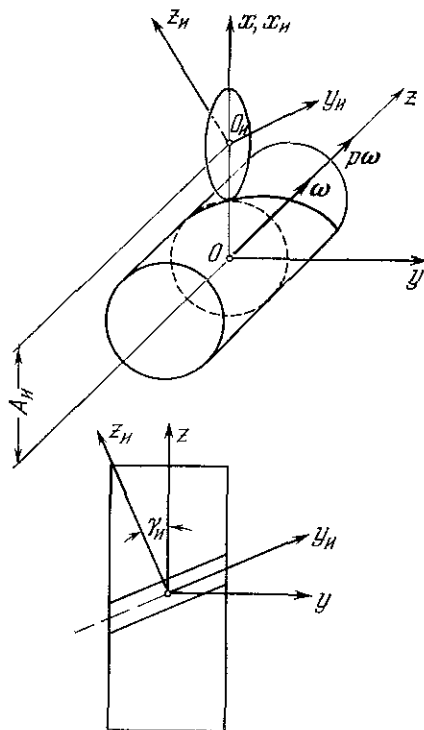


Рис. 58.

На основании (31.56) и (31.58)

$$\omega_y^{(I)} = -\omega_y^{(II)}, \quad \omega_z^{(I)} + \omega_z^{(II)} = \omega. \quad (31.59)$$

Заметим также, что так как линия действия $\omega^{(I)}$ совпадает с осью z_{II} , то

$$\frac{\omega_y^{(I)}}{\omega_z^{(I)}} = -\operatorname{tg} \gamma_{II}. \quad (31.60)$$

Представим уравнение (31.57) в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} r_y^{(I)} \omega_z^{(I)} - r_z^{(I)} \omega_y^{(I)} + r_y^{(II)} \omega_z^{(II)} - r_z^{(II)} \omega_y^{(II)} &= 0, \\ r_z^{(I)} \omega_x^{(I)} - r_x^{(I)} \omega_z^{(I)} + r_z^{(II)} \omega_x^{(II)} - r_x^{(II)} \omega_z^{(II)} &= 0, \\ r_x^{(I)} \omega_y^{(I)} - r_y^{(I)} \omega_x^{(I)} + r_x^{(II)} \omega_y^{(II)} - r_y^{(II)} \omega_x^{(II)} &= p\omega. \end{aligned} \right\} \quad (31.61)$$

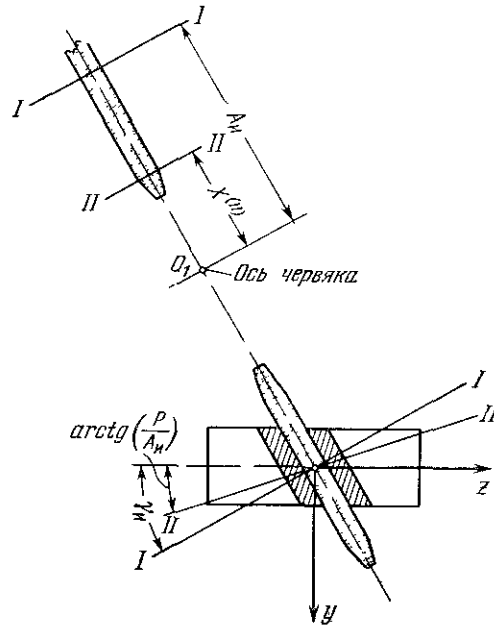


Рис. 59.

Учитывая, что $r_x^{(I)} = A_{II}$, $r_x^{(II)} = X^{(II)}$, $r_y^{(I)} = r_y^{(II)} = 0$, $r_z^{(I)} = r_z^{(II)} = 0$, $\omega_x^{(I)} = \omega_x^{(II)} = 0$, найдем

$$\left. \begin{aligned} -A_{II} \omega_z^{(I)} - X^{(II)} \omega_z^{(II)} &= 0, \\ A_{II} \omega_y^{(I)} + X^{(II)} \omega_y^{(II)} &= p\omega. \end{aligned} \right\} \quad (31.62)$$

Решив систему уравнений (31.62), (31.60) и (31.59), получим

$$\left. \begin{aligned} X^{(II)} &= p \operatorname{ctg} \gamma_{II}, \\ K^{(II)} &= \frac{\omega_z^{(II)}}{\omega_y^{(II)}} = -\frac{A_{II}}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (31.63)$$

Значения $X^{(II)}$ и $K^{(II)}$ определяют положение второй оси зацепления. Через $K^{(II)}$ обозначен коэффициент, определяющий направление этой оси по отношению к осям y и z , т. е. $K^{(II)} = Z^{(II)}/Y^{(II)}$, где $Y^{(II)}$ и $Z^{(II)}$ — координаты текущей точки второй оси зацепления. При $\gamma_H = \lambda_H$, где λ_H — угол подъема винтовой линии на начальном цилиндре, $X^{(II)} = r_H$.

На рис. 59 изображены в двух проекциях оси зацепления $I - I$ и $II - II$ при обработке червяка дисковым инструментом

§ 32. Узловые линии зацепления

Поверхность зацепления образуется как семейство линий контакта взаимогнбимых поверхностей в неподвижной системе координат. Сечение поверхности зацепления плоскостью представляет в общем случае кривую линию. Можно доказать, что в передаче со скрещивающимися осями, если поверхность одного из звеньев — геликоид, сечение поверхности зацепления некоторой плоскостью, параллельной линии кратчайшего расстояния между скрещивающимися осями, представляет прямую линию, параллельную оси червяка. Такую линию на поверхности зацепления можно назвать узловой линией зацепления, так как через нее проходят многие линии контакта поверхностей.

Наличие двух узловых линий зацепления в зоне оси зацепления $II - II$ было обнаружено И. С. Кривенко в червячной передаче с вогнутым профилем червяка [136]. И. П. Бернацкий обнаружил наличие двух узловых линий зацепления в зоне оси зацепления $I - I$. Автору книги принадлежит объяснение геометрического характера происхождения верхних и нижних узловых линий зацепления и предлагаемые ниже зависимости для их определения.

В § 31 было выяснено, что в передаче с перекрещивающимися осями, если поверхность зубца одного из звеньев — геликоид, существуют две оси зацепления. Нормаль в любой точке характеристики — линии контакта взаимогнбимых поверхностей — пересекает обе оси зацепления.

В предельном случае возможно и такое направление нормали к поверхности, когда она пересекает одну из осей зацепления и одновременно параллельна второй оси зацепления, с которой нормаль пересекается в бесконечности.

На рис. 60 изображены два текущих положения торцового профиля геликоида червяка и оси зацепления $I - I$ и $II - II$, соответствующие ортогональной передаче (с углом перекрещивания $\mu = 90^\circ$). В точке N нормаль $n - n$ к поверхности геликоида пересекает ось зацепления $I - I$ и параллельна оси зацепления $II - II$. Верхними узловыми линиями зацепления являются прямые $N - N$ и $N' - N'$.

Аналогичные построения приведены на рис. 61 для случая, когда нормаль $n - n$ к поверхности геликоида пересекает ось зацепления $II - II$ и параллельна оси зацепления $I - I$. Прямые $M - M$ и $M' - M'$ — нижние узловые линии зацепления.

Приведем уравнения для определения узловых линий зацепления.

Верхние узловые линии зацепления определяются из следующей системы уравнений:

$$x = X^{(I)} = \mp A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_H, \quad (32.1)$$

$$e_x = 0, \quad (32.2)$$

$$\frac{e_z}{e_y} = K^{(II)} = \frac{A \operatorname{ctg} \gamma}{r_H}. \quad (32.3)$$

Здесь и ниже в местах применения двух знаков верхний относится к червяку с правым направлением винтовой линии.

В этих уравнениях x , y , и z — координаты точек верхних узловых линий зацепления, e_x — проекция на ось x орта нормали к поверхности

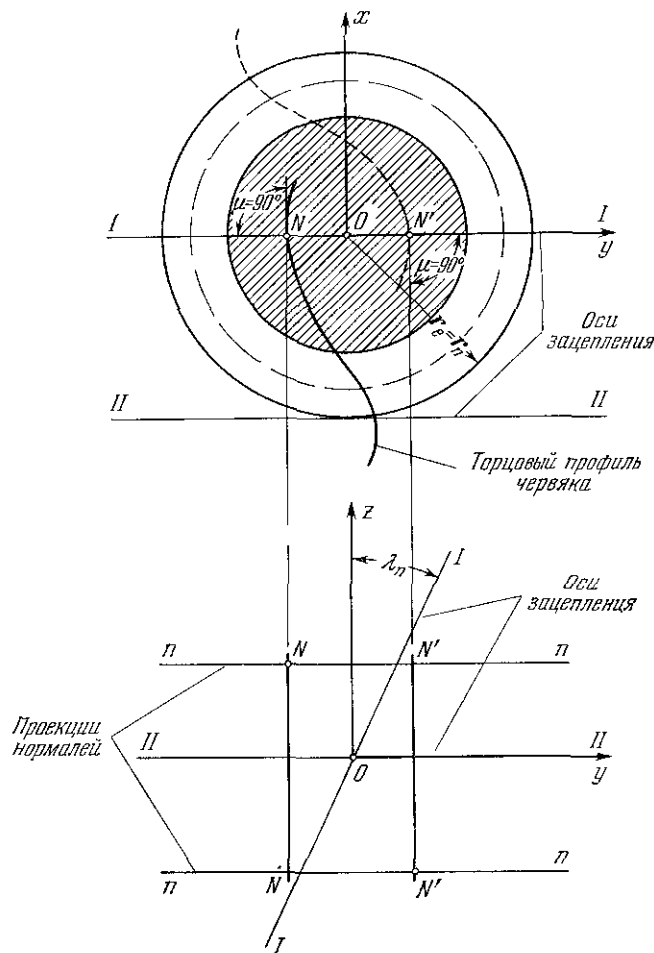


Рис. 60.

геликоида в том его положении, когда одна из точек линий контакта принадлежит одновременно к верхней узловой линии зацепления.

Уравнение (32.1) выражает тот факт, что верхняя узловая линия зацепления пересекает ось зацепления $I-I$. Уравнения (32.2) и (32.3) определяются тем, что нормаль в точке верхней узловой линии зацепления параллельна оси зацепления $II-II$.

Нижние узловые линии зацепления определяются из следующих уравнений:

$$x = X^{(II)} = -r_n, \quad (32.4)$$

$$e_x = 0, \quad (32.5)$$

$$\frac{e_z}{e_y} = K^{(I)} = \pm \operatorname{ctg} \lambda_n. \quad (32.6)$$

Вывод уравнений (32.4)–(32.6) выполнен на основании таких же соображений, как и вывод уравнений (32.1)–(32.3).

Основываясь на уравнении (27.4) геликоида и формулах (22.16) перехода от S_1 к S , получим

$$x = r \cos(\varphi_1 + \theta + \xi). \quad (32.7)$$

Орг нормали (27.8) в системе S определится уравнением

$$e = \frac{1}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos \mu}} (p \sin \tau i - p \cos \tau j + r \cos \mu k), \quad (32.8)$$

где $\tau = \varphi_1 + \theta + \xi + \mu$.

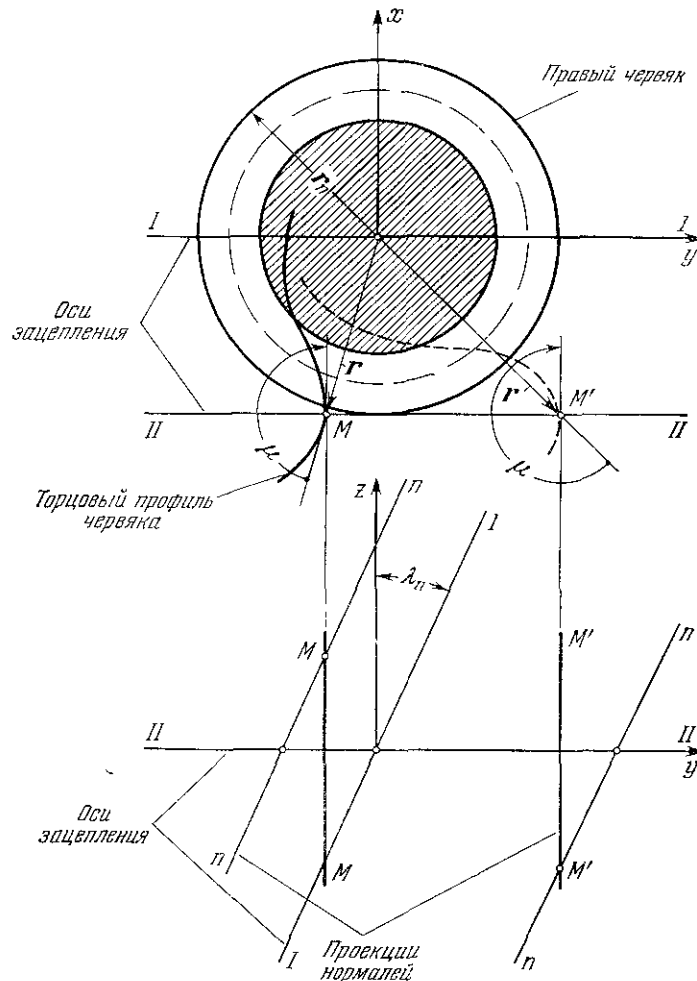


Рис. 61.

Верхние узловые линии зацепления определяются из системы уравнений:

$$r \cos(\varphi_1 + \theta + \xi) = \mp A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_n, \quad (32.9)$$

$$\sin \tau = 0, \quad (32.10)$$

$$\frac{r \cos \mu}{\cos \tau} = \mp A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_n. \quad (32.11)$$

Для определения нижних узловых линий зацепления используются уравнения:

$$r \cos (\varphi_1 + \theta + \zeta) = -r_n, \quad (32.12)$$

$$\sin \tau = 0, \quad (32.13)$$

$$\frac{r \cos \mu}{\cos \tau} = -\operatorname{ctg} \lambda_n. \quad (32.14)$$

В уравнениях (32.9) и (32.11) верхний и нижний знаки относятся соответственно к правому и левому червякам.

В системах уравнений (32.9) — (32.11) и (32.12) — (32.14) содержатся три параметра: θ , ζ и φ_1 ; параметр μ является функцией от θ . На параметры θ , ζ и φ_1 наложена связь, определяемая тем, что в точках линии контакта взаимоогibaемых поверхностей

$$n v^{(12)} = 0.$$

Из этого следует, что из трех параметров — θ , ζ и φ_1 — независимыми являются только два.

Так как в системах (32.9) — (32.11) и (32.12) — (32.14) содержатся по три уравнения, а определить требуется только два неизвестных, для этого можно воспользоваться любыми двумя уравнениями из трех, входящих в систему. Третье уравнение может быть использовано для контроля вычислений.

§ 33. Параметры движения контактной точки

Параметры движения контактной точки необходимы для определения: а) кривизны поверхности, б) условий отсутствия подрезания, в) условий зацепления в окрестности заданной точки контакта и т. д.

Определение параметров движения выполним для двух видов относительного движения — однопараметрического и двухпараметрического, используя для каждого из них два способа определения параметров: векторный и матричный.

А. Векторный способ

Пусть относительное движение звеньев передачи определяется одним независимым параметром.

Введем в рассмотрение три системы координат: S_1 и S_2 , жестко связанные с подвижными звеньями механизма, неподвижную систему S , жестко связанную со стойкой механизма. В системах S_1 и S_2 заданы поверхности Σ_1 и Σ_2 , находящиеся в непрерывном касании друг с другом. Звенья 1 и 2 совершают вращения с угловыми скоростями $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, линии действия которых проходят через начало O_1 и O_2 подвижных систем координат. В передаче с перекрещивающимися осями линии действия векторов $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ также перекрещиваются. В целях общности примем, что начала обеих систем координат S_1 и S_2 не совпадают с началом O неподвижной системы координат S .

Радиус-вектор точки поверхности Σ_i и орт нормали в этой точке можно записать такими уравнениями:

$$r^{(i)} = r_{0i} + r_i = r_{0i} + x_i i_i + y_i j_i + z_i k_i, \quad (33.1)$$

$$e^{(i)} = e_{xi} i_i + e_{yi} j_i + e_{zi} k_i. \quad (33.2)$$

Здесь индекс $i = 1, 2$; r_{0i} — радиус-вектор начала O_i подвижной системы координат S_i , проведенный из начала O системы S ; r_i — радиус-вектор точки поверхности, проведенный из начала O_i .

Продифференцируем эти уравнения, имея в виду, что точка движется: а) вместе с поверхностью Σ_i (переносное движение), б) по поверхности Σ_i (относительное движение). Направление орта нормали e_i в неподвижном пространстве также будет изменяться: а) вследствие переносного движения вместе с поверхностью Σ_i , б) при движении точки по поверхности. При дифференцировании координаты точки, проекции орта нормали и направления ортов координатных осей системы S_i будем рассматривать зависящими от времени. В подавляющем большинстве случаев для зубчатых механизмов положения осей вращения звеньев в неподвижном пространстве не изменяются и $r_{0i} = \text{const}$.

Продифференцировав дважды выражения (33.1) и (33.2), получим после преобразований формулы следующего вида:

$$\dot{r}^{(i)} = \dot{r}_{ri} + [\omega^{(i)} \times (r^{(i)} - r_{0i})], \quad (33.3)$$

$$\ddot{r}^{(i)} = \ddot{r}_{ri} + 2\omega^{(i)} \times \dot{r}_{ri} + \dot{\omega}^{(i)} \times [r^{(i)} - r_{0i}] + \dot{\omega}^{(i)} \times (r^{(i)} - r_{0i}), \quad (33.4)$$

$$\dot{e}^{(i)} = \dot{e}_{ri} + \omega^{(i)} \times e^{(i)}, \quad (33.5)$$

$$\ddot{e}^{(i)} = \ddot{e}_{ri} + 2\omega^{(i)} \times \dot{e}_{ri} + \dot{\omega}^{(i)} \times (\omega^{(i)} \times e^{(i)}) + \dot{\omega}^{(i)} \times e^{(i)}. \quad (33.6)$$

В этих уравнениях $\dot{r}^{(i)}$ и $\ddot{r}^{(i)}$ — скорость и ускорение точки в абсолютном движении; $\dot{r}_{ri}$ и $\ddot{r}_{ri}$ — скорость и ускорение точки в относительном движении (в движении по поверхности Σ_i); $\dot{e}^{(i)}$ и $\ddot{e}^{(i)}$ — скорость и ускорение конца орта нормали в абсолютном движении; $\dot{e}_{ri}$ и $\ddot{e}_{ri}$ — скорость и ускорение конца орта нормали в относительном движении. При этом

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ri} &= \frac{dx_i}{dt} i_i + \frac{dy_i}{dt} j_i + \frac{dz_i}{dt} k_i, \\ \ddot{r}_{ri} &= \frac{d^2x_i}{dt^2} i_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} j_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} k_i, \\ \dot{e}_{ri} &= \frac{de_{xi}}{dt} i_i + \frac{de_{yi}}{dt} j_i + \frac{de_{zi}}{dt} k_i, \\ \ddot{e}_{ri} &= \frac{d^2e_{xi}}{dt^2} i_i + \frac{d^2e_{yi}}{dt^2} j_i + \frac{d^2e_{zi}}{dt^2} k_i. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения: $\dot{r}^{(i)} = v^{(i)}$;

$$\dot{r}_{ri} = \dot{r}_r^{(i)} = v_r^{(i)}; \quad \ddot{r}^{(i)} = a^{(i)}; \quad \ddot{r}_{ri} = \ddot{r}_r^{(i)} = a_r^{(i)}.$$

Учтем в дальнейших записях, что $\omega^{(i)} \times (r^{(i)} - r_{0i}) = v_e^{(i)}$ — скорость точки в переносном движении; $\omega^{(i)} \times e^{(i)} = \dot{e}_e^{(i)}$ — скорость конца орта нормали в переносном движении; $\dot{e}_{ri} = \dot{e}_r^{(i)}$; $\ddot{e}_{ri} = \ddot{e}_r^{(i)}$. С учетом этого, уравнения (33.3) — (33.6) представим в таком виде:

$$v^{(i)} = v_r^{(i)} + v_e^{(i)}, \quad (33.7)$$

$$a^{(i)} = a_r^{(i)} + 2\omega^{(i)} \times v_r^{(i)} + \dot{\omega}^{(i)} \times v_e^{(i)} + \dot{\omega}^{(i)} \times (r^{(i)} - r_{0i}), \quad (33.8)$$

$$\dot{e}^{(i)} = \dot{e}_r^{(i)} + \dot{e}_e^{(i)}, \quad (33.9)$$

$$\ddot{e}^{(i)} = \ddot{e}_r^{(i)} + 2\omega^{(i)} \times \dot{e}_r^{(i)} + \dot{\omega}^{(i)} \times \dot{e}_e^{(i)} + \dot{\omega}^{(i)} \times e^{(i)}. \quad (33.10)$$

В точке касания поверхностей $r^{(1)} = r^{(2)}$ и $e^{(1)} = e^{(2)}$. Так как в процессе движения эти условия для точки касания непрерывно соблюдаются, т. е. $r^{(1)}(t) = r^{(2)}(t)$, $e^{(1)}(t) = e^{(2)}(t)$, то $\dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(2)}$, $\dot{e}^{(1)} = \dot{e}^{(2)}$, $a^{(1)} = a^{(2)}$, $\ddot{e}^{(1)} = \ddot{e}^{(2)}$.

Исходя из этого, можно получить следующие выражения:

$$v_r^{(2)} = v_r^{(1)} + v_e^{(1)} - v_e^{(2)} = v_r^{(1)} + v^{(12)}, \quad (33.11)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = \dot{e}_r^{(1)} + \omega^{(12)} \times e^{(1)}, \quad (33.12)$$

$$a_r^{(2)} = a_r^{(1)} + 2\omega^{(12)} \times v_r^{(1)} + \omega^{(12)} \times v_e^{(1)} - \omega^{(2)} \times v^{(12)} + \\ + \dot{\omega}^{(1)} \times (r^{(1)} - r_{01}) - \dot{\omega}^{(2)} \times (r^{(1)} - r_{02}), \quad (33.13)$$

$$\ddot{e}_r^{(2)} = \ddot{e}_r^{(1)} + 2\omega^{(12)} \times \dot{e}_r^{(1)} + \omega^{(1)} (\omega^{(12)} e^{(1)} - \omega^{(12)} (\omega^{(2)} e^{(1)} - \\ - e^{(1)} [\omega^{(12)}]^2 + (\dot{\omega}^{(1)} - \dot{\omega}^{(2)}) \times e^{(1)}). \quad (33.14)$$

Здесь $v^{(12)}$ — скорость относительного движения точки, жестко связанной с поверхностью Σ_1 , относительно такой же точки поверхности Σ_2 ; $\omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}$.

Ценность полученных выражений заключается в том, что, не составляя уравнений для Σ_2 и e_2 и не дифференцируя такие уравнения, мы можем скорость и ускорение точки и конца орта нормали при движении по Σ_2 выразить через соответствующие параметры движения точки по поверхности Σ_1 и параметры движения системы S_1 относительно S_2 . Это значительно упрощает выкладки, если принять во внимание, что уравнения поверхности Σ_2 оказываются, как правило, гораздо более сложными, чем Σ_1 . Выражения (33.11)–(33.14) можно распространить и на тот случай, когда поверхности Σ_1 и Σ_2 рассматриваются как огибающие соответственно производящих поверхностей P и F . Тогда параметры движения $v_r^{(i)}$, $\dot{e}_r^{(i)}$, $a_r^{(i)}$ и $\ddot{e}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) можно выразить через соответствующие параметры движения для производящей поверхности и параметры относительного движения системы $S_{P, F}$ относительно системы S_i .

Приведем теперь выражения для $v_r^{(1)}$, $a_r^{(1)}$, $\dot{e}_r^{(1)}$ и $\ddot{e}_r^{(1)}$, предполагая, что поверхность Σ_1 и орт нормали $e^{(1)}$ записаны в неподвижной системе координат следующими уравнениями:

$$r^{(1)} = r^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1), \quad (33.15)$$

$$e^{(1)} = e^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1). \quad (33.16)$$

Здесь u_1 и ϑ_1 — параметры поверхности Σ_1 , φ_1 — параметр движения.

Продифференцируем выражения (33.15) и (33.16), приняв, что $\varphi_1 = \text{const}$, так как определяются параметры движения точки и конца орта нормали в относительном движении, по поверхности Σ_1 . В результате получим

$$v_r^{(1)} = \frac{\partial r^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}, \quad (33.17)$$

$$a_r^{(1)} = \frac{\partial^2 r^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 r^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 r^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} \right)^2 + \\ + \frac{\partial r^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2}, \quad (33.18)$$

$$\dot{e}_r^{(1)} = \frac{\partial e^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial e^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}, \quad (33.19)$$

$$\ddot{e}_r^{(1)} = \frac{\partial^2 e^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 e^{(1)}}{\partial u_1 \partial \theta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial^2 e^{(1)}}{\partial \theta_1^2} \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + \\ + \frac{\partial e^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial e^{(1)}}{\partial \theta_1} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2}. \quad (33.20)$$

В точке контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 соблюдается условие

$$e^{(1)} v^{(12)} = e^{(1)} (\omega^{(12)} \times r^{(1)} - A \times \omega^{(2)}) = 0. \quad (33.21)$$

При записи этого уравнения принято, что $r_{01} = 0$ (начала систем координат S_1 и S совпадают), $r_{02} = A$, где A — кратчайшее расстояние между осями.

Продифференцируем уравнение (33.21) дважды, предполагая, что $\omega^{(1)} = \text{const}$, $\omega^{(2)} = \text{const}$, $A = \text{const}$, т. е. что вращение звеньев происходит с постоянными угловыми скоростями и при постоянном расстоянии A между осями. В результате получим

$$\dot{e}^{(1)} v^{(12)} + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, v^{(1)}] = 0, \quad (33.22)$$

$$\ddot{e}^{(1)} v^{(12)} + 2 [\dot{e}^{(1)}, \omega^{(12)}, v^{(1)}] + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, a^{(1)}] = 0. \quad (33.23)$$

Входящие в уравнения (33.22) и (33.23) $v^{(1)}$, $a^{(1)}$, $\dot{e}^{(1)}$ и $\ddot{e}^{(1)}$ определяются формулами, аналогичными (33.7)–(33.10). Зависимости (33.22) и (33.23) нужно рассматривать как уравнения связи между параметрами движения при соблюдении равенства нулю первой и второй производных передаточного отношения $i_{12} = \omega_1/\omega_2$, так как при дифференцировании (33.21) было принято, что $\dot{\omega}^{(i)} = 0$ и $\ddot{\omega}^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2$).

Следует различать особенности движения контактной точки при точечном и линейном касании поверхностей. При точечном касании поверхностей контактная точка перемещается в неподвижном пространстве не по поверхности зацепления, а по линии. Касательная к линии зацепления определяется вектором скорости абсолютного движения контактной точки

$$v^{(i)} = v_e^{(i)} + v_r^{(i)} \quad (i = 1, 2). \quad (33.24)$$

Линия зацепления однозначно определяется, если известны поверхности зубцов и схема механизма, поэтому вектор $v^{(i)}$ известен по направлению. Вектор скорости переносного движения $v_e^{(i)}$ полностью определен, если известны положение контактной точки и угловая скорость вращения i -го звена. Из этого следует, что векторы $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ скоростей перемещения контактной точки в относительном движении (по поверхностям зубцов), входящие в уравнения (32.22) и (32.24), имеют вполне определенные направления, направление хотя бы одного из них не может быть задано произвольно. Отметим, что векторы $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ совпадают с направлениями, касательными к рабочим линиям на поверхностях зубцов. Под рабочей линией понимается совокупность точек на поверхности, в которых в соответствующие моменты времени эта поверхность будет вступать в касание с сопрягаемой поверхностью.

Рассмотрим теперь случай линейного касания поверхностей. Пусть D — линия мгновенного контакта поверхностей зубцов Σ_1 и Σ_2 , а M — точка, выбранная из линии D (рис. 62, а). После бесконечно малых поворотов звеньев их поверхности вступают в касание линиями $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$. Вектор скорости перемещения контактной точки в абсолютном движении принадлежит касательной плоскости к поверхности зацепления и может

иметь различные направления в этой плоскости. При заданных движениях звеньев известны скорости $\mathbf{v}_e^{(1)}$ и $\mathbf{v}_e^{(2)}$ в переносных движениях и вектор скорости относительного движения звеньев $\mathbf{v}^{(12)}$. У векторов $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(2)}$, входящих в уравнение (33.11), направление одного из них может быть

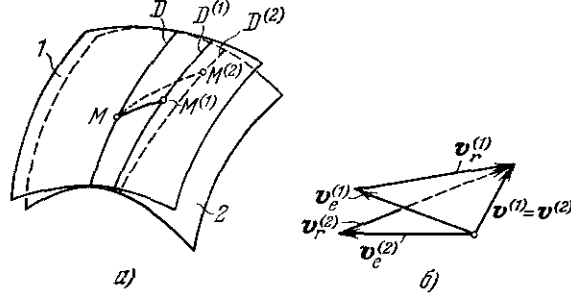


Рис 62.

выбрано произвольным. Это означает, что мы можем задаться направлением перемещения контактной точки по одной из двух поверхностей Σ_1 и Σ_2 , например, направлением перемещения $MM^{(1)}$ по поверхности Σ_1 (рис. 62, а). Направление же вектора $\mathbf{v}_r^{(2)}$ определится при этом однозначно из уравнения (33.11) либо исходя из того, что ско-

рость перемещения контактной точки в абсолютном движении одна и та же для обоих звеньев. Иными словами, определится из уравнения $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)}$, где $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_e^{(1)} - \mathbf{v}_r^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}_e^{(2)} + \mathbf{v}_r^{(2)}$.

На рис. 62, б построен план скоростей движения контактной точки, описываемый приведенными уравнениями.

Важно уяснить, что в общем случае векторы $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(2)}$ не коллинеарны. Исключением является тот единственный случай, когда один из пары векторов $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(2)}$ выбирается коллинеарным вектору скорости $\mathbf{v}^{(12)}$ относительного движения звеньев. Тогда, как это следует из уравнения (33.11), все три вектора, входящих в это уравнение, являются коллинеарными.

Найдем теперь параметры движения контактной точки в случае, если относительное движение звеньев определяется двумя независимыми параметрами φ и ψ . В системе координат S , жестко связанной со стойкой, поверхности зубцов и орты нормалей будут определены уравнениями:

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \varphi_i, \psi_i) \quad (i = 1, 2), \quad (33.25)$$

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \varphi_i, \psi_i) \quad (i = 1, 2), \quad (33.26)$$

где u_i и ϑ_i — параметры поверхности.

При двухпараметрическом характере относительного движения поверхности зубцов находятся в точечном касании. В точке касания поверхностей Σ_1 и Σ_2

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)}.$$

Продифференцируем уравнения (33.25) и (33.26), ограничившись лишь определением $\dot{\mathbf{r}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{e}}^{(1)}$:

$$\dot{\mathbf{r}}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt}, \quad (33.27)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt}. \quad (33.28)$$

Эти уравнения можно записать и в таком виде:

$$\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}_e^{(i, \varphi)} + \mathbf{v}_e^{(i, \psi)} + \mathbf{v}_r^{(i)}, \quad (33.29)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^{(i)} = \dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \varphi)} + \dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \psi)} + \mathbf{e}_r^{(i)}. \quad (33.30)$$

Здесь $\mathbf{v}_e^{(i, \varphi)}$ — скорость контактной точки в таком переносном движении вместе с поверхностью Σ_i , при котором параметр относительного движения φ изменяется, а другой параметр ψ зафиксирован ($\psi = \text{const}$); $\mathbf{v}_e^{(i, \psi)}$ — скорость переносного движения при фиксированном значении параметра φ ($\varphi = \text{const}$) и изменении параметра ψ ; $\mathbf{v}_r^{(i)}$ — скорость движения контактной точки по поверхности Σ_i ; $\mathbf{v}^{(i)}$ — скорость контактной точки в неподвижной системе координат S , связанной со стойкой. Аналогично $\dot{\mathbf{e}}^{(i)}$ — скорость конца орта нормали в абсолютном движении (в системе координат S); $\dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \varphi)}$ — скорость конца орта нормали в переносном движении при $\psi = \text{const}$; $\dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \psi)}$ — скорость в переносном движении при $\varphi = \text{const}$; $\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}$ — скорость конца орта нормали в относительном движении, по поверхности Σ_i . При этом

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_e^{(i, \varphi)} &= \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt}, & \mathbf{v}_e^{(i, \psi)} &= \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt}, \\ \mathbf{v}_r^{(i)} &= \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(i)}}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt}, \\ \dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \varphi)} &= \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt}, & \dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \psi)} &= \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{dt}, \\ \dot{\mathbf{e}}_r^{(i)} &= \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}^{(i)}}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt}.\end{aligned}$$

При дальнейших преобразованиях учтем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{v}^{(2)}, & \dot{\mathbf{e}}^{(1)} &= \dot{\mathbf{e}}^{(2)}, & \mathbf{v}_e^{(1, \varphi)} &= \mathbf{v}_e^{(2, \varphi)} = \mathbf{v}^{(12, \varphi)}, \\ \mathbf{v}_e^{(1, \psi)} &= \mathbf{v}_e^{(2, \psi)} = \mathbf{v}^{(12, \psi)}, & \dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \varphi)} &= \frac{d\varphi_i}{dt} \times \mathbf{e}^{(i)}, \\ \dot{\mathbf{e}}_e^{(i, \psi)} &= \frac{d\psi_i}{dt} \times \mathbf{e}^{(i)}, & \mathbf{e}^{(1)} &= \mathbf{e}^{(2)}.\end{aligned}$$

В результате получим

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12, \varphi)} + \mathbf{v}^{(12, \psi)}, \quad (33.31)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)} = \dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} + \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + \left(\frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\psi_2}{dt} \right) \right] \times \mathbf{e}^{(1)}. \quad (33.32)$$

Эти уравнения позволяют определить параметры движения $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}$ по поверхности Σ_2 , не прибегая к формальному составлению уравнений этой поверхности. При выводе уравнения (33.32) было принято, что оба параметра относительного движения — φ_i и ψ_i — определяют вращения звеньев. Если же одним из этих параметров, например ψ_i , определяется не поворот, а поступательное движение, в уравнении (33.32) нужно принять $d\psi_i/dt = 0$.

В. М а т р и ч н ы й с п о с о б

Рассмотрим сначала случай, когда относительное движение определяется одним параметром. Пусть в системах S_1 и S_2 заданы уравнения поверхностей зубцов и орты нормалей

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(u_i, \vartheta_i) & (i = 1, 2), \\ \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i(u_i, \vartheta_i) & (i = 1, 2).\end{aligned}$$

Звенья 1 и 2 вращаются с угловыми скоростями $\omega^{(1)} = d\varphi_1/dt$ и $\omega^{(2)} = d\varphi_2/dt$ вокруг осей z_1 и z_2 (см. рис. 45).

В системе S столбцевые матрицы радиусов-векторов и оргов нормалей к поверхностям определяются уравнениями:

$$r^{(1)} = M_{01}r_1, \quad (33.33)$$

$$e^{(1)} = L_{01}e_1, \quad (33.34)$$

$$r^{(2)} = M_{02}r_2, \quad (33.35)$$

$$e^{(2)} = L_{02}e_2. \quad (33.36)$$

Напомним, что матрицы L_{01} и L_{02} получаются из матриц M_{01} и M_{02} , если в последних зачеркнуть четвертую строку и четвертый столбец.

Для того чтобы найти столбцевые матрицы скорости движения $\dot{r}^{(i)}$ контактной точки и скорости $\dot{e}^{(i)}$ конца орта нормали в системе S , продифференцируем уравнения (33.33) — (33.36):

$$\dot{r}^{(1)} = \frac{dM_{01}}{dt} r_1 + M_{01}\dot{r}_1, \quad (33.37)$$

$$\dot{e}^{(1)} = \frac{dL_{01}}{dt} e_1 + L_{01}\dot{e}_1, \quad (33.38)$$

$$\dot{r}^{(2)} = \frac{dM_{02}}{dt} r_2 + M_{02}\dot{r}_2, \quad (33.39)$$

$$\dot{e}^{(2)} = \frac{dL_{02}}{dt} e_2 + L_{02}\dot{e}_2. \quad (33.40)$$

Во избежание недоразумений отметим, что в уравнениях (33.37), (33.39) столбцевые матрицы должны быть записаны в однородных координатах.

Учитывая, что $r_1 = M_{10}r^{(1)}$, $e_1 = L_{10}e^{(1)}$, $r_2 = M_{20}r^{(2)}$, $e_2 = L_{20}e^{(2)}$, после некоторых преобразований полученные выражения представим в таком виде:

$$v^{(1)} = \dot{r}^{(1)} = \frac{dM_{01}}{dt} M_{10}r^{(1)} + v_r^{(1)}, \quad (33.41)$$

где $v_r^{(1)} = M_{01}\dot{r}_1$ — столбцевая матрица скорости движения контактной точки по поверхности Σ_1 , записанная в системе S .

$$\dot{e}^{(1)} = \frac{dL_{01}}{dt} L_{10}e^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)}, \quad (33.42)$$

где $\dot{e}_r^{(1)} = L_{01}\dot{e}_1$ — столбцевая матрица скорости конца орта нормали в системе S при движении контактной точки по поверхности Σ_1 .

$$v^{(2)} = \dot{r}^{(2)} = \frac{dM_{02}}{dt} M_{20}r^{(2)} + v_r^{(2)}, \quad (33.43)$$

$$\dot{e}^{(2)} = \frac{dL_{02}}{dt} L_{20}e^{(2)} + \dot{e}_r^{(2)}. \quad (33.44)$$

В точке касания поверхностей $r^{(1)} = r^{(2)}$, $e^{(1)} = e^{(2)}$. Перемещения в системе S для точек контакта и оргов нормалей должны быть одинаковы, поэтому $\dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(2)}$, $\dot{e}^{(1)} = \dot{e}^{(2)}$. С учетом этого получим

$$v_r^{(2)} = \left(\frac{dM_{01}}{dt} M_{10} - \frac{dM_{02}}{dt} M_{20} \right) r^{(1)} + v_r^{(1)}, \quad (33.45)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = \left(\frac{dL_{01}}{dt} L_{10} - \frac{dL_{02}}{dt} L_{20} \right) e^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)}. \quad (33.46)$$

Используя формулу (24.18), эти уравнения можно представить и в таком виде:

$$v_r^{(2)} = (P_0^{(10)} - P_0^{(20)}) r^{(1)} + v_r^{(1)} = P_0^{(12)} r^{(1)} + v_r^{(1)}, \quad (33.47)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = (\tilde{P}_0^{(10)} - \tilde{P}_0^{(20)}) e^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)} = \tilde{P}_0^{(12)} e^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)}. \quad (33.48)$$

Матрица $\tilde{P}$ получается из матрицы P , если вычеркнуть в последней четвертую строку и четвертый столбец. Легко убедиться, что

$$P_0^{(12)} r^{(1)} = v^{(12)},$$

где $v^{(12)}$ — столбцовая матрица скорости относительного движения звеньев 1 и 2 в системе S .

Приведем выражения для столбцовых матриц $v_r^{(1)}$ и $\dot{e}_r^{(1)}$.

Поверхность Σ_1 в системе S при однородных координатах определяется уравнениями:

$$x^{(1)} = x^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1),$$

$$y^{(1)} = y^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1),$$

$$z^{(1)} = z^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1),$$

$$t^{(1)} = t.$$

При движении точки по поверхности Σ_1 параметр движения φ_1 остается постоянным и

$$v_r^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} \\ \frac{\partial y^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial y^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} \\ \frac{\partial z^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (33.49)$$

Орт нормали $e^{(1)}$ определяется уравнением (33.16), и столбцовая матрица

$$\dot{e}_r^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial e_x^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} \\ \frac{\partial e_y^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial e_y^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} \\ \frac{\partial e_z^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial e_z^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} \end{bmatrix}. \quad (33.50)$$

Найдем теперь выражения для ускорения в системе S контактной точки и ускорения конца орта нормали. Продифференцировав выражения (33.33) — (33.36), получим

$$\ddot{r}^{(1)} = \frac{d^2 M_{01}}{dt^2} r_1 + 2 \frac{dM_{01}}{dt} \dot{r}_1 + M_{01} \ddot{r}_1, \quad (33.51)$$

$$\ddot{e}^{(1)} = \frac{d^2 L_{01}}{dt^2} e_1 + 2 \frac{dL_{01}}{dt} \dot{e}_1 + L_{01} \ddot{e}_1, \quad (33.52)$$

$$\ddot{r}^{(2)} = \frac{d^2 M_{02}}{dt^2} r_2 + 2 \frac{dM_{02}}{dt} \dot{r}_2 + M_{02} \ddot{r}_2, \quad (33.53)$$

$$\ddot{e}^{(2)} = \frac{d^2 L_{02}}{dt^2} e_2 + 2 \frac{dL_{02}}{dt} \dot{e}_2 + L_{02} \ddot{e}_2. \quad (33.54)$$

При выполнении дальнейших преобразований используем следующие зависимости и обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M_{01}}{dt^2} r_1 &= \frac{d^2 M_{01}}{dt^2} M_{10} r^{(1)}, \\ \frac{dM_{01}}{dt} \dot{r}_1 &= \frac{dM_{01}}{dt} v_{r1} = \frac{dM_{01}}{dt} M_{10} v_r^{(1)} = P_0^{(10)} v_r^{(1)}, \\ M_{01} \ddot{r}_1 &= a_r^{(1)}, \quad \frac{d^2 L_{01}}{dt^2} e_1 = \frac{d^2 L_{01}}{dt^2} L_{10} e^{(1)}, \\ \frac{dL_{01}}{dt} \dot{e}_1 &= \frac{dL_{01}}{dt} \dot{e}_{r1} = \frac{dL_{01}}{dt} L_{10} \dot{e}_r^{(1)} = \tilde{P}_0^{(10)} \dot{e}_r^{(1)}\end{aligned}$$

и т. д.

Уравнения (33.51) — (33.54) запишем теперь в такой форме

$$a^{(1)} = \ddot{r}^{(1)} = \frac{d^2 M_{01}}{dt^2} M_{10} r^{(1)} + 2P_0^{(10)} v_r^{(1)} + a_r^{(1)}, \quad (33.55)$$

$$\dot{e}^{(1)} = \frac{d^2 L_{01}}{dt^2} L_{10} e^{(1)} + 2\tilde{P}_0^{(10)} \dot{e}_r^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)}, \quad (33.56)$$

$$a^{(2)} = \ddot{r}^{(2)} = \frac{d^2 M_{02}}{dt^2} M_{20} r^{(2)} + 2P_0^{(20)} v_r^{(2)} + a_r^{(2)}, \quad (33.57)$$

$$\dot{e}^{(2)} = \frac{d^2 L_{02}}{dt^2} L_{20} e^{(2)} + 2\tilde{P}_0^{(20)} \dot{e}_r^{(2)} + \dot{e}_r^{(2)}. \quad (33.58)$$

В приведенных уравнениях приняты такие обозначения: $a^{(i)} = \ddot{r}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) — столбцовая матрица ускорения контактной точки в абсолютном движении в системе S ; $v_r^{(i)}$ и $a_r^{(i)}$ — записанные в системе S столбцовые матрицы скорости и ускорения контактной точки при движении ее по поверхности Σ_i ; $\dot{e}^{(i)}$, $\dot{e}_r^{(i)}$ — столбцовые матрицы в системе S ускорения конца орта нормали в абсолютном движении и при движении по поверхности Σ_i ; $\dot{e}_r^{(i)}$ — столбцовая матрица скорости конца орта нормали в системе S при движении по поверхности Σ_i . После преобразований, учитывая, что $a^{(2)} = a^{(1)}$, $\dot{e}^{(2)} = \dot{e}^{(1)}$, $r^{(1)} = r^{(2)}$, $e^{(1)} = e^{(2)}$, получим

$$a_r^{(2)} = \left(\frac{d^2 M_{01}}{dt^2} M_{10} - \frac{d^2 M_{02}}{dt^2} M_{20} \right) r^{(1)} + 2(P_0^{(10)} v_r^{(1)} - P_0^{(20)} v_r^{(2)}) + a_r^{(1)}, \quad (33.59)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = \left(\frac{d^2 L_{01}}{dt^2} L_{10} - \frac{d^2 L_{02}}{dt^2} L_{20} \right) e^{(1)} + 2(\tilde{P}_0^{(10)} \dot{e}_r^{(1)} - \tilde{P}_0^{(20)} \dot{e}_r^{(2)}) + \dot{e}_r^{(1)}. \quad (33.60)$$

Подставим в зависимости (33.59) и (33.60) соответственно выражения (33.47) и (33.48), после чего получим

$$a_r^{(2)} = \left(\frac{d^2 M_{01}}{dt^2} M_{10} - \frac{d^2 M_{02}}{dt^2} M_{20} - 2P_0^{(20)} P_0^{(12)} \right) r^{(1)} + 2P_0^{(12)} v_r^{(1)} + a_r^{(1)}, \quad (33.61)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = \left(\frac{d^2 L_{01}}{dt^2} L_{10} - \frac{d^2 L_{02}}{dt^2} L_{20} - 2\tilde{P}_0^{(20)} \tilde{P}_0^{(12)} \right) e^{(1)} + 2\tilde{P}_0^{(12)} \dot{e}_r^{(1)} + \dot{e}_r^{(1)}. \quad (33.62)$$

На основании формулы (24.24)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M_{01}}{dt^2} M_{10} &= [P_0^{(10)}]^2 + A_0^{(10)}, & \frac{d^2 M_{02}}{dt^2} M_{20} &= [P_0^{(20)}]^2 + A_0^{(20)}, \\ \frac{d^2 L_{01}}{dt^2} L_{10} &= [\tilde{P}_0^{(10)}]^2 + \tilde{A}_0^{(10)}, & \frac{d^2 L_{02}}{dt^2} L_{20} &= [\tilde{P}_0^{(20)}]^2 + \tilde{A}_0^{(20)}.\end{aligned}$$

Используя приведенные выражения, формулы (33.61) и (33.62) представим в таком виде:

$$a_r^{(2)} = \{[P_0^{(10)}]^2 + A_0^{(10)} - [P_0^{(20)}]^2 - A_0^{(20)} - 2P_0^{(20)}P_0^{(12)}\} r^{(1)} + 2P_0^{(12)}v_r^{(1)} + a_r^{(1)}, \quad (33.63)$$

$$\ddot{e}_r^{(2)} = \{[\tilde{P}_0^{(10)}]^2 + \tilde{A}_0^{(10)} - [\tilde{P}_0^{(20)}]^2 - \tilde{A}_0^{(20)} - 2\tilde{P}_0^{(20)}\tilde{P}_0^{(12)}\} e^{(1)} + 2\tilde{P}_0^{(12)}\dot{e}_r^{(1)} + \ddot{e}_r^{(1)}. \quad (33.64)$$

Столбцовые матрицы $a_r^{(1)}$ и $\ddot{e}_r^{(1)}$ имеют следующие выражения:

$$a_r^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial x^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial y^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial y^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (33.65)$$

$$\ddot{e}_r^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e_x^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 e_x^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 e_x^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial e_x^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial e_x^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 e_y^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 e_y^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 e_y^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial e_y^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial e_y^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 e_z^{(1)}}{\partial u_1^2} \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 e_z^{(1)}}{\partial u_1 \partial \vartheta_1} \frac{du_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial^2 e_z^{(1)}}{\partial \vartheta_1^2} \left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial e_z^{(1)}}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{\partial e_z^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} \end{pmatrix}. \quad (33.66)$$

Рассмотрим теперь случай, когда относительное движение звеньев определяется не одним, а двумя независимыми параметрами.

В исходных уравнениях (33.37) — (33.40) нужно принять, что

$$\begin{aligned} \frac{dM_{01}}{dt} &= \frac{\partial M_{01}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial M_{01}}{\partial \psi_1} \frac{d\psi_1}{dt}, \\ \frac{dL_{01}}{dt} &= \frac{\partial L_{01}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial L_{01}}{\partial \psi_1} \frac{d\psi_1}{dt}, \\ \frac{dM_{02}}{dt} &= \frac{\partial M_{02}}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\partial M_{02}}{\partial \psi_2} \frac{d\psi_2}{dt}, \\ \frac{dL_{02}}{dt} &= \frac{\partial L_{02}}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\partial L_{02}}{\partial \psi_2} \frac{d\psi_2}{dt}. \end{aligned}$$

Проделив дальнейшие выводы, аналогично уравнениям (33.47) и (33.48) получим следующие зависимости:

$$v_r^{(2)} = (P_0^{(12, \varphi)} + P_0^{(12, \psi)}) v_r^{(1)}, \quad (33.67)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = (\tilde{P}_0^{(12, \varphi)} + \tilde{P}_0^{(12, \psi)}) \dot{e}_r^{(1)}. \quad (33.68)$$

Здесь

$$P_0^{(12, \varphi)} = P_0^{(10, \varphi_1)} - P_0^{(20, \varphi_2)} = \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial M_{01}}{\partial \varphi_1} M_{10} - \frac{d\varphi_2}{dt} \frac{\partial M_{02}}{\partial \varphi_2} M_{20},$$

$$P_0^{(12, \psi)} = P_0^{(10, \psi_1)} - P_0^{(20, \psi_2)} = \frac{d\psi_1}{dt} \frac{\partial M_{01}}{\partial \psi_1} M_{10} - \frac{d\psi_2}{dt} \frac{\partial M_{02}}{\partial \psi_2} M_{20}.$$

Матрицы $\tilde{P}_0^{(12, \varphi)}$ и $\tilde{P}_0^{(12, \psi)}$ должны быть получены из матриц $P_0^{(12, \varphi)}$ и $P_0^{(12, \psi)}$, для чего в последних нужно зачеркнуть четвертую строку и четвертый столбец. Таким же образом можно было бы получить уравнения, аналогичные (33.59) и (33.60). Так как при двухпараметрическом огибании такие уравнения используются, по нашему мнению, довольно редко, их вывод в книге опущен.

Пример 14. Найдём векторы ускорения $a_r^{(2)}$ и $\dot{e}_r^{(2)}$ при движении контактной точки по поверхности Σ_2 для передачи со скрещивающимися осями (см. рис. 45).

Воспользуемся формулами (33.63) и (33.64). Основываясь на материалах § 24, составим выражения матриц с компонентами скоростей и ускорений

$$P_0^{(10)} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$P_0^{(20)} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_2 \cos \gamma & \omega_2 \sin \gamma & 0 \\ \omega_2 \cos \gamma & 0 & 0 & A\omega_2 \cos \gamma \\ -\omega_2 \sin \gamma & 0 & 0 & -A\omega_2 \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$P_0^{(12)} = \begin{vmatrix} 0 & -(\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) & -\omega_2 \sin \gamma & 0 \\ \omega_1 - \omega_2 \cos \gamma & 0 & 0 & -A\omega_2 \cos \gamma \\ \omega_2 \sin \gamma & 0 & 0 & A\omega_2 \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как вращения звеньев происходят с постоянными скоростями и при постоянном расстоянии между осями вращения звеньев, матрицы $A_0^{(10)}$ и $A_0^{(20)}$, содержащиеся в уравнении (33.63), равны нулю.

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} a_{xr}^{(2)} &= -x^{(1)} (\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma + \omega_2^2) - A\omega_2^2 - 2v_{yr}^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - 2v_{zr}^{(1)} \omega_2 \sin \gamma + a_{xr}^{(1)}, \\ a_{yr}^{(2)} &= -y^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma)^2 + z^{(1)} \omega_2^2 \sin \gamma \cos \gamma + 2v_{xr}^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) + a_{yr}^{(1)}, \\ a_{zr}^{(2)} &= -y^{(1)} \omega_2 \sin \gamma (2\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - z^{(1)} \omega_2^2 \sin^2 \gamma + 2v_{xr}^{(1)} \omega_2 \sin \gamma + a_{zr}^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (33.69)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{e}_{xr}^{(2)} &= -\dot{e}_x^{(1)} (\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma + \omega_2^2) - 2\dot{e}_{yr}^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - 2\dot{e}_{zr}^{(1)} \omega_2 \sin \gamma + \ddot{e}_{xr}^{(1)}, \\ \ddot{e}_{yr}^{(2)} &= -\dot{e}_y^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma)^2 + \dot{e}_z^{(1)} \omega_2^2 \sin \gamma \cos \gamma + 2\dot{e}_{xr}^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) + \ddot{e}_{yr}^{(1)}, \\ \ddot{e}_{zr}^{(2)} &= -\dot{e}_y^{(1)} \omega_2 \sin \gamma (2\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - \dot{e}_z^{(1)} \omega_2^2 \sin^2 \gamma + 2\dot{e}_{xr}^{(1)} \omega_2 \sin \gamma + \ddot{e}_{zr}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (33.70)$$

§ 34. Кривизны поверхностей зубцов при однопараметрическом огибании

А. И с х о д н ы е ф о р м у л ы

1°. Кривизна поверхности в нормальном сечении плоскостью, проведенной через нормаль к поверхности, определяется в дифференциальной геометрии посредством квадратичных форм Гаусса [105, 227]. Обычно уравнения огибающей поверхности являются значительно более сложными, чем уравнения огибаемой поверхности. Поэтому определение кривизны огибающей поверхности представляет значительные трудности по сравнению с нахождением кривизны огибаемой поверхности.

В работе Н. И. Колчина [122] для решения такой задачи была использована связь между элементами первого и второго порядков для взаимно-огибаемых поверхностей.

В настоящем параграфе кривизну огибающей поверхности предлагается определять через кривизну огибаемой поверхности и параметры движения. Это существенно упрощает выкладки и избавляет от необходимости составления уравнений огибающей поверхности.

Основываясь на материалах, приводимых в дифференциальной геометрии [227], приведем две формулы для определения кривизны поверхности в нормальном сечении, проведенном через вектор $\mathbf{v}_r^{(1)}$:

$$\kappa^{(i)} = \frac{\mathbf{a}_r^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}}{[\mathbf{v}_r^{(i)}]^2}, \quad (34.1)$$

$$\kappa^{(i)} = - \frac{\mathbf{v}_r^{(i)} \dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}}{[\mathbf{v}_r^{(i)}]^2}. \quad (34.2)$$

Здесь $\mathbf{v}_r^{(i)}$ и $\mathbf{a}_r^{(i)}$ — скорость и ускорение точки при движении ее по поверхности Σ_i ; $\mathbf{e}^{(i)}$ — орт нормали к поверхности Σ_i , $\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}$ — скорость конца орта нормали при движении точки по поверхности. Переход от формулы (34.1) к (34.2) может быть произведен на основании следующих соображений. Скорость $\mathbf{v}_r^{(i)}$ движения точки принадлежит касательной плоскости к поверхности. Следовательно,

$$\mathbf{v}_r^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} = 0. \quad (34.3)$$

Продифференцируем зависимость (34.3):

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_r^{(i)}) \mathbf{e}^{(i)} + \mathbf{v}_r^{(i)} \frac{d}{dt} (\mathbf{e}^{(i)}) = \mathbf{a}_r^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} + \mathbf{v}_r^{(i)} \dot{\mathbf{e}}_r^{(i)} = 0. \quad (34.4)$$

Индекс r указывает, что рассматривается движение точки и орта нормали по поверхности. Следовательно,

$$\mathbf{a}_r^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} = - \mathbf{v}_r^{(i)} \dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}. \quad (34.5)$$

Положительный знак для кривизны $\kappa^{(i)}$ указывает, что радиус кривизны имеет то же направление, что орт нормали $\mathbf{e}^{(i)}$.

Для вычислительной практики более удобной является формула (34.2), которой мы и будем пользоваться в последующем.

Кривизна огибаемой поверхности Σ_1 вычисляется непосредственно из формулы (34.2); выражения (33.17) и (33.19) для $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$ были приведены ранее.

Для определения кривизны огибающей поверхности Σ_2 также будем пользоваться формулой (34.2), согласно которой

$$\kappa^{(2)} = -\frac{\mathbf{v}_r^{(2)} \dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}}{[\mathbf{v}_r^{(2)}]^2}. \quad (34.6)$$

Однако, $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}$, не составляя формально уравнений Σ_2 , будем находить через $\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и параметры переносных движений звеньев 1 и 2. Соответствующие формулы для определения $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}$ были приведены в § 33.

В случае, когда относительное движение взаимоогibaемых поверхностей Σ_1 и Σ_2 определяется одним параметром, кривизна $\kappa^{(2)}$ на основании (34.6), (33.11) и (33.12) определяется уравнением

$$\kappa^{(2)} = -\frac{\mathbf{v}_r^{(2)} \dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}}{[\mathbf{v}_r^{(2)}]^2} = -\frac{[\mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)}] [\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} + (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{e}^{(1)}]}{[\mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)}]^2}. \quad (34.7)$$

Для определения главной кривизны $\kappa_{I, II}^{(i)}$ на поверхности Σ_i будем пользоваться формулой Родрига, согласно которой

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)} = -\kappa_{I, II}^{(i)} \mathbf{v}_r^{(i)} \quad (i = 1, 2), \quad (34.8)$$

где I, II — индексы главных направлений.

Главное направление определяется из условия коллинеарности векторов $\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}$ и $\mathbf{v}_r^{(i)}$, и для этого используются зависимости

$$\frac{\dot{\mathbf{e}}_{xr}^{(i)}}{v_{xr}^{(i)}} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{yr}^{(i)}}{v_{yr}^{(i)}} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(i)}}{v_{zr}^{(i)}}. \quad (34.9)$$

2°. В выражения (33.17) и (33.19) для $\mathbf{r}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$ входят производные du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$ (u_1 и ϑ_1 — параметры поверхности). В § 30 было показано, что параметры поверхности u_1 и ϑ_1 и параметр относительного движения φ_1 для точек линии контакта поверхностей связаны уравнением

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0. \quad (34.10)$$

Дифференцируя (34.10), получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = 0. \quad (34.11)$$

Отношение производных du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$ определяет направление перемещения точки по огибаемой поверхности Σ_1 . Для определения этого отношения можно задаться любым значением $d\varphi_1/dt$ и искать отношение $(du_1/dt) : (d\vartheta_1/dt)$ из уравнения (34.11), соответствующее направлению вектора $\mathbf{v}_r^{(1)}$.

3°. В ряде случаев для определения $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$ целесообразно воспользоваться приводимыми ниже выражениями, не содержащими в явном виде производные du/dt и $d\vartheta/dt$.

Будем считать известными главные направления и главные кривизны огибаемой поверхности Σ_1 . Уравнение зацепления используем в такой форме:

$$\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{e}^{(1)} (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)}) = 0, \quad (34.12)$$

где $\boldsymbol{\omega}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}$, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки приложения вектора $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$.

Продифференцируем уравнение зацепления при следующих предположениях: а) $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \text{const}$; б) передаточное отношение постоянно, поэто-

му при $\omega^{(1)} = \text{const}$ вектор $\omega^{(2)}$ также постоянен; в) расстояние между осями вращения постоянно, поэтому $R = \text{const}$.

Продифференцировав уравнение зацепления (34.12), найдем

$$\dot{e}^{(1)} v^{(12)} + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, \dot{r}^{(1)}] = 0. \quad (34.13)$$

Преобразуем уравнение (34.13) с помощью формул (33.3) и (33.5), учтя при этом, что вектор $\omega^{(1)}$ проходит через начало координат.

В результате получим

$$\dot{e}_r^{(1)} v^{(12)} + [\omega^{(1)}, e^{(1)}, v^{(12)}] + v_r^{(1)} (e^{(1)} \times \omega^{(12)}) + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(1)}] = 0. \quad (34.14)$$

Разложим векторы $\dot{e}_r^{(1)}$, $v_r^{(1)}$ и $v^{(12)}$ уравнения (34.14) на составляющие, линиями действия которых являются главные направления I и II поверхности Σ_1 . Главные кривизны на указанных направлениях обозначим через $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_{II}^{(1)}$. Орты осей, определяющих направления I и II, обозначим через i_I и i_{II} ; при этом

$$i_I = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \quad (34.15)$$

$$i_{II} = \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k. \quad (34.16)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — косинусы углов, образуемых ортом i_I с осями системы координат S ; соответственно $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — косинусы углов, образуемых ортом i_{II} с осями той же системы координат S . Орты i_I и i_{II} лежат в плоскости, касательной к поверхности Σ_1 в рассматриваемой точке контакта. С учетом сказанного уравнение (34.14) представим в таком виде:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{rI}^{(1)} v_I^{(12)} + \dot{e}_{rII}^{(1)} v_{II}^{(12)} + v_{rI}^{(1)} (e^{(1)} \times \omega^{(12)})_I + v_{rII}^{(1)} (e^{(1)} \times \omega^{(12)})_{II} + \\ + [\omega^{(1)}, e^{(1)}, v^{(12)}] + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(1)}] = 0. \end{aligned} \quad (34.17)$$

При этих записях принято, что

$$\begin{aligned} v_r^{(1)} = v_{rI} i_I + v_{rII} i_{II}, \quad \dot{e}_r^{(1)} = \dot{e}_{rI} i_I + \dot{e}_{rII} i_{II}, \\ v^{(12)} = v_I^{(12)} i_I + v_{II}^{(12)} i_{II}, \quad (e^{(1)} \times \omega^{(12)})_I = (e^{(1)} \times \omega^{(12)}) i_I, \\ (e^{(1)} \times \omega^{(12)})_{II} = (e^{(1)} \times \omega^{(12)}) i_{II}. \end{aligned}$$

Напомним, что векторы $\dot{e}_r^{(1)}$, $v_r^{(1)}$, $v^{(12)}$, i_I и i_{II} принадлежат касательной плоскости к поверхностям зубцов.

На главных направлениях согласно формуле (34.8)

$$\dot{e}_{rI}^{(1)} = -\kappa_I^{(1)} v_{rI}^{(1)}, \quad \dot{e}_{rII}^{(1)} = -\kappa_{II}^{(1)} v_{rII}^{(1)}. \quad (34.18)$$

Подставив выражения (34.18) в формулу (34.17), получим

$$\begin{aligned} v_{rI}^{(1)} [(e^{(1)} \times \omega^{(12)})_I - \kappa_I^{(1)} v_I^{(12)}] + v_{rII}^{(1)} [(e^{(1)} \times \omega^{(12)})_{II} - \kappa_{II}^{(1)} v_{II}^{(12)}] + \\ + [\omega^{(1)}, e^{(1)}, v^{(12)}] + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(1)}] = 0. \end{aligned} \quad (34.19)$$

Для определения $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ из зависимости (34.19) достаточно задать направлением $v_r^{(1)}$ скорости перемещения точки контакта по огибаемой поверхности. Обозначим $v_{rII}^{(1)}/v_{rI}^{(1)} = \text{tg } q$, где q — угол, образуемый $v_r^{(1)}$ с ортом i_I главного направления. Тогда

$$\begin{aligned} v_{rI}^{(1)} \{[(e^{(1)} \times \omega^{(12)})_I - \kappa_I^{(1)} v_I^{(12)}] + \text{tg } q [(e^{(1)} \times \omega^{(12)})_{II} - \kappa_{II}^{(1)} v_{II}^{(12)}]\} + \\ + [\omega^{(1)}, e^{(1)}, v^{(12)}] + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(1)}] = 0. \end{aligned} \quad (34.20)$$

Уравнения (34.19) и (34.20) могут быть, как будет показано ниже, с успехом использованы для определения главных кривизн огибающей

поверхности Σ_2 , нормальной кривизны $\kappa^{(2)}$ в сечении, проведенном через вектор относительной скорости, и в сечении, проведенном через касательную к характеристике. Эти уравнения целесообразно также использовать для определения нормальной кривизны поверхности Σ_2 при следующих предположениях: а) точка контакта движется на поверхности Σ_1 по главному направлению $I^{(1)}$; б) точка контакта движется на поверхности Σ_1 по главному направлению $II^{(1)}$. Через $I^{(1)}$ и $II^{(1)}$ обозначены главные направления на поверхности Σ_1 . Приведем формулы для вычисления нормальной кривизны для указанных двух случаев, приняв, что рассматривается механизм с пересекающимися осями и точка контакта принадлежит мгновенной оси вращения.

В первом случае, когда точка контакта движется на поверхности Σ_1 по направлению $I^{(1)}$, $v_{rII}^{(1)} = 0$,

$$v_{rI}^{(1)} = - \frac{[e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(1)}]}{(e^{(1)} \times \omega^{(12)}) \cdot \dot{t}_I}, \quad (34.21)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{I(1)}^{(2)} &= - \frac{[e_{rI}^{(1)} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)}) \cdot \dot{t}_I]}{v_{rI}^{(1)}} = \\ &= \kappa_I^{(1)} - \frac{(\omega^{(12)} \times e^{(1)}) \cdot \dot{t}_I}{v_{rI}} = \kappa_I^{(1)} - \frac{[(e^{(1)} \times \omega^{(12)}) \cdot \dot{t}_I]^2}{(e^{(1)} \times \omega^{(12)}) \cdot v_e^{(1)}}. \end{aligned} \quad (34.22)$$

Здесь $\kappa_{I(1)}^{(2)}$ — нормальная кривизна поверхности Σ_2 в сечении, проведенном через главное направление $I^{(1)}$ поверхности Σ_1 .

Аналогичным образом для случая, когда точка контакта движется на поверхности Σ_1 по главному направлению $II^{(1)}$, получим

$$v_{rII}^{(1)} = - \frac{[e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(1)}]}{(e^{(1)} \times \omega^{(12)}) \cdot \dot{t}_{II}}, \quad (34.23)$$

$$\kappa_{II(1)}^{(2)} = \kappa_{II}^{(1)} - \frac{[(e^{(1)} \times \omega^{(12)}) \cdot \dot{t}_{II}]^2}{(e^{(1)} \times \omega^{(12)}) \cdot v_e^{(1)}}. \quad (34.24)$$

Приведенные формулы будут использованы в примере 15 для определения кривизн поверхности Σ_2 конического колеса с круговыми зубцами и постоянной высотой ножки.

4°. В дальнейшем мы используем формулу Эйлера, связывающую главные кривизны и нормальную кривизну в заданном сечении. Согласно этой формуле

$$\kappa = \kappa_I \cos^2 q + \kappa_{II} \sin^2 q, \quad (34.25)$$

где κ_I и κ_{II} — главные кривизны, κ — нормальная кривизна, q — угол между главным направлением с кривизной κ_I и плоскостью нормального сечения с кривизной κ .

Легко установить, что сумма нормальных кривизн в двух взаимно перпендикулярных сечениях равна сумме главных кривизн.

Произведение главных кривизн в данной точке поверхности называется полной или гауссовой кривизной

$$K = \kappa_I \kappa_{II}. \quad (34.26)$$

В дифференциальной геометрии различаются три типа точек поверхности:

1) Эллиптическая точка (гауссова кривизна $K > 0$). При $K = \kappa_I \kappa_{II} > 0$ главные кривизны одного знака и радиусы кривизн глав-

ных направлений одинаково расположены по отношению к орту нормали (рис. 63, а, б). В окрестности эллиптической точки кривизна в любом нормальном сечении такого же знака, как и главные кривизны.

2) Гиперболическая точка (гауссова кривизна $K < 0$). Так как $K = \kappa_I \kappa_{II} < 0$, то главные кривизны κ_I и κ_{II} отличаются по знаку и радиусы главных кривизн расположены по отношению к орту нормали различно (рис. 63, в). В окрестности гиперболической точки при $0 \leq q \leq \pi/2$

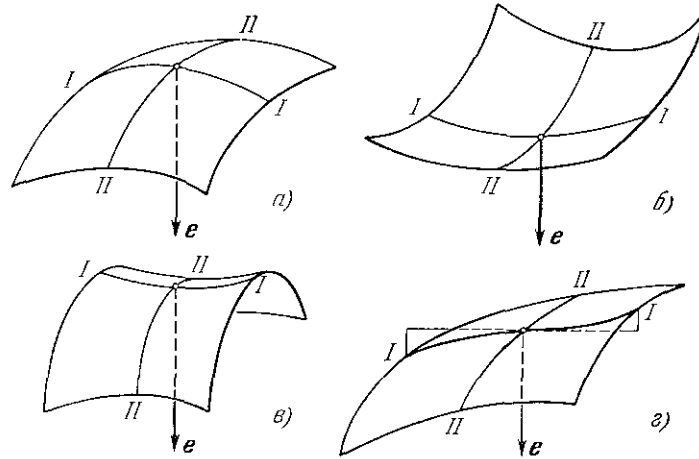


Рис. 63.

кривизна нормального сечения изменяется по знаку, достигая при некоторой величине q нулевого значения. Такие направления, на которых $\kappa = 0$, называются асимптотическими и определяются на основании формулы (34.25) так:

$$\operatorname{tg} q = \pm \sqrt{-\frac{\kappa_I}{\kappa_{II}}}. \quad (34.27)$$

3) Параболическая точка (гауссова кривизна $K = 0$). За исключением точки закругления, у которой $\kappa_I = \kappa_{II} = 0$, у параболической точки одна из главных кривизн равна нулю (рис. 63, г). Асимптотическое направление совпадает с одним из главных направлений — $I—I$ на рис. 63, г.

В. Зависимость между нормальными кривизнами $\kappa^{(1)}$ и $\kappa^{(2)}$

В общем случае нормальные кривизны $\kappa^{(1)}$ и $\kappa^{(2)}$ определяются в различных, не совпадающих друг с другом, нормальных сечениях.

Зависимость между нормальными кривизнами определяется уравнением

$$\kappa^{(2)} [v_r^{(1)} + v^{(12)}]^2 - \kappa^{(1)} [v_r^{(1)}]^2 + [(v_r^{(1)} + v^{(12)}), \omega^{(12)}, e^{(1)}] + v^{(12)} \dot{e}_r^{(1)} = 0. \quad (34.28)$$

Эта зависимость получена на основании формулы (34.7) и пригодна для передач как с переменным, так и с постоянным передаточным отношением.

Постоянство передаточного отношения накладывает дополнительную связь между нормальными кривизнами.

Рассмотрим совместно уравнения (34.28) и (34.14).

В итоге получим

$$\kappa^{(2)} [v_r^{(1)} + v^{(12)}]^2 - \kappa^{(1)} [v_r^{(1)}]^2 - [\omega^{(1)}, e^{(1)}, v^{(12)}] + [\omega^{(12)}, e^{(1)}, (2v_r^{(1)} + v_e^{(1)} + v^{(12)})] = 0. \quad (34.29)$$

Вектор $v_r^{(1)}$ можно определить с помощью уравнения (34.20), задавшись значением q .

Рассмотрим частные случаи.

В передаче с параллельными и пересекающимися осями относительное движение звеньев определяется вращением вокруг мгновенной оси. Если точка контакта находится на мгновенной оси вращения, то $v^{(12)} = 0$ и как это следует из уравнения (34.14),

$$[e^{(1)}, \omega^{(12)}, (v_e^{(1)} + v_r^{(1)})] = 0. \quad (34.30)$$

Зависимость (34.29) между нормальными кривизнами примет такой вид:

$$\kappa_2 - \kappa_1 - \frac{[\omega^{(12)}, e^{(1)}, v_r^{(1)}]}{[v_r^{(1)}]^2} = 0. \quad (34.31)$$

Обратимся вновь к уравнению (34.30). Это уравнение определяет тот факт, что векторы $e^{(1)}$, $\omega^{(12)}$ и $v^{(1)} = v_e^{(1)} + v_r^{(1)}$ находятся в одной плоскости. Вектор $v^{(1)}$ — вектор скорости перемещения точки контакта по поверхности зацепления. Так как этот вектор согласно (34.30) должен, кроме того, находиться в плоскости Π , проведенной через векторы $\omega^{(12)}$ и $e^{(1)}$, из этого следует, что плоскость Π будет касательной к поверхности зацепления во всех точках контакта, принадлежащих мгновенной оси вращения.

Отсюда теорема: *в передаче с параллельными и пересекающимися осями и с постоянным передаточным отношением плоскость, проведенная через векторы относительной угловой скорости $\omega^{(12)}$ и вектор нормали $e^{(1)}$, будет общей касательной плоскостью к поверхности зацепления во всех точках контакта, принадлежащих мгновенной оси вращения.*

Читатель может удостовериться, что эта теорема соблюдается для распространенных видов плоских зацеплений — эвольвентного и циклоидального.

С. Нормальная кривизна $\kappa^{(2)}$ в сечении, проведенном через вектор $v^{(12)}$

1°. Как уже было разъяснено в § 33, векторы $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ в общем случае не коллинеарны. Это означает, что из формулы (34.7) находится кривизна $\kappa^{(2)}$ в нормальном сечении, не совпадающем с нормальным сечением, в котором определяется кривизна $\kappa^{(1)}$ огибаемой поверхности Σ_1 . Исключение составляет лишь тот случай, когда вектор $v_r^{(1)}$ задается коллинеарным вектору относительной скорости звеньев $v^{(12)}$. Тогда, как это следует из формулы (33.11), векторы $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ тоже будут коллинеарны и кривизны $\kappa^{(1)}$ и $\kappa^{(2)}$ поверхностей будут определены для одного и того же нормального сечения. Используя эту особенность, А. М. Павлов [216] и Л. В. Коростелев [127] получили простые зависимости между кривизнами $\kappa^{(1)}$ и $\kappa^{(2)}$ в общем нормальном сечении взаимоогibaемых поверхностей,

проведенном через нормаль к поверхности и вектор $\mathbf{v}^{(12)}$. Ниже приводятся формулы, предложенные автором книги.

Преобразуем уравнение (34.7), приняв, что

$$\mathbf{v}_r^{(1)} = k_1 \mathbf{v}^{(12)}. \quad (34.32)$$

Подставив выражение (34.32) в (34.7) после преобразований получим

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)} &= \frac{1}{1+k_1} \left\{ k_1 \kappa^{(1)} - \frac{[\mathbf{v}^{(12)}, \boldsymbol{\omega}^{(12)}, \mathbf{e}^{(1)}]}{[\mathbf{v}^{(12)}]^2} \right\} = \\ &= \frac{k_1}{1+k_1} \left\{ \kappa^{(1)} - \frac{[\mathbf{v}_r^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(12)}, \mathbf{e}^{(1)}]}{[\mathbf{v}_r^{(1)}]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (34.33)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}$, $\kappa^{(1)}$ — нормальная кривизна поверхности Σ_1 в сечении, проведенном через $\mathbf{v}^{(12)}$.

Коэффициент k_1 может быть определен: а) через производные du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$; б) с помощью уравнения (34.20).

2°. Основываясь на уравнении (34.32) и переходя к проекциям, получим

$$\frac{\frac{\partial x^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}}{v_x^{(12)}} = \frac{\frac{\partial y^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial y^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}}{v_y^{(12)}} = \frac{\frac{\partial z^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}}{v_z^{(12)}}. \quad (34.34)$$

Векторы $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(12)}$ должны принадлежать касательной плоскости, направление которой для данной точки контакта уже известно. Поэтому должно соблюдаться уравнение

$$\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}_r^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}^{(12)} = 0 \quad (34.35)$$

и из двух уравнений (34.34) независимым может быть только одно. Используя одно такое уравнение из системы (34.34) и уравнение (34.11), задавшись предварительно значением $d\varphi_1/dt$, можно найти производные du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$.

Для определения коэффициента k_1 , входящего в уравнение (34.29), воспользуемся тем, что

$$\frac{v_{xr}^{(1)}}{v_x^{(12)}} = \frac{v_{yr}^{(1)}}{v_y^{(12)}} = \frac{v_{zr}^{(1)}}{v_z^{(12)}} = k_1. \quad (34.36)$$

Выражения для проекций $\mathbf{v}_r^{(1)}$ в развернутом виде были представлены в уравнениях (34.34).

Полезно отметить, что коэффициент k_1 , связывающий модули коллинеарных векторов $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(12)}$, может быть найден и другим путем, если известен вектор нормали $\mathbf{d}$ к поверхности зацепления. Вектор $\mathbf{v}^{(1)}$ скорости перемещения контактной точки по поверхности зацепления определяется уравнением

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_e^{(1)} + \mathbf{v}_r^{(1)} = \mathbf{v}_e^{(1)} + k_1 \mathbf{v}^{(12)}. \quad (34.37)$$

Так как векторы $\mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{d}$ перпендикулярны друг другу, то

$$[\mathbf{v}_e^{(1)} + k_1 \mathbf{v}^{(12)}] \mathbf{d} = 0.$$

Отсюда следует

$$k_1 = - \frac{d_x v_{ex}^{(1)} + d_y v_{ey}^{(1)} + d_z v_{ez}^{(1)}}{d_x v_x^{(12)} + d_y v_y^{(12)} + d_z v_z^{(12)}}. \quad (34.38)$$

Приведенные выражения для кривизны $\kappa^{(2)}$ упрощаются для конической передачи, учитывая наличие в ней мгновенной оси вращения. Скорость относительного движения в этом случае определяется так:

$$\mathbf{v}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{r}, \quad (34.39)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки касания, с началом на мгновенной оси вращения, перпендикулярный этой оси.

С учетом выражения (34.39)

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}^{(12)}, \boldsymbol{\omega}^{(12)}, \mathbf{e}^{(1)}] &= (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{e}^{(1)}) = \\ &= [\boldsymbol{\omega}^{(12)}]^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^{(1)}) - (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \cdot \mathbf{e}^{(1)}) (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(12)}). \end{aligned} \quad (34.40)$$

Так как векторы $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ взаимно перпендикулярны, то

$$\mathbf{r} \boldsymbol{\omega}^{(12)} = 0.$$

Обозначим $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^{(1)} = r \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{e}^{(1)}$, где $\mathbf{k}_r$ — орт вектора $\mathbf{r}$.

В результате уравнение (34.33) представим в такой форме:

$$\kappa^{(2)} = \frac{1}{1+k_1} \left(k_1 \kappa^{(1)} - \frac{\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{e}^{(1)}}{r} \right). \quad (34.41)$$

Приведенное уравнение распространяется и на случай червячной передачи с цилиндрическим червяком, если точка контакта поверхностей зубцов выбирается принадлежащей оси зацепления II—II. Скорость относительного движения для такой точки определяется как скорость вращения вокруг оси зацепления I—I.

3°. Приведенные выше выражения для определения коэффициента k_1 пригодны для случаев передачи вращения как с постоянным, так и с переменным передаточным отношением. При постоянном передаточном отношении k_1 можно определить с помощью формулы (34.20), определив угол q , образуемый вектором относительной скорости $\mathbf{v}^{(12)}$ и ортом $\mathbf{i}_I$ главного направления на поверхности Σ_1 . Воспользуемся для этого выражением

$$\cos q = \frac{\mathbf{v}^{(12)} \cdot \mathbf{i}_I}{|\mathbf{v}^{(12)}|}.$$

Подставив найденное значение q в выражение (34.20), найдем $v_{rI}^{(1)}$, затем определим $v_{rII}^{(1)} = v_{rI}^{(1)} \operatorname{tg} q$ и $\mathbf{v}_i^{(1)} = v_{rI}^{(1)} \mathbf{i}_I + v_{rII}^{(1)} \mathbf{i}_{II}$. После этого определим k_1 из формулы (34.32).

Д. Определение кривизны в нормальном сечении, проведенном через касательную к характеристике

В сечении взаимогнбаемых поверхностей Σ_1 и Σ_2 , проведенном через орт нормали $\mathbf{e}^{(1)}$ и касательную к характеристике (к линии контакта), эти поверхности имеют одно и то же значение нормальной кривизны, т. е. $\kappa^{(1)} = \kappa^{(2)}$. Нормальную кривизну в таком сечении можно определить по формуле (34.25), определив предварительно угол q между главным направлением $\mathbf{I}$ и касательной к характеристике. Угол q можно определить двумя способами: а) через производные du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$ с помощью выражения для $\mathbf{v}_i^{(1)}$; б) с помощью уравнения, аналогичного (34.14).

Рассмотрим сначала первый способ. При перемещении точки по касательной к линии контакта $\varphi_1 = \text{const}$ и в выражении (34.11) нужно принять $d\varphi_1/dt = 0$. Задаваясь произвольно одной из производных (du_1/dt ,

$d\vartheta_1/dt$), вторую производную определяем из формулы (34.11). После этого определяем вектор

$$\mathbf{v}_r^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(1)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(1)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}$$

и угол q , используя формулу

$$\cos q = \frac{\mathbf{v}_r^{(1)} \mathbf{i}_I}{|\mathbf{v}_r^{(1)}|}.$$

Второй способ определения q основывается на уравнении, которое получим, продифференцировав уравнение зацепления (34.12) в предположении, что точка контакта перемещается по неподвижной поверхности Σ_1 . При этом предположении $\dot{\mathbf{e}}^{(1)} = \dot{\mathbf{e}}_r^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_e^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(1)} = 0$; $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{r}^{(1)} = 0$. В результате получим

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} \mathbf{v}^{(12)} + \mathbf{v}_r^{(1)} (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)}) = 0. \quad (34.42)$$

После разложения векторов на орты главных направлений поверхности Σ_1 получим

$$\dot{e}_{rI}^{(1)} v_I^{(12)} + \dot{e}_{rII}^{(1)} v_{II}^{(12)} + v_I^{(1)} (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)})_I + v_{II}^{(1)} (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)})_{II} = 0. \quad (34.43)$$

Используя выражения (34.18), получим

$$\operatorname{tg} q = \frac{v_{rII}^{(1)}}{v_I^{(1)}} = - \frac{\kappa_I^{(1)} v_I^{(12)} - (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)})_I}{\kappa_{II}^{(1)} v_{II}^{(12)} - (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)})_{II}}. \quad (34.44)$$

В приведенных выражениях

$$(\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)})_I = (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)}) \mathbf{i}_I, \quad (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)})_{II} = (\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)}) \mathbf{i}_{II}.$$

Если относительное движение звеньев сводится к вращению вокруг мгновенной оси, нормаль в точке контакта пересекает ось мгновенного вращения. Скорость относительного движения может быть в этом случае определена так:

$$\mathbf{v}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{r}. \quad (34.45)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки пересечения нормали с осью мгновенного вращения к точке контакта M взаимоогибаемых поверхностей; $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ — вектор угловой скорости относительного движения, линией действия которого является ось мгновенного вращения. Обозначим через $\mathbf{i}_{III}$ — орт оси, перпендикулярной ортам $\mathbf{i}_I$ и $\mathbf{i}_{II}$. Векторы $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ и $\mathbf{r}$ представим так:

$$\boldsymbol{\omega}^{(12)} = \omega_I^{(12)} \mathbf{i}_I + \omega_{II}^{(12)} \mathbf{i}_{II} + \omega_{III}^{(12)} \mathbf{i}_{III}, \quad (34.46)$$

$$\mathbf{r} = r \mathbf{i}_{III}, \quad (34.47)$$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{i}_{III}. \quad (34.48)$$

Орты осей $\mathbf{i}_I$, $\mathbf{i}_{II}$ и $\mathbf{i}_{III}$ всегда можно выбрать так, чтобы они образовывали правую систему координат, а орт $\mathbf{i}_{III}$ являлся одновременно ортом нормали к поверхностям Σ_1 и Σ_2 в точке их контакта.

Используя приведенные выражения, получим

$$\mathbf{v}^{(12)} = r (\omega_{II}^{(12)} \mathbf{i}_I - \omega_I^{(12)} \mathbf{i}_{II}), \quad (34.49)$$

$$(\mathbf{e}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(12)}) = -\omega_{II}^{(12)} \mathbf{i}_I + \omega_I^{(12)} \mathbf{i}_{II}, \quad (34.50)$$

$$\operatorname{tg} q = \frac{\omega_{II}^{(12)} (1 + \kappa_I^{(1)} r)}{\omega_I^{(12)} (1 + \kappa_{II}^{(1)} r)}. \quad (34.51)$$

Если точка контакта поверхностей принадлежит мгновенной оси вращения, то $r = 0$,

$$\operatorname{tg} q = \frac{\omega_{II}^{(12)}}{\omega_I^{(12)}}. \quad (34.52)$$

Из выражения (34.52) следует, что в точке линии контакта, принадлежащей мгновенной оси вращения, касательная к линии контакта совпадает с проекцией мгновенной оси вращения на касательную плоскость. Этот результат был другим путем впервые получен Л. В. Коростелевым [130].

Е. Связь между главными кривизнами взаимоогнбаемых поверхностей

1°. Будем считать известными главные кривизны и главные направления на поверхности Σ_1 . Требуется определить главные кривизны и главные направления на поверхности Σ_2 . Для этого, как уже упоминалось выше, нужно воспользоваться формулой (34.8), согласно которой вектор $(v_r^{(1)} + v^{(12)})$ и вектор $(\dot{e}_r^{(1)} + \omega^{(12)} \times e^{(1)})$ должны быть коллинеарны. На этом основании

$$v_r^{(1)} + v^{(12)} = \lambda(\dot{e}_r^{(1)} + \omega^{(12)} \times e^{(1)}), \quad (34.53)$$

где λ — любое вещественное число, отличное от нуля и бесконечности.

Спроектируем векторы уравнения (34.53) на главные направления I и II поверхности Σ_1 и примем во внимание выражения (34.18). В результате получим

$$\frac{-\kappa_I^{(1)} v_{rI}^{(1)} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)})_I}{-\kappa_{II}^{(1)} v_{rII}^{(1)} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)})_{II}} = \frac{v_{rI}^{(1)} + v_I^{(12)}}{v_{rII}^{(1)} + v_{II}^{(12)}}.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} & (\kappa_I^{(1)} - \kappa_{II}^{(1)}) v_{rI}^{(1)} v_{rII}^{(1)} - v_{rII}^{(1)} [\kappa_{II}^{(1)} v_I^{(12)} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)})_I] + \\ & + v_{rI}^{(1)} [\kappa_I^{(1)} v_{II}^{(12)} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)})_{II}] + \\ & + v_I^{(12)} (\omega^{(12)} \times e^{(1)})_{II} - v_{II}^{(12)} (\omega^{(12)} \times e^{(1)})_I = 0. \end{aligned} \quad (34.54)$$

Уравнения (34.19) и (34.54), рассмотренные совместно, позволяют найти $v_{rI}^{(1)}$ и $v_{rII}^{(1)}$. Уравнение (34.54), если подставить в него выражение (34.19), окажется уравнением второй степени относительно $v_I^{(1)}$ (или $v_{II}^{(1)}$), корни которого определяют два главных направления на поверхности Σ_2 . Угол σ между главными направлениями с кривизнами $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_{II}^{(1)}$ определяется так:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{v_{rII}^{(1)} + v_{II}^{(12)}}{v_{rI}^{(1)} + v_I^{(12)}}.$$

Для определения главных кривизн на поверхности Σ_2 нужно воспользоваться формулой (34.8), в которой

$$\dot{e}_r^{(2)} = \dot{e}_r^{(1)} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)}) = \dot{e}_{rI}^{(1)} i_I + \dot{e}_{rII}^{(1)} i_{II} + (\omega^{(12)} \times e^{(1)}),$$

где

$$\begin{aligned} \dot{e}_{rI}^{(1)} &= -\kappa_I^{(1)} v_{rI}^{(2)}, \quad \dot{e}_{rII}^{(1)} = -\kappa_{II}^{(1)} v_{rII}^{(1)}, \\ v_r^{(2)} &= v_r^{(1)} + v^{(12)} = v_{rI}^{(1)} i_I + v_{rII}^{(1)} i_{II} + v^{(12)}. \end{aligned}$$

В приведенных уравнениях i_I и i_{II} — орты главных направлений на поверхности Σ_1 .

2°. В ряде случаев главные кривизны $\kappa_I^{(2)}$ и $\kappa_{II}^{(2)}$ поверхности Σ_2 , угол σ между главными направлениями с кривизнами $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_I^{(2)}$ проще определить, используя выражения для кривизн $\kappa^{(2)}$ в трех нормальных сечениях, проведенных соответственно: а) через вектор касательной к характеристике; б) через главное направление $I^{(1)}$ поверхности Σ_1 ; в) через главное направление $II^{(1)}$ поверхности Σ_1 . Нормальные кривизны $\kappa^{(2)}$ в указанных сечениях обозначим соответственно через $\kappa_\tau^{(2)}$, $\kappa_I^{(2)}$ и $\kappa_{II}^{(2)}$. После этого, используя формулу Эйлера (34.25), определим искомые значения σ , $\kappa_I^{(2)}$ и $\kappa_{II}^{(2)}$. Уравнения, которые необходимо использовать для этой цели, приведем в следующем виде:

$$\kappa_I^{(2)} \cos^2 \sigma + \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 \sigma = \kappa_{I(1)}^{(2)}, \quad (34.55)$$

$$\kappa_I^{(2)} \cos^2 (q - \sigma) + \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 (q - \sigma) = \kappa_\tau^{(2)} = \kappa_\tau^{(1)}, \quad (34.56)$$

$$\kappa_{I(1)}^{(2)} + \kappa_{II(1)}^{(2)} = \kappa_I^{(2)} + \kappa_{II}^{(2)} = \kappa_\Sigma^{(2)}. \quad (34.57)$$

Угол q образован касательной к характеристике и главным направлением $I^{(1)}$ на поверхности Σ_1 . Уравнение (34.57) основывается на том, что сумма кривизн в двух взаимно перпендикулярных нормальных сечениях равна сумме главных кривизн.

После преобразований получим следующие выражения:

$$\operatorname{tg} 2\sigma = \frac{2\kappa_\tau^{(2)} - \kappa_\Sigma^{(2)}}{(2\kappa_{I(1)}^{(2)} - \kappa_\Sigma^{(2)}) \sin 2q} - \operatorname{ctg} 2q, \quad (34.58)$$

$$g_2 = \frac{2\kappa_{I(1)}^{(2)} - \kappa_\Sigma^{(2)}}{\cos 2\sigma}, \quad (34.59)$$

где

$$g_2 = \kappa_I^{(2)} - \kappa_{II}^{(2)},$$

$$\kappa_I^{(2)} = \frac{g_2 + \kappa_\Sigma^{(2)}}{2}, \quad (34.60)$$

$$\kappa_{II}^{(2)} = \kappa_\Sigma^{(2)} - \kappa_I^{(2)}. \quad (34.61)$$

Г. Определение приведенной нормальной кривизны

1°. Под приведенной нормальной кривизной $\kappa_{пр}$ понимается разность кривизн обеих поверхностей в общем нормальном сечении: $\kappa_{пр} = \kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}$. Как уже было отмечено выше, векторы $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$, связанные уравнением (33.14), в общем случае не коллинеарны. Это вынуждает при определении приведенной кривизны задаваться двумя направлениями перемещения точки контакта на поверхности Σ_1 : а) первое направление с вектором перемещения $v_r^{(1)}$ должно совпадать с вектором касательной τ к требуемому нормальному сечению; б) второе направление перемещения с вектором скорости $\tilde{v}_r^{(1)}$ определяется условием, что вектор $v_r^{(2)} = \tilde{v}_r^{(1)} + v^{(12)}$ должен быть коллинеарен вектору $v_r^{(1)}$, т. е.

$$\tilde{v}_r^{(1)} + v^{(12)} = \lambda v_r^{(1)}. \quad (34.62)$$

Ниже будет показано, что определение приведенной кривизны можно упростить, если воспользоваться главными направлениями приведенной кривизны.

Напомним также, что определение приведенной кривизны в нормальном сечении, проведенном через вектор $\mathbf{v}^{(12)}$, упрощается, так как для такого сечения векторы $\mathbf{v}_I^{(1)}$ и $\mathbf{v}_I^{(2)}$ коллинеарны.

2°. Определению главных направлений для приведенной кривизны были посвящены работы М. Л. Новикова, А. М. Павлова [215, 218], Н. Н. Крылова [138, 139], Л. В. Коростелева [130], Е. Г. Гинзбурга [43], В. М. Васильева [28] и других исследователей.

Представим, что для обеих поверхностей Σ_1 и Σ_2 известны: а) главные кривизны $\kappa_I^{(i)}$ и $\kappa_{II}^{(i)}$ ($i = 1, 2$); б) угол σ , образуемый главным направлением для $\kappa_I^{(1)}$ с главным направлением для $\kappa_I^{(2)}$.

Используя формулу Эйлера для нормальных кривизн, получим следующее выражение для приведенной кривизны:

$$\kappa_{\text{пр}} = \kappa_I^{(1)} - \kappa_I^{(2)} = \kappa_I^{(1)} \cos^2 q + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2 q - \kappa_I^{(2)} \cos^2 (q - \sigma) - \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 (q - \sigma), \quad (34.63)$$

где q — угол, отсчитываемый от главного направления с кривизной $\kappa_I^{(1)}$.

Легко показать, что сумма приведенных кривизн $\kappa_{\text{пр}\Sigma}$ для двух взаимно перпендикулярных направлений является величиной постоянной. Подставив в зависимость (34.63) значение q , отличающиеся на 90° , получим, что для ортогональных направлений

$$\kappa_{\text{пр}\Sigma} = \kappa_I^{(1)} + \kappa_{II}^{(2)} - \kappa_I^{(2)} - \kappa_{II}^{(1)}. \quad (34.64)$$

Докажем теперь, что экстремальным значениям приведенной кривизны отвечают два ортогональных сечения.

Экстремальные значения $\kappa_{\text{пр}}$ найдем, используя условие: $d\kappa_{\text{пр}}/dq = 0$. Проведем это, получим

$$g_1 \sin 2q - g_2 \sin 2(q - \sigma) = 0, \quad (34.65)$$

где

$$g_1 = \kappa_I^{(1)} - \kappa_{II}^{(1)}; \quad g_2 = \kappa_I^{(2)} - \kappa_{II}^{(2)}.$$

Из (34.64) следует, что

$$\text{ctg } 2q = \text{ctg } 2\sigma - \frac{g_1}{g_2 \sin 2\sigma}. \quad (34.66)$$

Легко установить, что уравнение (34.66) удовлетворяется при двух значениях q , отличающихся на 90° , и экстремальным значениям $\kappa_{\text{пр}}$ отвечают два взаимно перпендикулярных направления.

В § 37 будет показано, что зазор между поверхностями Σ_1 и Σ_2 , измеренный в направлении их общей нормали, определяется в окрестности точки контакта M уравнением

$$l = \kappa_{\text{пр}} \frac{\rho^2}{2}.$$

Здесь ρ — расстояние от точки контакта M , измеренное в касательной плоскости к поверхностям Σ_1 и Σ_2 , $\kappa_{\text{пр}}$ — приведенная кривизна в нормальном сечении, составляющем угол q с главным направлением I на поверхности Σ_1 .

Так как взаимнооггибаемые поверхности не должны внедряться друг в друга, то зазор l должен быть одного знака при изменении q в пределах $0 \leq q \leq 2\pi$. Это означает, что в окрестности точки контакта при изменении q в указанных пределах знак приведенной кривизны должен оставаться постоянным.

Из сказанного следует, что одно из главных направлений приведенной кривизны совпадает с касательной к характеристике, так как в этом

направлении нормальные кривизны обеих поверхностей совпадают и $\kappa_{\text{пр}} = 0$. Другое направление, отвечающее наибольшему значению $\kappa_{\text{пр}}$, перпендикулярно касательной к линии контакта; в этом направлении $\kappa_{\text{пр}} = \kappa_{\text{пр max}}$.

Основываясь на выражении (34.64) для суммы приведенных кривизн в взаимно перпендикулярных направлениях, получим, что для направления, перпендикулярного касательной к линии контакта,

$$\kappa_{\text{пр max}} = \kappa_{\text{пр } \Sigma} = \kappa_{\text{I}}^{(1)} + \kappa_{\text{II}}^{(1)} - \kappa_{\text{I}}^{(2)} - \kappa_{\text{II}}^{(2)}. \quad (34.67)$$

При точечном касании поверхностей также существуют два ортогональных направления, отвечающих экстремальным значениям $\kappa_{\text{пр}}$.

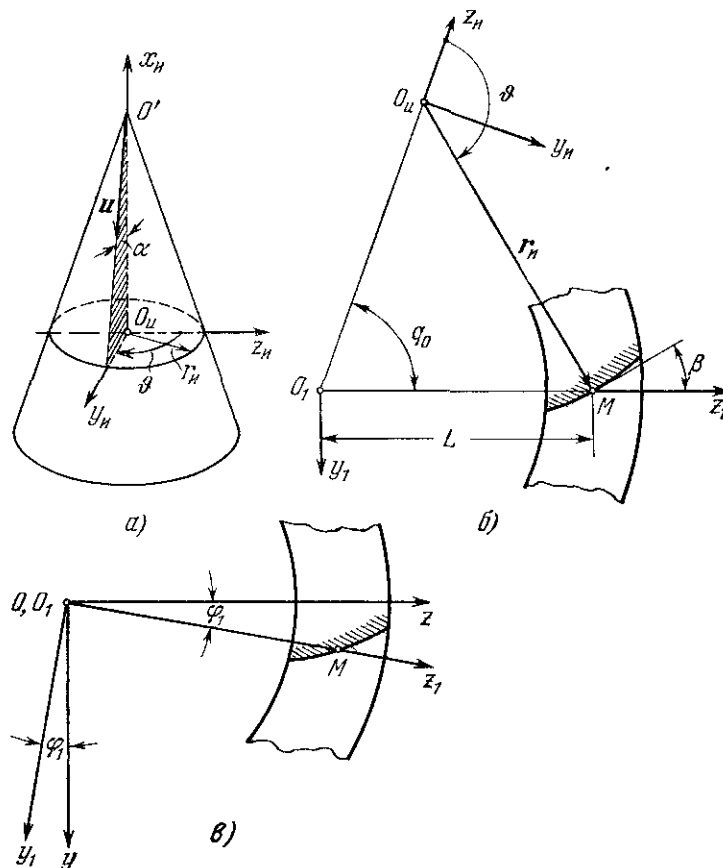


Рис 64

На одном из таких направлений $\kappa_{\text{пр}}$ достигает минимального, на другом — максимального значения; однако при точечном касании, в отличие от линейного касания, $\kappa_{\text{пр min}} \neq 0$ (см. § 37).

Пример 15. Рассматриваются поверхности зубцов конических колес с постоянной высотой ножки, нарезаемых конической производящей поверхностью (см. § 124). Ищутся нормальные кривизны поверхностей зубцов в сечениях, проведенных через главные направления производящей поверхности, а также главные кривизны поверхностей зубцов. Искомые кривизны определим двумя способами: а) используя производные du/dt и $d\theta/dt$; б) посредством формул (34.22) и (34.24).

Производной $d\varphi_1/dt$ можно придать, как указывалось выше, произвольное значение. Примем в дальнейшем, что $d\varphi_1/dt = 1$ рад/сек.

Найдем выражения $v_r^{(1)}$ и $\dot{e}_r^{(1)}$, для чего продифференцируем уравнения (34.69) и (34.74), приняв, что $\varphi_1 = \text{const}$:

$$v_r^{(1)} = -\cos \alpha \frac{du}{dt} i + \sin \alpha \left(\sin \tau \frac{du}{dt} + \right. \\ \left. + u \cos \tau \frac{d\theta}{dt} \right) j + \sin \alpha \left(\cos \tau \frac{du}{dt} - u \sin \tau \frac{d\theta}{dt} \right) k, \quad (34.78)$$

$$\dot{e}_r^{(1)} = \cos \alpha (\cos \tau j - \sin \tau k) \frac{d\theta}{dt}. \quad (34.79)$$

Найдем нормальные кривизны нарезаемых поверхностей для точки контакта, принадлежащей оси зацепления, при двух направлениях перемещения контактной точки по производящей поверхности, определяемых соответственно условиями:

$$\text{а) } \frac{du}{dt} = 0, \quad \text{б) } \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Для точки контакта M с координатами $(0, 0, L)$ согласно уравнениям (34.69) и построениям рис. 64

$$u = \frac{r_n}{\sin \alpha}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \tau = 90^\circ - \beta, \quad L = r_n \sin \beta + b_n \cos \alpha.$$

Из уравнения (34.77) следует, что при $du/dt = 0$ и $\omega_1 = 1$ рад/сек

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{r_n \sin \beta}, \quad (34.80)$$

$$v_r^{(1)} = -L (j - \text{ctg } \beta k), \quad (34.81)$$

$$\dot{e}_r^{(1)} = -\frac{L \cos \alpha}{r_n} (j - \text{ctg } \beta k). \quad (34.82)$$

Используем формулу (34.31) для вычисления нормальной кривизны, приняв во внимание, что при $\omega_1 = 1$ рад/сек

$$\omega^{(12)} = -\text{ctg } \delta_2 k, \quad \omega^{(13)} = \text{ctg } \delta_3 k.$$

На основании построений рис. 65 $r_2 = L \sin \delta_2$, $r_3 = L \sin \delta_3$, где r_2 и r_3 — радиусы начальных конусов нарезаемых колес. В результате получим

$$\kappa_{\Pi(1)}^{(2)} = \\ = -\left(\frac{\cos \alpha}{r_n} + \frac{\sin \alpha \sin^2 \beta \cos \delta_2}{r_2} \right), \quad (34.83)$$

$$\kappa_{\Pi(1)}^{(3)} = -\left(\frac{\cos \alpha}{r_n} - \frac{\sin \alpha \sin^2 \beta \cos \delta_3}{r_2} \right). \quad (34.84)$$

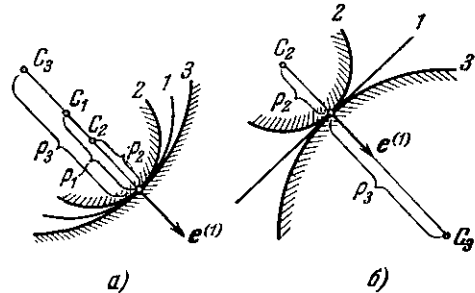


Рис. 66.

Проведем аналогичные выводы для случая, когда направление перемещения контактной точки по производящей поверхности определяется условием, что $d\theta/dt = 0$. В результате найдем

$$\kappa_{\Gamma(1)}^{(2)} = -\frac{\cos^2 \beta \cos \delta_2}{r_2 \sin \alpha}, \quad (34.85)$$

$$\kappa_{\Gamma(1)}^{(3)} = \frac{\cos^2 \beta \cos \delta_3}{r_3 \sin \alpha}. \quad (34.86)$$

Радиусы кривизны производящей и нарезаемых поверхностей в рассмотренных нормальных сечениях представлены соответственно на рис. 66, а и 66, б. Напомним, что при положительном значении кривизны направление радиуса кривизны совпадает с направлением орта нормали.

Найдем теперь главные направления и главные кривизны нарезаемых поверхностей. Воспользуемся формулой (34.8), согласно которой для колеса 2

$$\kappa_{I, II}^{(2)} = -\frac{\dot{e}_{xr}^{(2)}}{v_{xr}^{(2)}} = -\frac{\dot{e}_{yr}^{(2)}}{v_{yr}^{(2)}} = -\frac{\dot{e}_{zr}^{(2)}}{v_{zr}^{(2)}}. \quad (34.87)$$

Вектор $v_r^{(2)} = v_r^{(1)}$, вектор $\dot{e}_r^{(2)}$ определяется уравнением (33.12), согласно которому

$$\begin{aligned} \dot{e}_r^{(2)} = \dot{e}_r^{(1)} + \omega^{(12)} \times e^{(1)} = \cos \alpha \operatorname{ctg} \delta_2 \cos \beta \dot{t} + \\ + \left(\cos \alpha \sin \beta \frac{d\theta}{dt} - \operatorname{ctg} \delta_2 \sin \alpha \right) \dot{j} - \cos \alpha \cos \beta \frac{d\theta}{dt} \dot{k}. \end{aligned} \quad (34.88)$$

На основании выражений (34.87), (34.88), (34.78) и (34.79) получим

$$\kappa_{I, II}^{(2)} = \operatorname{ctg} \delta_2 \cos \beta \frac{du}{dt}, \quad (34.89)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \operatorname{ctg} \delta_2 \frac{du}{dt}}{r_n \cos \beta \operatorname{ctg} \delta_2 + \cos \alpha \frac{du}{dt}}. \quad (34.90)$$

Еще одно уравнение связи между производными du/dt и $d\theta/dt$ получим из формулы (34.77)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\cos \beta \frac{du}{dt} + L \sin \alpha}{r_n \sin \alpha \sin \beta}. \quad (34.91)$$

Используя выражения (34.90) и (34.91), получим квадратное уравнение для определения главных направлений на поверхности колеса 2:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left[\frac{r_n \operatorname{ctg} \delta_2}{\cos \alpha \cos \beta} (1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \right] \frac{du}{dt} + L r_n \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \delta_2 = 0. \quad (34.92)$$

Из этого уравнения находятся два значения du/dt , отвечающих двум главным направлениям, а из формулы (34.89) определяются главные кривизны.

Проделав аналогичные выводы для колеса 3, получим следующие уравнения:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \left[\frac{r_n \operatorname{ctg} \delta_3}{\cos \alpha \cos \beta} (1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \right] \frac{du}{dt} - L r_n \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \delta_3 = 0, \quad (34.93)$$

$$\kappa_{I, II}^{(3)} = -\operatorname{ctg} \delta_3 \cos \beta \frac{du}{dt}. \quad (34.94)$$

3°. Определим теперь нормальные кривизны $\kappa_{I(1)}^{(2)}$, $\kappa_{II(1)}^{(2)}$ и главные кривизны $\kappa_I^{(2)}$ и $\kappa_{II}^{(2)}$, используя выражения, не содержащие в явном виде производные du/dt и $d\theta/dt$.

Главные направления $I^{(1)}$ и $II^{(1)}$ на поверхности Σ_1 совпадают с направлениями векторов $\partial r/\partial u$ и $\partial r/\partial \theta$. Вектор $\partial r/\partial u$ в свою очередь совпадает с направлением образующей конической производящей поверхности, вектор $\partial r/\partial \theta$ перпендикулярен образующей. Орты главных направлений $I^{(1)}$ и $II^{(1)}$ в точке, принадлежащей мгновенной оси вращения производящей поверхности (оси Oz), определяются так:

$$t_I = -\cos \alpha \dot{t} + \sin \alpha \cos \beta \dot{j} + \sin \alpha \sin \beta \dot{k}, \quad (34.95)$$

$$t_{II} = \sin \beta \dot{j} - \cos \beta \dot{k}. \quad (34.96)$$

Главные кривизны поверхности Σ_1

$$\kappa_I^{(1)} = 0, \quad \kappa_{II}^{(1)} = -\frac{\cos \alpha}{r_n}.$$

Вектор $\omega^{(12)}$ определяется уравнением

$$\omega^{(12)} = -\operatorname{ctg} \delta_2 \dot{k} \quad (34.97)$$

Вектор

$$\omega^{(13)} = \text{ctg } \delta_3 k. \quad (34.98)$$

Используя формулы (34.22) и (34.24), для поверхностей Σ_2 и Σ_3 соответственно получим

$$\begin{aligned} \kappa_{I(1)}^{(2)} &= -\frac{\cos^2 \beta \cos \delta_2}{r_2 \sin \alpha}, & \kappa_{II}^{(1)} &= -\left(\frac{\cos \alpha}{r_H} + \frac{\sin \alpha \sin^2 \beta \cos \delta_2}{r_2} \right), \\ \kappa_{I(1)}^{(3)} &= \frac{\cos^2 \beta \cos \delta_3}{r_3 \sin \alpha}, & \kappa_{II(1)}^{(3)} &= -\left(\frac{\cos \alpha}{r_H} - \frac{\sin \alpha \sin^2 \beta \cos \delta_3}{r_3} \right). \end{aligned}$$

Касательная к характеристике (линии контакта) производящей и нарезаемой поверхностей определяется углом q .

Используя формулу (34.44), получим

$$\text{tg } q^{(i)} = \frac{\text{ctg } \beta}{\sin \alpha} \quad (i=2, 3). \quad (34.99)$$

Кривизна в нормальном сечении, определяемом углом $q^{(i)}$ ($i=2, 3$), выражается так:

$$\kappa_r^{(2)} = \kappa_r^{(3)} = \kappa_t^{(1)} = -\frac{\cos \alpha}{r_H} \frac{\text{ctg}^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta}. \quad (34.100)$$

После этого не представит труда определить главные кривизны и главные направления поверхностей Σ_2 и Σ_3 из формул (34.58) — (34.61).

§ 35. Кривизны поверхностей зубцов при двухпараметрическом огибании

Для определения нормальной кривизны огибающей поверхности нужно воспользоваться формулой (34.6), согласно которой

$$\kappa^{(2)} = -\frac{\mathbf{v}_r^{(2)} \dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}}{[\mathbf{v}_r^{(2)}]^2}. \quad (35.1)$$

Согласно формулам (33.34) и (33.32)

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12, \Phi)} + \mathbf{v}^{(12, \Psi)}, \quad (35.2)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)} = \dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} + \left(\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} + \frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{d\Psi_2}{dt} \right) \times \mathbf{e}^{(1)}. \quad (35.3)$$

Связь между параметрами u_1 , ϑ_1 огибаемой поверхности и параметрами движения Φ и Ψ определяется уравнениями (30.26):

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \Phi, \Psi) = 0, \quad (35.4)$$

$$f_2(u_1, \vartheta_1, \Phi, \Psi) = 0. \quad (35.5)$$

Продифференцируем уравнения (35.4) и (35.5)

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \Psi} \frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad (35.6)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \Psi} \frac{d\Psi}{dt} = 0. \quad (35.7)$$

Из двух производных параметров движения $d\Phi/dt$ и $d\Psi/dt$, содержащихся в уравнениях (35.6) и (35.7), одна, например $d\Phi/dt$, может быть задана произвольно.

Вторая производная параметра движения ($d\Psi/dt$) и производные du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$ должны быть определены из уравнений (35.6) и (35.7). Так как имеются лишь два уравнения, а неизвестных, подлежащих

определению, — три, одной из двух неизвестных — du_1/dt или $d\vartheta_1/dt$ — либо их отношением нужно задаться. После этого становится известным направление скорости $\mathbf{v}_r^{(1)}$ перемещения контактной точки по огибаемой поверхности, а из уравнения (35.2) определяется скорость $\mathbf{v}_r^{(2)}$ перемещения контактной точки по огибающей поверхности. Кривизна $\kappa^{(2)}$ определяется в плоскости, проведенной через $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\mathbf{e}^{(1)}$.

Другой способ определения производных du_1/dt , $d\vartheta_1/dt$ и $d\psi/dt$ основывается на том, что задается направление вектора $\mathbf{v}_r^{(2)}$ в виде, например, отношения его проекций $v_{yr}^{(2)} : v_{zr}^{(2)}$.

На основании (35.2) имеем

$$\frac{v_{yr}^{(2)}}{v_{zr}^{(2)}} = \frac{v_{yr}^{(1)} + v_y^{(12, \varphi)} + v_y^{(12, \psi)}}{v_{zr}^{(1)} + v_z^{(12, \varphi)} + v_z^{(12, \psi)}}. \quad (35.8)$$

В уравнении (35.8) его левая часть задается, а в правой части содержатся искомые неизвестные du_1/dt , $d\vartheta_1/dt$ и $d\psi_1/dt$. Эти неизвестные определяются из системы уравнений (35.6), (35.7) и (35.8).

Главные направления на огибающей поверхности находятся из условия коллинеарности векторов $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}$, так как согласно (34.8)

$$\mathbf{v}_r^{(2)} \kappa_{I, II}^{(2)} = -\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}. \quad (35.9)$$

Как и в случае однопараметрического огибания, уравнения, аналогичные (35.6) и (35.7), можно получить, не прибегая к дифференцированию уравнений (35.4) и (35.5).

При двухпараметрическом огибании для составления уравнений зацепления используются уравнения (30.23) и (30.24), согласно которым

$$\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}^{(12, \varphi)} = 0, \quad (35.10)$$

$$\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}^{(12, \psi)} = 0. \quad (35.11)$$

Продифференцировав уравнения (35.10) и (35.11), получим

$$\mathbf{v}^{(12, \varphi)} [\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(1)}] + \mathbf{e} \dot{\mathbf{v}}^{(12, \varphi)} = 0, \quad (35.12)$$

$$\mathbf{v}^{(12, \psi)} [\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(1)}] + \mathbf{e} \dot{\mathbf{v}}^{(12, \psi)} = 0. \quad (35.13)$$

Развернув уравнения (35.12) и (35.13), получим зависимости, аналогичные (35.6) и (35.7).

§ 36. Подрезание в пространственных зацеплениях

Подрезание в пространственных зацеплениях связано с появлением на поверхностях зубцов при их нарезании особыми точками. Выясним условия появления особых точек на поверхности Σ_2 звена 2, рассмотрев три способа ее образования: а) Σ_2 является однопараметрической огибающей поверхности Σ_1 инструмента; б) Σ_2 — двухпараметрическая огибающая инструментальной поверхности $\Sigma_{1,}$; в) Σ_2 образуется не поверхностью, а режущей кромкой инструмента.

Поверхности зубцов Σ_1 и Σ_2 нужно ограничить по размерам, исключив из них особые точки. Выявление особых точек на огибаемой поверхности Σ_1 , как правило, трудностей не представляет и может быть выполнено обычным методом, принятым в дифференциальной геометрии. Для определения особых точек на огибающей поверхности Σ_2 в настоящем параграфе

предлагается использовать метод, являющийся, по мнению автора книги, наиболее эффективным по сравнению с другими.

Ниже будет показано, что на поверхностях зубцов могут существовать и нежелательные обыкновенные точки, являющиеся точками касания или пересечения линий контакта поверхностей зубцов. Такие точки тоже должны быть исключены из зацепления, так как в них из-за большого удельного скольжения имеет место значительный износ поверхностей зубцов при сухом трении, или потеря давления в масляном клине при жидкостном трении.

Сам процесс подрезания поверхности зубцов Σ_2 при появлении на ней особых точек выражается в том, что переходная поверхность, образуемая режущей кромкой вершин зубца инструмента, захватывает часть рабочей поверхности зубца Σ_2 . Под режущей кромкой вершин понимается линия пересечения боковой поверхности и поверхности выступов инструмента. Переходная и рабочая части поверхности Σ_2 при подрезании уже не касаются, а пересекают друг друга. Для лучшего понимания явления подрезания читателю полезно вновь вернуться к рис. 42, на котором представлено подрезание плоского зацепления.

Подрезание приводит, как правило, к ослаблению зубцов. Кривизна поверхности вблизи особых точек принимает значения, неблагоприятные для контактной прочности.

Подрезанию зубцов в пространственных зацеплениях посвящены работы И. И. Дусева [71, 72], В. М. Васильева [27, 30], М. Л. Ерихова [77, 78, 80] и автора [178, 185, 195]. Материалы настоящего параграфа основываются на исследованиях, выполненных автором книги.

А. Дискриминантная кривая семейства пространственных линий

1°. Пусть задана поверхность Σ , определяемая уравнением

$$r = r(u, \vartheta). \quad (36.1)$$

На поверхности Σ нанесено семейство линий Q , определяемых уравнением (36.1) и присоединенной к нему зависимостью:

$$F(u, \vartheta, q) = 0, \quad (36.2)$$

где q — параметр семейства.

Условимся называть дискриминантной кривой E семейства линий Q геометрическое место таких точек линий Q с координатами u и ϑ , при которых удовлетворяется требование равенства рангов матриц A и B , где

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & -k \frac{\partial x}{\partial u} & -k \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & -k \frac{\partial y}{\partial u} & -k \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & -k \frac{\partial z}{\partial u} & -k \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial \vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}, \quad (36.3)$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & -k \frac{\partial x}{\partial u} & -k \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & -k \frac{\partial y}{\partial u} & -k \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & -k \frac{\partial z}{\partial u} & -k \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial \vartheta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial \vartheta} & -\frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq^{(E)}}{dt} \end{vmatrix}. \quad (36.4)$$

В этих уравнениях k — любое вещественное число, отличное от бесконечности, производная $dq^{(E)}/dt$ может иметь любое вещественное значение, отличное от нуля и бесконечности.

Дискриминантная кривая E содержит: а) отрезок, огибающий семейство линий Q в обыкновенных точках поверхности; б) все особые точки поверхности.

2°. Разъясним подробнее, как составлены матрицы A и B и на чем основано требование равенства их рангов.

В точке, принадлежащей огибающему отрезку, E и соответствующая линия Q касаются друг друга. В такой точке соблюдается условие:

$$v_r^{(Q)} = k v_r^{(E)}. \quad (36.5)$$

Здесь $v_r^{(Q)}$ и $v_r^{(E)}$ — скорости точек, перемещающихся на поверхности соответственно по линиям Q и E , множитель k предполагается при этом не равным нулю.

Если общая точка линий Q и E — особая точка поверхности, либо если дискриминантная кривая вырождается в точку, где пересекается хотя бы несколько линий семейства Q , предположение о касании Q и E уже не является правомерным, но условие (36.5) может быть соблюдено при $k = 0$. При таком предположении условие (36.5) остается справедливым для всех общих точек E и Q .

Выражения для $v_r^{(Q)}$ и $v_r^{(E)}$, учитывая (36.1), представим в следующем виде:

$$v_r^{(Q)} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du^{(Q)}}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta^{(Q)}}{dt}, \quad (36.6)$$

$$v_r^{(E)} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du^{(E)}}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta^{(E)}}{dt}. \quad (36.7)$$

Подставив выражения (36.6) и (36.7) в (36.5), условие коллинеарности векторов $v_r^{(Q)}$ и $v_r^{(E)}$ представим в следующем виде:

$$\frac{\partial r}{\partial u} \left(\frac{du^{(Q)}}{dt} - k \frac{du^{(E)}}{dt} \right) + \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \left(\frac{d\vartheta^{(Q)}}{dt} - k \frac{d\vartheta^{(E)}}{dt} \right) = 0. \quad (36.8)$$

При перемещении точки на поверхности по одной из линий Q параметр q имеет фиксированное значение ($q = q_0$), а текущие координаты u и ϑ выражаются как функции от t : $u^{(Q)} = u^{(Q)}(t)$; $\vartheta^{(Q)} = \vartheta^{(Q)}(t)$. Зависимость

$$F[u^{(Q)}(t), \vartheta^{(Q)}(t), q_0] = 0$$

является тождеством при всех значениях t . Продифференцировав эту зависимость, получим

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{du^{(Q)}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta^{(Q)}}{dt} = 0, \quad (36.9)$$

где

$$\frac{du^{(Q)}}{dt} = \dot{u}^{(Q)}(t), \quad \frac{d\vartheta^{(Q)}}{dt} = \dot{\vartheta}^{(Q)}(t).$$

При перемещении точки на поверхности по линии E текущие координаты u , ϑ и параметр q выражаются функциями от t :

$$u^{(E)} = u^{(E)}(t), \quad \vartheta^{(E)} = \vartheta^{(E)}(t), \quad q^{(E)} = q^{(E)}(t).$$

Продифференцируем зависимость

$$F[u^{(E)}(t), \vartheta^{(E)}(t), q^{(E)}(t)] = 0,$$

рассматривая ее как тождество при всех значениях t . Проведем это, получим

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{du^{(E)}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta^{(E)}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq^{(E)}}{dt} = 0. \quad (36.10)$$

Векторное уравнение (36.8) эквивалентно трем скалярным уравнениям; вместе с уравнениями (36.9) и (36.10) они образуют систему из пяти линейных уравнений с четырьмя неизвестными: $du^{(Q)}/dt$, $d\vartheta^{(Q)}/dt$, $du^{(E)}/dt$ и $d\vartheta^{(E)}/dt$. Как известно из линейной алгебры, такая система может быть совместной только при равенстве рангов матриц A и B , представленных ранее выражениями (36.3) и (36.4).

3°. Предположим вначале, что все точки линий Q являются заведомо обыкновенными точками поверхности, следовательно, $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial \vartheta \neq 0$. При таком предположении условие (36.8) приводит к двум уравнениям:

$$\frac{du^{(Q)}}{dt} - k \frac{du^{(E)}}{dt} = 0, \quad (36.11)$$

$$\frac{d\vartheta^{(Q)}}{dt} - k \frac{d\vartheta^{(E)}}{dt} = 0. \quad (36.12)$$

Уравнения (36.12), (36.11), (36.9) и (36.10) будут совместными только тогда, когда $\partial F/\partial q = 0$. Производная $dq^{(E)}/dt$ в уравнении (36.10) не равна нулю, так как это уравнение составлено для перемещения по направлению, при котором $q \neq \text{const}$.

Из этого следует такой вывод: если все точки семейства линий Q — заведомо обыкновенные точки поверхности, семейство Q будет иметь огибающую только в том случае, если у Q найдутся точки, удовлетворяющие условию: $\partial F/\partial q = 0$; $F(u, \vartheta, q) = 0$ — уравнение связи между текущими координатами u и ϑ и параметром q для рассматриваемого семейства линий Q .

Для нахождения значений u и ϑ , определяющих огибающую E , в нашем распоряжении имеются два уравнения:

$$F(u, \vartheta, q) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \quad (36.13)$$

Задаваясь значениями q , находим из системы (36.13) соответствующие значения u , ϑ , которые после подстановки в (36.1) определяют огибающую E на поверхности Σ .

Система уравнений (36.12), (36.11), (36.9) и (36.10) при $\partial F/\partial q = 0$ является однородной.

Ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных $r < 4$. Поэтому существует бесчисленное множество решений этой системы, помимо нулевого, когда $du^{(Q)}/dt = d\vartheta^{(Q)}/dt = du^{(E)}/dt = d\vartheta^{(E)}/dt = 0$. Особенное значение имеет то, что при нулевом решении однородной системы уравнений $\mathbf{v}_r^{(Q)} = \mathbf{v}_r^{(E)} = 0$ (скорость перемещения точки на поверхности как по линии Q , так и по огибающей E равна нулю). Условие: $\mathbf{v}_r^{(E)} = 0$, если сго-

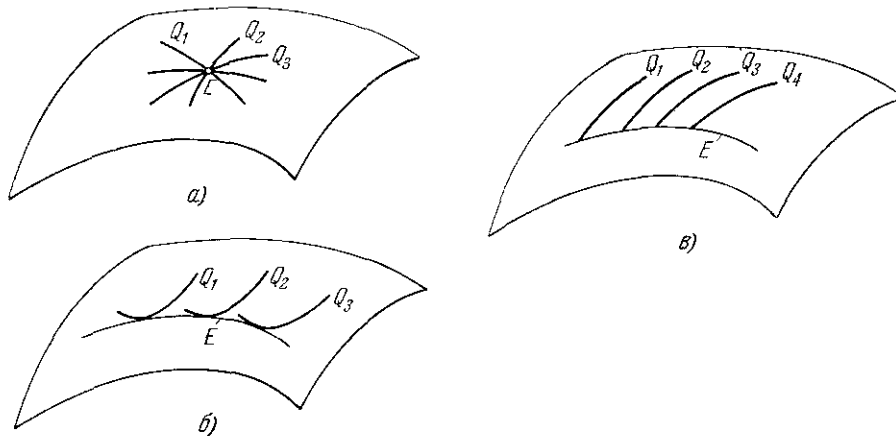


Рис 67.

принять в качестве исходного и подставить в (36.10), приводит автоматически к требованию, что $\partial F/\partial q = 0$. Действительно, при $\mathbf{v}_r^{(E)} = 0$, $du^{(E)}/dt = d\vartheta^{(E)}/dt = 0$; при этом, так как $dq^{(E)}/dt \neq 0$, уравнение (36.10) может быть удовлетворено лишь при $\partial F/\partial q = 0$.

Нужно, однако, иметь в виду, что при $k = 0$ и $\mathbf{v}_r^{(Q)} = \mathbf{v}_r^{(E)} = 0$ касание Q и E в общих точках не гарантируется. В частности, E может при этом вырождаться в точку, являющуюся как бы узлом для линий Q .

4°. Докажем теперь, что условию (36.5) удовлетворяют все особые точки поверхности, т. е. такие точки поверхности, в которых $\partial \mathbf{r}/\partial u \times \partial \mathbf{r}/\partial \vartheta = 0$. Для этого нужно убедиться в равенстве рангов матриц A и B в следующих случаях: а) $\partial \mathbf{r}/\partial u = \lambda \partial \mathbf{r}/\partial \vartheta$; б) один из пары векторов $\partial \mathbf{r}/\partial u$ и $\partial \mathbf{r}/\partial \vartheta$ равен нулю; в) $\partial \mathbf{r}/\partial u = \partial \mathbf{r}/\partial \vartheta = 0$. Результаты такого исследования таковы: 1) Для особых точек поверхности ранги матриц A и B равны и такие точки входят в состав кривой E . Условие $\partial F/\partial q = 0$ для равенства рангов матриц не является обязательным; 2) так как ранг r матриц A и B меньше четырех, существует бесчисленное множество решений системы линейных уравнений (36.8), (36.9) и (36.10). Одним из частных решений может быть такое, при котором $\mathbf{v}_r^{(Q)} = 0$, $k = 0$.

5°. Основываясь на всем изложенном, приходим к выводу, что дискриминантная кривая E для заданного семейства линий Q , принадлежащих поверхности Σ , может быть определена как совокупность: а) обыкновенных точек поверхности, удовлетворяющих условию: $\partial F/\partial q = 0$; б) всех особых точек поверхности, т. е. таких точек, в которых $\partial \mathbf{r}/\partial u \times \partial \mathbf{r}/\partial \vartheta = 0$.

На рис. 67 представлены: а) дискриминантная кривая, выродившаяся в точку, через которую проходят все линии Q (см. пример 1б); б) дискри-

минантная кривая E , огибающая линий Q ; точки касания Q и E (см. пример 17), могут быть как обыкновенными, так и особыми точками поверхности; в) дискриминантная кривая E такого семейства линий Q , при котором Q и E в общих точках не касаются, а пересекают друг друга.

Пример 16. Задана поверхность кругового цилиндра, определяемая уравнением

$$r = r_0 \cos \vartheta i + r_0 \sin \vartheta j + u k. \quad (a)$$

На этой поверхности нанесено семейство линий Q , определяемое уравнением (a) и выражением

$$F(u, \vartheta, q) = r_0(1 - \cos \vartheta) \sin q - u \cos q = 0, \quad (b)$$

где $-\pi/2 \leq q \leq \pi/2$.

Семейство Q представляет семейство эллипсов, полученных пересечением поверхности (a) плоскостями, проведенными через точку ($u=0, \vartheta=0$) параллельно оси y .

Все точки поверхности (a) обыкновенные, поэтому и дискриминантная кривая E может состоять только из обыкновенных точек поверхности. Используя условие: $\partial F / \partial q = 0$, получим

$$r_0(1 - \cos \vartheta) \cos q + u \sin q = 0. \quad (c)$$

Рассмотрев совместно (b) и (c), найдем, что дискриминантная кривая E вырождается в точку с координатами: $u=0; \vartheta=0$.

К этому же результату придем, приняв, что при $v_r^{(E)} = 0$ $du^{(E)}/dt = d\vartheta^{(E)}/dt = 0$ и уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{du^{(E)}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta^{(E)}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq^{(E)}}{dt} = 0$$

приводит к выражению

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Отметим, что линии семейства Q при $q = \pm \pi/2$ представляют прямые линии, которые в точке $u=0, \vartheta=0$ не касаются, а пересекают другие линии этого семейства.

Пример 17. Задано уравнение эвольвентной винтовой поверхности (см. § 70)

$$r = (r_0 \cos \vartheta + u \cos \lambda_0 \sin \vartheta) i + (r_0 \sin \vartheta - u \cos \lambda_0 \cos \vartheta) j + (p\vartheta - u \sin \lambda_0) k, \quad (d)$$

где $p = r_0 \operatorname{tg} \lambda_0$.

На этой поверхности нанесено семейство линий Q , определяемое уравнением (d) и выражением

$$F(\vartheta, q) = \vartheta + q - c = 0, \quad (e)$$

где $c = \text{const.}$

Так как $\partial F / \partial q \neq 0$, точками E могут явиться только особые точки поверхности. Для их нахождения можно воспользоваться одним из следующих выражений:

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial \vartheta} = 0, \quad (f)$$

либо принять $v_r = 0$, где

$$\begin{aligned} v_r = & \left[(-r_0 \sin \vartheta + u \cos \lambda_0 \cos \vartheta) \frac{d\vartheta}{dt} + \cos \lambda_0 \sin \vartheta \frac{du}{dt} \right] i + \\ & + \left[(r_0 \cos \vartheta + u \cos \lambda_0 \sin \vartheta) \frac{d\vartheta}{dt} - \cos \lambda_0 \cos \vartheta \frac{du}{dt} \right] j + \\ & + \left(p \frac{d\vartheta}{dt} - \sin \lambda_0 \frac{du}{dt} \right) k = 0. \quad (g) \end{aligned}$$

В результате получим, что точкам дискриминантной кривой E отвечает значение параметра $u=0$. Из (g) следует, что производные du/dt и $d\vartheta/dt$ будут при

этом связаны зависимостью

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{\cos \lambda_0} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (h)$$

Огибающая E семейства Q представит винтовую линию с параметром p на цилиндре радиуса r_0 . Уравнение E получим из (d), положив в нем $u = 0$.

Нанесем теперь на поверхности d другое семейство линий Q , определяемое уравнением

$$p\vartheta - u \sin \lambda_0 - q = 0. \quad (i)$$

Проведем аналогичные выводы, получим, что у обоих семейств линий Q будет одна и та же дискриминантная линия. Однако в отличие от первого случая линии второго семейства Q не будут касаться E .

В. Узловые точки контакта

Огибаемая поверхность зубцов — поверхность Σ_1 — задается обычно уравнением, аналогичным (36.1):

$$r_1 = r_1(u_1, \vartheta_1). \quad (36.14)$$

Присоединив к нему уравнение зацепления

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi) = 0 \quad (36.15)$$

(φ — параметр движения), получим на этой поверхности семейство характеристик — линий контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 .

Поверхность Σ_2 , если она однопараметрическая огибающая Σ_1 , определяется уравнениями:

$$r_2 = r_2(u_1, \vartheta_1, \varphi), \quad (36.16)$$

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi) = 0. \quad (36.17)$$

Эти уравнения определяют поверхность Σ_2 как семейство линий контакта в системе S_2 .

Для определения дискриминантной кривой семейства характеристических линий на поверхности Σ_1 достаточно воспользоваться, как мы видели, выражениями: $\partial r_1 / \partial u_1 \times \partial r_1 / \partial \vartheta_1 = 0$, $\partial f / \partial \varphi = 0$. Значительно труднее определить дискриминантную кривую E на поверхности Σ_2 , учитывая, что уравнения Σ_2 обычно гораздо сложнее, чем уравнения для Σ_1 . Поэтому для определения E на поверхности Σ_2 целесообразно воспользоваться доказанным ранее положением, что в точке, общей для Q и E , обязательно найдется такое направление, где скорость v_r может быть принята равной нулю. Будем в последующем называть точки дискриминантной кривой узловыми точками контакта и пользоваться для их определения критерием $v_{ri} = 0$ ($i = 1, 2$). Такое название вытекает из того, что узловая точка контакта является общей точкой («узлом») двух бесконечно близких линий контакта. Применение критерия $v_{ri} = 0$ оказывается наиболее эффективным для определения дискриминантной кривой поверхности Σ_2 .

Как мы видели, в состав дискриминантной кривой входят не только особые, но и обыкновенные точки. Критерий $v_{ri} = 0$ можно уподобить заградительной сети, через ячейки которой не пройдут все особые точки поверхности, а вместе с ними будут задержаны и некоторые обыкновенные точки. Сожалеть о задержании обыкновенных узловых точек контакта не приходится, так как при $v_{ri} = 0$ условия удельного скольжения, а следовательно, и износ весьма неблагоприятны.

Непосредственное применение критерия $v_{r2} = 0$ для исключения узловых точек контакта огибающей поверхности Σ_2 нецелесообразно из-за того, что поверхность Σ_2 выражается, как уже упоминалось, сложными уравнениями. Согласно материалам § 33 скорости движения контактных точек по поверхностям Σ_1 и Σ_2 связаны уравнением

$$v_r^{(2)} = v_r^{(1)} + v^{(12)}.$$

Предполагается, что векторы скоростей записаны в неподвижной системе координат.

При $v_r^{(2)} = 0$, записывая векторы в системе координат S_1 , получим

$$v_{r1}^{(1)} + v_1^{(12)} = 0. \quad (36.18)$$

На основании (36.18) можно сформулировать следующую теорему: *на огибающей поверхности Σ_2 не будет узловых точек контакта, если исключить из огибаемой поверхности Σ_1 такие точки, в которых $v_{r1}^{(1)} + v_1^{(12)} = 0$.*

Уравнение (36.18) позволяет найти на поверхности Σ_1 линию, являющуюся граничной для Σ_1 .

Докажем сейчас еще одну теорему.

При однопараметрическом огибании во избежание появления узловых точек контакта необходимо исключить из взаимоогибаемых поверхностей такие точки, в которых нормаль к поверхности зацепления перпендикулярна скорости переносного движения точки либо огибающей, либо огибаемой поверхности.

Доказательство этой теоремы основывается на следующих положениях. Вектор скорости перемещения точки контакта по поверхности зацепления согласно материалам § 33 определяется уравнением

$$v = v_e^{(1)} + v_r^{(1)} = v_e^{(2)} + v_r^{(2)}.$$

При $v_r^{(i)} = 0$, $v^{(i)} = v_e^{(i)}$ ($i = 1, 2$), т. е. в узловой точке контакта, вектор скорости перемещения контактной точки по поверхности зацепления равен вектору переносной скорости взаимоогибаемой поверхности.

Способом, отличным от приведенного в книге, аналогичная теорема была доказана В. М. Васильевым [27] для особых узловых точек контакта огибающей поверхности в случае передачи вращательного движения между перекрещивающимися осями.

Вычисления, которые нужно выполнить для исключения узловых точек контакта, будут наиболее простыми, если воспользоваться уравнением (36.18).

Перейдем теперь к случаю двухпараметрического огибания.

Поверхность Σ_1 будет в этом случае покрыта множеством семейств линий, определяемых уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_1(u_1, \vartheta_1), \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0, \\ f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36.19)$$

Предполагается, что ψ и φ — независимые параметры. Для удобства рассуждений можно принять, что ψ и φ являются как бы зависимыми параметрами с бесчисленным вариантом связей, накладываемых на величины ψ и φ . Каждой такой фиксированной связи отвечает одно семейство линий Q . Если линии множества семейств Q или по крайней мере часть

из них проходят через один или несколько узлов, должны удовлетворяться следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1} \left(\frac{du_1^{(Q)}}{dt} - k \frac{du_1^{(E)}}{dt} \right) + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \vartheta_1} \left(\frac{d\vartheta_1^{(Q)}}{dt} - k \frac{d\vartheta_1^{(E)}}{dt} \right) = 0, \quad (36.20)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1^{(Q)}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1^{(Q)}}{dt} = 0, \quad (36.21)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{du_1^{(Q)}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1^{(Q)}}{dt} = 0, \quad (36.22)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1^{(E)}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1^{(E)}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \frac{d\varphi^{(E)}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \frac{d\psi^{(E)}}{dt} = 0, \quad (36.23)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{du_1^{(E)}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1^{(E)}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \frac{d\varphi^{(E)}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \frac{d\psi^{(E)}}{dt} = 0. \quad (36.24)$$

Уравнение (36.20) аналогично (36.8), уравнения (36.21) и (36.22) получены так же, как (36.9), а (36.23) и (36.24) — как (36.10). Предполагается, что функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ варьируются таким образом, что φ и ψ остаются независимыми параметрами. Если точка поверхности обыкновенная ($\partial \mathbf{r}_1 / \partial u_1 \times \partial \mathbf{r}_1 / \partial \vartheta_1 \neq 0$), необходимо, как это следует из (36.20), чтобы удовлетворялись уравнения:

$$\frac{du_1^{(Q)}}{dt} - k \frac{du_1^{(E)}}{dt} = 0, \quad (36.25)$$

$$\frac{d\vartheta_1^{(Q)}}{dt} - k \frac{d\vartheta_1^{(E)}}{dt} = 0. \quad (36.26)$$

Система из шести линейных уравнений (36.21) — (36.26) будет совместной при $k=0$, $\frac{du_1^{(Q)}}{dt} = \frac{d\vartheta_1^{(Q)}}{dt} = \frac{du_1^{(E)}}{dt} = \frac{d\vartheta_1^{(E)}}{dt} = 0$, если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \end{vmatrix} = 0. \quad (36.27)$$

Условие (36.27) позволяет выявить наличие обыкновенных узловых точек контакта на поверхности Σ_1 при двухпараметрическом огибании.

Поверхность Σ_2 , получаемая при двухпараметрическом огибании Σ_1 , будет также покрыта множеством семейств линий Q . Каждое такое семейство имеет общие точки с дискриминантной линией E на поверхности Σ_2 , если в точках линий Q $\mathbf{v}_r^{(2)} = 0$. При двухпараметрическом огибании согласно материалам § 33

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12, \varphi)} + \mathbf{v}^{(12, \psi)}.$$

Записывая векторы в системе S_1 , получим, что при $\mathbf{v}_{r_1}^{(2)} = 0$

$$\mathbf{v}_{r_1}^{(1)} + \mathbf{v}_1^{(12)} = \mathbf{v}_{r_1}^{(1)} + \mathbf{v}_1^{(12, \varphi)} + \mathbf{v}_1^{(12, \psi)} = 0. \quad (36.28)$$

Уравнение (36.28) позволяет найти на поверхности Σ_1 линию, которой эта поверхность должна быть ограничена во избежание появления узловых точек контакта на поверхности зубцов Σ_2 , воспроизводимой двухпараметрическим огибанием.

С. Векторное поле нормалей в обыкновенных узловых точках контакта

При проектировании зубчатых зацеплений необходимо исключить из зацепления обыкновенные узловые точки контакта на огибаемой поверхности Σ_1 . Ниже будет показано, что орт нормали $e^{(1)}$ к поверхности Σ_1 в обыкновенной узловой точке контакта является векторной функцией от радиуса-вектора поверхности зацепления, т. е. $e^{(1)} = e^{(1)}(r^{(1)})$.

1°. Обратимся к уравнению зацепления

$$e^{(1)}v^{(12)} = e(\omega^{(12)} \times r^{(1)} - R \times \omega^{(2)}) = 0. \quad (36.29)$$

Здесь $\omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}$; $r^{(1)}$ — радиус-вектор точки контакта; R — радиус-вектор точки, принадлежащей линии действия $\omega^{(2)}$. Продифференцируем это уравнение, предполагая, что передача движения происходит с постоянным отношением скоростей ($\omega^{(1)} = \text{const}$, $\omega^{(2)} = \text{const}$), при постоянном расстоянии между осями вращения ($R = \text{const}$):

$$\dot{e}^{(1)}v^{(12)} + e^{(1)}(\omega^{(12)} \times \dot{r}^{(1)}) = 0. \quad (36.30)$$

Если точка на поверхности Σ_1 узловая и обыкновенная, то нормаль к поверхности Σ_1 имеет определенное направление. Однако, так как при бесконечно малом изменении параметра движения φ положение этой точки на поверхности Σ_1 не изменяется, то $v_r^{(1)} = 0$ и $\dot{e}_r^{(1)} = 0$. При этих предположениях $\dot{e}^{(1)} = \dot{e}_e^{(1)} = \omega^{(1)} \times e^{(1)}$; $\dot{r}^{(1)} = v_e^{(1)}$.

Заметим также, что $v^{(12)} = v_e^{(1)} - v_e^{(2)}$.

В результате получим

$$(\omega^{(1)} \times e^{(1)})(v_e^{(1)} - v_e^{(2)}) + e^{(1)}[(\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times v_e^{(1)}] = 0.$$

После преобразований найдем

$$e^{(1)}[(\omega^{(1)} \times v_e^{(2)}) - (\omega^{(2)} \times v_e^{(1)})] = 0. \quad (36.31)$$

В точках контакта поверхностей, в том числе и в обыкновенных узловых точках контакта, соблюдается уравнение зацепления. Поэтому для определения векторного поля нормалей в обыкновенных узловых точках контакта можно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} e^{(1)}[(\omega^{(1)} \times v_e^{(2)}) - (\omega^{(2)} \times v_e^{(1)})] &= 0, \\ e^{(1)}(v_e^{(1)} - v_e^{(2)}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36.32)$$

Уравнению (36.31) можно придать и иную форму, учитывая, что $v_e^{(1)} = \omega^{(1)} \times r^{(1)}$, $v_e^{(2)} = \omega^{(2)} \times (r^{(1)} - R)$. При такой записи предполагается, что начало неподвижной системы координат лежит на линии действия $\omega^{(1)}$, R — радиус-вектор какой-нибудь точки линии действия $\omega^{(2)}$. Выберем эту точку так, чтобы R совпал с линией кратчайшего межосевого расстояния. Подставим выражения для $v_e^{(1)}$ и $v_e^{(2)}$ в (36.31) и произведем преобразования, учтя при этом, что $\omega^{(1)}R = 0$, так как эти векторы взаимно перпендикулярны.

После преобразований уравнению (36.31) придадим такой вид:

$$e^{(1)}[\omega^{(2)}(\omega^{(1)}r^{(1)}) + R(\omega^{(1)}\omega^{(2)}) - \omega^{(1)}(\omega^{(2)}r^{(1)})] = 0. \quad (36.33)$$

2°. Рассмотрим подробнее, как используются уравнения (36.32) для нахождения так называемого предельного направления орта нормали $e^{(1)}$, т. е. такого направления, при котором исключается появление обыкновенных узловых точек контакта на поверхности Σ_1 .

Пусть известна схема механизма и заданы скользящие векторы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$. В двух скалярных уравнениях (36.32) содержится пять параметров: $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$ — текущие координаты точки поля зацепления и две проекции орта нормали $e^{(1)}$. Примем, что $r^{(1)}$ — радиус-вектор полюса зацепления P (точки касания начальных поверхностей) и для P известны координаты $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$. Орт «предельной» нормали в полюсе зацепления найдем из уравнения (36.34). Определив таким образом $e^{(1)}$, необходимо затем задать такие параметры для поверхностей обеих сторон зубца звена 1, чтобы орты нормалей для этих поверхностей отклонялись от орта «предельной» нормали на одинаковые углы.

3°. Для наглядного изображения векторного поля нормалей (36.32) его можно представить в виде семейства векторных линий C . Особенность линий C заключается в том, что в каждой точке векторного поля $e^{(1)}$ ($r^{(1)}$) орт $e^{(1)}$ имеет направление касательной к C . В векторном анализе доказывается справедливость такого уравнения для векторных линий:

$$e^{(1)} \times \frac{dr^{(1)}}{dt} = 0, \quad (36.34)$$

что эквивалентно

$$\frac{e_x^{(1)}}{\frac{dx^{(1)}}{dt}} = \frac{e_y^{(1)}}{\frac{dy^{(1)}}{dt}} = \frac{e_z^{(1)}}{\frac{dz^{(1)}}{dt}}. \quad (36.35)$$

При интегрировании дифференциальных уравнений (36.35) появляются две произвольные постоянные, и векторные линии C могут быть представлены в виде двухпараметрического семейства линий.

Если построить такое семейство линий для проектируемого механизма, считая заданными скользящие векторы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, это позволяет обозреть изменение направления орта $e^{(1)}$ в зависимости от изменения положения полюса зацепления P .

Полезно иметь в виду, что касательная к векторной линии C и вектор $v_e^{(1)}$ определяют в каждой точке векторного поля касательную плоскость к поверхности зацепления. Действительно, так как $r^{(1)}$ — радиус-вектор точки поверхности зацепления, то $dr^{(1)}/dt$ принадлежит касательной плоскости к поверхности зацепления. Этой же плоскости принадлежит и вектор скорости перемещения $v^{(1)}$ контактной точки в неподвижном пространстве. Так как в обыкновенной узловой точке контакта $v_r^{(1)} = 0$, то $v^{(1)} = v_e^{(1)}$. Отсюда и следует, что векторы $v_e^{(1)}$ и $dr^{(1)}/dt$ определяют направление касательной плоскости к поверхности зацепления в текущей точке векторного поля.

4°. Приведем два примера, иллюстрирующих применение уравнений (36.32) для исключения из зацепления обыкновенных узловых точек контакта.

В передаче, составленной из конических колес, в точках, принадлежащих оси зацепления (общей образующей аксоидов) $v_e^{(1)} = v_e^{(2)}$. Система (36.32) приводится в этом случае к одному уравнению

$$[e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(i)}] = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (36.36)$$

Это означает, что если точки контакта, принадлежащие оси зацепления, обыкновенные узловые точки контакта, орт нормали принадлежит плоскости Π , проведенной через $\omega^{(12)}$ и $v_e^{(1)}$. Для того чтобы избежать появления обыкновенных узловых точек контакта, принадлежащих оси зацепления, достаточно задать такие параметры поверхности Σ_1 , чтобы орт $e^{(1)}$ нормали отклонился от плоскости Π . Это распространяется и на

случай цилиндрических колес, но ограничение расположения орта нормали становится еще более жестким и выражается в требовании, что орт нормали в точке контакта, совпадающей с полюсом зацепления, не должен быть перпендикулярен $\omega^{(12)}$ (оси зацепления).

Обратимся теперь к случаю червячной передачи. Полюс зацепления в такой передаче избирается на линии кратчайшего межосевого расстояния, начальными поверхностями служат поверхности двух скрещающихся круговых цилиндров.

Проведем через точку P плоскость B , перпендикулярную линии кратчайшего межосевого расстояния (рис. 68). Векторы $v_e^{(1)}$, $v_e^{(2)}$ и $v^{(12)} = v_e^{(1)} - v_e^{(2)}$ принадлежат плоскости B , векторы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ параллельны этой плоскости. Для того чтобы P явилась точкой контакта, необходимо соблюдение условия $e v^{(12)} = 0$. Поэтому орт (вектор) нормали должен принадлежать плоскости Π , перпендикулярной $\omega^{(12)}$; на рис. 68 эта плоскость не изображена. В случае ортогональной червячной передачи векторы $\omega^{(1)}$ и $v_e^{(2)}$, $\omega^{(2)}$ и $v_e^{(1)}$ попарно коллинеарны, и уравнение (36.31) соблюдается при любом направлении орта нормали $e^{(1)}$ в плоскости Π . Из этого следует, что точка P касания начальных цилиндров является в ортогональной передаче обыкновенной узловой точкой контакта. При проектировании ортогональной цилиндрической червячной передачи нужно применить корригирование, позволяющее исключить из рабочей части поверхности зацепления точку касания начальных цилиндров.

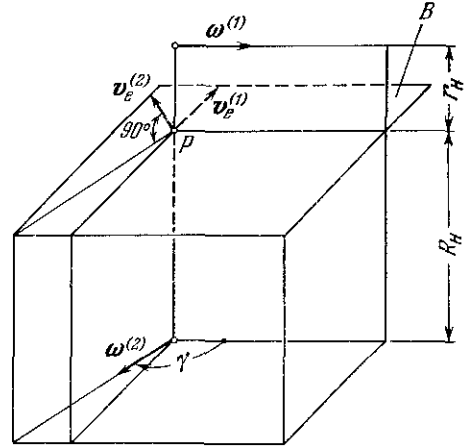


Рис. 68.

Д. В ы ч и с л и т е л ь н ы е ф о р м у л ы

При однопараметрическом огибании для ограничения рабочей части поверхности, позволяющего избежать появления узловых точек на поверхности Σ_2 , нужно воспользоваться уравнениями (36.18), (36.14) и (36.15). Рассматривая (36.15) как тождество при всех значениях φ , его можно продифференцировать и получить такую зависимость:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Приведем сводку уравнений, необходимых для определения граничной линии на поверхности Σ_1 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, \vartheta_1) i_1 + y_1(u_1, \vartheta_1) j_1 + z_1(u_1, \vartheta_1) k_1, & (a) \\ f(u_1, \vartheta_1, \varphi) &= 0, & (b) \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} &= 0, & (c) \\ \frac{v_{x1}^{(12)}}{v_{xr1}^{(1)}} = \frac{v_{y1}^{(12)}}{v_{yr1}^{(1)}} = \frac{v_{z1}^{(12)}}{v_{zr1}^{(1)}} &= -1, & (d) \end{aligned} \right\} \quad (36.37)$$

где $v_{xr1}^{(1)}$, $v_{yr1}^{(1)}$, $v_{zr1}^{(1)}$ — проекции скорости $v_{r1}^{(1)}$.

Из трех приведенных равенств (d) системы (36.37) независимыми являются только два, так как скорости $v_1^{(1)}$ и $v_1^{(12)}$ принадлежат касательной плоскости к поверхности. Поэтому

$$v_1^{(1)}n_1 = v_1^{(12)}n_1 = 0,$$

где n_1 — вектор нормали.

Для определения координат u_1 и ϑ_1 граничной линии нужно воспользоваться четырьмя уравнениями системы (36.37): двумя любыми равенствами (d), уравнениями (b) и (c). Четыре указанных уравнения содержат в качестве неизвестных: u_1 , ϑ_1 , du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$; решение нужно искать при фиксированном значении параметра движения φ . Производной $d\varphi/dt$, содержащейся в (c) и в выражениях для проекций $v^{(12)}$, можно придать любое значение, отличное от нуля, в частности, значение $d\varphi/dt = 1 \text{ рад/сек}$, так как (c) и (d) можно разделить на $d\varphi/dt$. Совокупность значений u_1 и ϑ_1 , найденных в виде функций от φ_1 , определяет на поверхности Σ_1 искомую граничную линию.

Определение производных du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$ является вспомогательной операцией при вычислении координат u_1, ϑ_1 граничной линии. Этого можно избежать, если исключить du_1/dt и $d\vartheta_1/dt$ из трех линейных уравнений, которые мы выделим из системы (36.37):

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (36.38)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} = -v_{x1}^{(12)}, \quad (36.39)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} = -v_{y1}^{(12)}. \quad (36.40)$$

Так как такая система является совместной, должны быть равны ранги матриц A и B , где

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} & -\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} & -v_{x1}^{(12)} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} & -v_{y1}^{(12)} \end{vmatrix}.$$

Матрица A состоит из трех строк и двух столбцов, и ее ранг не может быть более двух. Ранг матрицы B будет равен рангу матрицы A , если окажется равным нулю определитель матрицы B , т. е. если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} & v_{x1}^{(12)} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} & v_{y1}^{(12)} \end{vmatrix} = 0. \quad (36.41)$$

Раскрыв определитель (36.41), получим уравнение связи между параметрами u_1 , ϑ_1 , φ :

$$\theta(u_1, \vartheta_1, \varphi) = 0. \quad (36.42)$$

Рассмотрев совместно уравнение (36.42) и уравнение зацепления из системы (36.37)

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi) = 0,$$

найдем связь между параметрами u_1 и ϑ_1 , определяющую на поверхности Σ_1 искомую граничную линию.

Полезно учесть, что уравнение (36.38) можно получить, не прибегая к формальному дифференцированию уравнения связи между параметрами

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0.$$

Обратимся вновь к уравнению (34.12), полученному при передаче вращения между перекрещивающимися осями с постоянным отношением скоростей. Используя критерий $v_r^{(1)} + v^{(12)} = 0$ и учтя при этом, что $v^{(12)} = v_e^{(1)} - v_e^{(2)}$, представим это уравнение в таком виде:

$$v^{(12)} [\dot{e}_r^{(1)} + (\omega^{(1)} \times e^{(1)})] + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, v_e^{(2)}] = 0. \quad (36.43)$$

Для развертывающихся поверхностей (конической, цилиндрической, эвольвентной винтовой поверхности) орт нормали $e^{(1)}$ не изменяется при движении по образующей. Если одной из координатных линий поверхности, например u_1 , будет служить сама образующая, то

$$e^{(1)} = e^{(1)}(\vartheta_1)$$

и в выражение для $\dot{e}_r^{(1)}$ не войдет производная du_1/dt .

Это позволяет упростить систему уравнений (36.38) — (36.40) и их решение.

При двухпараметрическом огибании для определения граничной линии на поверхности Σ_1 нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$r_1 = x_1(u_1, \vartheta_1) i_1 + y_1(u_1, \vartheta_1) j_1 + z_1(u_1, \vartheta_1) k_1, \quad (36.44)$$

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) = 0, \quad (36.45)$$

$$f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) = 0, \quad (36.46)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = 0, \quad (36.47)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = 0, \quad (36.48)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + v_{x1}^{(12, \psi)} = -v_{x1}^{(12, \varphi)}, \quad (36.49)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + v_{y1}^{(12, \psi)} = -v_{y1}^{(12, \varphi)}. \quad (36.50)$$

Здесь (36.45) и (36.46) — уравнение зацепления, (36.47) и (36.48) — дифференцированные уравнения зацепления, (36.49) и (36.50) получены из уравнения (36.28). Одно из пары уравнений (36.49) и (36.50) может быть заменено уравнением

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + v_{z1}^{(12, \psi)} = -v_{z1}^{(12, \varphi)}. \quad (36.51)$$

Одной из двух производных: $d\varphi/dt$, $d\psi/dt$, определяющих относительное движение звеньев, например $d\varphi/dt$, можно придать любое значение, так как обе части уравнений (36.47) — (36.50) можно разделить на $d\varphi/dt$.

Проделав аналогичные выводы, как и при однопараметрическом огибании, получим, что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & v_{x1}^{(12, \psi)} & v_{x1}^{(12, \varphi)} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & v_{y1}^{(12, \psi)} & v_{y1}^{(12, \varphi)} \end{vmatrix} = 0. \quad (36.52)$$

Раскрыв определитель (36.52), найдем зависимость

$$\theta(u_1, \theta_1, \varphi, \psi) = 0. \quad (36.53)$$

Рассмотрев совместно (36.53), (36.45) и (36.46), найдем уравнение связи между параметрами u_1 и θ_1 для точек линии, которой должна быть ограничена поверхность Σ_1 .

Как и в случае однопараметрического огибания, уравнения, аналогичные (36.47) и (36.48), можно получить, не прибегая к дифференцированию уравнений зацепления. Вместо этого можно использовать уравнения (35.12) и (35.13), в которые при развертывании выражений для $v^{(12, \varphi)}$ и $v^{(12, \psi)}$ нужно подставить зависимость:

$$v^{(12, \varphi)} + v^{(12, \psi)} = v^{(12)} = -v_r^{(1)}.$$

В ряде случаев это упрощает составление уравнений (36.47), (36.48) и решение системы уравнений (36.44)–(36.50).

Е. Подрезание при образовании поверхности Σ_2 резцом

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность Σ_2 образуется не поверхностью инструмента, а режущей кромкой T . Поверхность Σ_2 представит геометрическое место линий T в системе S_2 . Выберем координатными линиями Σ_2 линию T и траекторию точки T , описываемую в относительном движении. Векторы касательных к координатным линиям обозначим через τ и $v_1^{(12)}$, где τ — вектор касательной к кривой T , $v_1^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения. Во избежание подрезания поверхности Σ_2 необходимо, чтобы режущая кромка T резца сама не содержала особых точек и чтобы из T были исключены точки, в которых векторы касательных к координатным линиям коллинеарны, т. е. такие точки, в которых оказывается, что

$$\tau = k v^{(12)}$$

или

$$\frac{\tau_{x1}}{v_{x1}^{(12)}} = \frac{\tau_{y1}}{v_{y1}^{(12)}} = \frac{\tau_{z1}}{v_{z1}^{(12)}}. \quad (36.54)$$

Пример 18. Определим условия отсутствия подрезания прямозубых цилиндрических колес при нарезании червячной фрезой с эвольвентной винтовой поверхностью правого направления *).

*) По материалам работы, выполненной автором совместно с М. Л. Ериховым [196].

При нарезании фреза и колесо совершают вращения вокруг осей z_1 и z_2 (рис. 46, 47) с угловыми скоростями, находящимися в отношении (см. § 75)

$$i_{21} = \frac{d\varphi_2}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{r_H \sin \lambda_H}{R_H \sin (\gamma - \lambda_H)} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Здесь r_H и R_H — радиусы начальных цилиндров фрезы и колеса, λ_H — угол подъема винтовой линии на цилиндре радиуса r_H , z_1 и z_2 — число заходов червяка и число зубцов фрезы. При нарезании прямозубых колес $\gamma = 90^\circ + \lambda_H$ (рис. 47).

Фреза перемещается вдоль оси z_2 со скоростью $d\psi/dt$.

Относительное движение фрезы определяется, как мы видим, двумя параметрами.

Боковая поверхность червячной фрезы представляет эвольвентную винтовую поверхность и определяется (см. § 70) уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{01} \cos \vartheta_1 + u_1 \cos \lambda_{01} \sin \vartheta_1, \\ y_1 &= r_{01} \sin \vartheta_1 - u_1 \cos \lambda_{01} \cos \vartheta_1, \\ z_1 &= p_1 \vartheta_1 - u_1 \sin \lambda_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (36.55)$$

Здесь r_{01} и λ_{01} — радиус основного цилиндра и угол подъема винтовой линии на этом цилиндре, u_1 и ϑ_1 — параметры поверхности, винтовой параметр $p_1 = r_{01} \operatorname{tg} \lambda_{01} = r_H \operatorname{tg} \lambda_H$. При дальнейших преобразованиях учтем, что

$$\frac{r_0}{r_H} = \frac{\operatorname{tg} \lambda_H}{\operatorname{tg} \lambda_{01}} = \cos \alpha_{s1}, \quad (36.56)$$

где α_{s1} — угол давления эвольвентного профиля в точке пересечения его с окружностью радиуса r_H . Орт нормали к поверхности фрезы определяется уравнением

$$e_1 = \sin \lambda_{01} \sin \vartheta_1 i_1 - \sin \lambda_{01} \cos \vartheta_1 j_1 + \cos \lambda_{01} k_1. \quad (36.57)$$

Используя условие, что в точках контакта поверхностей фрезы и колеса

$$v_1^{(12, \varphi)} e = v_1^{(12, \psi)} e = 0,$$

связь между параметрами поверхности фрезы и движения определим следующими уравнениями:

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) = \pi + \alpha_{s1} - \varphi_1 - \vartheta_1 = 0, \quad (36.58)$$

$$f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi, \psi) = r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1} \cos^2 \lambda_{01} - r_{01} \vartheta_1 \sin^2 \lambda_{01} - u_1 \cos \lambda_{01} = 0. \quad (36.59)$$

Раскроем определитель (36.52), приняв, что $d\varphi/dt = d\varphi_1/dt = 1$ рад/сек. После преобразований найдем

$$\begin{aligned} r_{01} i_{21} \sin \lambda_H \sin \alpha_{s1} - i_{21} u_1 \sin \lambda_H \cos \lambda_{01} \cos \alpha_{s1} - r_{01} i_{21} \vartheta_1 \operatorname{tg} \lambda_{01} \cos \lambda_H + \\ + i_{21} u_1 \sin \lambda_{01} \cos \lambda_{01} + r_{01} \sin^2 \lambda_{01} \sin \alpha_{s1} = 0. \end{aligned} \quad (36.60)$$

Для определения граничной кривой на поверхности червячной фрезы нужно рассмотреть совместно уравнения (36.58), (36.59) и (36.60). В итоге найдем

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \operatorname{tg} \alpha_{s1} \left(1 + \frac{\sin \lambda_H}{i_{21}} \right), \\ u_1 &= r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1} \frac{1}{\cos \lambda_{01}} \left(1 + \frac{1}{i_{21}} \sin^2 \lambda_{01} \sin \lambda_H \right). \end{aligned} \right\} \quad (36.61)$$

В рассмотренном случае граничная кривая вырождается в точку, координаты которой на поверхности фрезы определим в результате совместного рассмотрения уравнений (36.55) и (36.61). Рабочая часть поверхности фрезы должна быть задана так, чтобы исключить из нее найденную граничную точку. Подрезание будет исключено, если найденная граничная точка окажется вне цилиндров выступов фрезы.

Обозначим радиус цилиндра выступов фрезы $r_e = r_H + f_0 m_n$, где m_n — нормальный модуль зубцов нарезаемого колеса, f_0 — коэффициент высоты головки фрезы.

После преобразований условие отсутствия подрезания зубцов колеса запишем так:

$$\begin{aligned} z_2 &\geq \frac{z_1}{\sin \lambda_H (1 - \cos^2 \alpha_d \cos^2 \lambda_H)} \times \\ &\times \left\{ \operatorname{ctg} \alpha_d \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_d \left(1 + \frac{2f_0}{z_1} \sin \lambda_H \right)^2 + \sin^2 \lambda_H \left[\left(1 + \frac{2f_0}{z_1} \sin \lambda_H \right)^2 - 1 \right]} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (36.62)$$

Здесь α_d — угол профиля исходного контура, связанный с углом α_s соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha_d = \operatorname{tg} \alpha_s \sin \lambda_n. \quad (36.63)$$

При малых углах подъема λ_n , если пренебречь членами $\sin^2 \lambda_n$ и выше, формула (36.62) примет такой вид:

$$z_2 \gg \frac{2f}{1 - \cos^2 \alpha_d \cos^2 \lambda_n}. \quad (36.64)$$

Идя на дальнейшие упрощения, приняв, что $\cos^2 \lambda_n \approx 1$, получим

$$z_2 \gg \frac{2f_0}{\sin^2 \alpha_d}, \quad (36.65)$$

что совпадает с формулой (19.32), полученной из условия отсутствия подрезания зубцов рейкой.

§ 37. Пятно контакта поверхностей зубцов

Пусть поверхности зубцов касаются первоначально друг друга в одной точке. После сжатия, вследствие упругих деформаций зубцов, их поверхности начинают касаться по некоторой площадке. В процессе зацепления

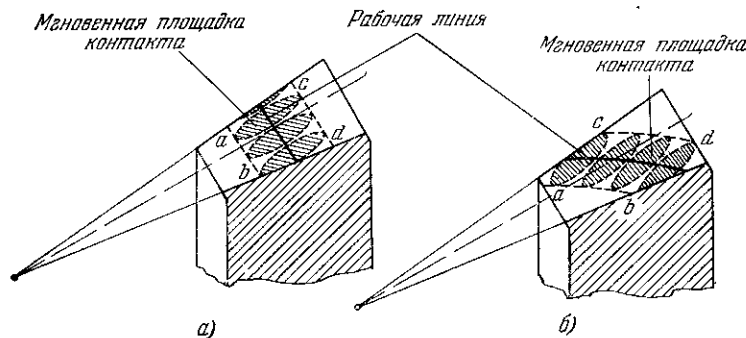


Рис. 69.

такие площадки появляются во всех точках рабочей линии, образуя так называемое пятно контакта. Под рабочей линией понимается совокупность тех точек на боковой поверхности Σ_1 , в которых Σ_1 касается сопряженной поверхности Σ_2 . Предполагается, что поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются друг друга в каждое мгновение в точке.

На рис. 69 на поверхности зубца конического колеса изображены: рабочая линия, мгновенные площадки контакта и пятно контакта в виде контура $abcd$. Форма пятна контакта в значительной степени определяется направлением на поверхности зубца рабочей линии, а размеры — величиной мгновенных площадок контакта. В случае, изображенном на рис. 69, б, пятно контакта имеет диагональный характер. Изменение в процессе зацепления расстояния между силой давления и опорами колеса приводит к колебаниям величины опорных реакций; форма пятна контакта, изображенного на рис. 69, б, является нежелательной.

Размер и форма мгновенной площадки контакта могут быть определены в результате решения контактной задачи — задачи Герца о сжатии двух упругих тел, находящихся первоначально в точечном контакте.

В настоящем параграфе приводится решение двух задач: а) определение условий, при которых поверхности зубцов в окрестности точки кон-

такта не пересекаются друг с другом, б) определение формы и размеров мгновенной площадки контакта.

Контакту поверхностей были посвящены работы Герца [281], И. Я. Штаермана [263], А. И. Лурье [202] и других исследователей.

А. Уравнения поверхности в окрестности точки контакта

Пусть на поверхности, заданной уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, \vartheta), \quad (37.1)$$

выбрана кривая MM' (рис. 70)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(s), \vartheta(s)], \quad (37.2)$$

где s — длина дуги кривой.

Обозначим через Δs длину дуги $\widehat{MM'}$, а через $\Delta \mathbf{r} = \widehat{MM'}$ — приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Следуя выводу, изложенному в книге П. К. Рашевского [227], разложим $\Delta \mathbf{r}$ в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \overline{MM'} = \Delta \mathbf{r} = & \frac{d\mathbf{r}}{ds} \Delta s + \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \\ & + \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots, \end{aligned} \quad (37.3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{ds}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = & \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial \vartheta} \frac{du}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \vartheta^2} \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

и т. д.

Проведем в точке M (рис. 70) касательную плоскость к поверхности и опустим из точки M' перпендикуляр на касательную плоскость. Вектор $\overline{PM'}$, параллельный единичному вектору $\mathbf{e}$ нормали к поверхности в точке M , представляет отклонение точки M' от касательной плоскости. Величина этого отклонения

$$\overline{PM'} = l\mathbf{e}. \quad (37.4)$$

Знак для l положительный, если $\overline{PM'}$ и $\mathbf{e}$ имеют одно направление.

Приняв во внимание, что

$$\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l\mathbf{e}, \quad (37.5)$$

получим

$$\overline{MP} + l\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \Delta s + \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots \quad (37.6)$$

Умножим обе части равенства (37.6) скалярно на $\mathbf{e}$, учтя, что $\mathbf{e}$ перпендикулярен векторам $\overline{MP}$ и $d\mathbf{r}/ds$, принадлежащим касательной

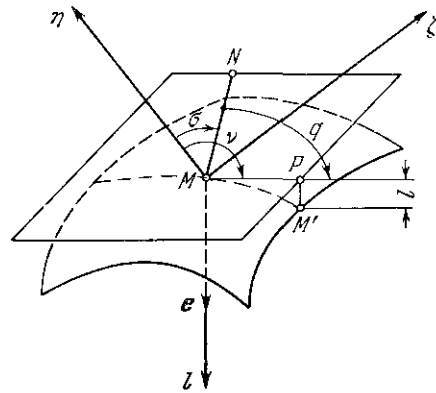


Рис. 70.

плоскости. В результате найдем

$$l = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \mathbf{e} \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \mathbf{e} \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots \quad (37.7)$$

Проведем через точку M (рис. 70) прямоугольную систему координат: η , ζ и l , направив ось l по нормали к поверхности, а оси η и ζ расположим в касательной плоскости. В окрестности M точка поверхности определится координатами η , ζ и l , либо координатами ν , $\rho = \overline{MP}$; l (рис. 70).

В дифференциальной геометрии [227] доказываеся, что

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \mathbf{e} = \kappa,$$

где κ — нормальная кривизна поверхности в сечении плоскостью, проведенной через $\mathbf{e}$ и $\overline{MM'}$. Ограничиваясь в уравнении (37.7) членами второго порядка малости, можно записать

$$l = \frac{1}{2} \kappa (\Delta s)^2 = \frac{1}{2} \kappa (\eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2} \kappa \rho^2, \quad (37.8)$$

где $\rho = \overline{MP}$; η и ζ — координаты точки P .

Обозначим через MN направление на касательной плоскости, соответствующее одной из главных кривизн поверхности в точке M .

Согласно формуле Эйлера кривизна поверхности в нормальном сечении, проведенном через $\overline{MM'}$ (см. § 34), определится так:

$$\kappa = \kappa_I \cos^2 q + \kappa_{II} \sin^2 q, \quad (37.9)$$

где $q = \nu - \sigma$ (рис. 70).

κ_I — главная кривизна в направлении, определяемом MN , κ_{II} — главная кривизна в перпендикулярном направлении.

Уравнения (37.8) и (37.9) позволяют определить в системе η , ζ и l координаты точки M' , считая заданными главные кривизны поверхности в точке M .

В. Условие непересечения двух поверхностей в окрестности заданной точки контакта

При точечном касании двух поверхностей надо удостовериться, что в окрестности рассматриваемой точки не имеет места пересечение поверхностей. Для этого, как будет показано ниже, нужно сравнить значения $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$, вычисленные для обеих поверхностей.

Пусть σ_1 и σ_2 — углы, определяющие направления главных кривизн $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_I^{(2)}$ для обеих поверхностей в системе η , ζ и l (рис. 71). При введенных обозначениях

$$2l^{(1)} = \rho^2 [\kappa_I^{(1)} \cos^2 (\nu - \sigma_1) + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2 (\nu - \sigma_1)], \quad (37.10)$$

$$2l^{(2)} = \rho^2 [\kappa_I^{(2)} \cos^2 (\nu - \sigma_2) + \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 (\nu - \sigma_2)]. \quad (37.11)$$

Рассечем обе поверхности общей плоскостью, проведенной через точку M и содержащей орт нормали $\mathbf{e}$; направление плоскости определяется углом ν .

На рис. 72, a кривые 1 и 2 представляют сечения поверхностей Σ_1 и Σ_2 указанной плоскостью. Примем, что орт нормали $\mathbf{e}$ имеет одинаковое направление для обеих поверхностей. Пусть центр кривизны для кривой 1 в точке M лежит на положительной оси l (направления l и $\mathbf{e}$ совпадают), а центр кривизны кривой 2 находится на отрицательной оси l .

Тогда согласно (37.8) $l^{(1)} > 0$, а $l^{(2)} < 0$. Зазор между кривыми, измеренный на расстоянии ρ от точки M , определяется как разность $l^{(1)} - l^{(2)}$ (либо как разность $l^{(2)} - l^{(1)}$).

Представим теперь, что мы рассматриваем новое нормальное сечение поверхностей Σ_1 и Σ_2 , проведенное через орт нормали e и определяемое другим значением v (рис. 72, б). Зазор между кривыми 1 и 2, измеренный на том же расстоянии ρ от точки M , вновь будем определять как разность $l^{(1)} - l^{(2)}$. Если знак разности $l^{(1)} - l^{(2)}$ (или $l^{(2)} - l^{(1)}$), измеренной при $\rho = \text{const}$, остается неизменным для всех значений v (для

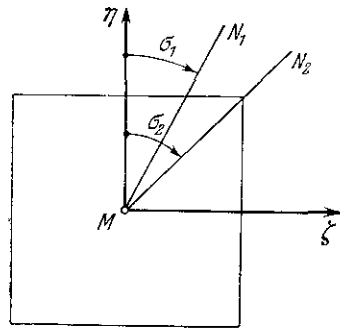


Рис. 71.

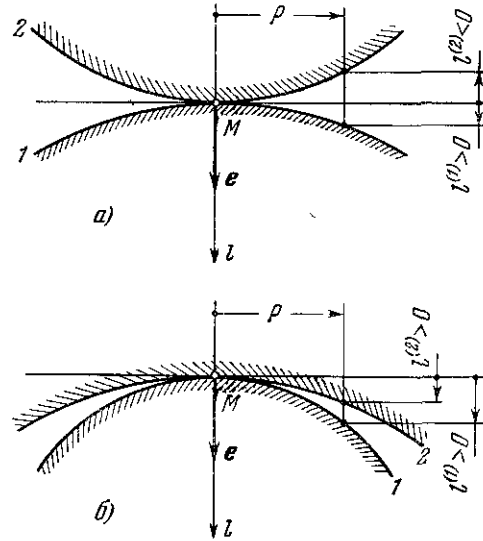


Рис. 72.

всех нормальных сечений), это свидетельствует о том, что в окрестности точки M поверхности Σ_1 и Σ_2 не пересекаются.

Согласно формуле (37.8) величина уклонения $l^{(i)}$ поверхности Σ_i от касательной плоскости пропорциональна нормальной кривизне $\kappa^{(i)}$. Основываясь на этом, можно утверждать, что интерференция поверхностей в окрестности точки контакта будет исключена, если знак приведенной нормальной кривизны $\kappa_{\text{пр}} = \kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}$ остается неизменным для всех направлений нормальных сечений (для всех значений v).

С. Индикатрисы нормальных кривизн и нормальных уклонений поверхностей от касательной плоскости

В целях большей наглядности уклонение $l^{(i)}$ поверхности от касательной плоскости желательно представить в полярной системе координат, представляя $l^{(i)}$ как модуль радиуса-вектора с полярным углом v по отношению к полярной оси η .

В связи с тем, что знак $l^{(i)} = \frac{1}{2} \kappa^{(i)} \rho^2$ изменяется так же, как знак нормальной кривизны $\kappa^{(i)}$, $l^{(i)}$ может принимать отрицательные значения. Так как модуль радиуса-вектора может быть только положительной величиной, будем строить кривые $l_1(v)$ и $l_2(v)$, определяемые уравнениями:

$$l_1 = l^{(1)} + d, \quad l_2 = l^{(2)} + d. \quad (37.12)$$

Величину d можно выбрать достаточно произвольно, с тем, однако,

чтобы в промежутке $0 \leq \nu \leq 2\pi$ $l_i > 0$. Окружность радиуса d можно рассматривать на диаграмме как линию нулевой кривизны. Отрезок, отсчитанный от окружности радиуса d , пропорционален значению нормальной кривизны (уклонению поверхности).

Так как $l^{(1)} - l^{(2)} = l_1 - l_2$, условие непересечения поверхностей Σ_1 и Σ_2 в окрестности точки контакта можно трактовать как условие непересечения кривых $l_1(\nu)$ и $l_2(\nu)$.

Поясним изложенный способ построения кривых $l_i(\nu)$ на следующем примере. Пусть имеются два круговых цилиндра, радиусы которых находятся в отношении $r_1 : r_2 = 2$. Первоначально (рис. 73, а) эти цилиндры находятся во внутреннем касании, так что их оси параллельны, а угол между осями равен нулю. Направим ось η перпендикулярно общей образующей цилиндров. Если теперь оставить в прежнем положении цилиндр 1, а цилиндр 2 (меньшего радиуса) повернуть на некоторый угол вокруг общей нормали в какой-либо точке касания цилиндров, то касание последних станет точечным. На рис. 73, б построены круговые диаграммы $l_i(\nu)$ ($i = 1, 2$), причем $l_1 = OK_1$, $l_2 = OK_2$. Пересечение этих диаграмм свидетельствует о том, что разность $l^{(1)} - l^{(2)}$ в окрестности точки M изменяется по знаку и рассматриваемые поверхности пересекаются. Точки L_1, L_2, G_1, G_2 пересечения построенных графиков функций определяют направления (углы ν) с нулевым зазором между поверхностями цилиндров. Области L_1LL_2 и G_1GG_2 определяют направления, в которых зазор между поверхностями отрицательный.

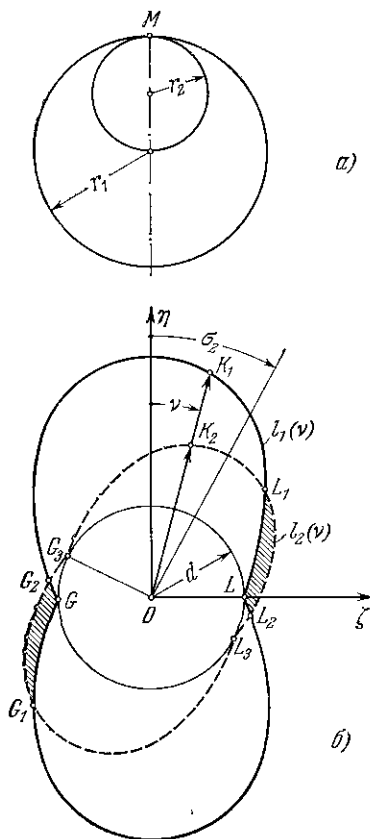


Рис. 73.

Д. Размер площадки контакта

Решение контактной задачи сжатия двух упругих тел, соприкасающихся первоначально в одной точке, выполняется при следующих исходных данных: а) известны главные радиусы кривизны обеих соприкасающихся поверхностей Σ_1 и Σ_2 ; угол, образуемый главным направлением на поверхности Σ_1 с главным направлением на поверхности Σ_2 ; б) заданы величина приложенной нагрузки и упругие постоянные материалов тел. Поверхности тел в окрестности первоначальной точки контакта не пересекаются. Предполагается, что силы давления нормальны к поверхности соприкосновения, деформации в зоне контакта являются только упругими, подчиненными закону Гука, площадка контакта весьма мала по сравнению с поверхностями соприкасающихся тел. В результате решения контактной задачи определяются: сближение тел, вызванное их деформацией, величина и распределение давления, передаваемого через площадку контакта, форма и размеры площадки контакта.

Мы ограничимся определением размеров площадки контакта, считая сближение и упругие перемещения известными. Тогда задача по определению размеров площадки контакта явится чисто геометрической задачей. Известно, что при назначении радиусов резцовых головок для нарезания конических и гипоидных колес с круговыми зубьями задаются величины так называемого отвода контактирующих поверхностей в окрестности точки контакта. Величина отвода определяет зазор между поверхностями,

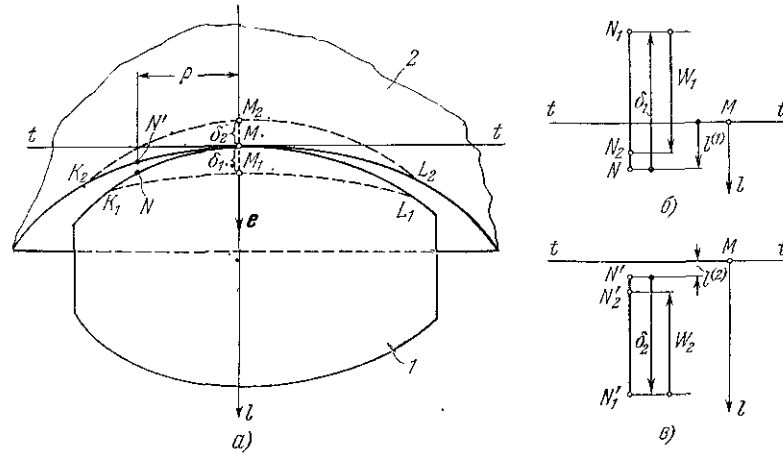


Рис. 74.

который после упругих деформаций станет равным нулю в точках, принадлежащих контуру упругой площадки контакта.

В теории упругости [202] доказывается, что если в уравнении (37.7) для отклонения от касательной плоскости ограничиться только членами второго порядка, проекция площадки контакта на касательную плоскость явится эллипсом. В этом можно убедиться из выводов, излагаемых ниже.

На рис. 74, а сплошными линиями изображены поверхности 1 и 2 до деформации. В этом положении они касаются друг друга в точке M. Орт общей нормали и общая касательная плоскость обозначены через e и t. В результате деформации тело 1 переместится поступательно в направлении, противоположном вектору e, на некоторую величину δ_1 , а тело 2 переместится в противоположном направлении на δ_2 ; сближение тел окажется равным $\delta_1 + \delta_2$.

Пусть зона деформаций распространяется на первом теле на область K_1ML_1 , а на втором — на область K_2ML_2 . Выберем точки N и N' тел, находящиеся в зоне деформации на расстоянии ρ от M. До деформации отклонения от касательной плоскости для этих точек равны соответственно $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$. Определим, каковы будут отклонения для точек N и N' после сближения тел и их деформаций в указанных точках.

Вместе с телом 1 точка N сместится на величину δ_1 и займет положение N_1 (рис. 74, б). Из-за упругого перемещения, равного в точке N w_1 , точка N_1 займет положение N_2 , и отклонение от касательной плоскости окажется равным

$$l = l^{(1)} - \delta_1 + w_1. \quad (37.13)$$

Точка N' тела 2 с учетом смещения тела на величину δ_2 и упругой деформации w_2 займет положение N'_2 (рис. 74, в), отклонение определится

уравнением

$$l^{(1)} = l^{(2)} + \delta_2 - w_2. \quad (37.14)$$

Тела I и 2 в зоне контакта касаются друг друга, и точки N и N' должны совпасть. Следовательно,

$$l^{(1)} - \delta_1 + w_1 = l^{(2)} + \delta_2 - w_2$$

или

$$|l^{(1)} - l^{(2)}| = (\delta_1 + \delta_2) - (w_1 + w_2). \quad (37.15)$$

Уравнение (37.15) распространяется на всю зону контакта поверхностей. Вне этой зоны

$$|l^{(1)} - l^{(2)}| > \delta.$$

Правая часть уравнения (37.15) всегда больше нуля, так как $\delta_1 > w_1$, $\delta_2 > w_2$. Поэтому в левой части уравнения должно содержаться абсолютное значение разности уклонений $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$.

При удалении от точки M величина упругого перемещения w_i уменьшается; на контуре площадки контакта $w_i = \text{const}$.

Из уравнения (37.15) следует, что для определения поверхности контакта на поверхностях тел нужно определить такие точки, в которых

$$|l^{(1)} - l^{(2)}| = \delta_1 + \delta_2 - (w_1 + w_2) = \delta. \quad (37.16)$$

Используя уравнения (37.10), (37.11) и (37.16), получим

$$\rho^2 [\kappa_I^{(1)} \cos^2(\nu - \sigma_1) + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2(\nu - \sigma_1) - \kappa_I^{(2)} \cos^2(\nu - \sigma_2) - \kappa_{II}^{(2)} \sin^2(\nu - \sigma_2)] = \pm 2\delta. \quad (37.17)$$

Преобразуем (37.17), учтя, что $\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2$, $\cos \nu = \frac{\eta}{\rho}$, $\sin \nu = \frac{\zeta}{\rho}$. В итоге получим

$$\begin{aligned} & \eta^2 (\kappa_I^{(1)} \cos^2 \sigma_1 + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2 \sigma_1 - \kappa_I^{(2)} \cos^2 \sigma_2 - \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 \sigma_2) + \\ & + \zeta^2 (\kappa_I^{(1)} \sin^2 \sigma_1 + \kappa_{II}^{(1)} \cos^2 \sigma_1 - \kappa_I^{(2)} \sin^2 \sigma_2 - \kappa_{II}^{(2)} \cos^2 \sigma_2) + \\ & + \eta \zeta (g_1 \sin 2\sigma_1 - g_2 \sin 2\sigma_2) = \pm 2\delta, \end{aligned} \quad (37.18)$$

где $g_1 = \kappa_I^{(1)} - \kappa_{II}^{(1)}$, $g_2 = \kappa_I^{(2)} - \kappa_{II}^{(2)}$.

Обозначим $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$, где σ — угол между главными направлениями с кривизнами $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_I^{(2)}$. Угол σ_1 , определяющий положение главного направления MN на поверхности Σ_1 относительно оси η , может быть выбран произвольно, в частности, его можно выбрать таким, чтобы

$$\begin{aligned} & g_1 \sin 2\sigma_1 - g_2 \sin 2\sigma_2 = g_1 \sin 2\sigma_1 - \\ & - g_2 (\sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma + \cos 2\sigma_1 \sin 2\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (37.19)$$

Из уравнения (37.19) следует, что

$$\operatorname{tg} 2\sigma_1 = \frac{g_2 \sin 2\sigma}{g_1 - g_2 \cos 2\sigma}. \quad (37.20)$$

На основании уравнений (37.18), (37.19) и (37.20) получим

$$B\eta^2 + A\zeta^2 = \pm \delta. \quad (37.21)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{4} [\kappa_{\Sigma}^{(1)} - \kappa_{\Sigma}^{(2)} - \sqrt{g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2\sigma + g_2^2}], \quad (37.22)$$

$$B = \frac{1}{4} [\kappa_{\Sigma}^{(1)} - \kappa_{\Sigma}^{(2)} + \sqrt{g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2\sigma + g_2^2}], \quad (37.23)$$

где $\kappa_{\Sigma}^{(i)} = \kappa_I^{(i)} + \kappa_{II}^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Из уравнения (37.24) следует, что проекция площадки контакта на касательную плоскость является эллипсом, полуосями b и a которого служат η и ζ , причем

$$a = \sqrt{\left| \frac{\delta}{A} \right|}, \quad (37.24)$$

$$b = \sqrt{\left| \frac{\delta}{B} \right|}. \quad (37.25)$$

Полуось b эллипса и главное направление с кривизной $\kappa_I^{(1)}$ поверхности Σ_1 образуют угол σ_1 , вычисляемый из уравнения (37.20).

Докажем, что направления осей эллипса (осей η и ζ) совпадают с направлениями, определяющими наибольший и наименьший зазоры между поверхностями Σ_1 и Σ_2 на расстоянии ρ от точки контакта. Зазор между поверхностями

$$c = l^{(1)} - l^{(2)} = \frac{\rho^2}{2} [\kappa_I^{(1)} \cos^2(v - \sigma_1) + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2(v - \sigma_1) - \kappa_I^{(2)} \cos^2(v - \sigma_2) - \kappa_{II}^{(2)} \sin^2(v - \sigma_2)]. \quad (37.26)$$

Для определения углов v , при которых зазор c на расстоянии ρ от точки контакта достигает экстремальных значений, продифференцируем (37.26). В результате найдем, что $dc/dv = 0$ при

$$g_1 \sin [2(v - \sigma_1)] - g_2 \sin [2(v - \sigma_2)] = 0. \quad (37.27)$$

Выше было показано, что при значении σ_1 , назначаемом по формуле (37.20),

$$g_1 \sin 2\sigma_1 - g_2 \sin 2\sigma_2 = 0. \quad (37.28)$$

Сопоставив (37.27) и (37.28), найдем, что экстремальные значения зазора c наступают при $v = 0$ и $v = 90^\circ$. Это и является доказательством, что направления, определяющие экстремальные значения зазора c между поверхностями Σ_1 и Σ_2 , совпадают с осями η и ζ , по которым направлены оси эллиптической площадки мгновенного контакта.

Приведенные уравнения позволяют достаточно точно определить размеры площадки контакта поверхностей при заданном сближении, если площадка контакта мала по сравнению с самими поверхностями зубцов. Указанное ограничение может быть устранено, если определять контур площадки контакта как линию пересечения контактирующих поверхностей, которым сообщено заданное сближение δ по общей нормали в первоначальной точке контакта (предложено Н. Г. Линдтропом и Б. Д. Зильберманом). При таком способе определения площадки контакта проекция ее контура на касательную плоскость уже не будет эллипсом.

Аналогичные результаты могут быть достигнуты, если в формуле (37.7) для уклонения l учитывать члены не только второго, но и более

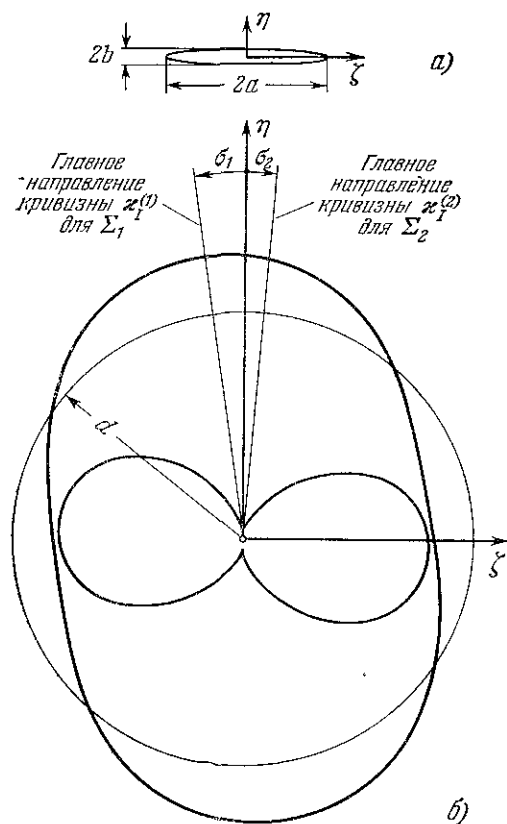


Рис. 75.

высоких порядков. Следует, однако, иметь в виду, что при оценке условий контакта из-за недостаточной достоверности величины сближения δ целесообразно сравнивать не абсолютные, а относительные размеры контактных площадок контакта для различных типоразмеров колес.

Пример 19. Рассматриваются конические колеса с криволинейными зубцами. Для двух поверхностей, находящихся первоначально в точечном контакте, заданы кривизны:

$$\begin{aligned}\kappa_I^{(1)} &= 0,01047 \frac{1}{\text{мм}}, \\ \kappa_{II}^{(1)} &= -0,00744 \frac{1}{\text{мм}}, \\ \kappa_I^{(2)} &= -0,03845 \frac{1}{\text{мм}}, \\ \kappa_{II}^{(2)} &= -0,00711 \frac{1}{\text{мм}}.\end{aligned}$$

Угол между главными направлениями с кривизнами $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_I^{(2)}$ $\sigma = 12,47^\circ$. Величина $\delta = 0,02$ мм. Требуется: а) определить полуоси эллиптической площадки мгновенного контакта; б) построить полярную диаграмму для l_1 и l_2 .

В результате вычислений по формулам (37.22) — (37.25) найдено,

что $a = 13,70$ мм, $b = 0,91$ мм, угол, определяющий направление кривизны $\kappa_I^{(1)}$, $\sigma_1 = -7,95^\circ$. Полуоси эллипса a и b направлены соответственно по координатным осям ζ и η (рис. 75, а). Круговые диаграммы для l_1 и l_2 изображены на рис. 75, б, из которого очевидно, что пересечение поверхностей в окрестности точки контакта отсутствует, а оси эллипса действительно определяют направления, по которым зазор $c = l_1 - l_2$ достигает экстремальных значений.

§ 38. Синтез сопряженных зацеплений

Задача синтеза в простейшей постановке может быть сформулирована так: дана схема трехзвенного зубчатого механизма с двумя подвижными звеньями 1 и 2, которые должны совершать заданные движения по отношению к третьему, неподвижному, звену механизма. Предполагается, что у одного из подвижных звеньев, например звена 1, поверхность Σ_1 известна. Требуется определить поверхность Σ_2 , которой должно быть снабжено звено 2 для того, чтобы посредством поверхностей Σ_1 и Σ_2 , находящихся в непрерывном касании друг с другом, передача движения от звена 1 к звену 2 осуществлялась бы по заданному закону.

При линейном касании поверхностей Σ_2 является огибающей семейства поверхностей Σ_1 в относительном движении, и для ее определения

нужно воспользоваться методами, изложенными в §§ 28 и 30. На практике поверхности Σ_1 и Σ_2 образуются посредством одной или двух инструментальных (производящих) поверхностей. При нарезании зубцов производящая и нарезаемая поверхности находятся в непрерывном зацеплении друг с другом. Задачей синтеза здесь является — определить требования, которые должны быть наложены на производящие поверхности и на их относительные движения при нарезании Σ_1 и Σ_2 с тем, чтобы поверхности Σ_1 и Σ_2 стали бы сопряженными поверхностями звеньев 1 и 2 рассматриваемого зубчатого механизма. Под сопряженными здесь, как и ранее, понимаются поверхности зубцов колес, которые, находясь в непрерывном касании друг с другом, осуществляют передачу движения по заданному закону.

Будем в последующем различать два случая касания сопряженных поверхностей зубцов колес передачи: а) линейное, при котором поверхности касаются друг друга по линии, в общем случае по кривой линии; б) точечное касание.

Ниже будут рассмотрены следующие способы образования сопряженных поверхностей:

1) Поверхность Σ_2 зубцов звена 2 образуется производящей (инструментальной) поверхностью P , совпадающей с поверхностью Σ_1 звена 1.

2) Поверхности Σ_1 и Σ_2 нарезаются одной производящей поверхностью P , отличной от Σ_1 и Σ_2 .

3) Для образования поверхностей Σ_1 и Σ_2 используются две жестко связанные между собой производящие поверхности P и F , касающиеся друг друга по линии; при этом Σ_1 нарезается P , Σ_2 нарезается F .

4) Обе используемые производящие поверхности, P и F , являются в процессе образования Σ_1 и Σ_2 подвижными друг относительно друга.

5) Нарезание Σ_2 производится поверхностью P , совпадающей с Σ_1 , но относительное движение по отношению к Σ_2 определяется не одним, а двумя параметрами ψ и φ . При зацеплении поверхностей Σ_1 и Σ_2 один из указанных параметров (ψ или φ) является постоянным.

6) Для образования сопряженных зацеплений используются не производящие поверхности, а две производящие линии.

7) Сопряженные зацепления образуются посредством одной производящей линии.

При последующем изложении способы образования сопряженных зацеплений будут рассматриваться в приведенной выше последовательности.

Передача движения с заданным отношением скоростей является первым, но далеко не единственным требованием, которое должно быть удовлетворено при синтезе зубчатых зацеплений. Необходимо, чтобы проектируемые зацепления удовлетворяли ряду показателей, обеспечивающих простоту технологии, малую чувствительность к погрешностям изготовления и сборки, высокую нагрузочную способность. Методы, изложенные в гл. II и III, позволяют оценить, насколько проектируемые передачи удовлетворяют требованиям оптимальности.

1°. Пространственное зацепление с линейным касанием поверхностей зубцов может быть получено при соблюдении следующих двух условий: 1) нарезание поверхностей зубцов одного из звеньев механизма, например, Σ_2 производится инструментальной поверхностью P , полностью совпадающей с поверхностью Σ_1 другого звена передачи; 2) при образовании Σ_2 поверхности P и Σ_2 должны иметь на зуборезном станке такое же относительное движение, какое имеют Σ_1 и Σ_2 в зубчатом механизме.

Изложенный способ образования сопряженных поверхностей известен под названием второго способа Оливье. Он используется, в частности, для образования сопряженных поверхностей в червячной передаче с цилиндрическим червяком. Этот способ подкупает своей простотой, но требует большого комплекта зуборезного инструмента.

В целях создания радиального зазора между поверхностями Σ_1 и Σ_2 при проектировании инструментальной поверхности P назначают высоту головок зубцов, большую, чем у Σ_1 , на величину требуемого радиального зазора. При нарезании поверхности Σ_2 она может оказаться подрезанной производящей поверхностью P . Для устранения подрезания необходимо ограничить размеры рабочей части поверхности P и Σ_1 . Интерференция поверхностей Σ_1 и Σ_2 при зацеплении их друг с другом в передаче невозможна, так как все «лишние» участки поверхности Σ_2 , т. е. участки, содержащие особые точки, срезаются инструментальной поверхностью P при образовании Σ_2 .

2°. Более широким по своим возможностям является синтез сопряженных зацеплений, основанный на образовании поверхностей Σ_1 и Σ_2 посредством инструментальной поверхности P , отличной от Σ_1 и Σ_2 (первый способ Оливье). Представим, что в то время, когда звенья 1 и 2 зубчатого механизма совершают заданные движения, инструментальная (производящая) поверхность P движется определенным образом по отношению к стойке механизма. В системах S_1 и S_2 , связанных с подвижными звеньями, поверхность P воспроизведет поверхности Σ_1 и Σ_2 . Обозначим через P_{P1} и P_{P2} движения P относительно звеньев 1 и 2. Поверхность Σ_i представляет огибающую семейства инструментальных поверхностей P в движении P_{Pi} ($i = 1, 2$); P и Σ_i находятся при этом в линейном контакте. Образованные посредством P поверхности Σ_1 и Σ_2 могут в каждый момент времени: а) касаться друг друга по линии, б) касаться в точке, в) вовсе не касаться друг друга.

Рассмотрим подробнее три указанных выше случая.

Обозначим через $D^{(P1)}$ мгновенную линию контакта поверхностей P и Σ_1 . Соответственно $D^{(P2)}$ — мгновенная линия контакта P и Σ_2 . Если в каждый момент времени линия контакта $D^{(P1)}$ тождественна $D^{(P2)}$, поверхности Σ_1 и Σ_2 находятся в линейном контакте. Можно представить, что все три поверхности — P , Σ_1 и Σ_2 — находятся в каждый момент времени в непрерывном контакте и касаются друг друга по одной и той же линии $D^{(P1)} \equiv D^{(P2)}$. В процессе движения линия контакта может изменяться, т. е. координаты ее точек являются в общем случае функциями от параметра движения.

Выясним условия, при которых $D^{(P1)} \equiv D^{(P2)}$. Линия контакта $D^{(P1)}$ определяется уравнениями:

$$r_P = r_P(u_P, \vartheta_P), \quad v_P^{(P1)} e_P^{(P)} = 0, \quad (38.1)$$

где $r_P = r_P(u_P, \vartheta_P)$ — уравнение поверхности P , $e_P^{(P)}$ — орт нормали к поверхности P в системе S_P , $v_P^{(P1)}$ — вектор скорости относительного движения в системе S_P .

Линия контакта $D^{(P2)}$ определяется уравнениями:

$$r_P = r_P(u_P, \vartheta_P), \quad v_P^{(P2)} e_P^{(P)} = 0. \quad (38.2)$$

Очевидно, что $D^{(P1)} \equiv D^{(P2)}$, т. е. линия контакта поверхностей P и Σ_1 , P и Σ_2 будет одна и та же, если во всех точках линии $D^{(P1)}$ будет удовлетворяться не только условие $v_P^{(P1)} e_P^{(P)} = 0$, но и условие $v_P^{(P2)} e_P^{(P)} = 0$.

Следовательно,

$$\mathbf{v}_P^{(P1)} \mathbf{e}_P^{(P)} = \mathbf{v}_P^{(P2)} \mathbf{e}_P^{(P)} = 0. \quad (38.3)$$

Уравнение (38.3) выражает требование, что в каждой точке линии контакта $D^{(P1)} \equiv D^{(P2)}$ скорости $\mathbf{v}_P^{(P1)}$ и $\mathbf{v}_P^{(P2)}$ должны находиться в одной плоскости, касательной к поверхности P . Так как касательная плоскость к P определяется векторами $\partial \mathbf{r}_P / \partial u_P$ и $\partial \mathbf{r}_P / \partial \theta_P$, линейный контакт поверхностей Σ_1 и Σ_2 (тогда $D^{(P1)} \equiv D^{(P2)}$) становится возможным, если во всех точках мгновенной линии контакта $D^{(P1)}$ будут компланарными четыре вектора: $\partial \mathbf{r}_P / \partial u_P$, $\partial \mathbf{r}_P / \partial \theta_P$, $\mathbf{v}_P^{(P1)}$ и $\mathbf{v}_P^{(P2)}$.

При коллинеарности векторов $\mathbf{v}_P^{(P1)}$ и $\mathbf{v}_P^{(P2)}$ или их равенстве линейный контакт поверхностей Σ_1 и Σ_2 становится возможным, если на поверхности P в каждом ее положении найдется такая линия, в точках которой окажутся компланарными три вектора:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial u_P}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial \theta_P}, \quad \mathbf{v}_P^{(P1)}, \quad \text{а} \quad \mathbf{v}_P^{(P2)} = k \mathbf{v}_P^{(P1)}.$$

Точечное касание поверхностей Σ_1 и Σ_2 имеет место, если линии контакта $D^{(P1)}$ и $D^{(P2)}$ не тождественны друг другу, но в каждый момент времени имеют общую точку M . Уравнение (38.3) соблюдается в этом случае только в точке M , общей для линий контакта $D^{(P1)}$ и $D^{(P2)}$. Иными словами, требование компланарности четырех векторов $(\partial \mathbf{r}_P / \partial u_P, \partial \mathbf{r}_P / \partial \theta_P, \mathbf{v}_P^{(P1)}, \mathbf{v}_P^{(P2)})$ относится только к точке пересечения линий контакта $D^{(P1)}$ и $D^{(P2)}$. Совокупность точек M на инструментальной поверхности P , Σ_1 и Σ_2 образует так называемые рабочие линии на этих поверхностях, являющиеся, по существу, линиями зацепления на указанных поверхностях.

В некоторых случаях может оказаться, что общая точка M линий контакта $D^{(P1)}$ и $D^{(P2)}$ располагается вне рабочей части производящей поверхности P . Очевидно, что поверхности Σ_1 и Σ_2 не могут при этом иметь не только линейного, но даже точечного контакта.

При образовании поверхностей Σ_1 и Σ_2 они могут оказаться подрезанными инструментальной поверхностью P . Во избежание подрезания необходимо ограничить размеры поверхности P (см. § 36). Легко удостовериться, что интерференция поверхностей Σ_1 и Σ_2 исключается как при линейном, так и при точечном касании. В самом деле, представим, что все три поверхности — P , Σ_1 и Σ_2 — находятся в одновременном зацеплении. «Лишние» участки поверхностей Σ_1 и Σ_2 , в том числе и участки, содержащие особые точки, будут срезаны производящей поверхностью P . Представим теперь, что поверхность P изъята и в одновременном зацеплении находятся только Σ_1 и Σ_2 . Очевидно, что, поскольку «лишние» участки поверхностей Σ_1 и Σ_2 были срезаны при их образовании, зацепление в особых точках указанных поверхностей, а также интерференция — внедрение друг в друга поверхностей — полностью исключаются.

Описанный способ синтеза — образование сопряженных поверхностей Σ_1 и Σ_2 посредством общей производящей поверхности P — широко применяется на практике. Для передач с параллельными и пересекающимися осями уравнение (38.3) соблюдается во всех точках линий контакта $D^{(P1)}$ и $D^{(P2)}$, если мгновенная ось вращения $L^{(P1)} \equiv L^{(P2)}$. Под $L^{(P1)}$ понимается мгновенная ось вращения при зацеплении P с Σ_1 , а под $L^{(P2)}$ — мгновенная ось вращения при зацеплении P с Σ_2 . При совпадении осей $L^{(P1)} \equiv L^{(P2)}$ относительная скорость $\mathbf{v}^{(P1)} = \lambda \mathbf{v}^{(P2)}$, мгновенные линии контакта $D^{(P1)} \equiv D^{(P2)}$, поверхности Σ_1 и Σ_2 находятся в линейном

контакте. Известно, что так именно воспроизводятся: а) эвольвентное плоское зацепление с помощью общей инструментальной рейки (см. § 43), б) конические колеса с постоянной высотой ножки, нарезаемые посредством одной производящей поверхности.

В передачах с перекрещивающимися осями образованные таким способом зацепления будут находиться, как правило, в точечном касании. В частности, так могут быть образованы колеса цилиндро-гипоидной передачи (см. § 104).

3°. Возможность образования сопряженных зацеплений с точечным контактом посредством двух жестко связанных производящих поверхностей была указана А. Ф. Николаевым, Я. С. Давыдовым [58] и автором книги [176].

Пусть поверхность Σ_1 образуется производящей поверхностью P , а Σ_2 — производящей поверхностью F . Производящие поверхности P и F , как уже было отмечено выше, жестко между собой связаны и касаются друг друга по линии C .

Выясним, какие требования должны быть предъявлены к производящим поверхностям P и F , образующим сопряженные поверхности. С этой целью рассмотрим сначала, какие поверхности образуются в системах S_1 и S_2 одной из производящих поверхностей, например P . Такой способ образования поверхностей, описанный в п. 2° настоящего параграфа под названием первого способа Оливье, приводит, как было указано выше, к двум случаям: а) в системах S_1 и S_2 образуются соответственно поверхности Σ_1 и Σ_{II} , находящиеся в линейном касании, б) производящая поверхность P образует в системах S_1 и S_2 поверхности Σ_1 и Σ_{II} , находящиеся в точечном касании. Обозначение Σ_{II} указывает, что на звене 2 посредством P образуется поверхность, отличная от поверхности Σ_2 , воспроизводимой в системе S_2 инструментальной поверхностью F .

Линейный контакт поверхностей Σ_1 и Σ_{II} становится возможным, если характеристики $D^{(1P)}$ и $D^{(II P)}$ совпадают друг с другом: $D^{(1P)}$ — линия контакта поверхностей Σ_1 и P , $D^{(II P)}$ — линия контакта поверхностей Σ_{II} и P . При $D^{(1P)} \equiv D^{(II P)}$ выбор второй производящей поверхности — поверхности F — может быть выполнен в широких пределах. Единственное ограничение заключается лишь в том, что поверхности P и F должны касаться друг друга по линии C , пересекающей все характеристики $D^{(1P)} \equiv D^{(II P)}$. Поверхность F воспроизведет в системе S_2 поверхность Σ_2 , как семейство линий контакта $D^{(2F)}$. Мгновенной точкой касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 явится точка линии C , представляющая одновременно точку пересечения характеристик $D^{(1P)}$ и $D^{(2F)}$. Интерференция поверхностей Σ_1 и Σ_2 , как это было разъяснено в п. 2° настоящего параграфа, исключена.

Рассмотрим теперь второй случай, когда P образует в системах S_1 и S_2 поверхности Σ_1 и Σ_2 , находящиеся в каждый момент времени в точечном касании (впервые был рассмотрен Я. С. Давыдовым [58]). Линии контакта $D^{(1P)}$ и $D^{(II P)}$ уже не совпадают друг с другом, точка их пересечения M является мгновенной точкой касания поверхностей Σ_1 и Σ_{II} . Совокупность точек M образует на поверхности P линию $M - M$, которая может быть названа рабочей линией. Вторая производящая поверхность (F) должна быть выбрана такой, чтобы она касалась поверхности P по линии $M - M$.

Это требование накладывает значительные ограничения на выбор поверхности F . Применение такого способа синтеза может оказаться целесообразным лишь в тех редких случаях, когда возникает необходи-

мость добиться изменения степени локализации контакта по сравнению со случаем, при котором для образования сопряженных поверхностей Σ_1 и Σ_{II} с точечным контактом используется одна производящая поверхность P .

Интерференция поверхностей Σ_1 и Σ_2 будет исключена, если Σ_2 окажется направленной «в тело» поверхности Σ_{II} . Для этого при совмещении производящих поверхностей P и F по линии $M - M$ нужно обеспечить, чтобы производящая поверхность F помещалась «в теле» поверхности P .

4°. Образование сопряженных зацеплений может быть достигнуто, как показали А. Ф. Николаев и Я. С. Давыдов [55], с помощью двух производящих поверхностей, совершающих движения относительно друг друга.

Пусть в системах S_1 и S_2 , связанных со звеньями передачи, должны быть образованы сопряженные поверхности Σ_1 и Σ_2 . Системы S_1 и S_2 совершают заданное относительное движение, которое мы обозначим через Π_{12} . Примем, что поверхность Σ_1 нарезается производящей поверхностью P , и система S_P совершает какое-то выбранное движение Π_{P1} относительно S_1 . Аналогично поверхность Σ_2 нарезается производящей поверхностью F ; система S_F совершает некоторое выбранное движение Π_{F2} относительно S_2 . Предполагается, что каждое из указанных относительных движений определяется одним параметром. Легко установить, что относительное движение Π_{PF} определяется однозначно, если относительное движение Π_{12} назначено, а Π_{P1} и Π_{F2} выбраны.

Излагаемые ниже материалы позволяют определить, действительно ли производящие поверхности P и F могут образовать сопряженные поверхности Σ_1 и Σ_2 , считая заданными поверхности P и F , а также все относительные движения: Π_{P1} , Π_{F2} , Π_{12} и Π_{PF} . Одновременно можно будет выяснить характер касания образуемых поверхностей Σ_1 и Σ_2 , т. е. является это касание линейным или точечным.

Следуя М. Л. Ерихову, изобразим рассматриваемый способ образования поверхностей схемой, представленной на рис. 76. Через Π , Λ и T обозначено касание по поверхности, линии и точке. Представим, что все системы (S_1 , S_2 , S_P и S_F) совершают одновременно все указанные выше движения. На начальном этапе исследования нужно выяснить, могут ли поверхности P и F совершать заданное относительное движение Π_{PF} , находясь в непрерывном касании друг с другом.

Поверхностное касание P и F означает, что эти поверхности совпадают друг с другом, а их относительное движение Π_{PF} равнозначно перемещению поверхности в самой себе. Так, например, при нарезании винтовых колес двумя рейками производящими поверхностями служат две плоскости, относительное движение Π_{PF} представляет скольжение одной плоскости по другой. Другим примером поверхностного касания P и F может явиться случай, когда P и F — совпадающие друг с другом поверхности вращения, а относительное движение представляет вращение вокруг оси поверхности вращения.

Линейное касание P и F возможно, если они являются взаимогнбаемыми в относительном движении Π_{PF} . Примером этого может служить нарезание пары цилиндрических колес рейкой и долбяком. Поверхность P

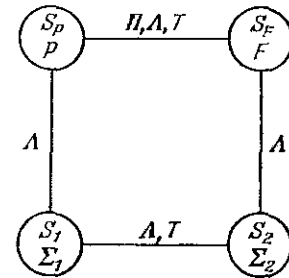


Рис. 76.

рейки и поверхность F долбяка являются взаимоогибоемыми в относительном движении Π_{PF} . Для того чтобы убедиться, что касание поверхностей P и F является линейным, нужно поступить так: а) считая заданной одну из поверхностей, например P , определить огибающую поверхность в относительном движении Π_{PF} ; б) далее нужно удостовериться, что найденная поверхность полностью совпадает с другой производящей поверхностью F . Возможен и другой вариант метода исследования: поверхности P и F считаются заданными, ищется характер их относительного движения способом, излагаемым в § 40. Если определенное таким образом относительное движение Π_{PF} совпадает с требуемым, поверхности P и F могут быть использованы в качестве пары производящих поверхностей. Способ исследования, излагаемый в § 40, позволяет одновременно с определением вида относительного движения выяснить и характер касания P и F : является оно линейным или точечным. Поэтому указанный способ может быть применен для исследования характера касания P и F также и в том случае, когда предполагаемое касание точечное.

Образование сопряженных поверхностей Σ_1 и Σ_2 посредством P и F становится невозможным, если при касании P и F они совершают относительное движение, не совпадающее с заданным, либо если их точки касания располагаются вне рабочей части P и F и, наконец, если зацепление P и F кромочное (P и F имеют общие точки, но не имеют в этих точках общих нормалей).

Рассмотрим теперь, как может быть определен характер зацепления поверхностей Σ_1 и Σ_2 , образованных посредством подвижной производящей пары P и F . Предполагая, что все четыре поверхности (P , F , Σ_1 и Σ_2) находятся в одновременном зацеплении, найдем уравнения линий контакта $D^{(P1)}$ и $D^{(F2)}$ в одной и той же неподвижной системе S . Для этого нужно воспользоваться соответственно следующими системами уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r^{(P)} &= r^{(P)}(u_P, \vartheta_P, \varphi), \\ e^{(P)} v^{(P1)} &= 0, \end{aligned} \right\} D^{(P1)}, \quad (38.4)$$

$$\left. \begin{aligned} r^{(F)} &= r^{(F)}(u_F, \vartheta_F, \varphi), \\ e^{(F)} v^{(F1)} &= 0, \end{aligned} \right\} D^{(F1)}. \quad (38.5)$$

В этих уравнениях $r^{(P)}$ и $r^{(F)}$ — радиусы-векторы текущей точки поверхности P и поверхности F , $e^{(P)}$ и $e^{(F)}$ — орты нормалей к этим поверхностям, φ — параметр движения, определяющий положения P и F в системе S .

Поверхности Σ_1 и Σ_2 будут находиться в линейном контакте, если $D^{(P1)} \equiv D^{(F2)}$, и в точечном, если линии $D^{(P1)}$ и $D^{(F2)}$ не совпадают друг с другом, но имеют общую точку.

5°. Н. Н. Крылов [142] и М. Л. Ерихов [79] обосновали способ образования сопряженных зацеплений, сущность которого заключается в следующем: производящая поверхность P выбирается совпадающей с Σ_1 . При нарезании Σ_2 задается относительное движение $\Pi_{P2}^{(\varphi, \psi)}$, определяемое двумя независимыми параметрами φ и ψ . Поверхность Σ_2 будет воспроизведена как огибающая семейства поверхностей P при двухпараметрическом огибании. Осуществим теперь передачу со звеньями 1 и 2, снабженными поверхностями $\Sigma_1 \equiv P$ и Σ_2 , и зададим относительное движение $\Pi_{12}^{(\varphi)}$, определяемое одним независимым параметром φ ; второму параметру — ψ — придадим фиксированное значение. Поскольку Σ_1 и Σ_2 являются взаимоогибоемыми в двухпараметрическом движении при непрерывном

и независимом друг относительно друга изменении параметров ψ и φ , Σ_1 и Σ_2 останутся сопряженными и при фиксированном значении одного из этих параметров. Поэтому поверхности Σ_1 и Σ_2 при зацеплении в передаче будут сопряженными; касание этих поверхностей будет точечным.

Изложенный способ синтеза может быть, в частности, реализован следующим образом. Пусть цилиндрическое колесо нарезается червячной фрезой и относительное движение определяется двумя независимыми параметрами: φ — параметром вращения, ψ — параметром, определяющим перемещение в направлении оси колеса. Червяк, идентичный фрезе, и нарезанное таким образом колесо будут находиться в правильном зацеплении при любом фиксированном значении ψ , их относительное движение $\Pi_{12}^{(\psi)}$ не будет зависеть от выбранного при монтаже значения ψ . Относительное движение $\Pi_{12}^{(\psi)}$ тождественно $\Pi_{12}^{(\varphi)}$ при нарезании.

6°. В некоторых случаях, исходя из технологических соображений, для образования сопряженных зацеплений вместо производящих поверхностей целесообразно использовать производящие линии, под которыми понимаются режущие кромки резцов. Образованию сопряженных зацеплений посредством двух производящих линий посвящены работы Я. С. Давыдова [60] и В. И. Васильева.

Пусть в системах S_1 и S_2 , совершающих заданное относительное движение Π_{12} , нужно образовать сопряженные поверхности Σ_1 и Σ_2 . Поверхность Σ_1 образуется линией T , а Σ_2 — линией K . Предполагается, что системы S_T и S_K совершают некоторые выбранные движения и относительные движения Π_{T1} и Π_{K2} уже известны. При указанном способе поверхности Σ_1 и Σ_2 образуются не огибанием, а как соответствующие геометрические места линий T и K .

Определим, какие условия нужно наложить на производящие линии T и K и относительные движения Π_{T1} и Π_{K2} , чтобы образовать сопряженные поверхности Σ_1 и Σ_2 .

В общем случае кривые T и K в процессе движения не совпадают друг с другом, а пересекаются или касаются в точке M , изменяющей свое положение на кривых T и K . Естественно выдвинуть предположение, что при определенных условиях точка M пересечения кривых T и K может явиться точкой касания образуемых поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Я. С. Давыдов [60] и В. И. Васильев обосновали следующее положение: *поверхности Σ_1 и Σ_2 , образуемые линиями T и K , будут сопряженными, если векторы τ_T и τ_K , $v_T^{(1)}$ и $v_K^{(2)}$ компланарны*. Через τ_T и τ_K обозначены векторы касательных к линиям T и K в точке M ; $v_T^{(1)}$ и $v_K^{(2)}$ (их выражения приводятся ниже) — скорости перемещения по поверхностям Σ_1 и Σ_2 точки M пересечения или касания кривых T и K . Предполагается, что поверхности Σ_1 и Σ_2 находятся в точечном касании.

Сформулированная Я. С. Давыдовым теорема доказывается следующим путем. Поскольку при заданном относительном движении Π_{12} поверхности Σ_1 и Σ_2 должны касаться друг друга в точке M , они должны иметь в этой точке общую касательную плоскость.

Касательная плоскость к поверхности определяется как плоскость, проведенная через два неколлинеарных вектора, каждый из которых является вектором касательной к линии, принадлежащей рассматриваемой поверхности и проходящей через заданную точку последней. Плоскость, касательная к Σ_1 , является плоскостью векторов τ_T и $v_T^{(1)}$. Соответственно плоскость, касательная к Σ_2 , проведена через векторы τ_K и $v_K^{(2)}$. Поверхности Σ_1 и Σ_2 будут иметь общую касательную плоскость, если четыре указанных выше вектора (τ_T , τ_K , $v_T^{(1)}$, $v_K^{(2)}$) будут компланарны.

То, что векторы τ_T и $v_r^{(1)}$ являются векторами касательных к двум линиям на поверхности Σ_1 , доказывается следующим образом. Поскольку поверхность Σ_1 воспроизводится как семейство производящих линий T , линия T является линией на поверхности Σ_1 , вектор τ_T касательной к T является, следовательно, вектором касательной к линии, принадлежащей поверхности Σ_1 . По принятому выше определению $v_r^{(1)}$ — вектор скорости перемещения точки M по поверхности Σ_1 . Точка M перемещается на поверхности Σ_1 по так называемой рабочей линии — линии зацепления на поверхности Σ_1 . Следовательно, $v_r^{(1)}$ — вектор касательной к рабочей линии на поверхности Σ_1 . Из этого следует, что векторы τ_T и $v_r^{(1)}$ (если только они не коллинеарны) действительно определяют касательную плоскость поверхности Σ_1 . Аналогичным образом доказывается, что пара векторов τ_K и $v_r^{(2)}$ определяет касательную плоскость к поверхности Σ_2 .

Составим выражения для векторов скоростей $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$. Будем считать известной линию зацепления Q поверхностей Σ_1 и Σ_2 в неподвижном пространстве S , как совокупность точек их касания в этой системе. Обозначим скорость перемещения точки M по Q через $v^{(1)}$. Как было показано в § 33, скорость перемещения по линии зацепления

$$v^{(1)} = v_e^{(1)} + v_r^{(1)}, \quad (38.6)$$

где $v_e^{(1)}$ — скорость перемещения точки вместе с Σ_1 , $v_r^{(1)}$ — скорость перемещения точки по Σ_1 . Следовательно,

$$v_r^{(1)} = v^{(1)} - v_e^{(1)}, \quad (38.7)$$

$$v_r^{(2)} = v^{(2)} - v_e^{(2)} = v^{(1)} - v_e^{(2)}. \quad (38.8)$$

При записи уравнения (38.8) было учтено, что $v^{(1)} = v^{(2)}$ (скорость перемещения по линии зацепления в системе S одна и та же для звеньев 1 и 2).

Основываясь на материалах § 33, либо используя непосредственно (38.7) и (38.8), получим

$$v_r^{(2)} = v_r^{(1)} + v_e^{(1)} - v_e^{(2)} = v_r^{(1)} + v^{(12)}. \quad (38.9)$$

Приняв во внимание выражение (38.9), требование компланарности векторов τ_T , τ_K , $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ можно заменить требованием компланарности векторов τ_T , τ_K , $v_r^{(1)}$ и $v^{(12)}$.

Скорости $v_r^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$ можно определить и другим путем. Скорость точки M в системе координат S , связанной с неподвижным пространством, определяется выражением

$$v^{(T)} = v_e^{(T)} + v_r^{(T)}, \quad (38.10)$$

где $v_e^{(T)}$ — скорость перемещения точки M в переносном движении вместе с системой S_T относительно системы S , $v_r^{(T)}$ — скорость перемещения точки M по линии T .

Рассмотрев совместно (38.6) и (38.10) и приняв во внимание, что $v^{(T)} = v^{(1)}$, получим

$$v_r^{(1)} = v_e^{(T)} - v_e^{(1)} + v_r^{(T)} = v^{(T1)} + v_r^{(T)}. \quad (38.11)$$

Аналогичным образом получим

$$v_r^{(2)} = v^{(K2)} + v_r^{(K)}. \quad (38.12)$$

При описанном способе образования сопряженных зацеплений возможно подрезание поверхностей Σ_1 и Σ_2 производящими линиями T и K . Для исключения подрезания нужно воспользоваться способом решения,

изложенным в § 36. Необходимо также убедиться, что при зацеплении Σ_1 и Σ_2 друг с другом будет исключена их интерференция.

7°. Образование сопряженных зацеплений посредством одной производящей линии можно рассматривать как частный случай способа синтеза с помощью двух производящих кривых, если принять, что $T \equiv K$ и $\Pi_{TK} = 0$ (две производящие линии сливаются в одну и движутся как одно целое). Исходя из методических соображений, целесообразнее, однако, рассмотреть этот случай как самостоятельный. При изложении этого вопроса автором использованы результаты собственного исследования.

Примем, что задано относительное движение Π_{12} звеньев 1 и 2, поверхности Σ_1 и Σ_2 образуются посредством одной производящей линии T . Пусть системе S_T задано некоторое движение относительно S_1 и S_2 ; известно, следовательно, относительное движение Π_{T1} , равно как и Π_{T2} . Выясним условия, при которых поверхности Σ_1 и Σ_2 будут сопряженными с линейным касанием.

Мы предполагаем, что, в то время как системы S_1 и S_2 совершают заданные движения, система S_T совершает выбранное движение. В системах S_1 и S_2 будут воспроизведены поверхности Σ_1 и Σ_2 как семейства производящей линии T в этих системах. В каждое мгновение у поверхностей Σ_1 и Σ_2 будет общая линия, совпадающая с T . Однако эта линия может быть либо линией пересечения поверхностей Σ_1 и Σ_2 , либо линией их касания в относительном движении. Поверхности Σ_1 и Σ_2 будут сопряженными, если последнее требование будет соблюдено. Для этого необходимо, чтобы во всех точках линии T соблюдалась следующая зависимость:

$$\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{n}^{(2)}\mathbf{v}^{(12)} = 0. \quad (38.13)$$

Здесь $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ — векторы нормалей к поверхностям, $\mathbf{v}^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения.

При соблюдении этого условия вектор скорости относительного движения $\mathbf{v}^{(12)}$ будет принадлежать общей касательной плоскости к поверхностям Σ_1 и Σ_2 , линия T явится характеристикой этих поверхностей в относительном движении. Легко удостовериться, как будет показано ниже, что при соблюдении условия (38.13) векторы нормалей $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ коллинеарны, т. е.

$$\mathbf{n}^{(1)} = m\mathbf{n}^{(2)}. \quad (38.14)$$

Нормаль к поверхности Σ_i ($i = 1, 2$) можно определить уравнением

$$\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{v}^{(iT)} \times \boldsymbol{\tau} \quad (i = 1, 2). \quad (38.15)$$

При выводе этого уравнения принято, что одной координатной линией служит сама производящая линия T , другой координатной линией служит траектория, описываемая точкой линии T на поверхности Σ_i . Векторы касательных к указанным координатным линиям обозначены через $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{v}^{(iT)}$, где $\mathbf{v}^{(iT)}$ — вектор скорости относительного движения точки системы S_i относительно такой же точки S_T ($i = 1, 2$). Зацепление поверхностей Σ_1 и Σ_2 рассматривается в неподвижной системе S , связанной со стойкой. Подставив выражение (38.15) в (38.13), получим

$$[\mathbf{v}^{(1T)}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}^{(12)}] = 0, \quad (38.16)$$

$$[\mathbf{v}^{(2T)}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}^{(12)}] = 0. \quad (38.17)$$

Это означает, что поверхности Σ_1 и Σ_2 , образуемые производящей линией T , будут сопряженными и их характеристикой в относительном

движении явится сама производящая линия, если для всех точек линии T будет справедливо уравнение

$$[v^{(iT)}, \tau, v^{(12)}] = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (38.18)$$

где $v^{(iT)}$ — вектор скорости относительного движения точки системы S_i относительно такой же точки системы S_T .

Теперь можно удостовериться, что при соблюдении условия (38.18) векторы $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ коллинеарны и уравнение (38.14) действительно соблюдается. Подставив в (38.16) или в (38.17) выражение $v^{(12)} = v^{(1T)} - v^{(2T)}$, найдем

$$[v^{(1T)}, \tau, v^{(2T)}] = 0. \quad (38.19)$$

Такую зависимость можно получить, приняв, что векторы $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ коллинеарны и

$$n^{(1)} \times n^{(2)} = (v^{(1T)} \times \tau) \times (v^{(2T)} \times \tau) = 0. \quad (38.20)$$

Можно, видимо, предложить различные способы нарезания, при которых удовлетворяется выражение (38.18). В частности, это может быть достигнуто при удовлетворении одного из двух условий:

- а) Из трех векторов τ , $v^{(12)}$ и $v^{(iT)}$ коллинеарными являются τ и $v^{(12)}$.
- б) Коллинеарны векторы $v^{(iT)}$ и $v^{(12)}$; коллинеарность векторов τ и $v^{(iT)}$ исключается, так как на поверхности Σ_i рассматриваются только обыкновенные точки.

В соответствии с этим ниже рассматриваются два способа образования сопряженных поверхностей Σ_1 и Σ_2 одной производящей линией.

Первый способ нарезания (коллинеарны векторы τ и $v^{(12)}$). Представим, что производящая линия T перемещается поступательно вдоль мгновенной оси L относительного винтового движения звеньев 1 и 2. Затем, линия T удовлетворяет следующим требованиям: она совпадает с винтовой линией кругового цилиндра, осью которого служит ось винтового движения L ; параметр такой винтовой линии равен параметру p_v относительного винтового движения звеньев 1 и 2. Напомним, как это было отмечено выше, что оси вращения звеньев 1 и 2 скрещиваются, поэтому их относительное движение является винтовым (см. § 25).

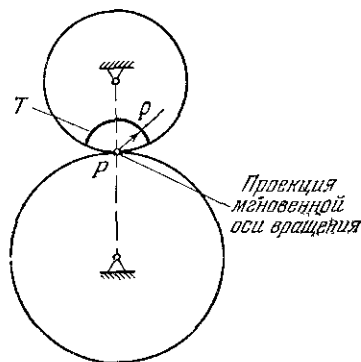


Рис. 77.

Легко удостовериться, что при такой форме линии T коллинеарность векторов τ и $v^{(12)}$ действительно имеет место. Для точек, находящихся на одном расстоянии от оси винтового движения L , скорость $v^{(12)}$ представит касательную к винтовой линии, описываемой в винтовом движении каждой из таких точек. Если T совпадает с указанной винтовой линией, вектор касательной τ к производящей линии совпадает по направлению с $v^{(12)}$.

Высказанные положения можно проиллюстрировать на примере образования сопряженных зацеплений для колес с параллельными осями. В рассматриваемом случае ось винтового движения становится осью мгновенного вращения, винтовой параметр $p_v = 0$. Производящая линия T становится плоской кривой — окружностью радиуса ρ (рис. 77).

Если при вращении колес с угловыми скоростями $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ линию T перемещать поступательно вдоль мгновенной оси вращения с произвольной скоростью $v^{(T)}$, на колесах будут образованы сопряженные винтовые поверхности Σ_1 и Σ_2 . При постоянном соотношении скоростей $v^{(T)}$ и $\omega^{(i)}$, поверхности Σ_1 и Σ_2 будут геликоидами.

Второй способ нарезания (коллинеарны векторы $v^{(iT)}$ и $v^{(12)}$). Покажем, что коллинеарности векторов $v^{(iT)}$ и $v^{(12)}$ можно добиться при винтовом движении производящей линии T . Потребуем, чтобы ось винтового движения L_T линии T пересекала вектор A кратчайшего расстояния между осями вращения звеньев 1 и 2 и принадлежала плоскости, перпендикулярной A . Скорость

$$v^{(1T)} = v^{(1)} - v^{(T)} = (\omega^{(1)} - \omega^{(T)}) \times r - d_T \times \omega^{(T)} - p_T \omega^{(T)}. \quad (38.21)$$

При этой записи предполагается, что вектор $\omega^{(1)}$ проходит через начало неподвижной системы координат S . Линия T совершает винтовое движение вокруг оси L_T , составляющими которого являются: а) вращение вокруг L_T с угловой скоростью $\omega^{(T)}$, б) поступательное движение вдоль L_T со скоростью $p_T \omega^{(T)}$. Кратчайшее расстояние между осью вращения звена 1 и винтовой осью L_T обозначено через d_T . Через r обозначен радиус-вектор текущей точки линии T . Если векторы $v^{(1T)}$ и $v^{(12)}$ коллинеарны, то

$$v^{(1T)} = \lambda v^{(12)}. \quad (38.22)$$

Подставив в (38.22) выражения для $v^{(1T)}$ и $v^{(12)}$, получим

$$(\omega^{(1)} - \omega^{(T)}) \times r - d_T \times \omega^{(T)} - p_T \omega^{(T)} = \lambda [(\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times r - A \times \omega^{(2)}]. \quad (38.23)$$

Для того чтобы производящей линией T могла служить линия любой формы, необходимо, чтобы соблюдалось уравнение

$$\omega^{(1)}(1 - \lambda) \omega^{(T)} + \lambda \omega^{(2)} = 0. \quad (38.24)$$

Тогда векторное произведение

$$[\omega^{(1)}(1 - \lambda) - \omega^{(T)} + \lambda \omega^{(2)}] \times r$$

окажется равным нулю при любых значениях r , т. е. при любой форме линии T .

На основании уравнений (38.23) и (38.24) получим

$$\lambda (A \times \omega^{(2)}) - d_T \times \omega^{(T)} - p_T \omega^{(T)} = 0. \quad (38.25)$$

Векторные уравнения (38.24) и (38.25) должны быть использованы для определения параметров винтового движения режущей линии T . Векторы линейных и угловых скоростей, содержащиеся в этих уравнениях, принадлежат плоскостям, перпендикулярным A . Поэтому, переходя к проекциям векторов, вместо векторных уравнений (38.24) и (38.25) мы получим четыре независимых скалярных уравнения, содержащих пять подлежащих определению параметров: модуль и направление вектора $\omega^{(T)}$, винтовой параметр p_T , модуль вектора d_T (его линия действия совпадает с A), параметр λ . Если задаться одной из неизвестных величин, например d_T , остальные найдем из четырех независимых скалярных уравнений, для получения которых нужно от векторных уравнений (38.24) и (38.25) перейти к проекциям на две оси координат, перпендикулярные A .

Образование сопряженных зацеплений посредством одной производящей линии в первую очередь целесообразно использовать для синтеза гиперболоидальных колес. Впервые синтез этих колес был рассмотрен в работах Н. И. Мерцалова [208].

§ 39. Синтез приближенных зацеплений с оптимальными условиями зацепления в окрестности заданной точки контакта

До последнего времени преимущественно разрабатывалась теория точных зацеплений для передачи вращения с постоянным передаточным отношением при всех положениях звеньев. В ряде случаев технологические соображения вынуждают отказываться от теоретически безупречных схем нарезания и прибегать к приближенным способам. Образующие при этом зацепления являются приближенными, и передача ими вращения осуществляется с переменным передаточным отношением. В качестве примера можно указать на конические и гипоидные колеса, нарезаемые резцовыми головками. При понижающейся высоте ножки поверхности зубцов являются несопряженными, передача вращения осуществляется с колебаниями передаточного отношения, пятно контакта имеет диагональный характер *). Улучшение условий зацепления таких колес достигается корректировкой настройки зуборезного станка.

В настоящем параграфе синтез приближенных зацеплений рассматривается на примере конических и гипоидных колес. Однако излагаемый здесь метод вполне применим для приближенных зацеплений других видов. Синтезу конических и гипоидных колес с приближенным зацеплением посвящены работы К. М. Писманика [219, 110], В. Н. Кедринского [110], Г. И. Шевелевой [256]. Приводимые ниже материалы основываются на исследованиях, выполненных автором [179, 186]. Метод, изложенный в этой работе, был применен Ю. И. Шурыгиным для синтеза полуобкатных гипоидных колес [189], А. А. Заостровским для синтеза обкатных конических колес [187]. Решение задачи синтеза разбивается на два этапа: а) обеспечение контакта нарезанных поверхностей в заданной точке (обычно такая точка задается на середине длины образующей начального конуса); б) исследование условий зацепления в окрестности точки контакта и определение оптимальных корректировок настройки станка.

Обеспечение контакта в заданной точке. Предполагается, что заданы инструментальные поверхности — поверхности резцовых головок F и P , которыми нарезаются соответственно поверхности Σ_1 и Σ_2 сопрягаемых колес.

Вводятся в рассмотрение: а) системы координат S_F и S_P , жестко связанные с инструментальными поверхностями; б) системы S_1 и S_2 , жестко связанные с нарезаемыми колесами; в) неподвижная система координат S , в которой заданы положения осей вращения колес 1 и 2, осей вращения так называемых производящих поверхностей, которые образуются при вращении инструментальной поверхности вокруг оси люльки станка; г) вспомогательная неподвижная система координат S_λ , в которой будем рассматривать зацепление производящей поверхности F с нарезаемой поверхностью Σ_1 . Как и ранее, будем обозначать текущий радиус-вектор поверхности в соответствующей системе координат так: $r_P^{(P)}$. Верхний индекс, заключенный в скобки, указывает поверхность P , нижний — систему координат S_P , в которой записывается радиус-вектор. Индекс 0 для неподвижной системы координат (S_0) будем опускать в целях краткости записи.

Зацепление поверхности Σ_2 колеса 2 с инструментальной поверхностью P является в процессе нарезания линейным, линии контакта обеих

*) Исключением является способ нарезания «геликсформ» (см. гл. XIX).

поверхностей в неподвижной системе координат определяются уравнениями:

$$\mathbf{r}^{(P)} = \mathbf{r}^{(P)}(u_P, \vartheta_P, \psi_P), \quad \mathbf{e}^{(P)} \mathbf{v}^{(P2)} = 0. \quad (39.1)$$

Здесь u_P, ϑ_P — параметры инструментальной поверхности; ψ_P — угол поворота оси производящего колеса вокруг оси люльки станка; $\mathbf{r}^{(P)}$ и $\mathbf{e}^{(P)}$ — радиус-вектор и орт нормали инструментальной поверхности P в системе S ; $\mathbf{v}^{(P2)}$ — вектор скорости относительного движения точки, жестко связанной с инструментальной поверхностью P , относительно такой же точки, жестко связанной с нарезаемой поверхностью Σ_2 .

Уравнения поверхности P заданы в системе S_P ; для получения $\mathbf{r}^{(P)}$ в системе S нужно воспользоваться матричным уравнением

$$\mathbf{r}^{(P)} = M_{0P} \mathbf{r}_P^{(P)}. \quad (39.2)$$

Здесь r — обозначение столбцевой матрицы радиуса-вектора $\mathbf{r}$; M_{0P} — квадратная матрица четвертого порядка для перехода от S_P к S .

Аналогично

$$\mathbf{e}^{(P)} = L_{0P} \mathbf{e}_P^{(P)}, \quad (39.3)$$

где e — столбцевая матрица орта нормали $\mathbf{e}$; L_{0P} — квадратная матрица третьего порядка, связывающая проекции орта нормали в системах S_P и S .

Инструментальная и нарезаемая поверхности (P и $\Sigma^{(2)}$) касаются друг друга в заданной точке M , если, помимо (39.1), соблюдается зависимость $\mathbf{r}^{(M)} = \mathbf{r}^{(P)}$, где $\mathbf{r}^{(M)}$ — радиус-вектор заданной точки контакта M .

Линии контакта инструментальной поверхности F и поверхности Σ_1 колеса 1 определяются в системе S_h уравнениями, аналогичными (39.1):

$$\mathbf{r}_h^{(F)} = \mathbf{r}_h^{(F)}(u_F, \vartheta_F, \psi_F), \quad \mathbf{e}_h^{(F)} \mathbf{v}_h^{(F1)} = 0. \quad (39.4)$$

При этом аналогично (39.2) и (39.3)

$$\mathbf{r}_h^{(F)} = M_{hF} \mathbf{r}_F^{(F)}, \quad (39.5)$$

$$\mathbf{e}_h^{(F)} = L_{hF} \mathbf{e}_F^{(F)}. \quad (39.6)$$

При ограниченности комплекта номеров резцовых головок может оказаться, что ни одна из линий контакта (39.4) не проходит через заданную точку M . В таком случае нужно потребовать, чтобы одна из линий контакта (39.4) прошла через точку M_1 , которая может быть совмещена с M поворотом колеса 1 вокруг своей оси вращения.

После совмещения точки M с M_1 получим

$$\mathbf{r}^{(F)} = M_{0h} M_{hF} \mathbf{r}_F^{(F)}, \quad (39.7)$$

$$\mathbf{e}^{(F)} = L_{0h} L_{hF} \mathbf{e}_F^{(F)}. \quad (39.8)$$

Здесь M_{0h} и L_{0h} — матрицы перехода от S_h к S для преобразования координат точки и проекций вектора нормали.

Нарезанные поверхности будут касаться друг друга в заданной точке контакта M , если

$$\mathbf{r}^{(P)} = \mathbf{r}^{(F)}, \quad \mathbf{e}^{(P)} = \mathbf{e}^{(F)}.$$

Для того чтобы нарезанные поверхности не только касались в M , но и передавали вращение с заданным передаточным отношением,

необходимо, чтобы соблюдалась зависимость

$$e^{(P)}v^{(12)} = e^{(F)}v^{(12)} = 0. \quad (39.9)$$

В приведенной зависимости $v^{(12)}$ — скорость движения точки M колеса 1 относительно точки M колеса 2. При определении $v^{(12)}$ нужно исходить из заданного передаточного отношения колес $i_{12} = \omega_1/\omega_2$, расположения осей вращения и координат точки M . В случае конических колес зависимость (39.9) соблюдается, если M — точка, принадлежащая мгновенной оси вращения колес в заданном относительном движении; начальные конусы конических колес являются одновременно их аксоидами. В случае гипоидных колес начальные конусы не совпадают с аксоидами, точка M — точка касания начальных конусов и $v^{(12)}$ определяется из следующего выражения:

$$v^{(12)} = (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times r^{(M)} - R \times \omega^{(2)}. \quad (39.10)$$

Здесь $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ — векторы угловых скоростей вращения колес 1 и 2 вокруг своих осей, причем $\omega^{(1)}$ проходит через начало системы S ; $r^{(M)}$ — радиус-вектор точки контакта M ; R — радиус-вектор какой-нибудь точки, лежащей на линии действия скользящего вектора $\omega^{(2)}$.

Условия зацепления в окрестности точки контакта. Обеспечение оптимальных условий зацепления в окрестности заданной точки контакта достигается корректировкой настройки зуборезного станка и выбором соответствующих радиусов резцовых головок. Для оценки условий зацепления необходимо определить: а) размеры и форму пятна контакта (предварительно нужно убедиться, что контактируемые поверхности не пересекаются в окрестности заданной точки контакта), б) направление касательной к рабочей линии, в) производную передаточного отношения.

Для того, чтобы удостовериться, что контактируемые поверхности не пересекаются в окрестности точки контакта, нужно построить диаграммы l_1 и l_2 уклонов поверхностей от касательной плоскости (см. § 37). Размеры и форма пятна контакта определяются по формулам, приведенным в § 37. Кривизна нарезанной поверхности вычисляется через кривизну производящей поверхности и параметры движения, для чего используются следующие формулы (см. §§ 33 и 34):

$$\kappa^{(i)} = -\frac{\dot{e}_r^{(i)} v_r^{(i)}}{[v_r^{(i)}]^2} \quad (i = 1, 2), \quad (39.11)$$

$$\dot{e}_r^{(1)} = \dot{e}_r^{(F)} + (\omega^{(F)} - \Omega^{(1)}) \times e^{(F)}, \quad (39.12)$$

$$v_r^{(1)} = v_r^{(F)} + v^{(F1)}, \quad (39.13)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} = \dot{e}_r^{(P)} + (\omega^{(P)} - \Omega^{(2)}) \times e^{(P)}, \quad (39.14)$$

$$v_r^{(2)} = v_r^{(P)} + v^{(P2)}. \quad (39.15)$$

В приведенных уравнениях $\omega^{(F)}$ и $\omega^{(P)}$ — угловые скорости производящих поверхностей F и P ; $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ — угловые скорости колес при зацеплении с производящими колесами (они могут, вообще говоря, отличаться от угловых скоростей $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ колес при зацеплении в передаче); $e^{(F)}$ и $e^{(P)}$ — орты нормалей к производящим поверхностям F и P ; $v^{(F1)}$ и $v^{(P2)}$ — относительные скорости при зацеплении производящей и нарезанной поверхностей.

Производящая поверхность F и орт нормали $e^{(F)}$ к ней определяются в системе S уравнениями

$$r^{(F)} = r^{(F)}(u_F, \vartheta_F, \psi_F), \quad (39.16)$$

$$e^{(F)} = e^{(F)}(u_F, \vartheta_F, \psi_F). \quad (39.17)$$

Тогда

$$v_r^{(F)} = \frac{\partial r^{(F)}}{\partial u_F} \frac{du_F}{dt} + \frac{\partial r^{(F)}}{\partial \vartheta_F} \frac{d\vartheta_F}{dt}, \quad (39.18)$$

$$\dot{e}_r^{(F)} = \frac{\partial e^{(F)}}{\partial u_F} \frac{du_F}{dt} + \frac{\partial e^{(F)}}{\partial \vartheta_F} \frac{d\vartheta_F}{dt}. \quad (39.19)$$

Аналогичные уравнения для производящей поверхности P определяются так:

$$v_r^{(P)} = \frac{\partial r^{(P)}}{\partial u_P} \frac{du_P}{dt} + \frac{\partial r^{(P)}}{\partial \vartheta_P} \frac{d\vartheta_P}{dt}, \quad (39.20)$$

$$\dot{e}_r^{(P)} = \frac{\partial e^{(P)}}{\partial u_P} \frac{du_P}{dt} + \frac{\partial e^{(P)}}{\partial \vartheta_P} \frac{d\vartheta_P}{dt}. \quad (39.21)$$

Уравнения (39.4) можно привести к зависимости между u_F , ϑ_F и ψ_F

$$f_1(u_F, \vartheta_F, \psi_F) = 0. \quad (39.22)$$

Продифференцировав (39.22), найдем уравнение связи между производными du_F/dt , $d\vartheta_F/dt$ и $d\psi_F/dt$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_F} \frac{du_F}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_F} \frac{d\vartheta_F}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \psi_F} \frac{d\psi_F}{dt} = 0. \quad (39.23)$$

Аналогично на основании (39.1) находим уравнение

$$f_2(u_P, \vartheta_P, \psi_P) = 0, \quad (39.24)$$

а затем после дифференцирования определяем уравнение связи между производными

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_P} \frac{du_P}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_P} \frac{d\vartheta_P}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \psi_P} \frac{d\psi_P}{dt} = 0. \quad (39.25)$$

При определении условий зацепления в окрестности точки контакта нужно исходить из следующих уравнений (см. § 33):

$$\dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(2)}, \quad (39.26)$$

$$\dot{e}^{(1)} = \dot{e}^{(2)}. \quad (39.27)$$

Учитывая соотношения между переносными и относительными скоростями при движении контактной точки (см. § 33), получим

$$v_r^{(2)} - v_r^{(1)} = v^{(12)}, \quad (39.28)$$

$$\dot{e}_r^{(2)} - \dot{e}_r^{(1)} = (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times e^{(1,2)}. \quad (39.29)$$

Векторные уравнения (39.28) и (39.29) эквивалентны шести скалярным уравнениям, из которых независимыми являются только четыре, так как $\dot{e}_r^{(i)} e^{(i)} = 0$ и $v_r^{(i)} e^{(i)} = 0$.

Подставив в эти уравнения выражения (39.12) — (39.15), после преобразований придем к следующим выражениям:

$$\mathbf{v}_r^{(P)} + \mathbf{v}^{(P2)} - \mathbf{v}_r^{(F)} - \mathbf{v}^{(F1)} = \mathbf{v}^{(12)}, \quad (39.30)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(P)} + (\boldsymbol{\omega}^{(P)} - \boldsymbol{\Omega}^{(2)}) \times \mathbf{e}^{(P)} - \dot{\mathbf{e}}_r^{(F)} - (\boldsymbol{\omega}^{(F)} - \boldsymbol{\Omega}^{(1)}) \times \mathbf{e}^{(F)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{e}^{(1,2)}. \quad (39.31)$$

Из этих выражений можно получить систему из четырех независимых линейных уравнений, в которых содержится шесть неизвестных:

$$\frac{du_F}{dt}, \quad \frac{d\vartheta_F}{dt}, \quad \frac{d\psi_F}{dt}, \quad \frac{du_P}{dt}, \quad \frac{d\vartheta_P}{dt} \text{ и } \frac{d\psi_P}{dt}.$$

Два недостающих уравнения для определения искомых неизвестных получим, используя уравнения (39.23) и (39.25). После решения системы из шести линейных уравнений можно определить направление вектора $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и искомое направление пятна контакта на поверхностях зубцов обоих колес.

Рассмотрим теперь, как определить изменение передаточного отношения при зацеплении в окрестности точки контакта. В точке контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 имеем

$$\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{e}^{(1)} [(\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)}] = 0. \quad (39.32)$$

Продифференцируем (39.32), приняв, что $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \text{const}$, а $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ может изменяться только по величине, но не по направлению; учтем также, что $\mathbf{R} = \text{const}$. После дифференцирования получим

$$\dot{\mathbf{e}}^{(1)} \mathbf{v}^{(12)} + \mathbf{e}^{(1)} [(\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \dot{\mathbf{r}}^{(1)} - \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} \times (\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{R})] = 0. \quad (39.33)$$

Вектор $\dot{\mathbf{e}}^{(1)}$ можно выразить так:

$$\dot{\mathbf{e}}^{(1)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(F)} - \boldsymbol{\Omega}^{(1)}) \times \mathbf{e}^{(F)} + \dot{\mathbf{e}}_r^{(F)}. \quad (39.34)$$

Вектор $\dot{\mathbf{r}}^{(1)}$ определится зависимостью

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(M)} + \mathbf{v}_r^{(F)} + \mathbf{v}^{(F1)}. \quad (39.35)$$

Заметим также, что, поскольку ось вращения звена 2 не изменяет своего положения,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} = \varepsilon \boldsymbol{\omega}^{(2)}. \quad (39.36)$$

Зависимость (39.33) позволяет найти коэффициент $\varepsilon = (d\omega^{(2)}/dt) : \omega^{(2)}$. Показателем качества зацепления может служить производная $d/d\varphi_1 (i_{21}) = i'_{21}$, где $i_{21} = \omega_2/\omega_1$.

Продифференцировав i_{21} , получим

$$\frac{d}{d\varphi_1} (i_{21}) = i'_{21} = \frac{1}{\omega^{(1)}} \frac{d\omega^{(2)}}{d\varphi_1} = \frac{1}{[\omega^{(1)}]^2} \frac{d\omega^{(2)}}{dt} = \frac{\varepsilon i_{21}}{\omega^{(1)}}. \quad (39.37)$$

При нарезании колес нужно предусмотреть такие корректуры настройки станка, чтобы $\varepsilon_2 = 0$, т. е. чтобы производная передаточного отношения колес при зацеплении их друг с другом равнялась нулю.

Тогда в точке контакта мгновенное передаточное отношение будет равно его среднему значению, а первая производная функции передаточ-

ного отношения будет равна нулю (рис. 78, а). Можно также потребовать симметричности функции передаточного отношения при одновременном соблюдении равенства нулю первой производной этой функции для точки контакта. При этом, однако, уже не следует стремиться к тому, чтобы мгновенное значение передаточного отношения в точке контакта было равно среднему значению (рис. 78, б). Возможным преимуществом второго вида функции передаточного отношения является уменьшение удара

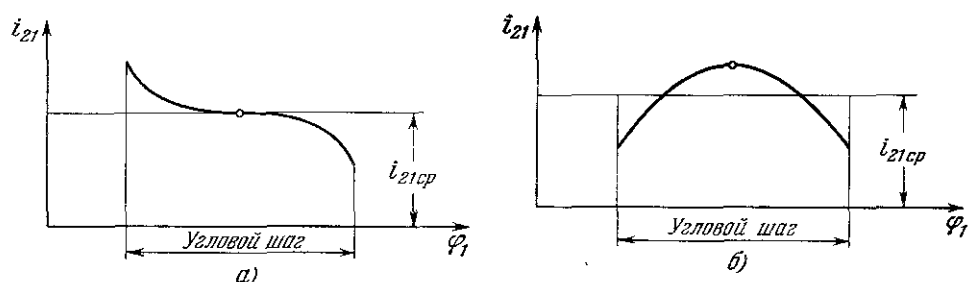


Рис. 78.

при пересопряжении зубцов вследствие равенства или близости значений i_{21} в конце и в начале зацепления (реальный коэффициент перекрытия для несопряженного зацепления близок единице).

Полезно также учесть, что дифференцирование уравнений связи между параметрами (39.22) и (39.24) можно заменить дифференцированием выражений $e^{(F)}v^{(F1)} = 0$ и $e^{(P)}v^{(P2)} = 0$. Это позволяет в ряде случаев упростить выкладки.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением синтеза приближенных зацеплений при равенстве нулю первой производной передаточного отношения. Если потребовать, чтобы в точке контакта были равны нулю первая и вторая производные передаточного отношения, необходимо соблюдение следующих уравнений: $r^{(1)} = r^{(2)}$, $e^{(1)} = e^{(2)}$, $\dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(2)}$, $\dot{e}^{(1)} = \dot{e}^{(2)}$, $\ddot{r}^{(1)} = \ddot{r}^{(2)}$, $\ddot{e}^{(1)} = \ddot{e}^{(2)}$. Соответствующие параметры, входящие в выражения для $\dot{r}^{(i)}$, $\dot{e}^{(i)}$, $\ddot{r}^{(i)}$ и $\ddot{e}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), можно выразить через параметры движения поверхности, используя выражения (33.11) — (33.14).

Продифференцируем уравнение зацепления колес (39.32) дважды, потребовав соблюдения равенства нулю первой и второй производных передаточного отношения. Это приводит к таким уравнениям:

$$\dot{e}^{(1)}v^{(12)} + e^{(1)}(\omega^{(12)} \times \dot{r}^{(1)}) = 0, \quad (39.38)$$

$$\ddot{e}^{(1)}v^{(12)} + 2[e^{(1)}, \omega^{(12)}, \dot{r}^{(1)}] + [e^{(1)}, \omega^{(12)}, \ddot{r}^{(1)}] = 0. \quad (39.39)$$

Еще четыре уравнения получим, продифференцировав дважды уравнения зацепления каждого из нарезаемых колес со своей производящей поверхностью. В результате мы получим систему уравнений, в которой содержатся в качестве неизвестных: du_i/dt , $d\vartheta_i/dt$, $d\psi_i/dt$, d^2u_i/dt^2 , $d^2\vartheta_i/dt^2$, $d^2\psi_i/dt^2$ ($i = P, F$) и корректуры настройки станка. В развернутом виде такие уравнения приведены в работе [192]. Требование равенства нулю второй производной передаточного отношения, соблюдения в точке контакта условия $\ddot{e}^{(1)} = \ddot{e}^{(2)}$, вызывает необходимость учета строения поверх-

ностей зубцов в окрестности точки контакта до величин третьего порядка малости включительно.

В теории механизмов иногда прибегают к замене зубчатого механизма шарнирным, исходя из кривизны поверхностей зубцов. Такая замена допустима, если при этом ограничиться учетом только первой производной передаточного отношения.

Требование равенства нулю первой и второй производных передаточного отношения приводит к наложению двух связей между кривизнами поверхностей зубцов. При этом, однако, может оказаться, что соблюдение равенства нулю второй производной передаточного отношения скажется неблагоприятным образом на величине мгновенной площадки контакта и размерах пятна контакта (см. § 37).

Так как кривизны поверхностей зубцов конических и гипоидных колес определяются при прочих равных условиях радиусами резцовых головок, оба этих противоречивых требования — равенство нулю второй производной передаточного отношения и величина пятна контакта — должны учитываться при назначении радиусов головок.

§ 40. Определение закона движения пространственного зубчатого механизма

1°. В предыдущих параграфах была рассмотрена простейшая задача синтеза трехзвенного зубчатого механизма в такой постановке: заданы схема механизма, его закон движения и поверхность зубцов одного из звеньев; требуется найти поверхность зубцов другого звена.

Обратная задача — задача анализа зубчатого механизма — формулируется так: задана схема механизма, известны поверхности зубцов обоих подвижных звеньев; требуется найти закон движения в виде функции, связывающей перемещения обоих звеньев.

2°. Будем считать, что с звеньями 1 и 2 передачи связаны соответственно системы координат S_1 и S_2 , а со стойкой механизма связана неподвижная система координат S . Пусть в системах S_1 и S_2 заданы уравнения поверхностей Σ_1 и Σ_2 зубцов звеньев

$$r_1 = r_1(u_1, \vartheta_1), \quad (40.1)$$

$$r_2 = r_2(u_2, \vartheta_2) \quad (40.2)$$

и орты их нормалей

$$e_1 = e_1(u_1, \vartheta_1), \quad (40.3)$$

$$e_2 = e_2(u_2, \vartheta_2). \quad (40.4)$$

Требуется найти зависимость между углами поворота звеньев, линию зацепления и рабочие линии на поверхностях зубцов обоих звеньев.

В дальнейшем будем исходить из того, что звенья 1 и 2 совершают вращательные движения. Пусть звену 1 сообщен поворот на угол φ_1 . Уравнение поверхности Σ_1 в неподвижной системе координат запишем в такой форме:

$$r^{(1)} = r^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1). \quad (40.5)$$

Вследствие поворота звена 1 звено 2 повернется на угол φ_2 , величина которого подлежит определению. Поверхность Σ_2 зубцов второго звена определится уравнением

$$r^{(2)} = r^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \varphi_2). \quad (40.6)$$

Оргы нормалей к поверхностям в системе S определяются уравнениями

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1), \quad (40.7)$$

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \varphi_2). \quad (40.8)$$

Для точки касания поверхностей должны соблюдаться следующие уравнения:

$$\mathbf{r}^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = \mathbf{r}^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \varphi_2), \quad (40.9)$$

$$\mathbf{e}^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = \mathbf{e}^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \varphi_2). \quad (40.10)$$

Переходя к проекциям векторов, из векторных уравнений (40.9) и (40.10) можно получить шесть скалярных уравнений, из которых, однако, независимыми являются пять, так как

$$[e_x^{(i)}]^2 + [e_y^{(i)}]^2 + [e_z^{(i)}]^2 = 1 \quad (i = 1, 2).$$

В результате решения системы пяти уравнений, придавая фиксированное значение параметру φ_1 , найдем параметры $u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2$ и φ_2 в виде функций от φ_1 . Если фиксированному значению φ_1 будет отвечать только одно значение каждого из параметров поверхностей ($u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2$), касание поверхностей точечное. Функция $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ представит функцию перемещения исследуемого зубчатого механизма. В системе S_i совокупность точек поверхности Σ_i с параметрами u_i, ϑ_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющими уравнениям (40.9) и (40.10), представляет при точечном касании поверхностей линию зацепления на боковой поверхности зубца — рабочую линию. Совокупность этих же точек в неподвижной системе S представит линию зацепления поверхностей.

Для определения функции передаточного отношения нужно продифференцировать функцию $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Другой путь решения основывается на использовании уравнения зацепления

$$\mathbf{e}^{(1, 2)} \mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{e}^{(1, 2)} [(\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{r} - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)}] = 0. \quad (40.11)$$

В этом уравнении радиус-вектор $\mathbf{r}$ и орт нормали $\mathbf{e}$ считаются известными, так как ранее были найдены параметры точки касания. Векторы $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ известны по направлению. Радиус-вектор $\mathbf{R}$ точки, лежащей на линии действия $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$, известен по величине и направлению. Придавая произвольное значение модулю вектора $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$, из уравнения (40.11) находим модуль вектора $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ и определяем $i_{12} = \omega_1/\omega_2$.

3°. В ряде случаев уравнения поверхностей Σ_1 и Σ_2 имеют очень сложную форму, и поэтому их целесообразно выражать через уравнения производящих поверхностей. В этом случае в системе S_i поверхность Σ_i и орт нормали к ней определяются уравнениями ($i = 1, 2$):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(u_i, \vartheta_i, \psi_i), \\ f_i(u_i, \vartheta_i, \psi_i) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (40.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i(u_i, \vartheta_i, \psi_i), \\ f_i(u_i, \vartheta_i, \psi_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40.13)$$

Если записать уравнения поверхностей Σ_1 и Σ_2 в неподвижной системе координат, для определения точки касания нужно будет воспользоваться

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{du_1}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \frac{du_2}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} \frac{d\vartheta_2}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = - \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}; \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{\partial f_5}{\partial u_1} \frac{du_1}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_5}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_5}{\partial u_2} \frac{du_2}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_5}{\partial \vartheta_2} \frac{d\vartheta_2}{d\varphi_1} + \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = - \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_1}. \end{aligned} \right\} \quad (40.21)$$

Система (40.21) представляет систему из пяти линейных уравнений, неизвестными в которых мы считаем $du_1/d\varphi_1$, $d\vartheta_1/d\varphi_1$, $du_2/d\varphi_1$, $d\vartheta_2/d\varphi_1$, $d\varphi_2/d\varphi_1$. По формулам Крамера находим

$$\frac{du_1}{d\varphi_1} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{d\vartheta_1}{d\varphi_1} = \frac{D_2}{D}, \quad \frac{du_2}{d\varphi_1} = \frac{D_3}{D}, \quad \frac{d\vartheta_2}{d\varphi_1} = \frac{D_4}{D}, \quad \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{D_5}{D}. \quad (40.22)$$

Здесь определитель

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_5}{\partial u_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_2} \end{vmatrix}. \quad (40.23)$$

Предполагается, что $D \neq 0$. Определитель D_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) получается из D после замены в нем i -го столбца столбцом, элементами которого являются свободные члены линейных уравнений (40.21).

Система (40.22) представляет систему дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных. Решению обратной задачи предшествует синтез зацепления с обеспечением касания поверхностей зубцов в выбранной точке контакта. Это означает, что при $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)}$ известны параметры контактной точки, т. е. известны начальные значения искомых функций (40.19), а именно:

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(0)} &= u_1(\varphi_1^{(0)}), & \vartheta_1^{(0)} &= \vartheta_1(\varphi_1^{(0)}), & u_2^{(0)} &= u_2(\varphi_1^{(0)}), \\ \vartheta_2^{(0)} &= \vartheta_2(\varphi_1^{(0)}), & \varphi_2^{(0)} &= \varphi_2(\varphi_1^{(0)}). \end{aligned} \right\} \quad (40.24)$$

Искомые функции (40.19), для которых известны начальные значения (40.24), будут найдены в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (40.22). Предполагается, что частные производные по всем аргументам, входящие в определители D и D_i , являются непрерывными на всем промежутке $[\varphi_1^{(0)}, \varphi_1^{(k)}]$; поэтому искомые функции (40.19) с известными начальными значениями будут определены однозначно.

Описанный алгоритм позволяет найти функцию перемещения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ колес, совокупность точек рабочей линии на поверхности зубца. Попутно определяется и передаточное отношение колес

$$i_{21} = \frac{d\varphi_2}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{D_5}{D_1}. \quad (40.25)$$

Изложенный способ решения можно распространить на случай, когда уравнения поверхностей заданы в трехпараметрической форме с наложенным уравнением связи между параметрами, и решение обратной задачи сводится к решению системы уравнений (40.14)–(40.17).

Для контроля правильности вычислений при определении функций (40.19) и значения i_{21} из уравнения (40.25) полезно использовать условие, что в точках контакта поверхностей зубцов должно соблюдаться уравнение $e^{(1)}v^{(12)} = 0$. Для скрещающихся осей это уравнение в развернутом виде имеет такой вид:

$$e^{(1)}v^{(12)} = e^{(1)}[(\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times r^{(1)} - R \times \omega^{(2)}] = 0. \quad (40.26)$$

После определения функций (40.19) в уравнении (40.26) становятся известными векторы $e^{(1)}$ и $r^{(1)}$. Векторы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ известны по направлению, известен также и радиус-вектор R произвольной точки линии действия вектора $\omega^{(2)}$. Задаваясь произвольным значением модуля вектора

нения и сборки, но и упругие деформации звеньев, что особенно важно для механизмов приборов.

Работами указанных авторов и последователей Н. А. Калашникова — Б. А. Тайцем, Л. А. Архангельским и другими — вопросы точности цилиндрических зубчатых колес решены с необходимой полнотой. Этого нельзя, однако, сказать о пространственных зубчатых зацеплениях, для которых разработка вопросов точности должна вестись в тесной связи с положениями теории зацепления. Вопросам точности пространственных зубчатых зацеплений посвящено немного работ. В статье В. А. Шишкова [261, 262] указывается на возможность применения кинематического метода для исследования влияния погрешностей пространственных зацеплений. В работе Н. И. Колчина [119] рассмотрены вопросы точности прямозубых конических колес октоидального зацепления. Работа О. И. Блоха посвящена вопросам точности червячной передачи с цилиндрическим червяком.

2°. Представим, что в пространственном зацеплении поверхности зубцов касаются друг друга по линии контакта $M - M$.

Пусть $n - n$ — нормаль к поверхностям в точке M_i , Δa_i — вектор первичной ошибки, отнесенной к ведомому звену (рис. 79). Разложим вектор Δa_i на две составляющие: по направлению нормали $n - n$ и по направлению, перпендикулярному $n - n$. Векторы $\overline{M_i d}$ и $\overline{c M_i}$ принадлежат общей касательной плоскости к поверхностям, проведенной через M_i . Первичная ошибка Δa_i приведет к образованию нормального зазора между поверхностями зубцов в точке M_i . Для выборки этого зазора ведомому звену нужно сообщить компенсирующее перемещение Δs , которое можно, например, осуществить поворотом ведомого звена вокруг своей оси, если оно совершает вращательное движение. Вместе с тем компенсирующее перемещение Δs определяет ошибку положения ведомого звена как следствие первичной ошибки.

Нужно, однако, иметь в виду, что ошибка положения будет определена приближенно, так как после компенсирующего поворота ведомого звена поверхности вступят в касание в точке, не принадлежащей прежней линии контакта $M - M$.

Компенсирующее перемещение Δs должно быть такой величины, чтобы его проекция на направление нормали n оказалась равной по величине и противоположной по знаку проекции на нормаль вектора первичной ошибки Δa_i ; для этого необходимо (рис. 79), чтобы

$$|\Delta a_i| \cos \delta_i + |\Delta s| \cos \lambda = 0,$$

где δ_i и λ — углы, образуемые векторами Δa_i и Δs с вектором нормали n .

При выполнении этого условия будет устранен зазор между поверхностями зубцов, вызванный первичной ошибкой Δa_i .

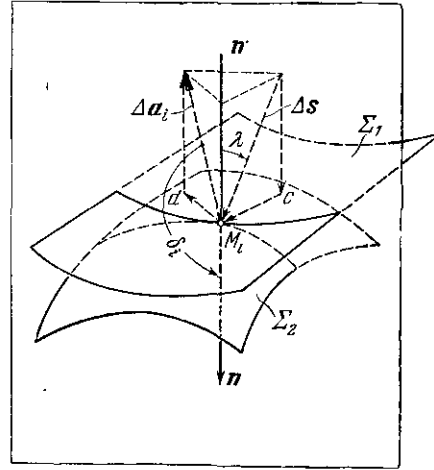


Рис. 79.

В аналитической форме связь между Δs и Δa_i выразим так:

$$(\Delta a_i + \Delta s) \cdot n = 0. \quad (41.1)$$

Уравнение (41.1) справедливо, конечно, и для случая, когда первичная ошибка Δa_i приводит к отрицательному зазору, в результате которого поверхности зубцов как бы «внедряются» друг в друга. Компенсирующее перемещение в рассматриваемом случае служит для того, чтобы устранить «внедрение» поверхностей и довести отрицательный зазор между ними до нуля.

В том случае, когда Δa_i — первичная ошибка не ведомого, а ведущего звена, проекции Δa_i и компенсирующего перемещения Δs на вектор

нормали должны быть равны не только по величине, но и по знаку. Уравнение (41.1) примет при этом следующую форму:

$$(-\Delta a_i + \Delta s) n = 0.$$

Если в зубчатой передаче действует k первичных ошибок, величина компенсирующего перемещения Δs должна быть определена из уравнения

$$\left(\sum_{i=1}^k \Delta a_i + \Delta s \right) \cdot n = 0. \quad (41.2)$$

Первичные ошибки Δa_i ведущего звена должны быть введены в уравнение (41.2) обратным знаком.

При линейном касании поверхностей зубцов первичные ошибки приводят к различной величине нормального зазора в точках линии контакта поверхностей. При использовании уравнения (41.2) нужно отыскать такую

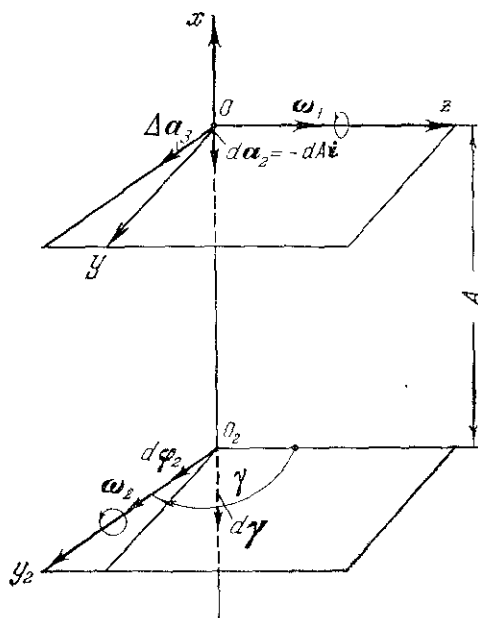


Рис. 80.

точку теоретической контактной линии, чтобы при подстановке ее координат в уравнение (41.2) величина перемещения Δs оказалась наименьшей.

В ряде зацеплений касание поверхностей является точечным даже при отсутствии погрешностей. Погрешности изготовления и сборки приводят и в этом случае к изменению положения теоретической точки контакта. Передача вращения здесь также будет осуществляться с отклонениями от теоретического значения передаточного отношения.

Исследование влияния первичных ошибок при точечном зацеплении представляет более простую задачу, чем при линейном касании поверхностей, так как в этом случае отпадает необходимость в определении такой точки линии мгновенного контакта, для которой компенсирующее перемещение Δs достигает минимального значения.

3°. Приложим уравнение (41.2) для вывода формулы ошибки положения передачи с перекрещивающимися осями, если первичными ошибками являются: ошибка в угле перекрещивания осей, ошибка межосевого расстояния, смещение червяка в направлении оси колеса. На рис. 80 аналогично рис. 45 Oz — ось вращения червяка, O_2y_2 — ось вращения

червячного колеса, γ — угол перекрещивания осей, $d\gamma$ — вектор, изображающий бесконечно малое изменение γ , dA — ошибка межосевого расстояния.

Направление $d\gamma$ определяется так, чтобы при правой системе координат, глядя с конца этого вектора, видеть приращение угла γ совершающимся в направлении, противоположном вращению часовой стрелки. Векторы первичных ошибок таковы:

$$da_1 = d\gamma \times r = z d\gamma j - y d\gamma k, \quad (41.3)$$

где i, j, k — орты координатных осей x, y, z ;

$$da_2 = -dA i. \quad (41.4)$$

Величине dA приписывается положительный знак при увеличении межосевого расстояния

$$da_3 = dB (\sin \gamma j + \cos \gamma k). \quad (41.5)$$

Через dB обозначено смещение червяка к торцу червячного колеса в направлении отрицательной оси y_2 (погрешность ведущего звена вводится с обратным знаком).

Компенсация зазора будет достигнута поворотом червячного колеса вокруг оси y_2 на угол $d\varphi_2$. Приведем вектор $d\varphi_2$ к точке O и введем соответствующий вектор-момент, получим следующее выражение для компенсирующего вектора:

$$ds = d\varphi_2 \times r + r' \times d\varphi_2, \quad (41.6)$$

где $r' (-A, 0, 0)$ — радиус-вектор точки приложения O_2 вектора $d\varphi_2$.

После несложных преобразований получим

$$ds = (z \sin \gamma - y \cos \gamma) d\varphi_2 i + (x + A) \cos \gamma d\varphi_2 j - (x + A) \sin \gamma d\varphi_2 k. \quad (41.7)$$

В рассматриваемом случае, используя уравнение (41.2) в координатной форме, получим

$$(a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + s_x) n_x + (a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} + s_y) n_y + (a_{1z} + a_{2z} + a_{3z} + s_z) n_z = 0. \quad (41.8)$$

На основании уравнений (41.3), (41.4), (41.5), (41.7) и (41.8) после несложных преобразований получим

$$d\varphi_2 = \frac{n_x dA + (yn_z - zn_y) d\gamma - dB (\sin \gamma n_y + \cos \gamma n_z)}{(z \sin \gamma - y \cos \gamma) n_x + (x + A) \cos \gamma n_y - (x + A) \sin \gamma n_z}. \quad (41.9)$$

Входящие в уравнение (41.9) координаты x, y, z и проекции нормали n_x, n_y, n_z для точки контактной линии связаны уравнением (30.17), исходя из которого получим

$$(z \sin \gamma - y \cos \gamma) n_x + (x + A) \cos \gamma n_y - (x + A) \sin \gamma n_z = i_{12} (xn_y - yn_x). \quad (41.10)$$

На основании уравнений (41.9) и (41.10) получим

$$d\varphi_2 = \frac{n_x dA + (yn_z - zn_y) d\gamma - dB (\sin \gamma n_y - \cos \gamma n_z)}{i_{12} (xn_y - yn_x)}. \quad (41.11)$$

В случае червячной передачи с цилиндрическим червяком, поскольку винтовая поверхность червяка является геликоидом, соблюдается зависимость (27.9), и уравнение (41.11) можно представить в такой форме:

$$d\varphi_2 = - \frac{dAn_x + (yn_z - zn_y) d\gamma - dB (\sin \gamma n_y - \cos \gamma n_z)}{pi_{12} n_z}. \quad (41.12)$$

Отождествляя дифференциалы с конечно малыми приращениями, запишем

$$\Delta\varphi_2 = - \frac{\Delta A n_x + (y n_z - z n_y) \Delta\gamma - \Delta B (\sin \gamma n_y - \cos \gamma n_z)}{p_{12} n_z}. \quad (41.13)$$

При выполнении расчетов по уравнению (41.13) нужно определять $\Delta\varphi_2$ при фиксированном значении φ_1 угла поворота червяка. Значения z, y, n_x, n_y, n_z связаны уравнениями (30.22) контактной линии. При вычислениях нужно испытать различные точки контактной линии и найти такую совокупность значений z, y, n_x, n_y, n_z , при которой $\Delta\varphi_2$ достигнет минимального значения. Процедура вычислений существенно упрощается при точечном касании поверхностей, так как в этом случае x, y, z, n_x, n_y, n_z относятся к единственной точке контакта. Для определения $\Delta\varphi_2$ при точечном зацеплении нужно воспользоваться формулой (41.9).

Вычисленная описанным путем функция $\Delta\varphi_2 = F(\varphi_1)$ представит функцию ошибок положения ведомого звена. Функция $F(\varphi_1) - F(0)$ определит ошибки перемещения механизма.

4°. Выше было отмечено, что вследствие погрешностей линейное касание поверхностей зубцов становится точечным. Используя изложенный метод, нетрудно определить рабочую линию — совокупность точек контакта на поверхностях зубцов обоих звеньев передачи.

Разъясним это на примере рассмотренной в настоящем параграфе червячной передачи с цилиндрическим червячком.

Пусть при фиксированном значении угла поворота φ_1 червяка вычислены координаты x, y, z точки контактной линии, для которой $\Delta\varphi_2$ в уравнении (41.13) достигает минимального значения.

Совокупность координат x, y, z , вычисленных при различных значениях φ_1 , представит линию зацепления поверхностей зубцов червяка и червячного колеса, находящихся в точечном касании. Рабочая линия на поверхности витков червяка будет найдена после совмещения неподвижной системы координат S с системой координат S_1 , связанной с червяком. Аналогичным образом можно найти рабочую линию на поверхности зубца червячного колеса. При этом нужно учесть, что углу поворота червяка на угол φ_1 соответствует угол поворота колеса $\varphi_2 + d\varphi_2$, где $\varphi_2 = \varphi_1/i_{12}$, а $d\varphi_2$ вычисляется по формуле (41.13).

5°. В случае точно-сопряженных зацеплений иногда бывает необходимо определить изменения координат рабочей линии на поверхности зубцов вследствие погрешностей изготовления и монтажа. С задачей такого рода приходится сталкиваться при исследовании конических зацеплений с дугowymi зубцами и цилиндрических винтовых колес.

Для упрощения будем считать, что первичные ошибки $\sum_{i=1}^k \Delta a_i$ и компенсирующее перемещение Δs сообщаются только ведомому звену.

Тогда (рис. 79) вектор $\Delta l = \overline{cd} = \sum_{i=1}^k \Delta a_i + \Delta s$ с началом в теоретической точке контакта определит в неподвижной системе координат смещение действительной точки контакта. Используя формулы связи между системами координат S и S_2 , найдем проекции вектора Δl_2 , определяющего смещение рабочей линии.

При изложенном способе решения окажется, что действительная рабочая линия на поверхности зубцов первого звена не изменит своего положения по отношению к теоретической линии; действие первичных

ошибок $\sum_{i=1}^k \Delta a_i$ и компенсирующего перемещения Δs выразится в приведенном сдвиге рабочей линии только на поверхности зубцов звена 2.

6°. До сих пор мы рассматривали первичные ошибки как величины конечно-малые первого порядка. В ряде случаев такое предположение является незаконным вследствие значительной величины погрешностей, что имеет, например, место в случае копических зацеплений с дугowymi зубцами, нарезаемыми при неплоском производящем колесе (см. гл. XVIII).

При значительной величине погрешностей для определения закона движения механизма и анализа условий зацепления необходимо сначала найти уравнения поверхностей зубцов с учетом погрешностей изготовления, а затем воспользоваться методом, изложенным в § 40.

7°. При нарезании колес на станке, в кинематической цепи которого действуют погрешности малого периода — так называемые циклические погрешности, — поверхности зубцов колес могут оказаться в известных областях подрезанными. При определении погрешностей нарезаемых колес надо определять отдельно погрешности в подрезанной и неподрезанной зонах. Это иллюстрируется приводимым ниже примером расчета для случая нарезания цилиндрического колеса червячной фрезой на станке с циклическими погрешностями. Задаче такого рода были посвящены работы Л. А. Архангельского [4-11], Г. А. Лившица [160-163], А. В. Мачитидзе [205, 206], Ишибаши [282] и автора [172]. Приводимое здесь решение основывается на исследовании, выполненном автором совместно с Н. Г. Линдтропом [181].

Пример 20. Рассмотрим случай нарезания червячной фрезой цилиндрического колеса, который мы сведем к нарезанию такого колеса рейкой. Вследствие погрешностей станка зависимость между перемещениями колеса и рейки выражается нелинейной зависимостью такого вида:

$$a = r_2 \varphi + \sum_{n=1}^k b_n \sin (n\varphi + \beta_n), \quad (41.14)$$

где r_2 — радиус делительной окружности колеса, φ — угол поворота колеса,

$\sum_{n=1}^k b_n \sin (n\varphi + \beta_n)$ — тригонометрический полином, которым выражается погрешность перемещения рейки при наличии ошибок кинематической цепи станка. В этом полиноме n — номер гармоники, β_n — фазовый угол n -й гармоники.

Введем в рассмотрение три системы координат: S_1 , S и S_2 , связанные соответственно с рейкой, стойкой и нарезаемым колесом (рис. 81). Нужно учесть, что в отличие от случая, рассмотренного в примере 10, перемещение рейки $a \neq r_2 \varphi$, а выражается зависимостью (41.14), окружность колеса r_2 и прямая, направленная по оси x , уже не являются центроидами.

Определение точки контакта. Профиль зубцов рейки и орт нормали были ранее записаны уравнениями (19.24) и (19.25), согласно которым

$$\mathbf{r}_1 = u \sin \alpha_n \mathbf{i}_1 + u \cos \alpha_n \mathbf{j}_1, \quad (41.15)$$

$$\mathbf{e}_1^{(1)} = \cos \alpha_n \mathbf{i}_1 - \sin \alpha_n \mathbf{j}_1. \quad (41.16)$$

Рейка перемещается со скоростью $\mathbf{v}_1^{(1)} = \frac{da}{dt} \mathbf{j}_1$. Скорость точки колеса 2 в системе S_1 определяется уравнением (19.27), согласно которому

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1^{(2)}. \quad (41.17)$$

Здесь r_1 — радиус-вектор точки в системе S_1 , $\omega_1^{(2)} = -\omega_2 k_1$; $R_1 = -a i_1 - r_2 j_1$ — радиус-вектор в системе S_1 точки O_2 линии действия вектора $\omega_1^{(2)}$.

Скорость относительного движения

$$v_1^{(12)} = v_1^{(1)} - v_1^{(2)} = \left[\frac{da}{dt} - \omega_2 (y_1 + r_2) \right] i_1 + \omega_2 (x_1 + a) j_1. \quad (41.18)$$

Для определения контактной точки на профиле зубца рейки воспользуемся выражением

$$e_1^{(1)} v_1^{(2)} = 0.$$

После преобразований получим

$$u = - \left[r_2 \varphi + \sum_{n=1}^k b_n \sin(n\varphi + \beta_n) \right] \sin \alpha_n + \cos \alpha_n \sum_{n=1}^k n b_n \cos(n\varphi + \beta_n). \quad (41.19)$$

Уравнения профиля зубцов колеса. Найдём уравнения профиля зубцов нарезаемого колеса в системе S_2 .

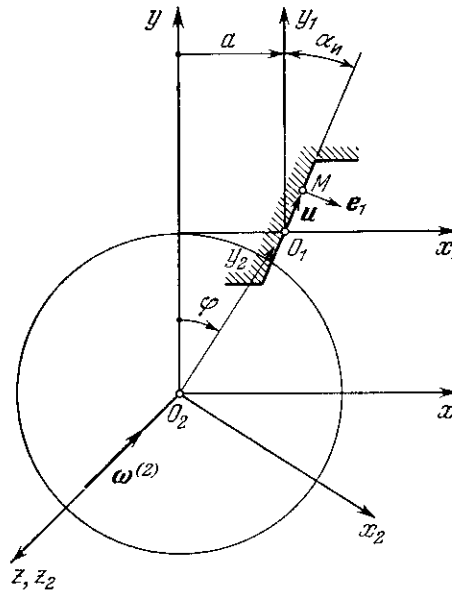


Рис. 81.

Матрица перехода от S_1 к S_2 (рис. 81) определится так:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & a \cos \varphi - r_2 \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & a \sin \varphi + r_2 \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (41.20)$$

Связь между координатами определится матричным равенством

$$r_2 = M_{21} r_1. \quad (41.21)$$

На основании (41.21), (41.20), (41.19) и (41.15) получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_2 \varphi \cos(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n - r_2 \sin \varphi + \\ &\quad + \Delta a \cos(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n - \Delta a' \sin(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n, \\ y_2 &= r_2 \varphi \sin(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n + r_2 \cos \varphi + \\ &\quad + \Delta a \sin(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n + \Delta a' \cos(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n, \end{aligned} \right\} \quad (41.22)$$

$$\text{где } \Delta a = \sum_{n=1}^k b_n \sin(n\varphi + \beta_n), \quad \Delta a' = \frac{d}{d\varphi}(\Delta a).$$

При отсутствии погрешностей кинематики станка $\Delta a = 0$, $\Delta a' = 0$; профиль зубцов был бы выражен уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_2 \varphi \cos(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n - r_2 \sin \varphi, \\ y_2 &= r_2 \varphi \sin(\varphi - \alpha_n) \cos \alpha_n + r_2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (41.23)$$

Эти уравнения можно трактовать как проекцию радиуса-вектора $\overline{O_2 M}$ на оси x_1 и y_1 (рис. 82, а), где

$$\overline{O_2 M} = \overline{O_2 N} + \overline{NM}. \quad (41.24)$$

Уравнения (41.22) и (41.23) позволяют определить точку M' нарезаемого

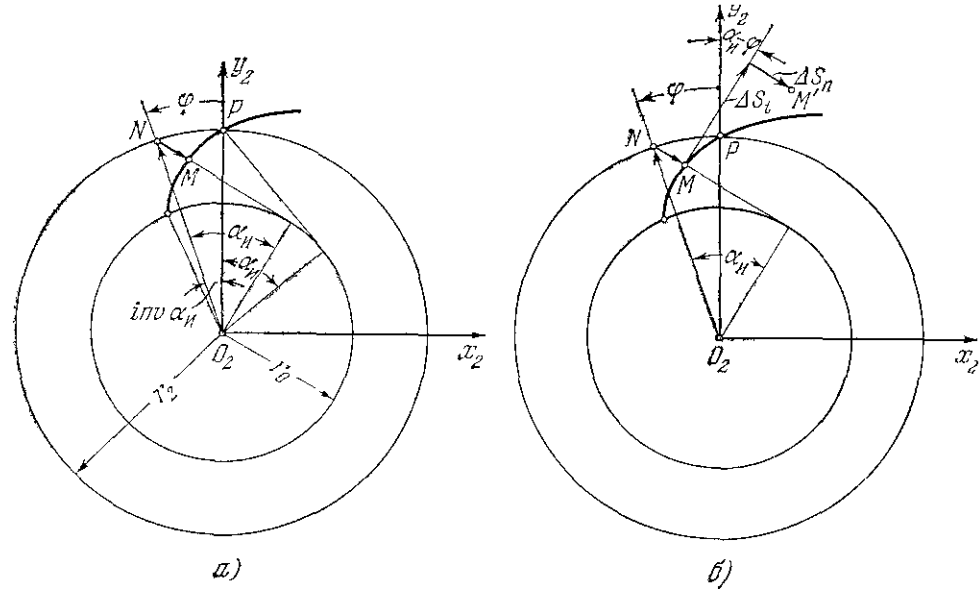


Рис. 82.

профиля через точку M теоретического профиля с помощью векторов ΔS_t и ΔS_n (рис. 82, б), направленных соответственно по касательной и по нормали к теоретическому профилю:

$$\Delta S_t = \Delta a' \cos \alpha_n = \sum_{n=1}^k b_n n \cos(\varphi_n + \beta_n) \cos \alpha_n, \quad (41.25)$$

$$\Delta S_n = \Delta a \cos \alpha_n = \sum_{n=1}^k b_n \sin(\varphi_n + \beta_n) \cos \alpha_n. \quad (41.26)$$

С осью y_2 эти векторы образуют соответственно углы $\alpha_n - \varphi$ и $90^\circ + (\alpha_n - \varphi)$. Для точек теоретического профиля, лежащих выше P , значение φ является отрицательным.

Подрезание зубцов. Профиль зубцов колеса, определяемый уравнениями (41.22), получен формальным огибанием профиля зубца рейки, при котором точки образуемого профиля могут касаться обеих сторон профиля зубца рейки. Поэтому уравнения (41.22) охватывают не только действительные точки нарезаемого профиля с значением радиуса кривизны $\rho > 0$, но и такие точки профиля, для которых $\rho < 0$ и $\rho = 0$.

В действительности, поскольку точки контакта могут располагаться только с одной стороны профиля зубца рейки (той, которая на рис. 81 не заштрихована), на нарезаемом профиле точки со значением $\rho < 0$ существовать не могут. Наличие таких точек указывает, что в процессе образования профиля зубца колеса имеет место подрезание, когда при последующих положениях режущая кромка рейки срезает участки, полученные при предыдущих положениях. Подрезание профиля зубца колеса инструмента имеет место, если среди точек контакта на профиле рейки имеются такие, для которых соблюдается следующая зависимость (см. § 36):

$$v_1^{(12)} + v_{r1}^{(1)} = 0. \quad (41.27)$$

Дифференцируя уравнение (41.15), получим

$$v_{r1}^{(1)} = \frac{dr_1}{dt} = \frac{du}{dt} (\sin \alpha_n i_1 + \cos \alpha_n j_1). \quad (41.28)$$

Продифференцируем (41.19), после чего найдем du/dt :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = -\omega_2 \left[r_2 + \sum_{n=1}^k nb_n \cos(n\varphi + \beta_n) \right] \sin \alpha_n - \\ - \cos \alpha_n \sum_{n=1}^k n^2 b_n \sin(n\varphi + \beta_n). \end{aligned} \quad (41.29)$$

На основании (41.27), (41.28), (41.29) и (41.18) получим

$$\varphi - (n^2 - 1) \sum_{n=1}^k \frac{b_n}{r_2} \sin(n\varphi + \beta_n) = \operatorname{tg} \alpha_n. \quad (41.30)$$

В частном случае, когда погрешности станка отсутствуют, подрезание наступает при значении $\varphi = \operatorname{tg} \alpha_n$. Основываясь на уравнении (41.19), получим, что

$$u = -r_2 \varphi \sin \alpha_n = -r_2 \frac{\sin^2 \alpha_n}{\cos \alpha_n}. \quad (41.31)$$

Это уравнение совпадает с приведенным ранее выражением (19.31), полученным для подрезания эвольвентных профилей рейкой.

При наличии погрешностей кинематики станка малого периода, т. е. если функция погрешностей содержит гармоники высокого порядка n , подрезание профиля зубцов колеса согласно уравнению (41.30) почти неизбежно.

Действительный профиль зубцов колеса. Под действительным понимается профиль зубцов колеса, определенный с учетом погрешностей, возникающих из-за погрешностей кинематической цепи станка и наличия

подрезания. Ограничимся рассмотрением двух частных случаев: 1) функция погрешностей станка выражается гармоникой только первого порядка, т. е.

$$\Delta a = b \sin(\varphi + \beta_1); \quad (41.32)$$

2) функция погрешностей станка представляет гармонику n -го порядка с частотой, равной зубцовой частоте червячного колеса делительной пары станка,

$$\Delta a = b_n \sin(n\varphi + \beta_n). \quad (41.33)$$

В первом случае эволюты профилей являются эволютами двух смещенных друг относительно друга окружностей, смещенных относительно центра вращения колеса (см. § 15, пример 7).

Во втором случае нарезаемый профиль состоит из участков трех видов (I, II и III рис. 83). Ближе к окружности выступов профиль

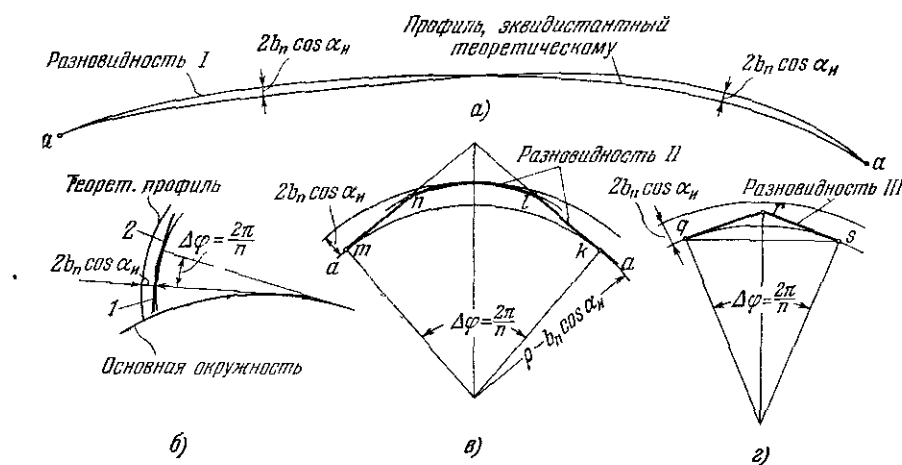


Рис 83.

состоит из повторяющихся выпуклых кривых (разновидность I), отклоняющихся от теоретического профиля на величину $\pm b_n \cos \alpha_n$, где b_n — амплитуда гармоники (41.33) n -го порядка.

Если провести эвольвентный профиль $a-a$, эквидистантный теоретическому и отстоящий от него на величину $b_n \cos \alpha_n$, отклонения действительного профиля, измеренные от $a-a$ по нормали, не превысят, как это следует из уравнения (41.26), величины $2b_n \cos \alpha_n$ (рис. 83, а).

Обратимся теперь к рис. 83, б. Рейка может внедриться внутрь «тела» зубца на величину $b_n \cos \alpha_n$. Угол $\Delta\varphi$ между двумя положениями рейки, внедряющимися на указанную величину, составляет $\Delta\varphi = 2\pi/n$. При указанном значении $\Delta\varphi$, выражающем изменение параметра φ в уравнении (41.33), погрешность перемещения рейки Δa и вместе с ней Δs_n возвращаются к прежним значениям. Участок $mnlk$ профиля (разновидность II) состоит из отрезков двух прямых и отрезка выпуклой кривой (рис. 83, б). Участок qrs (разновидность III) состоит из отрезков двух прямых (рис. 83, г).

Основываясь на построениях рис. 83, б и 83, в, получим, что при образовании участка профиля разновидности *II*

$$\rho \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right] > b_n \cos \alpha_n \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right]. \quad (41.34)$$

Здесь ρ — радиус кривизны теоретического профиля, при выводе принятый приближенно постоянным на угле обкатывания $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$.

Соответственно участок профиля разновидности *III* образуется, если (рис. 83, г)

$$\rho \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right] < b_n \cos \alpha_n \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right]. \quad (41.35)$$

Является очевидным, что на всех участках профиля его погрешность, измеренная по нормали, не превысит $2b_n \cos \alpha_n$.

Геометрия зацеплений

Глава IV

Эвольвентное зацепление*)

§ 42. Введение. Обобщенное уравнение эвольвенты

1°. Эвольвентное зацепление, впервые предложенное Л. Эйлером, нашло впоследствии необычайно широкое применение в машинах и приборах. Это объясняется рядом достоинств такого вида зацепления: а) простота формы зуборезного инструмента, работающего по методу обкатки,

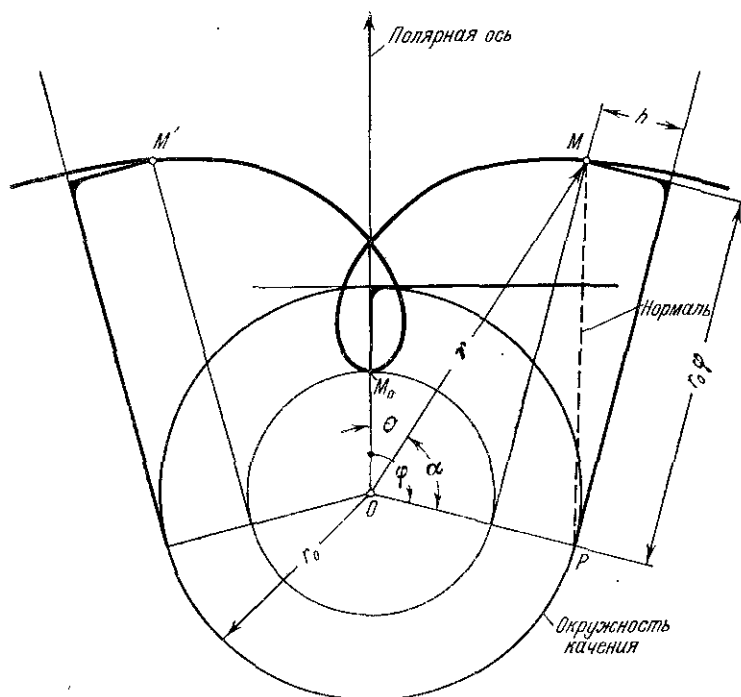


Рис. 84.

способствует повышению точности его изготовления; б) применение коррекции позволяет повысить прочность зубцов и вписаться в заданное межцентровое расстояние; для нарезания скорректированных колес применяется стандартный зуборезный инструмент; в) при изменении вследствие погрешностей монтажа межцентрового расстояния колес их передаточное отношение остается постоянным.

Вопросы геометрии и теории зацепления цилиндрических колес эвольвентного профиля изложены с большой обстоятельностью

*) Обозначения и определения приведены в конце настоящей главы.

в монографиях ряда исследователей. В нашей книге мы ограничимся изложением лишь первоначальных сведений об эвольвентных зацеплениях.

2°. Под эвольвентой, не оговаривая этого особо, понимают развертку круга. Помимо обычной эвольвенты, известны ее разновидности, называемые удлиненной и укороченной эвольвентами.

Все эти кривые могут быть выражены одним уравнением, которое будем называть обобщенным.

На рис. 84 и 85 изображены соответственно образования удлиненной и укороченной эвольвент, представляющих траекторию точки M прямой линии, перекатываемой без скольжения по окружности радиуса r_0 ; точка M смещена относительно перекатываемой прямой на величину h .

Удлиненная и укороченная эвольвенты определяются в полярной форме уравнением такого вида:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{r_0 \varphi}{r_0 \mp h} \right),$$

$$r = \frac{r_0 \mp h}{\cos \alpha}, \quad \theta = \varphi - \alpha, \quad (42.1)$$

где φ — угол развернутости, θ — полярный угол.

В местах применения двойного знака верхний относится к удлиненной, нижний — к укороченной эвольвенте.

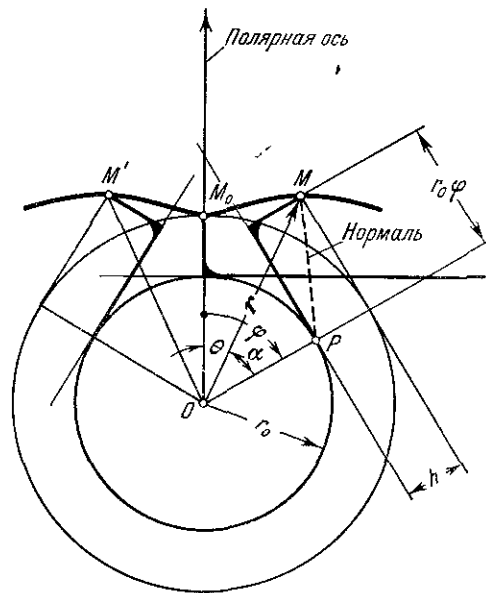


Рис. 85.

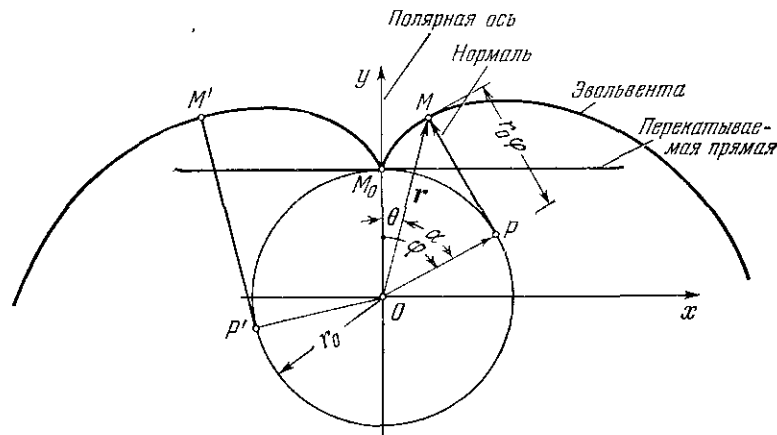


Рис. 86.

При образовании обычной эвольвенты точка M лежит на перекатываемой прямой и $h = 0$ (рис. 86). В этом случае имеем

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha}, \quad \theta = \varphi - \alpha. \quad (42.2)$$

Функция $\theta(\alpha)$ получила название $\text{inv } \alpha$, и ее значения приведены в справочниках. Окружность радиуса r_0 (развертываемая окружность) называется основной окружностью; она является эволютой — геометрическим местом центров кривизны — по отношению к обычной эвольвенте.

Полезно отметить, что при $h = r_0$ удлиненная эвольвента переходит в архимедову спираль (рис. 87), выражаемую уравнением

$$r = r_0 \varphi. \quad (42.3)$$

При перекатывании прямой линии по окружности радиуса r_0 мгновенным центром вращения является точка P (рис. 84, 85, 86, 87). Скорость точки M перекатываемой прямой пропорциональна мгновенному радиусу вращения PM , а элементарное перемещение точки M происходит по касательной к обобщенной эвольвенте в этой точке. На этом основании можно указать простой способ определения нормали к обобщенной эвольвенте как прямой, соединяющей текущую точку M кривой с соответствующим мгновенным центром вращения P . В случае обычной эвольвенты нормаль к профилю в точке M одновременно является касательной к окружности радиуса r_0 (рис. 86).

3°. Учитывая, что радиус-вектор эвольвенты $r = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM}$ (рис. 86), уравнение эвольвенты можно представить и в таком виде:

$$r = r_0 [(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) i + (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) j]. \quad (42.4)$$

Так как окружность радиуса r_0 является эволютой профиля M_0M , то $MP = r_0 \varphi$ — радиус кривизны эвольвентного профиля. Дуга ds эвольвентного профиля на основании (42.4) определится уравнением

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = r_0 \varphi d\varphi. \quad (42.5)$$

Легко установить, что точка M_0 — начало эвольвентного профиля — является особой точкой, так как при $\varphi = 0$ $\frac{dr}{d\varphi} = 0$.

§ 43. Способы образования эвольвенты и схемы нарезания зубцов

В предыдущем параграфе было рассмотрено образование эвольвенты развертыванием окружности. Покажем, что эвольвента может быть образована как огибающая в относительном движении: а) прямолинейного профиля зубца рейки, б) эвольвентного профиля зубца другого колеса. Для доказательства можно воспользоваться методами, изложенными в §§ 11—14; для экономии выкладок используем иные способы вывода, излагаемые ниже.

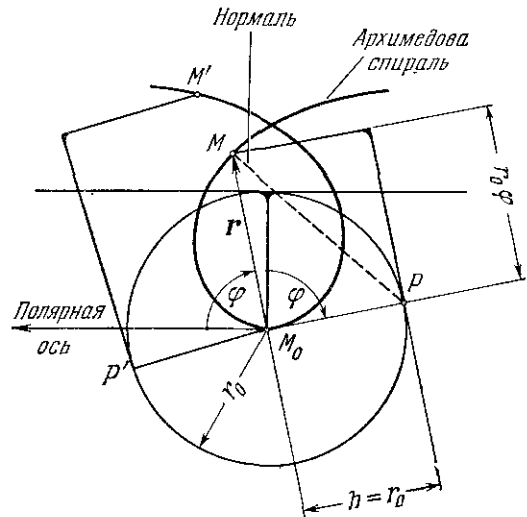


Рис. 87.

1°. Рассмотрим передачу, составленную из колеса 2 и рейки 1. Колесо вращается с угловой скоростью ω_2 , а рейка движется поступательно со скоростью v_p (рис. 88). Пусть с колесом жестко связан эвольвентный профиль $\beta - \beta$, которому соответствует основная окружность радиуса r_{02} . Определим профиль зуба рейки, огибающий эвольвентный профиль $\beta - \beta$ в относительном движении.

Полус зацепления P рассматриваемой передачи окажется от центра колеса на расстоянии (см. § 7)

$$OP = r_2 = \frac{v_p}{\omega_2}. \quad (43.1)$$

Центroidами колеса и рейки будут: окружность радиуса r_2 и прямая $a - a$, касательная к этой окружности. Согласно основной теореме зацепления (см. § 8) нормаль к сопряженным профилям должна проходить через полюс зацепления.

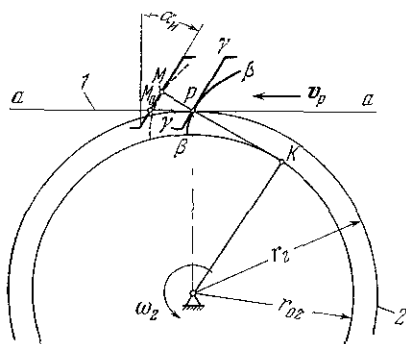


Рис. 88.

Нормаль к эвольвентному профилю является касательной к основной окружности. Нормалью к эвольвентному профилю $\beta - \beta$, проходящей через полюс зацепления P , может явиться только прямая PK (рис. 88). Рейка перемещается поступательно, и профилем ее зуба с нормалью PK может явиться только прямая $\gamma - \gamma$, перпендикулярная PK . Из этого следует, что профилем зуба рейки, огибающим эвольвентный профиль, является прямая линия с углом

профиля α_n , определяемым из уравнения

$$\alpha_n = \arccos \left(\frac{r_{02}}{r_2} \right). \quad (43.2)$$

При выводе мы считали огибаемым эвольвентный профиль $\beta - \beta$, огибающим — профиль зуба рейки $\gamma - \gamma$. Если считать заданным профиль $\gamma - \gamma$ зуба рейки, то огибающим в относительном движении окажется эвольвента профиля $\beta - \beta$. Важно отметить, что один и тот же эвольвентный профиль зуба колеса (с одним и тем же значением основной окружности r_{02}) можно образовать рейкой с различными углами α_n профиля зуба. Для этого необходимо лишь изменять соотношение скоростей v_p/ω_2 так, чтобы

$$\frac{v_p}{\omega_2} = r_2 = \frac{r_{02}}{\cos \alpha_n}. \quad (43.3)$$

Эта особенность используется, в частности, при шлифовании колес эвольвентного профиля плоскостью диска. Угол α_n установки диска выбирается из технологических соображений, а для получения эвольвентного профиля с требуемым значением радиуса r_{02} основной окружности настройкой шлифовального станка обеспечивается требуемое соотношение скоростей v_p/ω_2 .

Легко установить, что линией зацепления колеса и рейки — геометрическим местом точек касания профилей в неподвижной плоскости — является прямая линия MPK , касательная к основной окружности колеса и проходящая через полюс зацепления P . Положение текущей точки M

касания профилей зубца и колеса определяется из уравнения (рис. 88)

$$M_0M = u = \frac{M_0P}{\sin \alpha_n} = \frac{r_2 \varphi_2}{\sin \alpha_n}. \quad (43.4)$$

При $\varphi_2 = 0$ точка касания профилей совпадает с полюсом зацепления P . Точки профиля зубца рейки, лежащие ниже M_0 ($u < 0$), вступают в зацепление, если рейке и колесу из начального положения, когда M_0 совпадает с P , сообщить перемещение, противоположное изображенному на чертеже.

2°. Докажем, что эвольвентный профиль $\gamma - \gamma$ колеса 2 может быть образован как огибающий

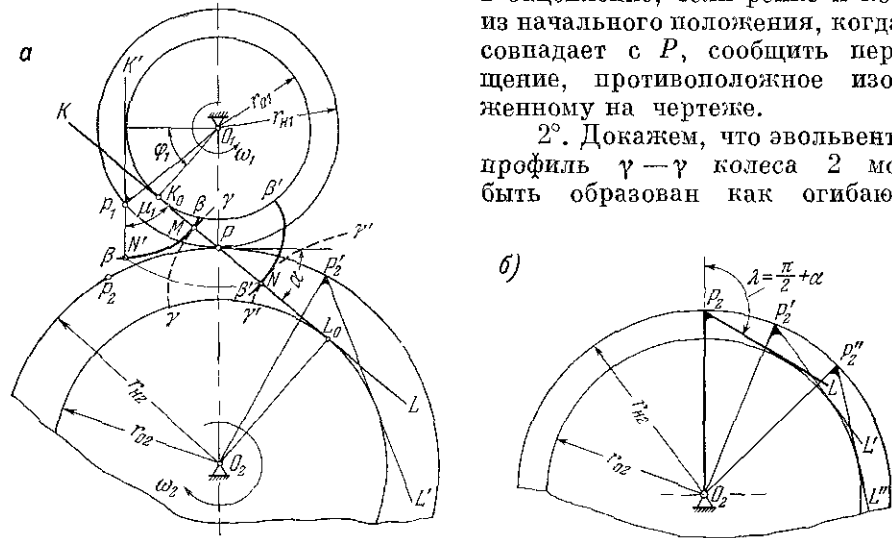


Рис. 89.

семейства эвольвентных профилей $\beta - \beta$ колеса 1 в относительном движении.

Пусть колесо 1 с эвольвентным профилем $\beta - \beta$ (рис. 89, а) вращается вокруг O_1 с угловой скоростью ω_1 . Колесо 2 совершает вращение с угловой скоростью ω_2 вокруг O_2 , и при этом соблюдается заданное передаточное отношение $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = \text{const}$. Центроидами колес будут окружности с радиусами $r_{н1}$ и $r_{н2}$. В начальном положении профиля $\beta - \beta$ его точкой касания с искомым профилем будет точка M , так как нормаль MK в точке M , являющаяся одновременно касательной к основной окружности r_{01} , проходит через полюс зацепления P . Точка N' профиля $\beta - \beta$ станет точкой контакта после того, как нормаль $N'K'$ пройдет через полюс зацепления P . При этом профиль $\beta - \beta$ займет положение $\beta' - \beta'$, нормаль $N'K'$ займет положение NK и совпадет, следовательно, с нормалью MK .

Отметим точку P_1 пересечения нормали $N'K'$ с центроидой колеса 1; на центроиде колеса 2 отметим точку P_2 , приняв во внимание, что $\widehat{PP_1} = \widehat{PP_2}$. В положении $\beta' - \beta'$ профиля, когда контактной точкой становится N' , точки P_1 и P_2 центроид колес сливаются друг с другом в полюс зацепления P .

Выясним, какие положения занимает нормаль к искомому профилю $\gamma - \gamma$ в системе координат, жестко связанной с этим колесом. В том положении, когда контактной является точка M , направление нормали совпадает с MPL . Когда же контактной точкой станет N , нормаль займет положение PNL , а прежняя нормаль MPL перейдет в $P_2'L'$. В системе

координат, жестко связанной с колесом 2, можно отметить семейство нормалей $P_2L, P'_2L', P''_2L'', \dots$ к искомому профилю $\gamma - \gamma$ (рис. 89, б). Полезно учесть, что в неподвижном пространстве, связанном со стойкой, общая нормаль к профилям в точке их касания не меняет своего направления, если $\beta - \beta$ — эвольвентный профиль. Направление нормали в неподвижном пространстве определяется углом α , образуемым ею с общей касательной к центроидам.

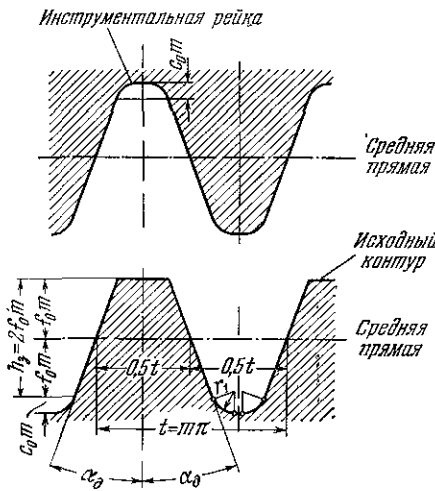


Рис. 90.

Обратимся к семейству нормалей $P_2L, P'_2L', P''_2L'', \dots$ (рис. 89, б). Прямая P_2L и радиус-вектор $r_{н2}$ центроиды образуют постоянный угол $\lambda = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Огибающая семейства P_2L — эволюта искомого профиля — представляет согласно материалам § 15 окружность радиуса $r_{02} = r_2 \cos \alpha$. Из этого следует, что искомый профиль $\gamma - \gamma$ будет эвольвентным профилем, представляющим развертку окружности r_{02} .

Опустим перпендикуляры O_1K_0 и O_2L_0 на линию KPL (рис. 89, а). Рассмотрев прямоугольные треугольники O_1K_0P и O_2L_0P , получим

$$\cos \alpha = \frac{r_{01}}{r_{н1}} = \frac{r_{02}}{r_{н2}}, \quad \frac{r_{н2}}{r_{н1}} = \frac{r_{02}}{r_{01}} = i_{12}.$$

Следовательно,

$$r_{02} = r_{01} i_{12}. \quad (43.5)$$

Из уравнения (43.5) следует, что заданный профиль $\beta - \beta$ с основной окружностью r_{01} воспроизведет на колесе 2 эвольвентный профиль $\gamma - \gamma$; радиус r_{02} основной окружности профиля $\gamma - \gamma$ зависит от передаточного отношения i_{12} . Один и тот же эвольвентный профиль $\gamma - \gamma$ может быть воспроизведен различными эвольвентными профилями $\beta - \beta$ (с различными размерами основной окружности r_{01}), если передаточное отношение i_{12} и r_{01} будут находиться в неизменном отношении ($r_{01} i_{12} = \text{const}$). Если, сохраняя выбранные значения r_{01} и i_{12} , изменить расстояние $A = O_1O_2$ между центрами вращения колес, на величине r_{02} это не скажется (см. § 45).

3°. Хотя один и тот же эвольвентный профиль может быть образован как огибающий в относительном движении семейства прямолинейных профилей (рис. 88), либо как огибающий семейства эвольвентных профилей (рис. 89). Выбор способа образования не безразличен. Выбранный способ образования определяет очертание переходной кривой и положение точки сопряжения эвольвентного участка профиля с переходной кривой (см. §§ 44, 47).

4°. Различаются три способа нарезания зубцов эвольвентных колес методом обкатки: посредством инструментальной рейки (гребенки), червячной фрезы и долбяка. В основу проектирования этих инструментов положен контур производящей (исходной) рейки — исходный контур, изображенный на рис. 90 (см. ГОСТ 3058—54*, ГОСТ 9587—61). Зубцы инструментальной рейки очерчены по впадинам исходного контура.

В СССР для зубцов нормальной высоты принято: $\alpha_d = 20^\circ$; $f_0 = 1$; $c_0 = 0,25$ ($c_0 = 0,35$ для колес с модулем $m \leq 1$).

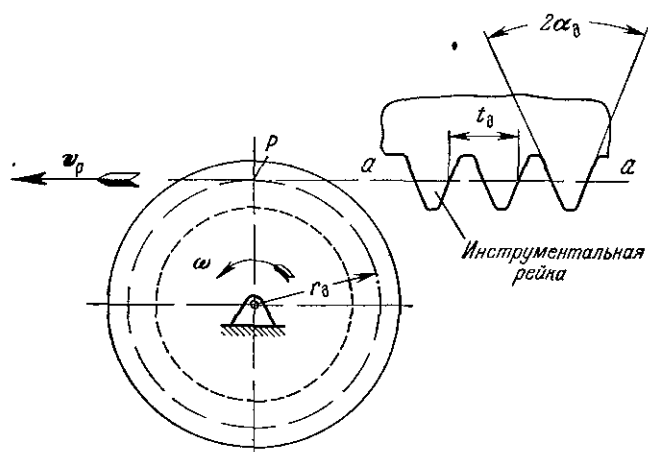


Рис 91

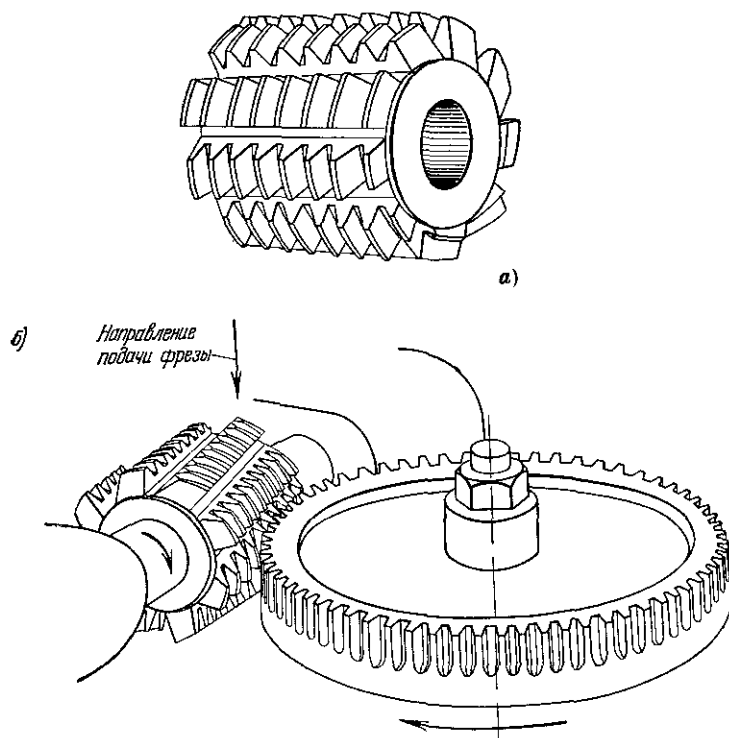


Рис. 92.

Профиль зубцов инструментальной рейки представляет прямую линию, и такой инструмент может быть изготовлен с высокой степенью точности. Нарезание эвольвентного колеса с заданной основной окруж-

ностью r_{02} может быть согласно (43.3) выполнено инструментальной рейкой с произвольным углом профиля ($\alpha_n \neq \alpha_d$), что сказывается лишь на значении радиуса r_2 центроиды колеса при нарезании. При $\alpha_n = \alpha_d$ вращательное и поступательное движения колеса (рис. 91) связаны соотношением

$$v_p = \omega r_d, \quad (43.6)$$

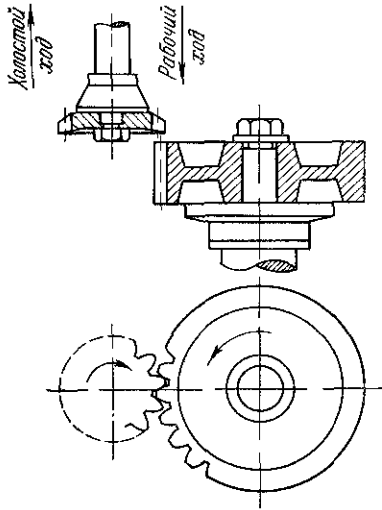


Рис. 93.

в результате чего делительная окружность перекачивается без скольжения по прямой $a - a$ рейки. В процессе нарезания зубцов инструментальная рейка совершает движение резания, перемещаясь в направлении, параллельном оси колеса.

Наиболее распространенным является способ нарезания посредством червячной фрезы (рис. 92, а). На станке нарезаемому колесу сообщается вращение вокруг своей оси (рис. 92, б), а червячной фрезе, помимо вращательного движения, сообщается поступательное движение в направлении оси колеса. Так как эти два движения связаны между собой кинематикой зубофрезерного станка, поверхность зубцов нарезаемого колеса, вообще говоря, является огибающей однопараметрического семейства по-

верхностей фрезы. Учитывая малую величину осевой подачи фрезы на один оборот изделия, нарезаемую поверхность зубцов, абстрагируя ее, можно представить как огибающую двухпараметрического семейства поверхностей фрезы (см. § 28).

Схема нарезания долбяком представлена на рис. 93. Долбяк представляет инструментальное колесо эвольвентного профиля, называемое по имени его изобретателя долбяком Феллоу. Угловые скорости нарезаемого колеса и долбяка связаны соотношением

$$\frac{\omega_d}{\omega_k} = \frac{z_k}{z_d}. \quad (43.7)$$

Долбяку сообщается поступательное движение — движение резания в направлении оси колеса. Большим преимуществом метода зубодолбления является возможность нарезания колес внутреннего зацепления.

Одним и тем же инструментом может быть, как правило, выполнено нарезание колес с различным числом зубцов.

§ 44. Зацепление колеса с инструментом реечного типа

Рассмотрим зацепление колеса с инструментальной рейкой, имеющей очертание исходного контура; для такой рейки $\alpha_n = \alpha_d$. Центроидой колеса при нарезании будет служить делительная окружность, радиус r_d которой удовлетворяет соотношению

$$r_d = \frac{v_p}{\omega}.$$

Будем называть нормальной такую установку инструментальной рейки, когда ее средняя прямая является касательной к делительной окружности (рис. 94). Смещение рейки x представляет расстояние между средней прямой $II-II$ и центроидой $I-I$ рейки, касательной к делительной окружности (на рис. 88 и 91 эта центроида была обозначена $a-a$); $x > 0$, если прямая $II-II$ смещена по отношению к $I-I$ от центра колеса. Коэффициент смещения $\xi = \frac{x}{m}$.

Колеса, нарезаемые при смещении рейки, называются скорректированными колесами.

Обозначим через F крайнюю точку прямолинейного участка профиля зубца рейки. Точка F вступит в зацепление с нарезаемым профилем в точке G линии зацепления PG ; в этой точке будет начато образование эвольвентного профиля. В общем случае $OG \neq r_0$ и крайняя точка G эвольвентного участка профиля на нарезанном колесе не совпадает с начальной точкой эвольвенты M_0 (см. рис. 86). Эвольвентный профиль и дно впадины соединяются переходной кривой.

Линия выступов инструментальной рейки является касательной к окружности впадин, радиус которой

$$r_i = r_d - (f_0 - \xi + c_0) m = m \left(\frac{z}{2} - f_0 + \xi - c_0 \right). \quad (44.1)$$

Радиус основной окружности нарезаемого колеса определяется уравнением

$$r_0 = r_d \cos \alpha_d. \quad (44.2)$$

При нарезании зубцов при определенной установке рейки может возникнуть явление подрезания (рис. 42), при котором эвольвентная часть и переходная кривая профиля зубца изделия не будут иметь плавного сопряжения, ножка зубца окажется ослабленной, будет срезана часть эвольвентного профиля.

Условие отсутствия подрезания зубцов рейкой можно найти, используя общий метод, изложенный в § 19 (пример 10). Вместе с тем условие отсутствия подрезания зубцов рейкой может быть определено и другим, более простым путем.

Действительно, особой точкой эвольвентного профиля является его начало, точка, принадлежащая основной окружности. Следовательно, предельной точкой на профиле зубца рейки является точка, вступающая в зацепление с особой точкой эвольвентного профиля. Из всего сказанного следует, что во избежание подрезания необходимо,

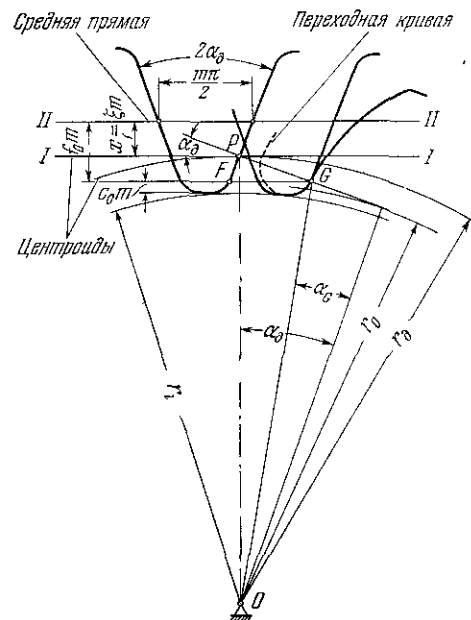


Рис. 94.

чтобы (рис. 94)

$$\alpha_G \geq 0. \quad (44.3)$$

Из построений рис. 94 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_G = \operatorname{tg} \alpha_d - \frac{4(f_0 - \xi)}{z \sin 2\alpha_d}. \quad (44.4)$$

Условие отсутствия подрезания на основании (44.3) и (44.4) можно представить таким неравенством:

$$\xi \geq f_0 - \frac{z \sin^2 \alpha_d}{2}. \quad (44.5)$$

При $\xi = 0$ (нормальная установка рейки), $f_0 = 1$ и $\alpha_d = 20^\circ$ подрезание будет отсутствовать при $z \geq 17$. Подрезание зубцов при $z < 17$

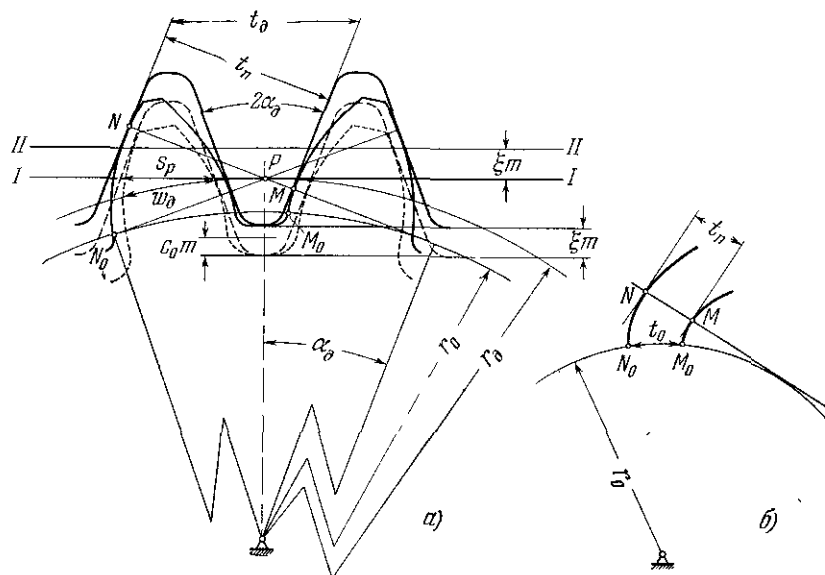


Рис. 95.

можно устранить назначением соответствующего коэффициента смещения ξ . Нужно сразу же отметить, что преимущества применения коррекции ($\xi \neq 0$) гораздо шире, чем только устранение подрезания, и поэтому она применяется и в тех случаях, когда опасности подрезания не возникает.

Радиус OG окружности, на которой начинается образование эвольвентного профиля, определяется уравнением

$$OG = \frac{r_0}{\cos \alpha_G} = m \frac{z}{2} \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_G}. \quad (44.6)$$

Угол α_G вычисляется по формуле (44.4).

Смещение рейки сопровождается изменением не только радиуса окружности впадин, но и толщины зубцов и ширины впадин нарезаемого колеса (рис. 95, а). Толщина зубца s_p рейки на ее центроиде $I-I$ равна

дуговой ширине w_d впадины колеса. Отсюда следует

$$w_d = s_p = \frac{m\pi}{2} - 2x \operatorname{tg} \alpha_d = m \left(\frac{\pi}{2} - 2\xi \operatorname{tg} \alpha_d \right), \quad (44.7)$$

$$s_d = t_d - w_d = m \left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_d \right). \quad (44.8)$$

Толщина зуба колеса на окружности другого радиуса определяется уравнением (52.4).

При больших значениях коэффициентов смещения возникает опасность заострения зубцов на окружности выступов колеса. Толщина зубцов на окружности выступов определяется по формуле (см. § 52)

$$s_e = 2r_e \left[\frac{s_d}{mz} - (\operatorname{inv} \alpha_e - \operatorname{inv} \alpha_d) \right], \quad (44.9)$$

где

$$\alpha_e = \arccos \left(\frac{mz \cos \alpha_d}{2r_e} \right).$$

Эвольвентные профили зубцов колеса одного направления являются эквидистантными, равноотстоящими по нормали (рис. 95, б). Шаг t_n по общей нормали к соседним профилям одного направления равен шагу t_0 , измеренному по основной окружности. Из построений, приведенных на рис. 95, а, следует

$$\begin{aligned} t_0 &= t_n = t_d \cos \alpha_d = \\ &= m\pi \cos \alpha_d. \end{aligned} \quad (44.10)$$

§ 45. Зацепление пары эвольвентных профилей

На рис. 96 изображены эвольвентные профили $\beta - \beta$ и $\gamma - \gamma$ зубцов двух колес, полученные разворачиванием основных окружностей r_{01} и r_{02} . Рассмотрим основные особенности этого зацепления.

1°. Передача вращения эвольвентными профилями осуществляется с постоянным соотношением угловых скоростей, что можно показать следующим образом. Общая нормаль к профилям зубцов в точке их касания M одновременно является общей касательной K_0L_0 к основным окружностям. Полюс зацепления P является точкой пересечения общей нормали с линией межцентрового расстояния. Так

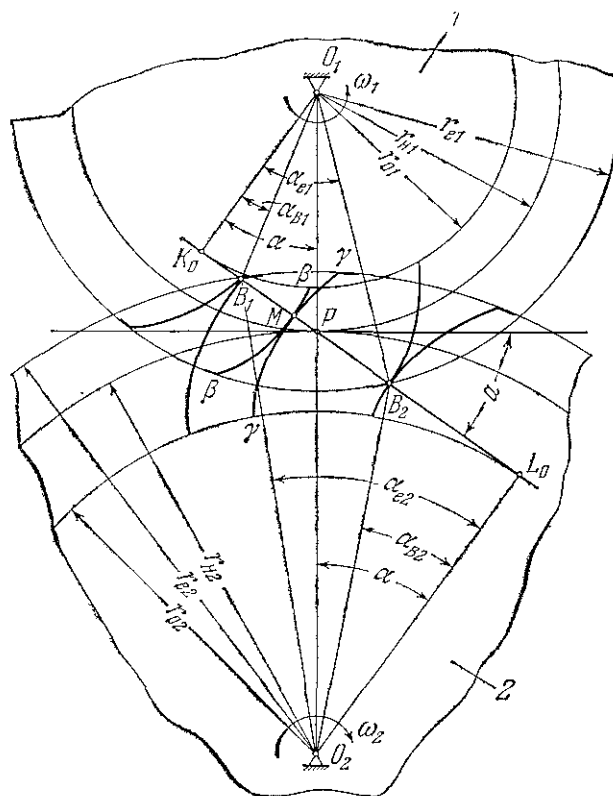


Рис. 96.

как нормаль в новой точке касания профилей (например, B_1, B_2) остается по-прежнему общей касательной к основным окружностям, то при изменении точки касания профилей положение полюса зацепления P на линии центров остается прежним, передаточное отношение остается постоянным.

2°. Окружности радиусов $O_1P = r_{н1}$ и $O_2P = r_{н2}$ являются центроидами колес, известными также под названием начальных окружностей.

3°. Линией зацепления эвольвентных профилей — геометрическим местом точек касания профилей в системе координат, связанной со стойкой, — является касательная K_0L_0 к основным окружностям.

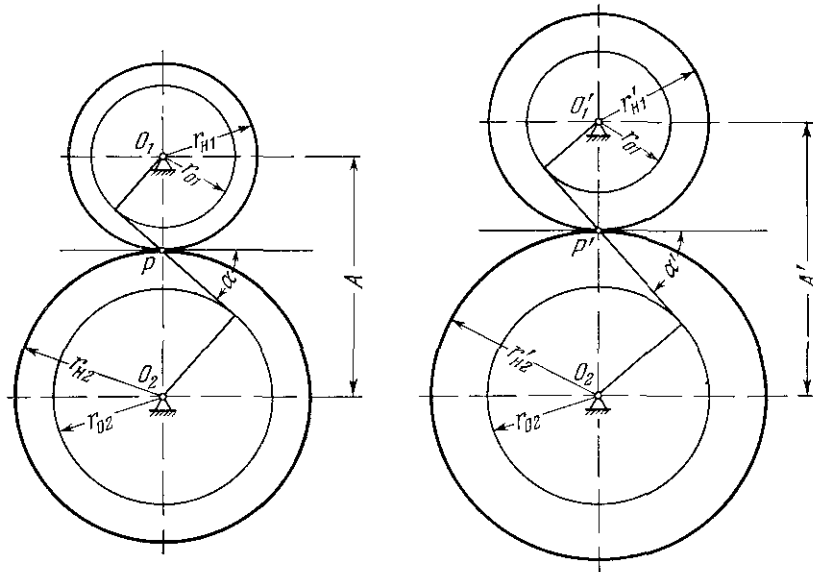


Рис. 97.

Угол α , образуемый линией зацепления с касательной к начальным окружностям, носит название угла зацепления. В общем случае $\alpha \neq \alpha_d$ (см. § 46).

4°. При изменении межцентрового расстояния эвольвентных колес постоянство передаточного отношения и величина его сохраняются; меняются лишь угол зацепления и размеры начальных окружностей.

Пусть при межцентровом расстоянии A (рис. 97) полюс зацепления находится в P , угол зацепления — α , радиусы начальных окружностей $r_{н1} = O_1P$ и $r_{н2} = O_2P$. Вследствие изменения межцентрового расстояния (O_1 переместилось в O'_1) полюсом зацепления становится точка P' , угол зацепления — α' , радиусы начальных окружностей $r'_{н1} = O'_1P'$ и $r'_{н2} = O_2P'$. Легко убедиться, что передаточное отношение не изменится, так как

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{н2}}{r_{н1}} = \frac{r'_{н2}}{r'_{н1}} = \frac{r_{02}}{r_{01}}.$$

5°. Участок B_1B_2 линии зацепления (рис. 96) носит название рабочего участка линии зацепления. Точки B_1 и B_2 находятся как точки пересечения линии K_0L_0 с окружностями выступов ведомого и ведущего колес.

6°. Коэффициент перекрытия (коэффициент одновременности зацепления) представляет отношение пути, пройденного точкой касания пары профилей по линии зацепления, к шагу между этими профилями, измеренному по нормали.

Обратимся к построениям рис. 96, где B_1 и B_2 — точки касания одной и той же пары профилей в начале и в конце зацепления. Еще до выхода из зацепления рассматриваемой пары профилей в действие должны вступить профили соседних зубцов колес. Это будет достигнуто, если окажется, что $B_1B_2 > t_n$, где $t_n = t_0$ — расстояние между соседними профилями, измеренное по общей нормали. Коэффициент перекрытия

$$\varepsilon = \frac{B_1B_2}{t_0} = \frac{l}{m\pi \cos \alpha_d}. \quad (45.1)$$

На основании построений рис. 96

$$l = r_{02} (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha) + r_{01} (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha). \quad (45.2)$$

Подставив l в выражение (45.1), после преобразований получим

$$\varepsilon = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha)}{2\pi}. \quad (45.3)$$

Здесь

$$\cos \alpha_e = \frac{r_0}{r_e} = \frac{mz \cos \alpha_d}{2r_e}. \quad (45.4)$$

Угол зацепления α определяется из формулы (46.6).

Коэффициент перекрытия ε возрастает с увеличением z_1 и z_2 . Наибольшего значения ε достигает при зацеплении колеса с рейкой.

Пусть с рейкой зацепляется колесо 1. На основании построений рис. 94

$$\frac{PG}{m\pi \cos \alpha_d} = \frac{\frac{4(f_0 - \xi)}{\sin 2\alpha_d}}{2\pi}. \quad (45.5)$$

Выражение (45.5) нужно подставить в (45.3) вместо $z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha)$, после чего получим

$$\varepsilon = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha_d) + \frac{4(f_0 - \xi)}{\sin 2\alpha_d}}{2\pi}. \quad (45.6)$$

При наличии погрешностей профиля и основного шага действительный коэффициент перекрытия равен единице. В этом случае при пересопряжении зубцов происходит мгновенное изменение угловой скорости.

7°. При касании профилей вне полюса зацепления имеет место их скольжение. Пусть профили зубцов касаются друг друга в точке M (рис. 98). Построим план скоростей для точки M . Согласно материалам § 33

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_e^{(1)} + \mathbf{v}_r^{(1)}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}_e^{(2)} + \mathbf{v}_r^{(2)}.$$

Здесь $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)}$ — скорость перемещения точки касания по линии зацепления, $\mathbf{v}_e^{(i)}$ и $\mathbf{v}_r^{(i)}$ — скорость перемещения точки в переносном движении (вместе с колесом) и в относительном движении (по профилю зубца). В эвольвентном зацеплении угол μ_k ($k = 1, 2$), образуемый между двумя нормальными в точках M и N профиля, равен углу поворота φ_k колеса, необходимому для того, чтобы эти точки стали контактными (рис. 89, а).

Элементарная дуга кривой

$$ds_k = \rho_k d\mu_k,$$

где $d\mu_k$ — угол между двумя бесконечно близкими нормальными. Учитывая, что $d\mu_k = d\varphi_k$, получим

$$v_r^{(1)} = \frac{ds_1}{dt} = \rho_1 \omega_1, \quad v_r^{(2)} = \frac{ds_2}{dt} = \rho_2 \omega_2. \quad (45.7)$$

На рис. 98 $\rho_1 = K_0M$, $\rho_2 = L_0M$.

Скорость скольжения точки профиля зубца 1 относительно точки профиля зубца 2 (рис. 96)

$$v^{(12)} = v_r^{(1)} - v_r^{(2)} = v_e^{(1)} - v_e^{(2)}. \quad (45.8)$$

Для рассмотренной точки M $v^{(12)} = \rho_1 \omega_1 - \rho_2 \omega_2$. В полюсе зацепления $v^{(12)} = 0$. Переход точки касания через полюс зацепления сопровождается изменением направления скольжения.

8°. При больших значениях коэффициентов смещений инструментальной рейки может возникнуть явление интерференции, при котором в зацепление с эвольвентным профилем одного колеса начинают вступать в зацепление точки переходной кривой другого колеса.

Определим условия отсутствия интерференции колес, нарезанных рейкой. Согласно построениям рис. 94 угол α_G , определяющий точку G сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой, определяется формулой (44.4).

Обозначим через B_1 точку профиля на ножке зубца колеса 1, вступающую в касание с вершиной профиля зубца колеса 2 (рис. 96.) Под вершиной профиля зубца понимается точка пересечения профиля с окружностью выступов. На ножке зубца колеса 2 можно отметить точку B_2 , вступающую в

касание с вершиной зубца колеса 1. Углы давления в точках B_1 и B_2 определяются из уравнений (рис. 96):

$$\operatorname{tg} \alpha_{B1} = \frac{(r_{01} + r_{02}) \operatorname{tg} \alpha - r_{02} \operatorname{tg} \alpha_{e2}}{r_{01}} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{z_2}{z_1} (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha), \quad (45.9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{B2} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{z_1}{z_2} (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha). \quad (45.10)$$

Интерференция профилей при нарезании рейкой будет исключена при соблюдении следующих двух неравенств:

$$\alpha_{G1} \leq \alpha_{B1}, \quad \alpha_{G2} \leq \alpha_{B2}. \quad (45.11)$$

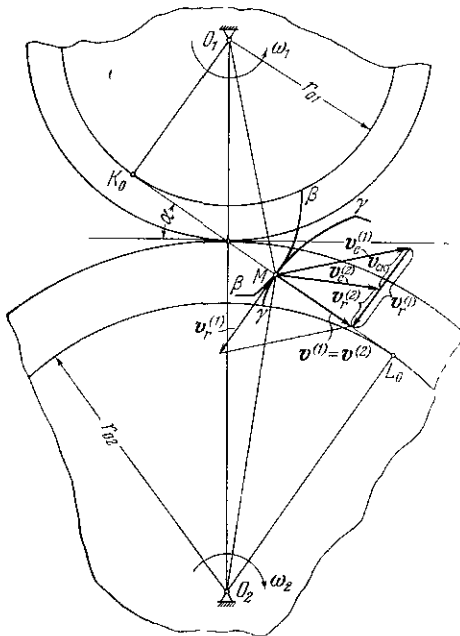


Рис. 98.

§ 46. Геометрический расчет колес, нарезанных реечным инструментом

А. Виды корригирования и назначение коэффициентов смещения

Корригирование профилей достигается смещением реечного инструмента при нарезании зубцов и не требует применения специального оборудования и специального инструмента. Конструктору при проектировании передачи необходимо лишь назначить коэффициенты смещения, определяемые из условий работы, и рассчитать затем геометрические параметры передачи. Нужно подчеркнуть, что смещение инструмента не сказывается на диаметре основной окружности, и при корригировании изменяется лишь расположение одного и того же эвольвентного профиля по отношению к окружности впадин и выступов колеса.

Корригирование профилей производится в следующих случаях:

- а) для повышения изгибной прочности зубцов, что достигается увеличением их толщины на делительных окружностях и у основания зубцов;
- б) для повышения контактной прочности, что достигается увеличением радиуса кривизны в полюсе зацепления;
- в) для устранения подрезания зубцов;
- г) для получения заданного межцентрового расстояния колес при стандартном модуле;
- д) для получения двухпарного зацепления в полюсе и т. д.

Сочетание колес с различными коэффициентами смещения образует три типа передач:

а) нулевую передачу с суммарным коэффициентом смещения $\xi_{\Sigma} = \xi_1 + \xi_2 = 0$; межцентровое расстояние в такой передаче $A_0 = r_{d1} + r_{d2}$, начальные окружности совпадают с делительными; угол зацепления $\alpha = \alpha_d$;

б) положительную передачу ($\xi_{\Sigma} > 0$); межцентровое расстояние колес $A > A_0$; начальные окружности больше делительных; угол зацепления $\alpha > \alpha_d$;

в) отрицательную передачу ($\xi_{\Sigma} < 0$); межцентровое расстояние колес $A < A_0$; начальные окружности меньше делительных; угол зацепления $\alpha < \alpha_d$.

Корригирование, приводящее к образованию нулевой передачи ($\xi_{\Sigma} = \xi_1 + \xi_2 = 0$), называется высотным. Корригирование, при котором образуются положительная и отрицательная передачи, называется угловым. Эти названия не совсем точно отражают различия в видах корригирования. При высотном корригировании изменяются не только соотношения высот головок и ножек, но и толщины зубцов по делительной окружности; межцентровое расстояние и угол зацепления сохраняют номинальные значения. При угловом корригировании изменяется не только угол зацепления ($\alpha \neq \alpha_d$), но и межцентровое расстояние ($A \neq A_0$), соотношения высот головок и ножек, толщина зубцов по делительной окружности.

Корригирование для образования нулевой передачи может применяться лишь в том случае, если суммарное число зубцов

$$z_{\Sigma} = z_1 + z_2 \geq \frac{4f_0}{\sin^2 \alpha_d} . \quad (46.1)$$

Выражение (46.1) можно получить из формулы (44.5), согласно которой

$$\xi_1 \geq f_0 - \frac{z_1 \sin^2 \alpha_d}{2}, \quad \xi_2 \geq f_0 - \frac{z_2 \sin^2 \alpha_d}{2}.$$

Приняв, что для образования нулевой передачи выбирают $\xi_\Sigma = \xi_1 + \xi_2 = 0$, придем к выражению (46.1).

Назначение коэффициентов смещения лучше всего производить с помощью блокирующих контуров [24].

В. Геометрический расчет

При выполнении расчета известны: z_1 , z_2 , ξ_1 и ξ_2 ; параметры исходного контура α_d , f_0 , c_0 и m (см. рис. 90).

1°. Для определения угла зацепления воспользуемся тем, что при отсутствии бокового зазора толщина зубца по начальной окружности одного колеса должна быть равна ширине впадины другого, поскольку начальные окружности перекатываются друг по другу без скольжения, т. е.

$$s_{H1} = w_{H2}.$$

Равным дугам, проходящим по начальным окружностям, соответствуют углы поворота, находящиеся в отношении, выражаемом передаточным отношением

$$i_{12} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{s_{H1}}{r_{H1}} : \frac{w_{H2}}{r_{H2}} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (46.2)$$

У некорригированного колеса угловая толщина зубцов по делительной окружности составляет половину углового шага, т. е. она равна π/z . У корригированного колеса угловая толщина зубца по делительной окружности согласно формуле (44.8) равна

$$\frac{s_{d1}}{r_{d1}} = \frac{\pi}{z_1} + \frac{\Delta s_{d1}}{r_{d1}} = \frac{\pi + 4\xi_1 \operatorname{tg} \alpha_d}{z_1}. \quad (46.3)$$

На основании построений рис. 99

$$\frac{s_{H1}}{r_{H1}} = \frac{\pi + 4\xi_1 \operatorname{tg} \alpha_d}{z_1} - 2(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_d). \quad (46.4)$$

Применительно ко второму колесу, учитывая, что смещение рейки приводит к уменьшению ширины впадины, получим

$$\frac{w_{H2}}{r_{H2}} = \frac{\pi - 4\xi_2 \operatorname{tg} \alpha_d}{z_2} + 2(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_d). \quad (46.5)$$

На основании выражений (46.2), (46.4) и (46.5) получим

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} \alpha_d + \frac{2\xi_\Sigma}{z_\Sigma} \operatorname{tg} \alpha_d. \quad (46.6)$$

Очевидно, что в случае нулевой передачи, при $\xi_\Sigma = 0$, $\alpha = \alpha_d$.

2°. Межцентровое расстояние колес на основании построений рис. 96 определяется из формулы

$$A = \frac{r_{01} + r_{02}}{\cos \alpha} = m \frac{(z_1 + z_2) \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha}. \quad (46.7)$$

3°. Радиусы начальных окружностей колес определяются из формул

$$r_{H1} = \frac{r_{01}}{\cos \alpha} = m \frac{z_1 \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha}, \quad (46.8)$$

$$r_{H2} = \frac{r_{02}}{\cos \alpha} = m \frac{z_2 \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha}. \quad (46.9)$$

4°. У изучающих корригирование иногда возникает ошибочное представление, что изменение межцентрового расстояния $\Delta A = m \xi_z$. Из построений рис. 100 можно убедиться, что, если при сопряжении корригированных колес изменить межцентровое расстояние на величину $\Delta A = m \xi_z$, это

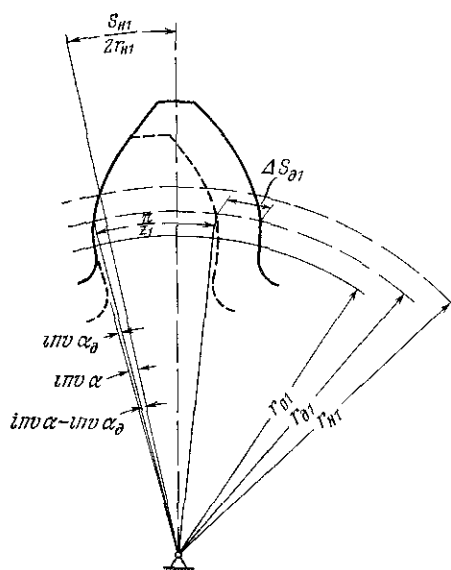


Рис. 99.

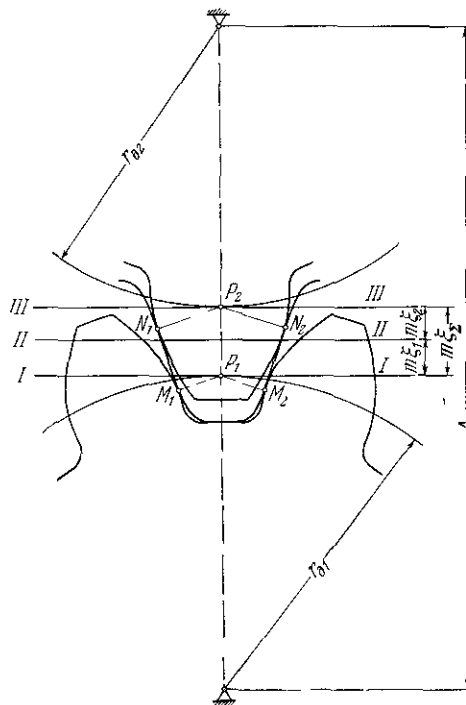


Рис. 100.

приведет к появлению бокового зазора между профилями зубцов. На этом рисунке $I-I$ и $III-III$ — соответственно центры рейки при нарезании первого и второго колес; $II-II$ — средняя прямая рейки. Точки P_1 и P_2 — полюсы зацепления при нарезании рейкой соответственно первого и второго колес. С профилями зубцов колес профили рейки соприкасаются: для первого колеса в точках M_1 и M_2 , для второго колеса в точках N_1 и N_2 . Из построений этого рисунка видно, что, если расстояние между делительными окружностями колес равно $m \xi_z$, профили зубцов корригированных колес касаются профилей зубца инструментальной рейки, а между самими профилями колес образуется некоторый зазор. Для устранения зазора между профилями колес

необходимо задать при сборке изменение межцентрового расстояния $\Delta A < m\xi_\Sigma$. Точное значение межцентрового расстояния находится из формул (46.6) и (46.7).

5°. Радиусы окружностей впадин на основании (44.1) определяются из формул

$$r_{i1} = r_{d1} - (f_0 + c_0 - \xi_1) m = m \left(\frac{z_1}{2} - f_0 - c_0 + \xi_1 \right), \quad (46.10)$$

$$r_{i2} = m \left(\frac{z_2}{2} - f_0 - c_0 + \xi_2 \right). \quad (46.11)$$

6°. Радиусы окружностей выступов задаются таким образом, чтобы сохранить величину радиального зазора между окружностью выступов одного и окружностью впадин второго колеса. Исходя из этого, необходимо, чтобы (рис. 101)

$$r_{e1} + r_{i2} + c_0 m = A,$$

$$r_{e2} + r_{i1} + c_0 m = A.$$

Отсюда следует

$$r_{e1} = A - r_{i2} - c_0 m, \quad (46.12)$$

$$r_{e2} = A - r_{i1} - c_0 m. \quad (46.13)$$

Легко доказать, что у скорректированных колес, образующих положительную или отрицательную передачу, требование выдерживать радиальный зазор $c_0 m$ приводит к необходимости уменьшить полную высоту зубцов h по сравнению с колесами нулевой передачи.

Учитывая, что $r_{i1} + r_{i2} + h + c_0 m = A$, получим

$$\begin{aligned} h &= A - r_{i1} - r_{i2} - c_0 m = A - \\ &- m \left(\frac{z_2}{2} - 2f_0 - c_0 + \xi_\Sigma \right) = \\ &= (2f_0 + c_0) m - (m\xi_\Sigma - \Delta A), \end{aligned} \quad (46.14)$$

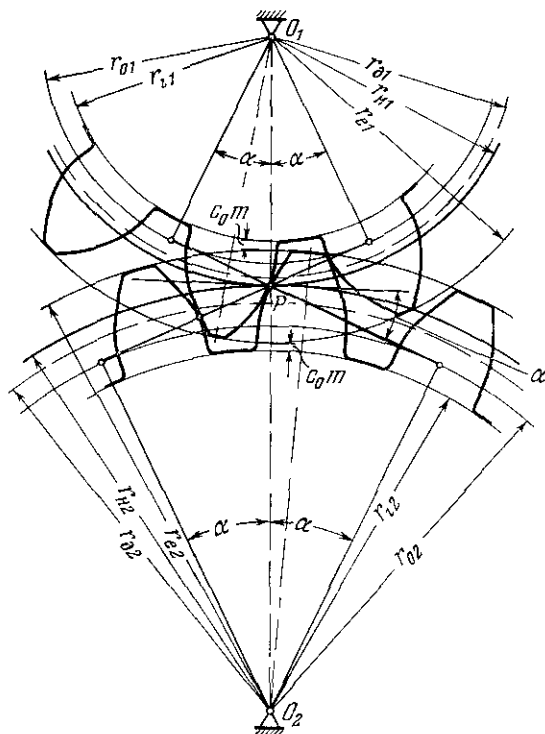


Рис. 101.

$$\text{где } \Delta A = A - A_0 = A - m \frac{z_\Sigma}{2}.$$

Для колес нулевой передачи $\Delta A = 0$, $\xi_\Sigma = 0$ и $h = (2f_0 + c_0) m$.

7°. Определение коэффициента перекрытия и проверка на отсутствие интерференции производятся по формулам (45.3) и (45.11). Проверка колес на отсутствие заострения производится по формуле (44.9).

§ 47. Зацепление нарезаемого колеса и долбяка, находящихся во внешнем зацеплении

1°. Зуборезный долбяк (рис. 93) представляет собой скорректированное зубчатое колесо, коэффициент смещения ξ_n которого различен для каждого сечения, перпендикулярного оси долбяка. По мере заточки коэффициент смещения ξ_n для передней (лицевой) плоскости изменяется, что

сказывается на величине некоторых параметров нарезанных колес. Коэффициент ξ_n определяется по одной из следующих двух формул:

$$\xi_n = \frac{r_{en} - m \left(\frac{z_n}{2} + f_0 + c_0 \right)}{m}, \quad (47.1)$$

$$\xi_n = \frac{2s_{дн} - \pi m}{4m \operatorname{tg} \alpha_d}. \quad (47.2)$$

2°. Угол зацепления и расстояние между центрами вращения долбяка и нарезаемого колеса определяются из формул, аналогичных (46.6) и (46.7):

$$\operatorname{inv} \alpha_c = \operatorname{inv} \alpha_d + \frac{2(\xi_n + \xi) \operatorname{tg} \alpha_d}{z_n + z}, \quad (47.3)$$

$$A_c = m \frac{(z_n + z) \cos \alpha_d}{\cos \alpha_c}. \quad (47.4)$$

3°. Найдем угол давления в точке G сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой при нарезании долбяком. Воспользуемся построениями рис. 96, приняв, что колесо 1 — долбяк, колесо 2 — нарезаемое колесо. Тогда точка B_2 явится точкой сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой. Угол давления α_G определяется из формул, аналогичных (45.9) и (45.10):

$$\operatorname{tg} \alpha_G = \operatorname{tg} \alpha_c - \frac{z_n}{z} (\operatorname{tg} \alpha_{en} - \operatorname{tg} \alpha_c), \quad (47.5)$$

где

$$\cos \alpha_{en} = \frac{r_{on}}{r_{en}}. \quad (47.6)$$

Во избежание подрезания зубцов колеса необходимо, чтобы

$$\alpha_G \geq 0. \quad (47.7)$$

На основании формул (47.5) и (47.6) найдем число зубцов колеса, при котором будет отсутствовать подрезание

$$z \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha_{en} - \operatorname{tg} \alpha_c}{\operatorname{tg} \alpha_c} z_n. \quad (47.8)$$

4°. При зацеплении долбяка с нарезаемым колесом возможно срезание головок зубцов последнего вблизи их вершин. Определим сначала угол давления α_{Gn} для точки сопряжения эвольвентного профиля зубца долбяка с его переходной кривой. Поверхность долбяка воспроизводится на шлифовальном станке, как огибающая плоскости шлифовального диска. Зацепление долбяка со шлифовальным диском можно свести к случаю зацепления эвольвентного колеса с инструментальной рейкой, имеющей очертания исходного контура.

Аналогично формуле (44.4), предполагая, что инструментальная рейка не имеет на вершине закругления, получим

$$\operatorname{tg} \alpha_{Gn} = \operatorname{tg} \alpha_d - \frac{4(f_0 + c_0 - \xi_n)}{z_n \sin 2\alpha_d}. \quad (47.9)$$

Следует иметь в виду, что $\alpha_{Gn} \geq 0$, так как при шлифовании долбяка принимаются меры, исключаяющие возможность его подрезания при

шлифовании. В частности, это может быть достигнуто закруглением кромки шлифовального диска.

Головка зубца нарезаемого колеса не будет срезана долбяком, если

$$\alpha_{Gи} \leq \alpha_{Bи}. \quad (47.10)$$

Здесь $\alpha_{Bи}$ — угол давления в точке $Bи$ ножки профиля зубца долбяка, вступающей в зацепление с вершиной профиля зубца нарезаемого колеса. Воспользовавшись построениями рис. 96, получим формулу, аналогичную формулам (45.9) и (45.10):

$$\operatorname{tg} \alpha_{Bи} = \operatorname{tg} \alpha_c - \frac{z}{z_{и}} (\operatorname{tg} \alpha_c - \operatorname{tg} \alpha_c). \quad (47.11)$$

5°. Радиус окружности впадин нарезаемого колеса определяется из формулы

$$r_i = A_c - r_{eи}. \quad (47.12)$$

§ 48. Геометрический расчет колес внешнего зацепления, нарезанных долбяком

При расчете считаются известными: $z_1, z_2, z_{и}$; параметры исходного контура a_d, f_0, c_0 и m ; коэффициенты смещения ξ_1, ξ_2 и $\xi_{и}$. Коэффициенты смещения ξ_1 и ξ_2 определяют смещения, которые нужно задать воображаемой исходной рейке для того, чтобы ввести ее в плотное зацепление с колесами, нарезанными долбяком. Назначение коэффициентов смещения лучше всего производить с помощью блокирующих контуров [24]. Нужно иметь в виду, что применение долбяка для нарезания колес расширяет возможности корригирования по следующим причинам: а) Уменьшается опасность интерференции колес по сравнению со случаем реечного инструмента при назначении больших коэффициентов смещения ξ (установлено И. А. Болотовским и его соавторами [24]). Это объясняется тем, что при больших значениях ξ угол давления α_G для точки сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой меньше при долбяке, чем при рейке. б) Расширяются возможности применения соосных передач с одинаковым модулем зубцов; углы зацепления обеих пар при использовании долбяка могут отличаться на большую величину, чем в случае применения рейки. Это в особенности важно для планетарных механизмов с передаточным отношением простого ряда, близким к единице. в) Увеличивается коэффициент перекрытия колес; при использовании долбяка, сохраняя нормализованное значение радиального зазора, можно назначать большие радиусы окружностей выступов колес, чем в случае применения рейки.

Геометрический расчет колес, нарезанных долбяком, выполняется в такой последовательности:

1°. Из формул (46.6) — (46.9) определяются угол зацепления, межцентровое расстояние и радиусы начальных окружностей колес.

2°. Для определения окружности впадин необходимо из формул (47.3) и (47.4) определить угол зацепления α_c и межцентровое расстояние A_c при зацеплении колеса с долбяком, затем из формулы (47.12), находить искомый радиус окружности впадин.

3°. Радиусы окружностей выступов колес определяются из формул (46.12) и (46.13).

4°. Толщина зубцов на делительной окружности находится из формулы (44.8). Проверка на отсутствие заострения выполняется по формуле (44.9).

5°. Определение коэффициента перекрытия производится по формулам (45.3) и (45.4).

6°. Под интерференцией на ножках зубцов понимается зацепление эвольвентного участка профиля зубца одного колеса с переходной кривой зубца другого колеса. Проверка на отсутствие такой интерференции производится по следующим формулам. Сначала из формул (47.6) и (47.5) находится угол давления α_G в точке сопряжения эвольвентного профиля нарезаемого колеса с выкружкой. Затем из (45.9) и (45.10) находятся углы давления α_{B1} и α_{B2} в крайних точках линии зацепления колес.

Интерференция колес будет исключена, если окажется, что

$$\operatorname{tg} \alpha_{B1} \geq \operatorname{tg} \alpha_{G1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{B2} \geq \operatorname{tg} \alpha_{G2}. \quad (48.1)$$

7°. Проверка на отсутствие подрезания зубцов колеса долбяком производится по формуле (47.7) или (47.8).

8°. Проверка на отсутствие срезания долбяком головки зубца нарезаемого колеса производится по формулам (47.10), (47.11) и (47.9).

§ 49. Зацепление долбяка с колесом внутреннего зацепления

Формулы настоящего параграфа будут использованы ниже для геометрического расчета колес с внутренним зацеплением.

Будем считать заданными: z_2, z_H ; параметры исходного контура α_d, f_0, c_0 и m ; коэффициенты смещения ξ_2 и ξ_H . Через ξ_2 обозначен условный коэффициент смещения исходного контура (контура инструментальной рейки), которым как бы образуется колесо 2. Само собой разумеется, что исходный контур выполняет лишь роль математического образа производящей поверхности. Условимся считать, как и ранее, $\xi_2 > 0$, если смещение исходного контура происходит от центра колеса 2.

1°. Толщина рубца по делительной окружности колеса 2 определяется по формуле

$$s_{d2} = m \left(\frac{\pi}{2} - 2\xi_2 \operatorname{tg} \alpha_d \right). \quad (49.1)$$

2°. Угол зацепления α_{c2} и межцентровое расстояние получим, рассмотрев зацепление на станке колеса 2 с долбяком как скорректированное зацепление. Приравняем значения s_{d2} и w_{H2} — дуговой толщины зубца и ширины впадины по начальным окружностям, после чего получим

$$\operatorname{inv} \alpha_{c2} = 2 \frac{\xi_2 - \xi_H}{z_2 - z_H} \operatorname{tg} \alpha_d + \operatorname{inv} \alpha_d, \quad (49.2)$$

$$A_{c2} = \frac{m(z_2 - z_H)}{2} \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_{c2}}. \quad (49.3)$$

3°. Радиус окружности впадин колеса 2 определяется из формулы (рис. 102)

$$r_{i2} = A_{c2} + r_{eH}. \quad (49.4)$$

4°. Подрезание колеса 2 вблизи его основной окружности выражается в срезании головок зубцов вблизи окружности выступов r_{e2} . Подрезание колеса 2 вблизи его окружности впадин (в месте сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой) не имеет места.

Условия отсутствия срезания головок зубцов колеса 2 определим с помощью построений рис. 102, на котором изображено зацепление

колеса 2 с долбяком. Отметим на линии зацепления точку $B_{\text{н}}$ — точку пересечения окружности выступов r_{e2} колеса 2 с линией PK_0L_0 ; в $B_{\text{н}}$

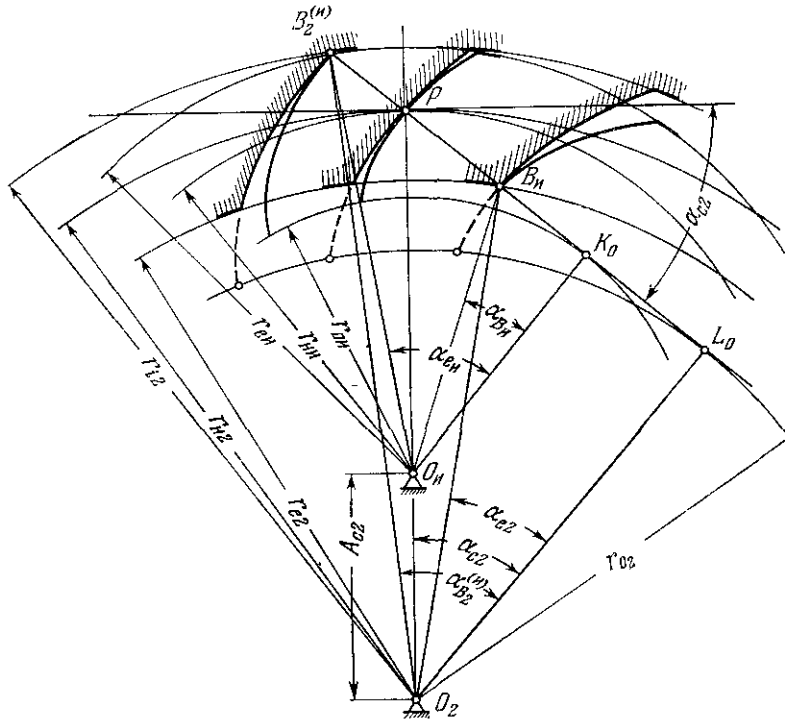


Рис. 102.

точка эвольвентного профиля ножки зубца долбяка вступает в зацепление с вершиной головки колеса 2. Угол давления $\alpha_{B_{\text{н}}}$ определяется из формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{B_{\text{н}}} &= \frac{B_{\text{н}}L_0 - K_0L_0}{r_{0\text{н}}} = \frac{r_{02} \operatorname{tg} \alpha_{e2} - (r_{02} - r_{0\text{н}}) \operatorname{tg} \alpha_{c2}}{r_{0\text{н}}} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha_{c2} + \frac{z_2}{z_{\text{н}}} (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha_{c2}), \quad (49.5) \end{aligned}$$

где

$$\cos \alpha_{e2} = \frac{mz_2 \cos \alpha_{\text{д}}}{2r_{e2}}.$$

Через $\alpha_{G_{\text{н}}}$ мы обозначили угол давления в точке сопряжения эвольвентного профиля зубца долбяка с переходной кривой. Во избежание подрезания головок зубцов колеса 2 необходимо, чтобы точка $B_{\text{н}}$ долбяка была точкой эвольвентного профиля, а не переходной кривой. Отсюда следует

$$\alpha_{G_{\text{н}}} \leq \alpha_{B_{\text{н}}}, \quad (49.6)$$

где $\alpha_{G_{\text{н}}}$ определяется из формулы (47.9).

5°. Для последующих выводов, связанных с геометрическим расчетом колес внутреннего зацепления (см. § 50), нам понадобится значение угла давления в точке G_2 сопряжения эвольвентного участка с переходной кривой профиля зубца колеса 2. Точка G_2 является одновременно

точкой $B_2^{(n)}$ (рис. 102) пересечения окружности выступов r_{en} долбяка с линией зацепления

$$\operatorname{tg} \alpha_{B_2^{(n)}} = \operatorname{tg} \alpha_{G_2} = \operatorname{tg} \alpha_{c_2} + \frac{z_1}{z_2} (\operatorname{tg} \alpha_{en} - \operatorname{tg} \alpha_{c_2}), \quad (49.7)$$

где $\alpha_e = \arccos \left(\frac{r_{0n}}{r_{en}} \right)$.

6°. При нарезании колеса с внутренним зацеплением может иметь место так называемая радиальная интерференция, сущность которой заключается в следующем.

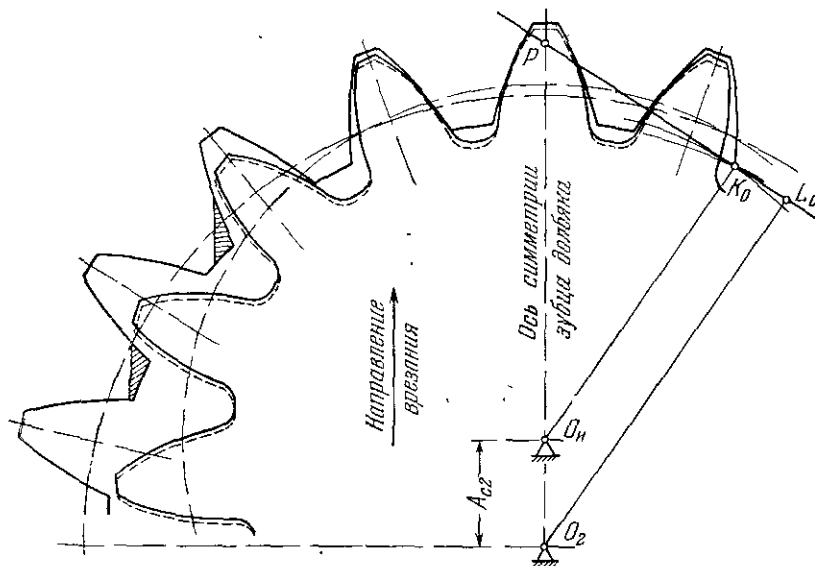


Рис. 103.

Перемещение долбяка для врезания и отвода совершается в направлении межцентрового расстояния. Оси симметрии ряда зубцов долбяка значительно отклоняются от направления его перемещения, и такие зубцы при перемещении долбяка могут повредить зубцы колеса. На рис. 103 долбяк изображен в двух положениях: пунктирное соответствует отведенному долбяку. Поврежденные участки зубцов колеса 2 заштрихованы, такие участки имеются на каждом зубце колеса.

Условия, исключающие появление радиальной интерференции, определим, используя построения рис. 104 [293]. Пусть в начальном положении оси симметрии зубца долбяка и впадины колеса совпадают. Введем в рассмотрение ось x , перпендикулярную радиальному перемещению долбяка; начало оси x лежит на продолженном направлении O_2O_n . Проекции вершин A_n и A головки зубца долбяка и головки зубца колеса в начальном положении определяются так:

$$x_{An}^{(0)} = r_{en} \sin \left(\frac{s_{en}}{2r_{en}} \right), \quad (49.8)$$

$$x_A^{(0)} = r_{e2} \sin \left(\frac{w_{e2}}{2r_{e2}} \right), \quad (49.9)$$

где s_{en} и w_{e2} — толщина зубца долбяка и ширина впадины колеса на окружностях выступов.

Представим теперь, что долбяку и колесу сообщены повороты на углы φ_1 и φ_2 , связанные соотношением

$$\varphi_1 = \frac{z_2}{z_1} \varphi_2. \quad (49.10)$$

Профили долбяка и колеса займут положения β и δ , абсциссы точек A_1 и A будут соответственно x_A и x_{A1} , определяемые из уравнений:

$$x_{A1} = r_{e1} \sin \left(\varphi_1 + \frac{s_{e1}}{2r_{e1}} \right), \quad (49.11)$$

$$x_A = r_{e2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{w_{e2}}{2r_{e2}} \right). \quad (49.12)$$

Если бы вместо положения β профиль зубца долбяка занял положение β' , оказалось бы, что $x_A = x_{A1}$; при отводе долбяка в направлении

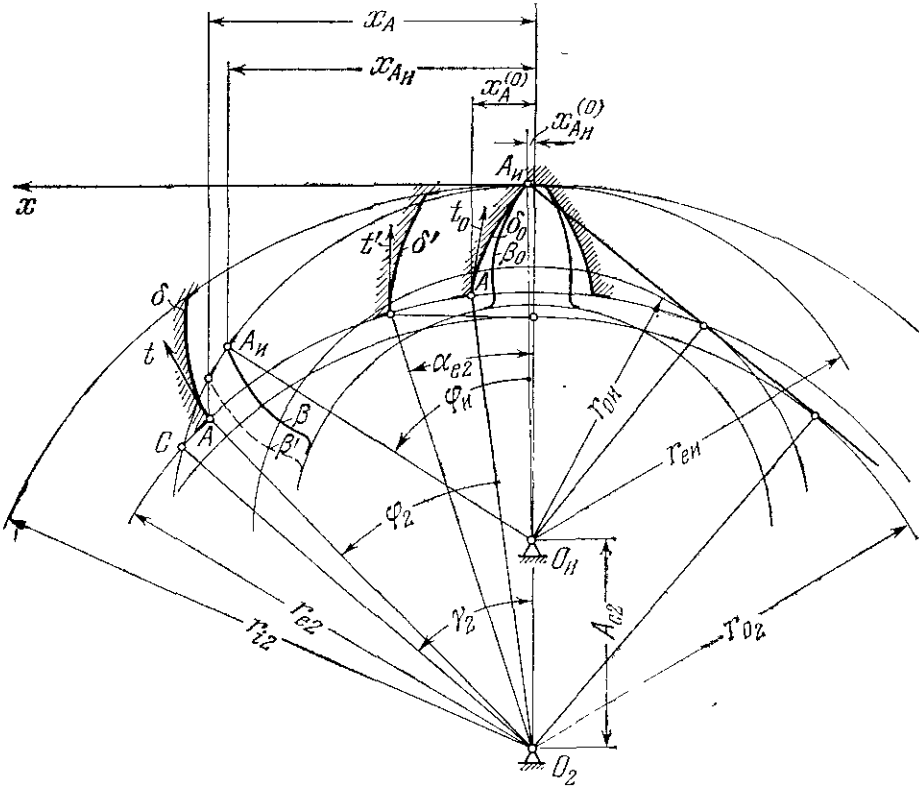


Рис. 104.

O_1O_2 вершина A_1 профиля долбяка задела бы впадину колеса вблизи A . Очевидно, что при $x_{A1} > x_A$ радиальное перемещение долбяка приведет к повреждению впадины.

Условие отсутствия радиальной интерференции выражается неравенством $x_A - x_{A1} > 0$ или, с учетом (49.10) и (49.11), неравенством

$$r_{e2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{w_{e2}}{2r_{e2}} \right) - r_{e1} \sin \left(\varphi_1 + \frac{s_{e1}}{2r_{e1}} \right) > 0. \quad (49.13)$$

Экстремальное значение разности $x_A - x_{Aн}$ наступает при

$$\frac{d}{d\varphi_2}(x_A - x_{Aн}) = 0,$$

т. е. при

$$r_{e2} \cos\left(\varphi_2 + \frac{w_{e2}}{2r_{e2}}\right) - \frac{z_2}{z_{н}} r_{en} \cos\left(\frac{z_2}{z_{н}} \varphi_2 + \frac{s_{en}}{2r_{en}}\right) = 0. \quad (49.14)$$

Укажем область значений φ_2 , при которых должно проверяться соблюдение неравенства (49.13). Отметим точку C пересечения окружностей выступов r_{e2} и r_{en} и центральный угол γ_2 на колесе 2 (рис. 105).

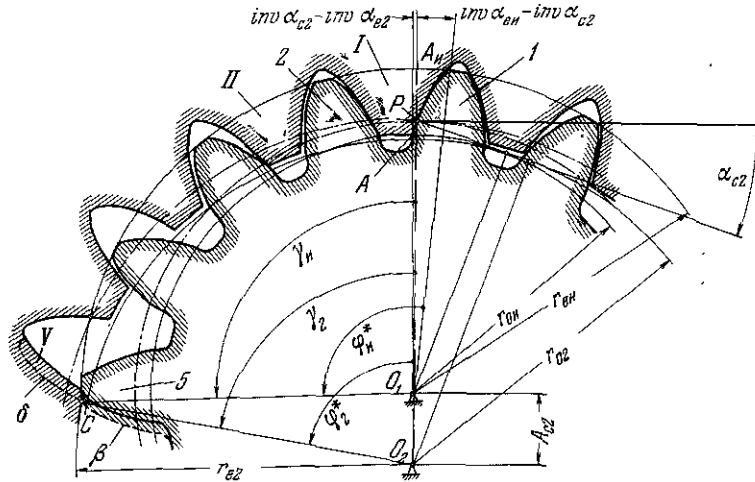


Рис. 105.

При $\varphi_2 > \gamma_2$ радиальное перемещение долбяка уже не представляет опасности, так как вершина $A_{н}$ будет вне впадины колеса.

Отметим положения касательной t_0 , t' и t в вершине A в положениях профиля δ_0 , δ' и δ (рис. 104). В положении δ' профиля, которому соответствует угол поворота колеса $\varphi_2 = \alpha_{e2}$, касательная t' параллельна направлению радиального перемещения $O_{н}O_2$ долбяка. При углах поворота $\varphi_2 > \alpha_{e2}$, когда касательная t' переходит в положение t , радиальное перемещение долбяка может привести к повреждению впадин. Из всего сказанного следует, что соблюдение неравенства (49.13) должно проверяться в области значений

$$\gamma_2 \geq \varphi_2 + \frac{w_{e2}}{2r_{e2}} \geq \alpha_{e2} - \frac{s_{en}}{2r_{en}}. \quad (49.15)$$

Углы γ_2 и α_{e2} определяются из уравнений:

$$\gamma_2 = \arccos \frac{r_{e2}^2 + A_{c2}^2 - r_{en}^2}{2r_{e2}A_{c2}}, \quad (49.16)$$

$$\alpha_{e2} = \arccos \left(\frac{r_{o2}}{r_{e2}} \right). \quad (49.17)$$

При $\alpha_{e2} > \gamma_2$ радиальная интерференция, безусловно, исключается.

При наличии радиальной интерференции необходимо уменьшить число зубцов используемого долбяка, изменить коэффициенты смещения, руководствуясь блокирующими контурами.

7°. Во внутреннем зацеплении при малой разности чисел зубцов может иметь место интерференция второго рода. При парезании зубцов долбяком в результате такой интерференции профили зубцов колеса частично будут срезаны (рис. 105). Пусть профили зубцов касаются друг друга в полюсе зацепления P , точки A_n и A — вершины головок зубцов долбяка и нарезаемого колеса. Представим, что долбяку и колесу сообщены повороты на углы φ_n^* и φ_2^* , находящиеся в соотношении (49.9). Профили зубцов займут положения δ и β ; вершины A и A_n совпадут друг с другом и окажутся в точке пересечения окружностей выступов долбяка и колеса 2. Интерференция второго рода будет исключена, если окажется, что в то время, когда профиль зубца колеса 2 займет положение δ , профиль зубца долбяка еще не дойдет до положения β . Это условие для изображенных колес не соблюдено, и поэтому пятый зубец долбяка I внедрится в тело зубца V нарезаемого колеса. Следовательно, для отсутствия интерференции второго рода необходимо, чтобы

$$\varphi_n^* \geq \varphi_2^* \frac{z_2}{z_n}. \quad (49.18)$$

На основании построений рис. 105 получим

$$\begin{aligned} \varphi_n^* &= \gamma_n + \text{inv } \alpha_{en} - \text{inv } \alpha_{c2} = \\ &= \arccos \left(\frac{r_{e2}^2 - A_{c2}^2 - r_{en}^2}{2r_{en}A_{c2}} \right) + \text{inv } \alpha_{en} - \text{inv } \alpha_{c2}, \end{aligned} \quad (49.19)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^* &= \gamma_2 - (\text{inv } \alpha_{c2} - \text{inv } \alpha_{c2}) = \\ &= \arccos \left(\frac{r_{e2}^2 + A_{c2}^2 - r_{en}^2}{2r_{e2}A_{c2}} \right) + \text{inv } \alpha_{c2} - \text{inv } \alpha_{c2}. \end{aligned} \quad (49.20)$$

Как правило, исключение радиальной интерференции обеспечивает также отсутствие интерференции второго рода.

§ 50. Геометрический расчет передачи с внутренним зацеплением

Колеса с внутренним зацеплением позволяют уменьшить потери на трение и габариты передачи. Уменьшение потерь на трение вызывается тем, что угловая скорость ω_{12} в относительном движении при внутреннем зацеплении равна не сумме, а разности угловых скоростей (см. § 7); вследствие этого уменьшаются скорость скольжения зубцов и потери на трение. Внутреннее зацепление широко применяется в планетарных передачах для повышения КПД передачи, в механизмах поворота некоторых кранов, экскаваторов для уменьшения габаритов. Почти во всех случаях внутреннее зацепление применяется как корригированное зацепление. Колесо 2 с внутренним зацеплением нарезается долбяком, колесо 1 с внешним зацеплением нарезается реечным инструментом или долбяком.

К недостаткам передач с внутренним зацеплением можно отнести: трудности размещения опор колеса, шлифование колеса производится

профильным кругом, нарезание червячной фрезой возможно лишь для колес больших диаметров.

Исходными данными при расчете являются: z_1 , z_2 , α_d , f_0 , c_0 , ξ_1 и ξ_2 (см. п. 2° настоящего параграфа).

1°. Угол зацепления и межцентровое расстояние колес определяются по формулам, аналогичным (49.2) и (49.3):

$$\operatorname{inv} \alpha = 2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{z_2 - z_1} \operatorname{tg} \alpha_d + \operatorname{inv} \alpha_d, \quad (50.1)$$

$$A = m \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right) \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha}. \quad (50.2)$$

2°. При назначении коэффициентов смещения ξ_1 и ξ_2 полезно иметь в виду следующие неравенства:

$$\xi_2 > \xi_n - \frac{(z_2 - z_n) \operatorname{inv} \alpha_d}{2 \operatorname{tg} \alpha_d}. \quad (50.3)$$

Это неравенство, как следует из (49.2), определяет, что угол зацепления $\alpha_{c2} > 0$.

Если колесо 1 нарезается долбяком, $\alpha_{c1} > 0$ и, как это следует из формулы (47.3),

$$\xi_1 > -\xi_n - \frac{(z_1 + z_n) \operatorname{inv} \alpha_d}{2 \operatorname{tg} \alpha_d}. \quad (50.4)$$

Угол зацепления колес в передаче $\alpha > 0$. Поэтому согласно (50.1)

$$\xi_2 - \xi_1 > \frac{(z_1 - z_2) \operatorname{inv} \alpha_d}{2 \operatorname{tg} \alpha_d}. \quad (50.5)$$

Окончательные значения ξ_1 и ξ_2 должны быть заданы с помощью блокирующих контуров [24, 45, 46].

3°. Радиусы окружностей впадин колес 1 и 2 определяются по формулам (47.12) и (49.4), если оба колеса нарезаются долбяками; если колесо z_1 нарезается реечным инструментом, r_{i1} определяется по формуле (46.10). Радиусы окружностей выступов колес определяются из формул:

$$r_{e2} = A + r_{i1} + c_0 m, \quad (50.6)$$

$$r_{e1} = r_{i2} - A - c_0 m. \quad (50.7)$$

Радиусы делительной и основной окружностей определяются по обычным формулам.

4°. Радиусы начальных окружностей определяются по формулам:

$$r_{n1} = \frac{r_{o1}}{\cos \alpha} = \frac{m z_1 \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha} = A \frac{1}{i_{12} - 1}, \quad (50.8)$$

$$r_{n2} = \frac{r_{o2}}{\cos \alpha} = \frac{m z_2 \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha} = A \frac{i_{12}}{i_{12} - 1}. \quad (50.9)$$

5°. Проверка на отсутствие подрезания зубцов колеса 1 производится по формулам (47.5) и (47.7) при нарезании долбяком, по формулам (44.3) и (44.1) при нарезании реечным инструментом. Проверка на срезание вершин при нарезании долбяком производится: а) по формулам (47.9) и (47.10) для колеса 1; б) по формуле (49.6) для колеса 2.

6°. Для определения коэффициента перекрытия нужно проделать выводы, аналогичные выводам формулы (45.3). Воспользуемся построе-

ниями рис. 102, приняв, что колесо 2 находится в зацеплении не с долбяком, а с колесом 1. Тогда $B_{II} = B_1$, $B_2^{(II)} = B_2$. $\alpha_{c2} = \alpha$ и

$$\varepsilon = \frac{B_1 B_2}{t_0} = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha) - z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha)}{2\pi}. \quad (50.10)$$

При прочих равных условиях коэффициент перекрытия во внутреннем зацеплении больше, чем во внешнем.

7°. Под интерференцией первого рода во внутреннем зацеплении понимается зацепление эвольвентного участка профиля зубца одного колеса с переходной кривой профиля зубца другого колеса. Определим условия отсутствия интерференции первого рода.

Угол давления в точке G_1 сопряжения эвольвентного и переходного участков профиля зубца колеса 1 определяется: а) по формуле (44.4) при нарезании рейкой; б) по формуле (47.5) при нарезании долбяком. Угол давления в точке G_2 профиля зубца колеса 2 определяется по формуле (49.7).

Используя построения, аналогичные изображенным на рис. 102, получим следующие выражения для углов давления в точках B_1 и B_2 ножек профилей зубцов колеса 1 и колеса 2

$$\operatorname{tg} \alpha_{B1} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{z_2}{z_1} (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha), \quad (50.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{e2} &= \arccos \left(\frac{m z_2 \cos \alpha_d}{2 r_{e2}} \right), \\ \operatorname{tg} \alpha_{B2} &= \operatorname{tg} \alpha + \frac{z_1}{z_2} (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (50.12)$$

где $\alpha_{e1} = \arccos \left(\frac{m z_1 \cos \alpha_d}{2 r_{e1}} \right)$.

Во избежание интерференции колес 1 и 2 при зацеплении их друг с другом необходимо, чтобы

$$\alpha_{B1} \geq \alpha_{G1}, \quad \alpha_{B2} \leq \alpha_{G2} = \alpha_{B2}^{(II)}. \quad (50.13)$$

8°. Проверка на отсутствие радиальной интерференции и интерференции второго рода производится по формулам, аналогичным полученным в § 49, при зацеплении колеса 2 с долбяком. В указанных формулах нужно принять $\alpha_{c2} = \alpha$ и параметры долбяка заменить параметрами колеса 1.

§ 51. Блокирующий контур

Блокирующий контур определяет область допустимых значений коэффициентов сдвига ξ_1 и ξ_2 , при которых обеспечиваются благоприятные условия зацепления колес. Такими условиями могут явиться: отсутствие подрезания, интерференции, обеспечение минимального значения коэффициента перекрытия, отсутствие заострения и т. д. Блокирующий контур рассчитывается для каждой фиксированной пары чисел зубцов z_1 и z_2 . Линии блокирующего контура представляют собой графики $\xi_2 = \xi_2(\xi_1)$, каждый из которых рассчитывается по одному показателю зацепления.

Создание блокирующих контуров явилось результатом большой и трудоемкой работы, выполненной Т. П. Болотовской, И. А. Болотов-

ским и В. Э. Смирновым [24], а также работ М. Б. Громана [46, 47], В. А. Гавриленко [33] и Я. С. Давыдова [57, 62].

Рассмотрим в качестве примера определение функции $\xi_2 = \xi_2(\xi_1)$, исходя из граничного условия $s_{e1} = 0$, где s_{e1} — толщина зубцов на окружности выступов колеса 1. Числа зубцов колес 1 и 2 заданы.

Для определения значений $\xi_2 = \xi_2(\xi_1)$ используем формулы (44.9), (46.12) и (46.14), согласно которым

$$s_{e1} = r_{e1} \left[\frac{\pi}{z_1} + \frac{4\xi_1}{z_1} \operatorname{tg} \alpha_d - 2 (\operatorname{inv} \alpha_{e1} - \operatorname{inv} \alpha_d) \right] = 0, \quad (51.1)$$

$$r_{e1} = m \left[\frac{(z_1 + z_2) \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha} - \frac{z_2}{2} + f_0 - \xi_2 \right], \quad (51.2)$$

$$\cos \alpha_{e1} = \frac{r_{o1}}{r_{e1}} = m \frac{z_1 \cos \alpha_d}{2r_{e1}}, \quad (51.3)$$

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} \alpha_d + \frac{2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha_d}{z_1 + z_2}. \quad (51.4)$$

При вычислениях целесообразно сначала задаться значением суммы $\xi_1 + \xi_2 = a_1$. На рис. 106 функция $\xi_2(\xi_1)$ при $\xi_1 + \xi_2 = \text{const}$ изображается прямой линией, проведенной под углом 45° . Далее, задаваясь каким-нибудь значением ξ_1 , находим $\xi_2 = a_1 - \xi_1$ и затем определяем: α из уравнения (51.4), r_{e1} из (51.2), α_{e1} из (51.3). Если при выбранном значении ξ_1 и найденных значениях r_{e1} , α_{e1} уравнение (51.1) удовлетворяется, вычисления на этом заканчиваются, и на прямой линии $K_1 l_1$ фиксируется точка M_1 с координатами (ξ_1, ξ_2) , при которых удовлетворяется условие, что $s_{e1} = 0$.

Задаваясь затем новым значением $a_2 = \xi_1 + \xi_2$ и повторяя указанную процедуру, находим новую точку M_2 искомого графика $M-M$. Штриховка на линии $M-M$ указывает запретную область значений ξ_1 и ξ_2 , при которых $s_{e1} \leq 0$.

Определение текущей точки графика $M-M$ требует применения метода последовательных приближений. Если оказывается, что при данной совокупности значений ξ_1 и ξ_2 уравнение (51.1) не удовлетворяется и $s_{e1} \neq 0$, для устранения возникшей невязки целесообразно воспользоваться либо методом Ньютона, либо прибегнуть к графическому интерполированию.

На рис. 107 изображен блокирующий контур, определенный как совокупность графиков функций $\xi_2(\xi_1)$, вычисленных по различным граничным условиям. Значения z_1 и z_2 считаются известными. Предполагается, что нарезание зубцов производится реечным инструментом с заданным исходным контуром. Штриховка на линиях контура указывает область недопустимых значений ξ_1 и ξ_2 .

Граничные линии контура: 1 — граница интерференции на ножке зубца колеса 2 ($z_2 > z_1$); 2 — линия, определяющая, что подрезание эвольвентного профиля колеса 1 не распространится выше точки B_1

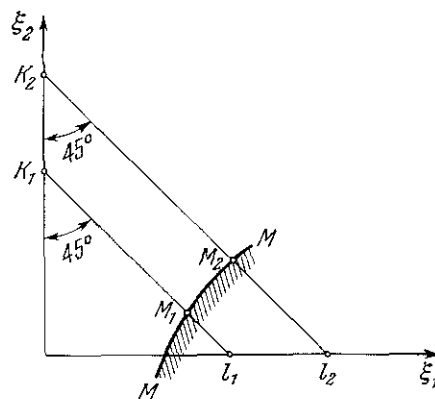


Рис. 106.

ножки зубца этого колеса; 3 — линия предельного коэффициента перекрытия $\varepsilon = 1,0$; 4 — границы интерференции на ножке зубца колеса 1;

5 — граница заострения зубца на колесе 1 ($s_{e1} = 0$); 6 — линия, определяющая, что подрезание эвольвентного профиля колеса 2 не распространится выше точки B_2 ножки зубца этого колеса.

Зона *Б* контура — зона так называемых внеполюсных передач, характеризующихся следующими особенностями: а) касание профилей происходит только по одну сторону от полюса зацепления; б) зубец одного колеса имеет только головку, другого колеса — только ножку. Зона *А* — зона полюсных передач.

Внутри контура изображены линии, определяющие другие показатели зацепления, как-то: $s_{e1} = 0,25m$; $s_{e2} = 0,25m$; α и δ — линии, определяющие равную прочность зубцов изгибу (α — при ведущем колесе z_1 ; δ — при ведущем колесе z_2); $\xi_1 \min$ и $\xi_2 \min$ — линии, определяющие границы подрезания зубцов колеса 1 и колеса 2; линии $\delta_1 = 0,0$ и $\delta_1 = 0,6$ опре-

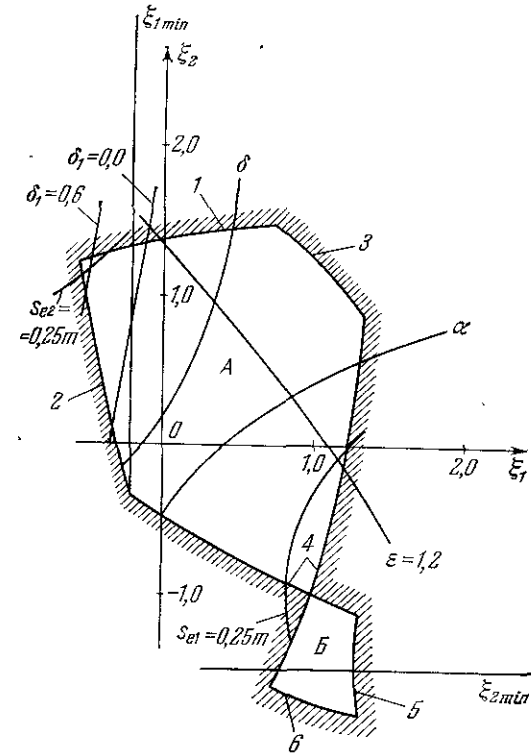


Рис. 107.

деляют, соответственно, расстояния в долях модуля по линии зацепления от полюса до границы зоны двухпарного зацепления.

§ 52. Задачи

В настоящем параграфе излагаются задачи, связанные с определением толщины зубцов на различных окружностях, определением положения ролика (парика) во впадине колеса, измерением толщины зубца по общей нормали.

1°. Известна толщина зубца по делительной окружности; требуется найти толщину зубца на окружности радиуса r_x . С задачей такого рода мы уже встречались в предыдущих параграфах.

Обратимся к рис. 108, на котором s_d — толщина зубцов на делительной окружности; ищется толщина зубцов на окружности радиуса r_x .

Из построений рисунка следует

$$\frac{s_x}{2r_x} = \frac{s_d}{2r_d} - (\operatorname{inv} \alpha_x - \operatorname{inv} \alpha_d). \quad (52.1)$$

где

$$\alpha_d = \arccos \frac{r_0}{r_d}, \quad \alpha_x = \arccos \frac{r_0}{r_x}, \quad s_x = \left[\frac{s_d}{r_d} - 2(\operatorname{inv} \alpha_x - \operatorname{inv} \alpha_d) \right] r_x. \quad (52.2)$$

Если ищется толщина зубцов на основной окружности, в формуле (52.2) нужно положить $\operatorname{inv} \alpha_x = 0$ и

$$s_0 = (s_d + m \operatorname{inv} \alpha_d) \cos \alpha_d. \quad (52.3)$$

Иногда задача ставится так: требуется найти окружность r_x , на которой пересекаются профили зуба. Для этого нужно положить в (52.2) $s_x = 0$, после чего найдем

$$\text{inv } \alpha_x = \frac{s_d}{2r_d} + \text{inv } \alpha_d. \quad (52.4)$$

Из таблицы эвольвентных функций по $\text{inv } \alpha_x$ находим α_x , а затем определяем r_x из зависимости

$$r_x - \frac{r_0}{\cos \alpha_x} = \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_x}. \quad (52.5)$$

При внутреннем зацеплении (рис. 109) формула (52.4) примет следующий вид:

$$\frac{s_x}{2r_x} = \frac{s_d}{2r_d} + \text{inv } \alpha_x - \text{inv } \alpha_d. \quad (52.6)$$

Соответственно с этим изменится знак и в формулах (52.2), (52.3) и (52.4).

2°. Известна толщина зубцов по делительной окружности, требуется найти их размер по общей нормали.

Одним из распространенных способов косвенного измерения толщины зубцов является их измерение по общей нормали, которое может быть выполнено посредством обычного штангенциркуля или предельной скобы. Замер производится по нормали, проведенной к противоположно направленным профилям. Число n впадин, заключаемых при этом между ножками штангенциркуля или скобы при $\alpha_n = 20^\circ$, определяется из таблицы IV.

Из свойств эвольвентного зацепления (рис. 110) размер $L = M_0 M_0'' = nt_0 + M_0' M_0''$, где t_0 — шаг по основной окружности, n — число охватываемых впадин (на рис. 110 $n = 1$), $M_0' M_0'' = s_0$ — толщина зуба по основной окружности.

Так как $t_0 = m \pi \cos \alpha_d$, $s_0 = (s_d + mz \text{ inv } \alpha_d) \cos \alpha_d$ (см. (52.3)), получим

$$L = n(m \pi \cos \alpha_d) + (s_d + mz \text{ inv } \alpha_d) \cos \alpha_d. \quad (52.7)$$

3°. Известна толщина зубцов s_d на делительной окружности r_d колеса; определить положение ролика заданного радиуса $r_{\text{рол}}$. Такая задача возникает в приборостроении, где толщина зубцов колес малого модуля определяется посредством роликов.

Таблица IV *)

Число n впадин, охватываемых при измерении толщины зубцов по общей нормали при $\alpha_d = 20^\circ$

Число впадин	1		2		3		4		5		6		7		8	
Число зубцов	от 12	до 18	от 19	до 27	от 28	до 36	от 37	до 45	от 46	до 54	от 55	до 63	от 64	до 72	от 73	до 81

*) Применима для некорригированных колес.

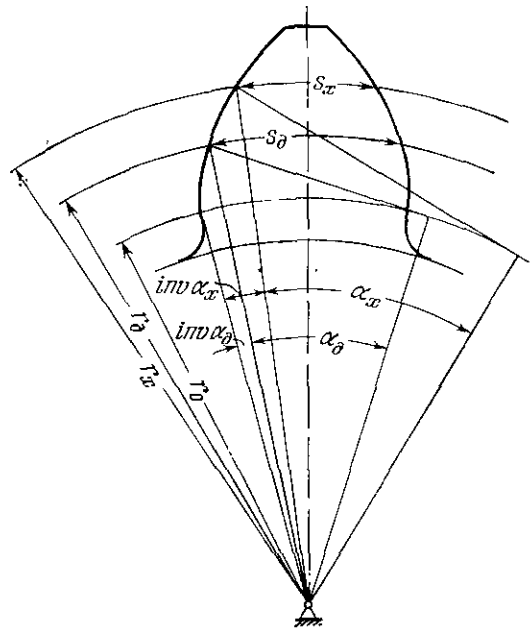


Рис. 108.

В точках касания ролика с эвольвентным профилем у них имеется общая нормаль, касательная к основной окружности и проходящая через центр O ролика

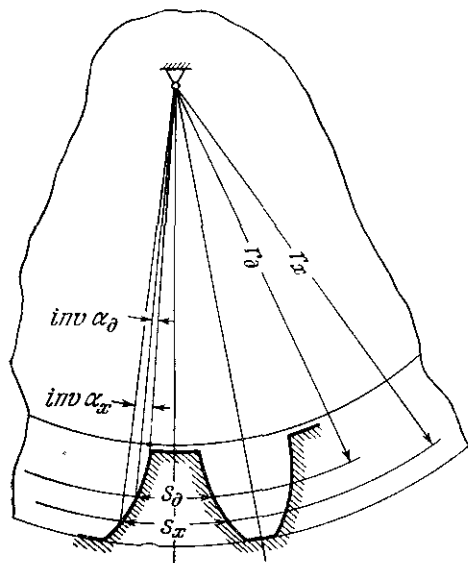


Рис. 109.

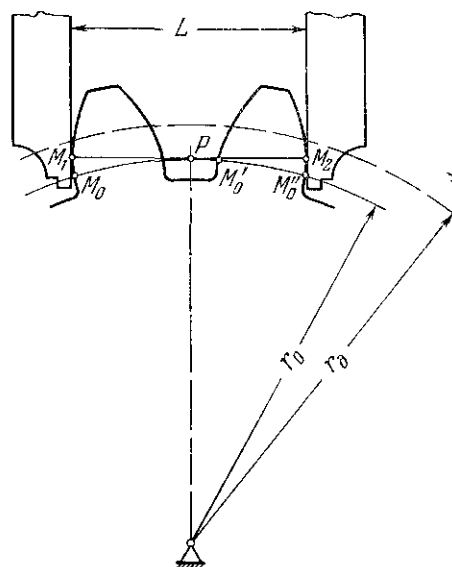


Рис. 110.

(рис. 111). Проведем через O эквидистантный профиль, отстоящий от правого профиля на величину $ON = r_{\text{рол}}$, очевидно, что $ON = \widehat{CL} = r_{\text{рол}}$. Угол, образуемый между осями симметрии зубца и впадины, равен π/z . На основании построений рис. 111 имеем

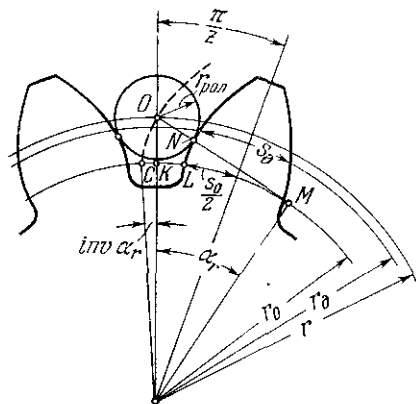


Рис. 111.

$$\text{inv } \alpha_r = \frac{r_{\text{рол}} + \frac{s_0}{2}}{r_0} - \frac{\pi}{z},$$

где s_0 — толщина зубцов по основной окружности, α_r — угол давления эвольвентного профиля OC в точке O .

На основании (52.3) после преобразований получим

$$\text{inv } \alpha_r = \frac{s_d}{mz} + \frac{2r_{\text{рол}}}{mz \cos \alpha_d} + \text{inv } \alpha_d - \frac{\pi}{z}. \quad (52.8)$$

Определив из таблицы эвольвентных функций по $\text{inv } \alpha_r$ значение α_r , находим радиус r , определяющий положение ролика, из зависимости

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha_r} = \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_r}. \quad (52.9)$$

Связь между допуском на толщину зубцов Δs_d и изменением положения ролика Δr можно найти, продифференцировав зависимости (52.8) и (52.9), в результате чего получим

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha_r} - 1 \right) d\alpha_r = \frac{ds_d}{mz}, \quad dr = \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_d \sin \alpha_r}{\cos^2 \alpha_r} d\alpha_r.$$

Следовательно,

$$dr = \frac{\cos \alpha_d}{\sin \alpha_r} \frac{ds_d}{2}. \quad (52.10)$$

Основные обозначения, принятые в главе VI

α_d — угол профиля исходного контура (сечения исходной рейки плоскостью, перпендикулярной направлению зубцов);
 α_n — угол профиля инструментальной рейки (в общем случае $\alpha_n \neq \alpha_d$);
 α — угол зацепления в передаче (у скорректированных колес при $\xi_\Sigma \neq 0$ $\alpha \neq \alpha_d$);
 α_e — угол зацепления в станочном зацеплении колеса внешнего зацепления с долбяком;
 α_{e2} — угол зацепления в станочном зацеплении долбяка с колесом 2 внутреннего зацепления;
 α_B — угол давления в точке B ножки профиля, вступающей в касание с вершиной профиля зубца другого колеса;
 α_G — угол давления в точке G сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой;
 α_{Bn} — угол давления в точке B_n ножки зубца долбяка (рис. 102), вступающей в зацепление с вершиной зубца нарезаемого колеса;
 α_{Gn} — угол давления для долбяка в точке сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой;
 $\alpha_{B2}^{(n)}$ — угол давления в точке B_2 ножки зубца колеса 2 внутреннего зацепления, вступающей в касание с вершиной профиля зубца долбяка (рис. 102);
 $\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv} \alpha$ — полярный угол радиуса-вектора эвольвентного профиля (рис. 86);
 ξ — коэффициент смещения исходного контура;
 $\xi_\Sigma = \xi_1 + \xi_2$ — суммарный коэффициент смещения;
 ξ_n — коэффициент смещения на передней поверхности долбяка;
 A — межцентровое расстояние;
 B — точка профиля ножки, вступающая в зацепление с вершиной профиля головки зубца сопряженного колеса;
 B_n — точка профиля ножки долбяка, вступающая в зацепление с вершиной профиля зубца нарезаемого колеса (рис. 102);
 $B_2^{(n)}$ — точка профиля ножки зубца колеса 2, вступающая в зацепление с вершиной профиля зубца долбяка (рис. 102);
 c_0 — коэффициент высоты скругленной части головки зубца исходного контура (рис. 90);
 f_0 — коэффициент высоты головки зубца исходного контура (рис. 90);
 G — точка сопряжения эвольвентного участка профиля с переходной кривой;
 G_n — точка сопряжения на долбяке эвольвентного участка профиля с переходной кривой;
 m — модуль зубцов;
 r_0 — радиус основной (развертываемой) окружности;
 r_d — радиус делительной окружности колеса (центroids колеса при зацеплении с исходной рейкой с углом профиля α_d);
 r_n — радиус начальной окружности колеса (центroids колеса в передаче, используемой для передачи вращательного движения);
 r_e и r_i — радиусы окружности выступов и впадин колеса;
 s_d и s_n — толщина зубца по делительной и начальной окружностям;
 t_0 , t_d и t_n — шаг между соседними одноименными профилями, измеренный соответственно по дуге основной, делительной и начальной окружностей;
 $t_n = t_0$ — шаг между соседними одноименными профилями, измеренный по общей нормали к профилям;
 w_d , w_n — дуговая ширина впадины по делительной и начальной окружностям.

Глава V

Циклоидальное зацепление

§ 53. Общие сведения. Циклические кривые

1°. Развитие зубчатых зацеплений вначале было связано с запросами часовой промышленности. В колесах часовых механизмов профилирование зубцов выполнялось по циклоидальным кривым. Позднее циклоидальное зацепление стало применяться и в машиностроении. Победное шестивис эвольвентного зацепления, особенно усилившееся после изобретения метода обкатки для нарезания зубцов, привело почти к полному вытеснению циклоидального зацепления из машин и приборов, за исключением лишь часовых механизмов. Несмотря на предсказания многих авторитетов, циклоидальное зацепление не вытеснено из часовой промышленности и в настоящее время. Некоторые, даже весьма видные специалисты склонны были объяснять это «консервативностью средних умов, привычкой к традициям» и т. п. [13]. Вряд ли такие объяснения можно признать убедительными, особенно по отношению к СССР, где часовая промышленность создавалась заново.

Специалисты часового дела правильно подчеркивают выгоды применения циклоидального зацепления в часовых механизмах по сравнению с эвольвентным: а) меньший износ циклоидальных профилей при недостаточности смазки; б) больший коэффициент перекрытия циклоидальных колес, дающий возможность применить шестерни («трибы») с малым числом зубцов; погрешности изготовления (увеличение межцентрового расстояния, уменьшение окружностей выступов), приводящие к уменьшению коэффициента перекрытия, не столь опасны для циклоидального зацепления, как для эвольвентного; в) лучшие условия передачи сил при циклоидальном зацеплении в ускорительных передачах, которые применяются в часовых механизмах. В последнее время появились станки для нарезания по методу обкатки мелко модульных циклоидальных колес, что резко повысило производительность изготовления. Однако такие решающие преимущества эвольвентного зацепления, как простота формы зуборезного инструмента, сохранение постоянного передаточного отношения при изменении межцентрового расстояния, позволили этому виду зацепления завоевать почти все отрасли машиноприборостроения, отступив лишь перед часовой промышленностью.

Все же и в машиностроении циклоидальное зацепление полностью не было вытеснено: такое зацепление применяется здесь до сих пор в виде цевочного и колес Рута. Последние годы характеризуются еще одной победой циклоидального зацепления, разновидности которого прочно вошли в конструкции винтовых насосов и винтовых компрессоров. Необходимые сведения по этому вопросу читатель найдет в работах [85, 232].

2°. Циклические кривые образуются как траектории точек, связанных с окружностью, перекатываемой без скольжения по другой окружности. Таким способом могут быть образованы эпициклоиды и гипоциклоиды как обычного вида, так и укороченные и удлиненные.

Одна и та же циклическая кривая может быть образована двумя способами. На рис. 112 циклическая кривая описывается точкой M , жестко связанной с окружностью радиуса r , перекатываемой по неподвижной окружности радиуса r_1 . Если точка M находится на самой окружности радиуса r , траектория этой точки представляет обычную эпициклоиду; при расположении M вне или внутри окружности радиуса r траектория этой точки представит соответственно удлиненную или укороченную эпициклоиду, называемую также *эпитрохой*.

Мгновенным центром вращения в относительном движении является точка P . Скорость движения точки M направлена по касательной к ее траектории; вместе с тем эта скорость перпендикулярна радиусу мгновенного вращения PM . Из этого следует, что PM — нормаль к траектории точки M .

Кривую, описываемую точкой M , можно получить и другим путем, при перекатывании окружности радиуса r' по окружности радиуса r_1 ; точка M должна быть при этом связана с окружностью радиуса r' . Мгновенным центром вращения в относительном движении явится точка P' , которая находится на нормали PM к траектории. Точка P' найдена как точка пересечения продолженного направления нормали PM с линией $O'P'$, проведенной параллельно OM . Центр O' окружности радиуса r' найдем в результате построения параллелограмма $OMO'O_1$.

Радиусы окружностей r'_1 и r' связаны постоянным соотношением с радиусами окружностей r_1 и r . Из подобия треугольников POM и PO_1P' имеем

$$r'_1 = a \frac{r_1}{r}, \quad (53.1)$$

где $a = OM$.

Аналогичным образом находим, что

$$r' = a \frac{r_1 + r}{r}. \quad (53.2)$$

Мгновенные радиусы вращения точки M вокруг мгновенных центров P и P' также связаны постоянным соотношением

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{r}{r_1 + r}. \quad (53.3)$$

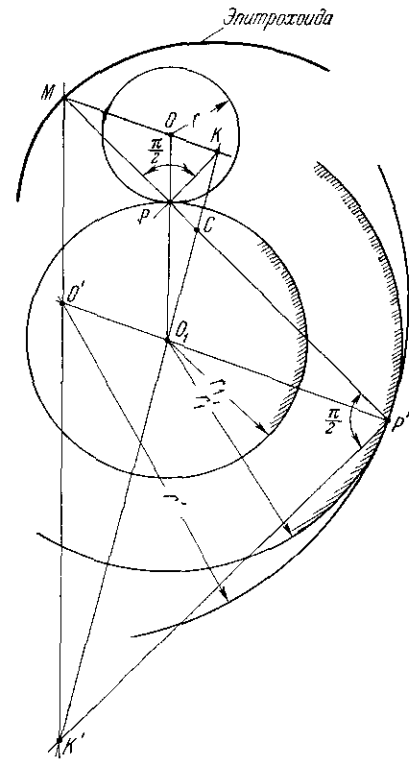


Рис. 112.

Для того чтобы при вращении вокруг P и P' точка M имела одну и ту же скорость, необходимо, чтобы скорости перекачивания окружностей с радиусами r и r' были связаны соотношением

$$\frac{\omega_P}{\omega_{P'}} = \frac{MP'}{MP} = \frac{r_1 + r}{r}. \quad (53.4)$$

Центр кривизны C циклической кривой, описываемой точкой M , может быть найден построением Бобиле (см. § 16), в основу которого, как уже упоминалось, положена теорема: *прямые, соединяющие центры кривизны центроид и соответственные центры кривизны сопряженных профилей, должны пересекаться в одной точке с линией, проведенной через точку касания центроид перпендикулярно профильной нормали.*

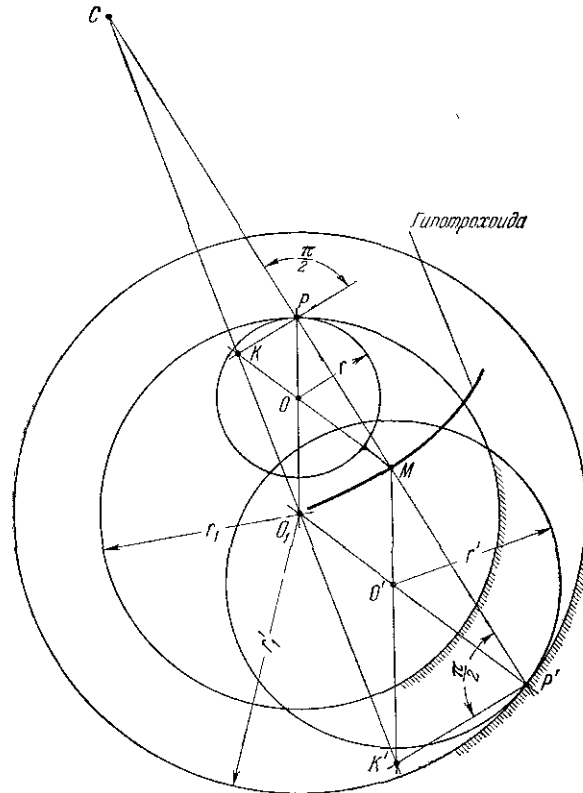


Рис. 113.

В нашем случае взаимодействующими профилями являются: а) точка M , связанная с окружностью радиуса r ; б) циклическая кривая, описываемая точкой M . Центром кривизны точечного профиля является точка M ; линия MO соединяет центр кривизны этого профиля с центром кривизны O центроида — окружности радиуса r . Линия PK проведена через полюс P перпендикулярно профильной нормали. Продолженные направления MO и PK пересекаются в точке K . Искомый центр кривизны C циклической кривой лежит на профильной нормали MS и находится как точка пересечения MS с линией O_1K .

Если исходить из другого способа построения циклической кривой, при

котором окружность радиуса r' перекачивается по окружности радиуса r_1 , центр кривизны C циклической кривой будет найден в результате аналогичного построения. При этом $P'K'$ — линия, перпендикулярная профильной нормали, проведенная через мгновенный центр вращения P' , K' — точка пересечения линий O_1C и $O'M$, соединяющих центры кривизны C и M профилей с центрами O_1 и O' кривизны новых центроид.

Циклические кривые в виде удлинённых или укороченных гипотрохонд (гипотрохонд) также могут быть образованы двумя способами. На рис. 113 показано построение удлинённой гипотрохонды (гипотрохонды) как траектории точки M , жестко связанной с окружностью радиуса r ; эта окружность перекачивается по окружности радиуса r_1 ,

находясь с ней во внутреннем касании. Эту же гипоциклоиду можно получить при перекачивании окружности радиуса r' по окружности радиуса r_1 ; точка M жестко связана с окружностью радиуса r' . Положение центра O' окружности радиуса r' находится в результате построения параллелограмма $OO_1O'M$; мгновенный центр вращения P' находится как точка пересечения продолженного направления $P'M$ нормали к гипоциклоиде с линией O_1O' . Центр кривизны C гипоциклоиды определяется построением Бобилье.

На основании построений, показанных на рис. 113, получим

$$r'_1 = a \frac{r_1}{r}, \quad (53.5)$$

$$r' = a \frac{r_1 - r}{r}, \quad (53.6)$$

где $a = OM$.

При образовании эпициклоид и гипоциклоид обычного вида точка M принадлежит окружности радиуса r и $a = r$. Формулы (53.4), (53.2), (53.5) и (53.6) примут при этом такой вид:

$$r'_1 = r_1, \quad (53.7)$$

$$r' = r_1 \pm r. \quad (53.8)$$

В формуле (53.8) знак минус относится к случаю образования гипоциклоиды.

На рис. 114, а изображена эпициклоида, которая может быть воспроизведена: а) при качении окружности радиуса r по окружности радиуса r_1 ; б) при качении по той же окружности радиуса r_1 окружности радиуса r' , находящейся с ней во внутреннем касании. Гипоциклоида, изображенная на рис. 114, б, воспроизводится при перекачивании по окружности радиуса r_1 окружности радиуса r , либо окружности радиуса r' ; в обоих случаях каждая пара окружностей находится во внутреннем касании.

Для вывода уравнений *эпитрохоиды* воспользуемся построениями, показанными на рис. 115.

Радиус-вектор $\overline{O_1M}$ эпитрохоиды выражается уравнением

$$\overline{O_1M} = \overline{O_1O'} + \overline{O'M}.$$

Уравнения эпитрохоиды в прямоугольных координатах:

$$x = (r_1 + r) \sin \varphi - a \sin (\varphi + \psi), \quad y = (r_1 + r) \cos \varphi - a \cos (\varphi + \psi),$$

где $a = O'M$.

Так как окружность радиуса r перекачивается по окружности радиуса r_1 без скольжения, то $\psi r = \varphi r_1$. С учетом этого

$$\left. \begin{aligned} x &= (r_1 + r) \sin \varphi - a \sin \left[\varphi \left(1 + \frac{r_1}{r} \right) \right], \\ y &= (r_1 + r) \cos \varphi - a \cos \left[\varphi \left(1 + \frac{r_1}{r} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (53.9)$$

Для обычной эпициклоиды $a = r$.

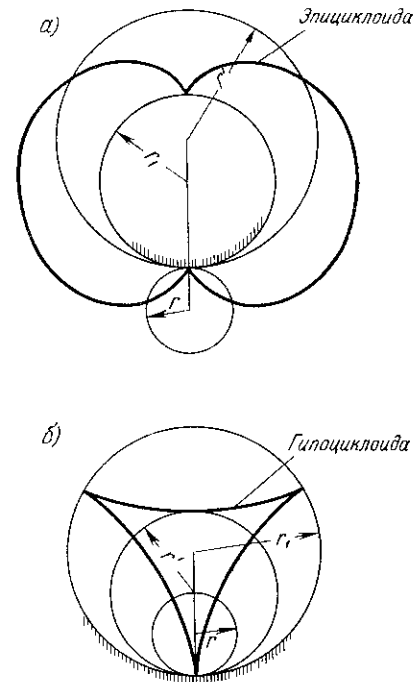


Рис. 114.

Найдем радиус кривизны ρ эпитрохоиды, который мы представим как сумму двух отрезков: PM и PC (рис. 116), где C — центр кривизны

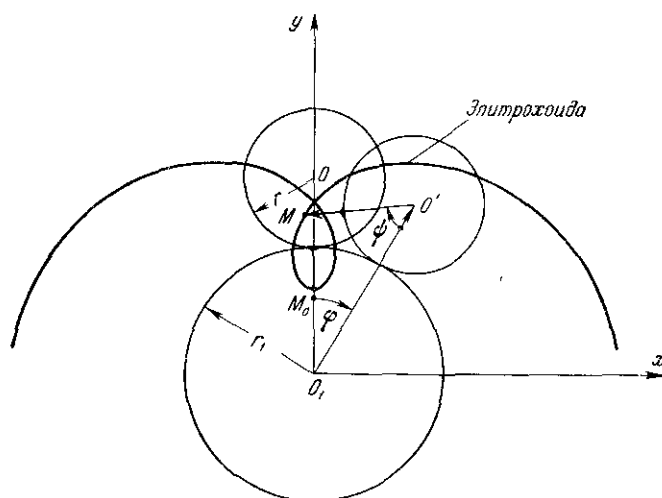


Рис. 115.

эпитрохоиды в точке M . Нормаль PM удлинненной эпициклоиды составляет с продолженным направлением радиуса-вектора O_1P угол λ , отсчитываемый в том же направлении, что и параметр φ (см. § 15).

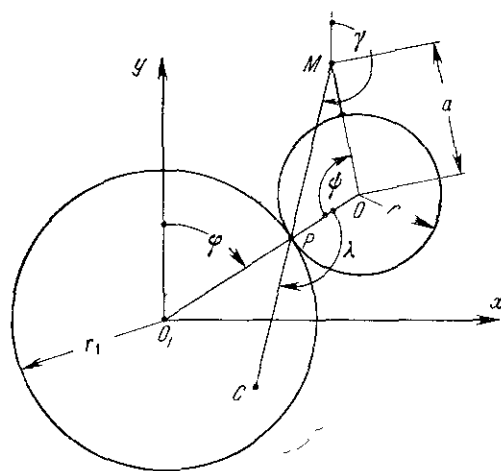


Рис. 116.

Отрезок PC мы обозначили в § 15 через l и для его определения пользовались уравнением 15.6. С учетом новых обозначений и так как между радиусом-вектором O_1P центроиды и касательной к ней образуется угол $\mu = \pi/2$,

$$l = -r_1 \frac{\cos \lambda}{1 + \frac{d\lambda}{d\varphi}}. \quad (53.10)$$

Из треугольника OPM следует

$$\frac{a}{r} = \frac{\sin \lambda}{\sin (\lambda - \psi)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \frac{r}{a}}. \quad (53.11)$$

Дифференцируя уравнение (53.11), получим

$$\frac{d\lambda}{d\psi} = \frac{1 - \frac{r}{a} \cos \psi}{\left(\cos \psi - \frac{r}{a}\right)^2} \cos^2 \lambda.$$

Так как $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{r_1}{r}$, то

$$\frac{d\lambda}{d\psi} = \frac{r_1}{r} \frac{1 - \frac{r}{a} \cos \psi}{\left(\cos \psi - \frac{r}{a}\right)^2} \cos^2 \lambda. \quad (53.12)$$

После преобразований получим

$$\rho = PM + l = a \frac{\sin \psi}{\sin \lambda} - r_1 \frac{\cos \lambda}{1 + \frac{r_1}{r} \cos^2 \lambda \frac{1 - \frac{r}{a} \cos \psi}{\left(\cos \psi - \frac{r}{a}\right)^2}}, \quad (53.13)$$

и, е

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \psi}{\cos \psi - \frac{r}{a}} \right).$$

В случае обычной эпициклоиды $a = r$. Тогда

$$\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}$$

и

$$\lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}. \quad (53.14)$$

Уравнение (53.13) примет при этом следующую форму:

$$\rho = \frac{4k(1+k)}{1+2k} r_1 \sin \frac{\psi}{2}, \quad (53.15)$$

где $k = r/r_1$.

Найдем выражение элементарной дуги эпитрохоиды. Как известно из дифференциальной геометрии, элементарная дуга ds кривой равна $\rho d\gamma$, где $d\gamma$ — угол смежности — угол между двумя бесконечно близкими касательными (или нормальными), ρ — радиус кривизны. Угол γ , образуемый нормалью с осью y , определяется уравнением (рис. 116)

$$\gamma = \varphi + \lambda.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\gamma &= d\varphi + d\lambda = k d\psi + d\lambda = \\ &= \left[k + \frac{1 - \frac{r}{a} \cos \psi}{\left(\cos \psi - \frac{r}{a}\right)^2} \cos^2 \lambda \right] d\psi. \end{aligned} \quad (53.16)$$

В случае обычной эпициклоиды

$$r = a, \quad \lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2},$$

$$d\gamma = \left(\frac{1+2k}{2} \right) d\psi \quad (53.17)$$

и

$$ds = \rho d\gamma = 2k(1+k) r_1 \sin \frac{\psi}{2} d\psi. \quad (53.18)$$

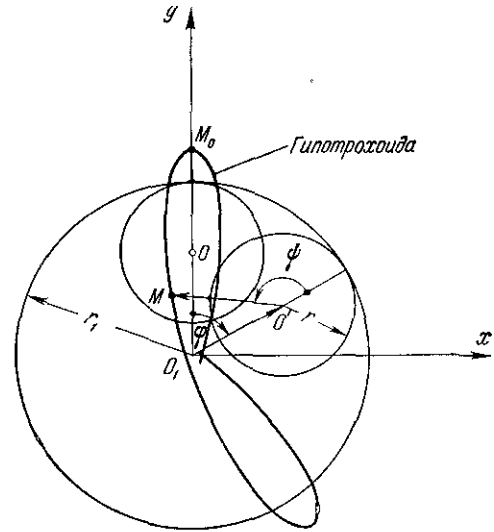


Рис. 117.

Перейдем к выводу уравнений гипотрохоиды. Радиус-вектор $\overline{O_1M}$ гипотрохоиды (рис. 117) определяется уравнением

$$\overline{O_1M} = \overline{O_1O'} + \overline{O'M}.$$

Уравнения гипотрохида в прямоугольных координатах:

$$x = (r_1 - r) \sin \varphi - a \sin (\psi - \varphi),$$

$$y = (r_1 - r) \cos \varphi + a \cos (\psi - \varphi),$$

где $a = O'M$.

Учитывая, что $\psi = \frac{r_1}{r} \varphi$, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= (r_1 - r) \sin \varphi - a \sin \left[\varphi \left(\frac{r_1}{r} - 1 \right) \right], \\ y &= (r_1 - r) \cos \varphi + a \cos \left[\varphi \left(\frac{r_1}{r} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (53.19)$$

Для обычной гипоциклоиды $a = r$.

В частном случае, когда радиусы перекатываемых окружностей находятся в соотношении $r_1 = 2r$, обычная гипоциклоида вырождается в прямую линию, определяемую уравнением

$$x = 0, \quad y = r_1 \cos \varphi. \quad (53.20)$$

Найдем радиус кривизны ρ гипотрохида. Предположим, что центр кривизны C профиля находится между P и M (рис. 118). Тогда

$$\rho = PM - PC = PM - l.$$

Для определения l нужно воспользоваться уравнением (15.6). Отрицательное значение l укажет на то, что центр кривизны C находится

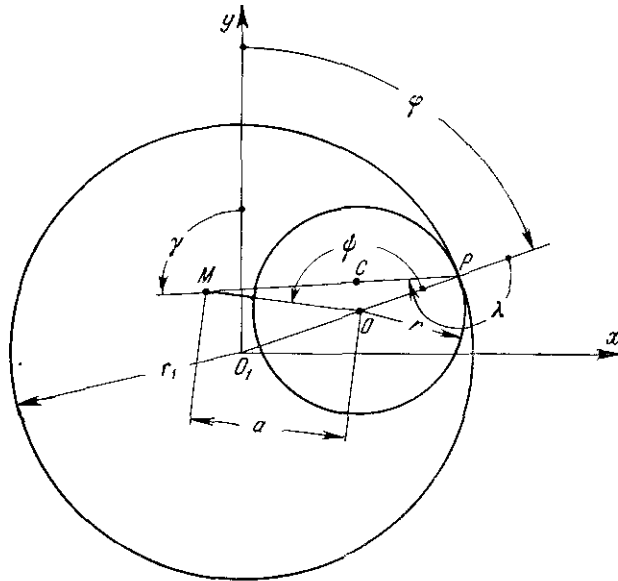


Рис. 118.

на продолженном направлении PM . Из треугольника OPM следует

$$\frac{a}{r} = \frac{\sin (\lambda - \pi)}{\sin [2\pi - (\lambda + \psi)]} = \frac{\sin \lambda}{\sin (\lambda + \psi)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \psi}{\frac{r}{a} - \cos \psi}. \quad (53.21)$$

После дифференцирования найдем

$$\frac{d\lambda}{d\psi} = \frac{\left(\frac{r}{a} \cos \psi - 1\right)}{\left(\frac{r}{a} - \cos \psi\right)^2} \cos^2 \lambda, \quad \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{r_1}{r} \frac{\left(\frac{r}{a} \cos \psi - 1\right)}{\left(\frac{r}{a} - \cos \psi\right)^2} \cos^2 \lambda. \quad (53.22)$$

Используя выражение (53.10), получим

$$l = -r_1 \frac{\cos \lambda}{1 + \frac{r_1}{r} \frac{\frac{r}{a} \cos \psi - 1}{\left(\frac{r}{a} - \cos \psi\right)^2} \cos^2 \lambda}.$$

Из треугольника OPM следует

$$PM = -a \frac{\sin \psi}{\sin \lambda}.$$

Радиус кривизны определится уравнением

$$\rho = -a \frac{\sin \psi}{\sin \lambda} + r_1 \frac{\cos \lambda}{1 + \frac{r_1}{r} \frac{\frac{r}{a} \cos \psi - 1}{\left(\frac{r}{a} - \cos \psi\right)^2} \cos^2 \lambda}, \quad (53.23)$$

где

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \psi}{\frac{r}{a} - \cos \psi} \right).$$

В случае обычной гипоциклоиды $a = r$. Тогда

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \psi}{1 - \cos \psi} = \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}, \quad \lambda = \frac{3\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

При этом

$$\rho = \frac{4k(1-k)}{1-2k} r_1 \sin \frac{\psi}{2}, \quad (53.24)$$

где

$$k = \frac{r}{r_1}.$$

Найдем выражение элементарной дуги гипотроихиды. Угол, образуемый нормалью с осью y , определяется уравнением (рис. 118)

$$\gamma = 2\pi - (\varphi + \lambda).$$

Такое направление отсчета γ определяется тем, что при указанном на рисунке направлении отсчета φ точка M перемещается по дуге гипотроихиды против часовой стрелки.

Угол смежности

$$d\gamma = -(d\varphi + d\lambda) = -(k d\psi + d\lambda) = -\left[k + \frac{\frac{r}{a} \cos \psi - 1}{\left(\frac{r}{a} - \cos \psi\right)^2} \cos^2 \lambda \right] d\psi.$$

Элементарная дуга

$$ds = \rho d\gamma.$$

В случае обычной гипоциклоиды $r = a$, $\lambda = \frac{3\pi}{2} - \frac{\psi}{2}$ и

$$d\gamma = \frac{1-2k}{2} d\psi,$$

$$ds = \rho d\gamma = 2k(1-k)r_1 \sin \frac{\psi}{2} d\psi. \quad (53.25)$$

§ 54. Теорема Камуса

Теоремой Камуса формулируются условия, при которых циклические кривые являются взаимоогibaемыми кривыми: при перекатывании по центроидам 1 и 2 некоторой вспомогательной центроиды 3 точка M , связанная с центроидой 3, воспроизведет в системах S_1 и S_2 две кривые $\alpha-\alpha$ и $\beta-\beta$, которые являются взаимоогibaемыми кривыми в относительном движении S_1 и S_2 .

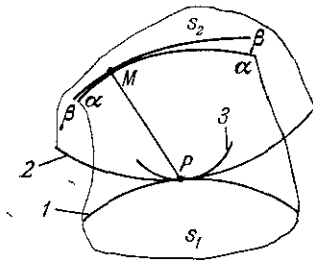


Рис. 119.

Пусть в системах S_1 и S_2 заданы абсолютные движения зубчатых колес, на основании чего найдены центроиды 1 и 2 (рис. 119). Относительное движение колес сводится к перекатыванию без скольжения центроид 1 и 2. Введем теперь в рассмотрение вспомогательную центроиду 3, которую будем перекатывать без скольжения сначала по центроиде 1, а затем по центроиде 2. Точка M , связанная с вспомога-

тельной центроидой, опишет при этом в системах S_1 и S_2 соответственно кривые $\alpha-\alpha$ и $\beta-\beta$. При перекатывании центроида 3 находится с центроидой 1 во внешнем, а с центроидой 2 — во внутреннем касании.

Пусть в некотором положении колес точка P — мгновенный центр вращения в относительном движении центроид 1 и 2. Вспомогательную центроиду 3 поставим в такое положение, чтобы она одновременно касалась центроид 1 и 2 в точке P . Очевидно, что P — мгновенный центр вращения в относительном движении не только центроид 1 и 2, но и центроид 1 и 3, 2 и 3. Кривые $\alpha-\alpha$ и $\beta-\beta$, образованные как траектории точки M , должны касаться друг друга в такой точке, чтобы общая нормаль к этим кривым проходила через мгновенный центр вращения P_{3-1} и P_{3-2} (индексы 1, 2, 3 отнесены к соответствующим центроидам). Напомним, как уже указывалось в предыдущем параграфе, что нормаль к циклической кривой должна проходить через мгновенный центр вращения в относительном движении двух центроид, при перекатывании которых образуется циклическая кривая. Так как P_{3-1} совпадает не только с P_{3-2} , но и с P_{1-2} , нормаль к кривым $\alpha-\alpha$ и $\beta-\beta$ проходит через мгновенный центр вращения колес в относительном движении, называемый также полюсом зацепления (см. § 7). Нужно подчеркнуть, что выбор точки P касания центроид не был у нас связан с какими-нибудь ограничениями и наши рассуждения справедливы для всех текущих значений P .

Итак, посредством профилей зубцов, очерченных по кривым $\alpha-\alpha$ и $\beta-\beta$, можно осуществить по заданному закону передачу движения между системами S_1 и S_2 , так как нормаль к кривым $\alpha-\alpha$ и $\beta-\beta$ в точке их касания всегда будет проходить через полюс зацепления. В § 8 было доказано, что при таком условии соблюдается основная теорема зацепления (теорема Виллиса) и профили зубцов являются сопряженными.

Все изложенное здесь является доказательством теоремы Камуса, основное содержание которой заключается в том, что в качестве сопряженных профилей зубцов можно выбирать траектории одной и той же точки вспомогательной центроиды, перекатываемой по центроидам колес.

§ 55. Циклоидальное зацепление обычного вида

Теорема Камуса справедлива при передаче движений не только с постоянным, но и с переменным передаточным отношением; однако циклические кривые применяются в качестве сопряженных профилей зубцов почти исключительно в случае постоянного передаточного отношения.

На рис. 120 изображены центроиды колес с радиусами r_1 и r_2 . При качении вспомогательной окружности 3 радиуса r по окружности r_1 воспроизводится эпициклоида $P\alpha$, по которой очерчен профиль головки зубца колеса 1; при качении же окружности 3 по окружности 2 воспроизводится гипоциклоида $P\beta$, по которой очерчена ножка зубца колеса 2. Для образования ножки зубца колеса 1 и головки зубца колеса 2 использованы соответственно гипоциклоида $P\beta'$ и эпициклоида $P\alpha'$; эти кривые воспроизводятся при перекатывании вспомогательной окружности 3' радиуса r' соответственно по окружности 1 (внутреннее касание) и окружности 2 (внешнее касание).

Профили зубцов колес, образованные описанным способом, будут согласно теореме Камуса сопряженными профилями.

В точке P пересечения профиля зубца с центроидой радиус кривизны профиля $\rho = 0$, и эта точка особая. В этом можно удостовериться с помощью формул (53.15) и (53.24), если учесть, что для точки P $\psi = 0$. Нормаль к профилю в точке P перпендикулярна радиусу-вектору центроиды, так как при $\psi = 0$ $\lambda = \pi/2$. Точка P — граничная точка ветвей KP и PL линии зацепления LPK . Согласно теоремам, доказанным в §§ 17 и 19, нормаль к линии зацепления в точке P совпадает с касательной к профилям и проходит через центры вращения колес.

В часовой промышленности нашло применение циклоидальное зацепление с упрощенными очертаниями профилей зубцов [243]. При этом радиусы вспомогательных окружностей выбираются из следующего условия:

$$r = \frac{r_2}{2}, \quad r' = \frac{r_1}{2}.$$

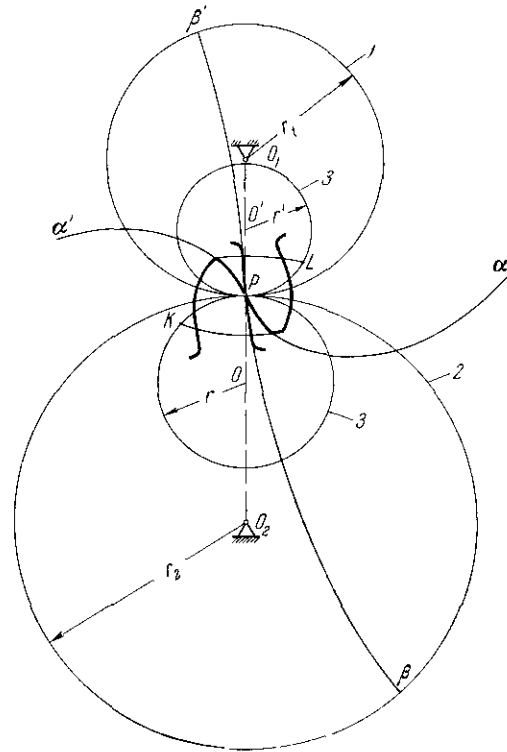


Рис. 120.

При указанных соотношениях гипоциклоиды, образуемые перекачиванием вспомогательных окружностей 3 и 3' соответственно по окружностям 2 и 1, вырождаются в прямые линии (см. уравнение (53.20)). Поэтому ножки зубцов циклоидальных колес очерчиваются по прямым линиям.

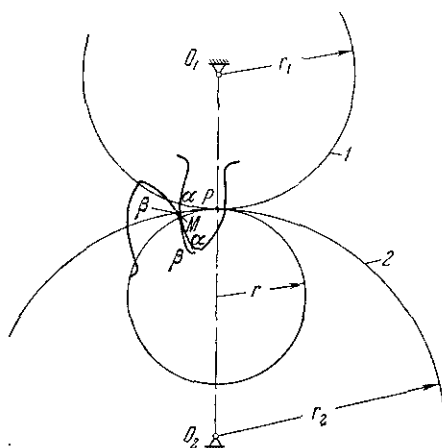


Рис. 121.

Соотношения между элементами зубцов циклоидальных колес в часовой промышленности нормализованы в целях уменьшения комплекта зуборезного инструмента.

Рассмотрим основные свойства циклоидального зацепления.

Линия зацепления циклоидальных профилей состоит из дуг вспомогательных окружностей. Для доказательства обратимся к построениям рис. 121.

Пусть профиль $\alpha-\alpha$ зубца колеса 1 вступает в зацепление с профилем $\beta-\beta$ зубца колеса 2 в точке M . Нормалью к эпициклоиде $\alpha-\alpha$ и гипоциклоиде $\beta-\beta$ может явиться

такая хорда вспомогательной центроиды радиуса r , которая соединяет текущую точку этой центроиды с полюсом зацепления P .

Следовательно, точка M профилей явится точкой касания лишь в том положении колес, когда M окажется на вспомогательной центроиде.

Рабочий участок линии зацепления левых профилей зубцов колеса 1 и правых профилей зубцов колеса 2 состоит из дуг KP и PL (рис. 120). Точки K и L найдены соответственно как точки пересечения окружностей выступов колес 1 и 2 со вспомогательными центроидами 3 и 3'.

Обозначим

$$l = \widehat{KP} + \widehat{PL}.$$

Дуги $\widehat{KP}$ и $\widehat{PL}$ равны соответственно дугам, проходимым точкой касания профилей по центроидам колес.

Коэффициент перекрытия или одновременности зацепления находится так:

$$\varepsilon = \frac{l}{t}, \quad (55.1)$$

где t — шаг между профилями по центроиде 1 (или 2).

Как уже указывалось выше, в циклоидальном зацеплении в отличие от эвольвентного должно строго сохраняться номинальное значение межцентрового расстояния. Увеличение межцентрового расстояния в циклоидальном зацеплении приведет к тому, что на известных участках профилей эпициклоида будет сопрягаться не с гипоциклоидой, а с эпициклоидой; аналогично при уменьшении межцентрового расстояния в зацепление друг с другом вступят гипоциклоидные участки профилей обоих колес.

Докажем, что в ускорительной передаче с циклоидальным зацеплением угол давления α_{12} меньше, чем в передаче с эвольвентным зацеплением. Угол давления α_{12} образуется нормалью к профилям в точке их касания со скоростью ведомой точки. Наиболее неблагоприятные условия передачи

сил возникают в обеих передачах при касании профилей в точке K — крайней точке рабочего участка линии зацепления (рис. 122). Нормалью к профилям является KP ; через $R_n^{(12)}$ обозначено нормальное давление, передающееся от колеса 1 к колесу 2 и направленное по KP . Полное давление $R^{(12)}$ отклоняется от нормального давления на угол трения $\rho = \arctg f$, где f — коэффициент трения на зубцах. Величина $R^{(12)}$ определяется из уравнения

$$R^{(12)} = R_n^{(12)} + R_t^{(12)} = R_n^{(12)} + F^{(2)}, \quad (55.2)$$

где $F^{(2)}$ — сила трения, приложенная к зубцу колеса 2.

Обозначим через α_k угол, образуемый нормалью к профилям в точке K с линией, перпендикулярной линии межцентрового расстояния O_1O_2 .

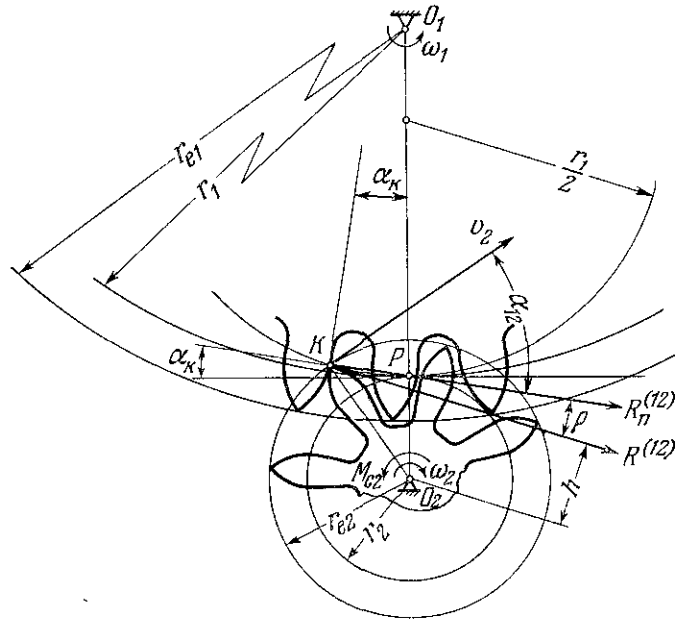


Рис. 122.

При прочих равных условиях уменьшение угла α_k будет благоприятствовать условиям передачи сил, так как при этом возрастет плечо h усилия $R^{(12)}$, уменьшится само усилие $R^{(12)}$.

В треугольнике O_1KP хорды O_1K и KP , опирающиеся на диаметр O_1P окружности радиуса $r_1/2$, взаимно перпендикулярны. Рассмотрев треугольники O_2KP и KPO_1 , получим

$$\sin \alpha_k = \sqrt{\frac{r_{e2}^2 - r_2^2}{r_1(r_1 + 2r_2)}}. \quad (55.3)$$

Для передачи $z_1 = 35$, $z_2 = 7$, $m = 0,13$ мм, $r_1 = 2,275$ мм, $r_2 = 0,455$ мм, $r_{e2} = 0,615$ мм, $\alpha_k \approx 8^\circ 50'$. Для эвольвентной передачи $\alpha_k = 20^\circ$.

В последние годы все шире применяется метод обкатки для нарезания зубчатых колес циклоидального зацепления. При проектировании червячных фрез необходимо знать исходный контур (профиль зубцов

инструментальной рейки), который при малом угле подъема фрезы можно рассматривать как сечение зубцов инструмента плоскостью, перпендикулярной направлению средней винтовой линии.

Докажем, что профиль зубцов исходного контура состоит из двух дуг циклоид.

На рис. 123, а изображен зубец колеса с центроидой радиуса r_1 . Профиль головки зуба очерчен по эциклоиде Pa , представляющей траекторию точки P вспомогательной окружности радиуса r , перекатываемой по окружности радиуса r_1 . Профиль ножки зуба очерчен по гипоциклоиде $P\beta$, представляющей траекторию точки P другой вспомогательной окружности радиуса r' , находящейся при перекатывании во внутреннем касании с окружностью радиуса r_1 (рис. 123, б).

Согласно теореме Камуса в качестве профиля ножки зуба рейки нужно выбрать траекторию точки P вспомогательной окружности радиуса r , перекатываемой по центроиде рейки. Такая траектория представляет циклоиду Pa' . Профиль головки

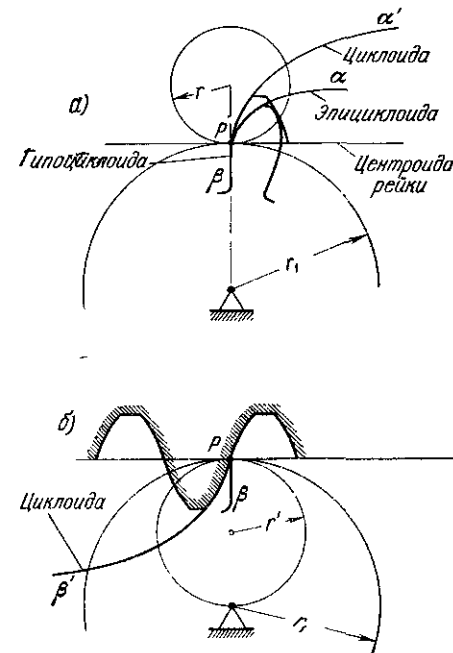


Рис. 123.

зубца рейки должен быть очерчен по циклоиде $P\beta'$, представляющей траекторию точки P вспомогательной окружности радиуса r' , перекатываемой без скольжения по центроиде рейки.

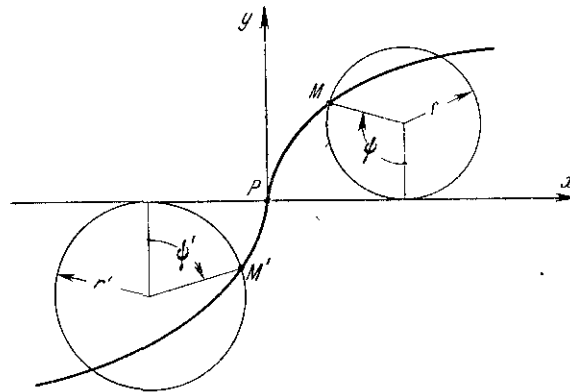


Рис. 124.

В аналитической форме профили ножки и головки зубца рейки — кривые PM и PM' на рис. 124 — выражаются следующими уравнениями:

$$x_H = r(\psi - \sin \psi), \quad y_H = r(1 - \cos \psi), \quad (55.4)$$

$$x_T = -r'(\psi' - \sin \psi'), \quad y_T = -r'(1 - \cos \psi'). \quad (55.5)$$

Для нарезания двух колес нужны две червячные фрезы с одним исходным контуром. Рейки, соответствующие двум таким червячным фрезам, имеют одинаковые очертания профилей зубцов и соответствуют друг другу как *шаблон и контршаблон*. При проектировании червячных фрез нужно проверить, не превышает ли высота переходной кривой на ножке зубца изделия допустимую величину. Эта переходная кривая образуется острием головки зубца рейки.

§ 56. Цевочные зацепления

Цевочные зацепления (рис. 125), являющиеся одной из разновидностей циклоидального, находят применение в часовых механизмах, в механизмах наводки орудийных башен, в подъемно-транспортных механизмах и в некоторых типах планетарных редукторов. Колесо 1 в этом зацеплении снабжается цевками (цилиндрами), укрепленными между двумя дисками; колесо 2 выполняется как зубчатое.

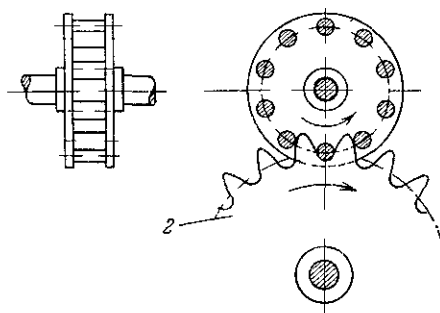


Рис. 125.

В цевочном зацеплении вспомогательной центроидой, используемой для образования по Камусу циклического профиля, служит центроида одного из колес передачи — окружность радиуса r_1 на рис. 126. При перекатывании окружности радиуса r_1 по окружности радиуса r_2 образуются две ветви эпициклоиды: Pa и $P\beta$. Таким образом, за профили зубцов колес можно принять: а) точку P , связанную с колесом 1, б) кривые Pa и $P\beta$, связанные с колесом 2.

Для реального использования вместо таких профилей применяются эквидистантные им (равноотстоящие по профильной нормали): а) окружность радиуса r_c , б) кривые $d - d$ и $d - d'$, эквидистантные соответствующим ветвям эпициклоиды.

При теоретических профилях линией зацепления является дуга окружности радиуса r_1 . При указанных на рис. 126 направлениях вращения колес и ведущем звене — колесе 1 — рабочим участком линии зацепления будет служить дуга $\widehat{Pe}$. При профилях, эквидистантных теоретическим, линией зацепления служит кривая PM (рис. 127), которая может быть найдена, исходя из следующих рассуждений: пусть колесо 1 с цевкой повернулось на угол φ_1 и центр цевки из положения P переместился в P' . Цевка вступит в касание с сопряженным профилем такой точкой, которая лежит на профильной нормали. У теоретических профилей, поскольку одним из них является эпициклоида, нормалью к профилям при касании их в P' служит хорда PP' . У профилей, выполняемых на практике, как эквидистантных теоретическим, нормаль в точке их касания та же, что и у теоретических. Из этого следует, что контактной точкой явится точка M .

Линию зацепления PM можно было бы также определить, используя зависимости, изложенные в §§ 12, 13. Однако более простым является решение, основывающееся на приведенных рассуждениях.

Матрица, выражающая переход от координат x, y к координатам x_2, y_2

$$M_{20} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -r_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & r_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Переход от системы S к S_2 определяется матричным равенством

$$r_2 = M_{20} r.$$

В координатной форме

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x \cos \varphi_2 - y \sin \varphi_2 - r_2 \sin \varphi_2, \\ y_2 &= x \sin \varphi_2 + y \cos \varphi_2 + r_2 \cos \varphi_2, \\ t_2 &= t = 1. \end{aligned} \right\} \quad (56.3)$$

Используя выражения (56.4), после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_1 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) - (r_1 + r_2) \sin \varphi_2 - r_n \cos \left(\frac{\varphi_1}{2} + \varphi_2 \right), \\ y_2 &= -r_1 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + (r_1 + r_2) \cos \varphi_2 - r_n \sin \left(\frac{\varphi_1}{2} + \varphi_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (56.4)$$

где $\varphi_2 = \varphi_1 i_{21}$. При $r_n = 0$ уравнение (56.4) представляет обычную эпициклоиду.

Перейдем теперь к определению коэффициента перекрытия цевочного зацепления. Обозначим радиус окружности выступов колеса 2 через r_{2e} (см. рис. 126), а угол поворота цевочного колеса, соответствующий концу зацепления, через φ_{1e} . Пусть x_e, y_e — координаты крайней точки линии зацепления при $\varphi_1 = \varphi_{1e}$. Тогда на основании (56.3)

$$r_{2e}^2 = (r_2 + y_e)^2 + x_e^2.$$

Используя уравнения (56.4), после преобразований получим

$$\sin^2 \frac{\varphi_{1e}}{2} - \frac{r_n (r_2 + 2r_1)}{2r_1 (r_2 - r_1)} \sin \frac{\varphi_{1e}}{2} + \frac{r_2^2 + r_n^2 - r_{2e}^2}{4r_1 (r_1 + r_2)} = 0. \quad (56.5)$$

Из этого уравнения находим φ_{1e} — угол поворота колеса с цевками от начала до конца зацепления. Коэффициент перекрытия найдем по формуле

$$\varepsilon = \frac{\varphi_{1e}}{2\pi} \cdot \frac{z_1}{z_1}, \quad (56.6)$$

где z_1 — число цевков.

Перейдем к рассмотрению вопросов геометрии внутреннего цевочного зацепления. В крупногабаритных передачах с таким зацеплением цевками снабжается то колесо, которое должно было бы иметь внутреннее зацепление. Это упрощает изготовление, поскольку при этом отпадает необходимость в долблении колеса внутреннего зацепления крупного габарита.

На рис. 128, а представлены центроиды колес 1 и 2 — окружности с радиусом r_1 и r_2 . При перекатывании центроиды 2 по центроиде 1 точка P , связанная с центроидой 2, воспроизведет на колесе 1 эпициклоиду $P\beta$. При перекатывании центроиды 2 по центроиде 1 в другом направлении точка P опишет эпициклоиду $P\beta'$. Теоретическими профилями при этом явятся: точка — для колеса 2, эпициклоида — для колеса 1. Для реального использования применяются профили, эквидистантные

теоретическим: а) окружность радиуса $r_{\text{ц}}$ (цевка), б) кривые, эквидистантные ветвям эциклоид $P\beta$ и $P\beta'$.

При теоретических профилях линией зацепления является дуга окружности радиуса r_2 . После перехода к практическим профилям соответствующая точка линии зацепления смещается по хорде PP' , являющейся профильной нормалью, на величину $r_{\text{ц}}$ (рис. 128, а). Таким

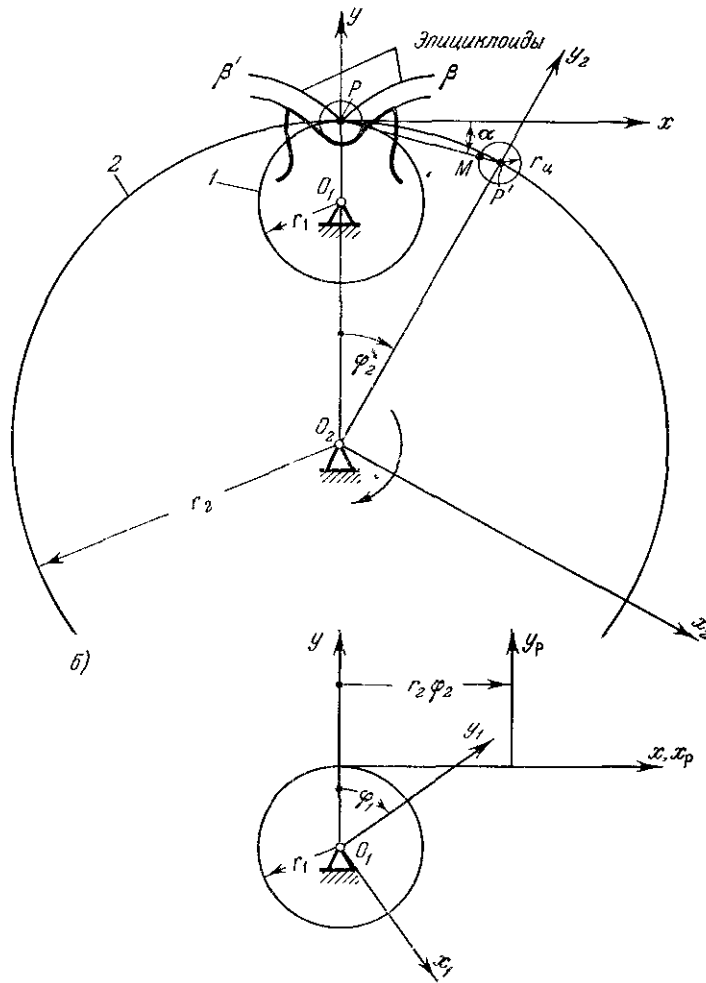


Рис. 128.

образом, на рис. 128, а найдено положение точки M практической линии зацепления, если известно, что P — точка линии зацепления теоретических профилей.

Линия зацепления практически используемых профилей выражается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(2r_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} - r_{\text{ц}} \right) \cos \frac{\varphi_2}{2}, \\ y &= - \left(2r_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} - r_{\text{ц}} \right) \sin \frac{\varphi_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (56.7)$$

Координаты профиля зубцов колес можно получить, если записать координаты контактной точки (x, y) в системе координат x_1, y_1 . Для этого нужно воспользоваться матрицей (рис. 128, б)

$$M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & -r_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & r_1 \cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Уравнения профиля зубцов колеса I :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_1 - y \sin \varphi_1 - r_1 \sin \varphi_1, \\ y_1 &= x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1 + r_1 \cos \varphi_1, \\ t_1 &= t = 1. \end{aligned} \right\} \quad (56.8)$$

Используя уравнения (56.7) и (56.8), получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -r_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) + (r_2 - r_1) \sin \varphi_1 - r_{\text{ц}} \cos \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2} \right), \\ y_1 &= r_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - (r_2 - r_1) \cos \varphi_1 - r_{\text{ц}} \sin \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (56.9)$$

где $\varphi_2 = \varphi_1 i_{21} = \varphi_1 \frac{r_1}{r_2}$.

В § 53 было доказано, что циклические кривые можно образовать двумя способами. Эпициклоиды $P\beta$ и $P\beta'$, помимо рассмотренного способа, можно получить качением по окружности радиуса r_1 окружности радиуса $r'_2 = r_2 - r_1$, находящейся с окружностью радиуса r_1 во внешнем касании.

Положив в уравнениях (56.9) $r'_2 = r_2 - r_1$, $\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi_2$, $r_{\text{ц}} = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r'_2 \sin (\varphi'_1 + \varphi_2) - (r_1 + r'_2) \sin \varphi'_1, \\ y_1 &= -r'_2 \cos (\varphi'_1 + \varphi_2) + (r_1 + r'_2) \cos \varphi'_1. \end{aligned} \right\} \quad (56.10)$$

Легко убедиться, что (56.10) — уравнение эпициклоиды $P\beta$.

Колесо I может быть нарезано по методу деления, и тогда уравнения (56.9) могут быть использованы как координаты профиля дисковой или пальцевой фрезы. Для того чтобы осуществить нарезание зубцов колеса I по методу обкатки, необходимо определить предварительно профиль зубцов исходного контура. Для этого необходимо записать координаты линии зацепления в системе x_p, y_p (рис. 128, б). Так как

$$x_p = x - r_2 \varphi_2, \quad y_p = y,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \left(2r_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} - r_{\text{ц}} \right) \cos \frac{\varphi_2}{2} - r_2 \varphi_2, \\ y_p &= - \left(2r_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} - r_{\text{ц}} \right) \sin \frac{\varphi_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (56.11)$$

Цевочное внутреннее зацепление выполняется также и по другому варианту, по которому цевками снабжается меньшее колесо проектируемой зубчатой пары. Профилями зубцов другого колеса в этом случае являются кривые, эквидистантные гипоциклоиде.

В планетарных редукторах с большим передаточным отношением применяются внутренние зацепления с малой разностью в числе зубцов. В некоторых конструкциях это зацепление выполняется как цевочное с разностью в числах зубцов колес зубчатой пары, равной единице. Профили зубцов размещаются при этом на окружностях, смещенных по

отношению к центроидам, что дало повод такое цевочное зацепление называть внецентроидным [146, 253].

На рис. 129 r_1 и r_2 — радиусы центроид колес. При перекатывании окружности r_2 по окружности r_1 точка B_0 , жестко связанная с окружностью радиуса r_2 , опишет обычную эпициклоиду B_0B_1 . Если же с окружностью радиуса r_2 свя-

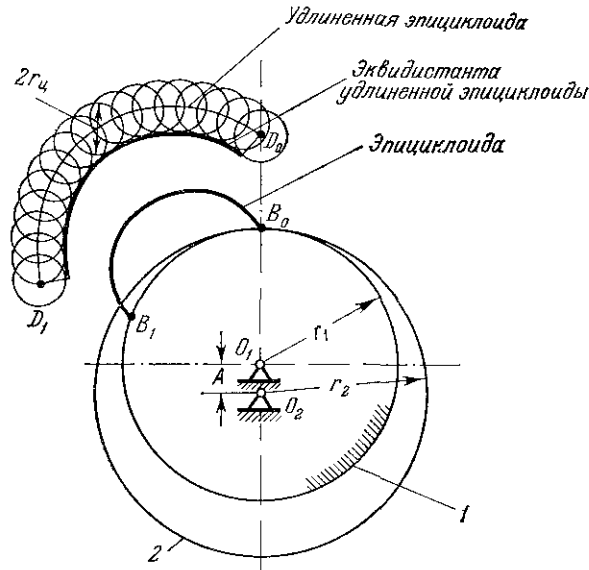


Рис. 129.

ностью радиуса r_2 связать точку D_0 , то при перекатывании точка D_0 опишет удлиненную эпициклоиду D_0D_1 . Теоретическими профилями зубцов колес при этом явятся: удлиненная эпициклоида D_0D_1 как профиль зубцов колеса 1; точка D_0 как «профиль» зубца колеса 2. Для практического исполнения зацепления избираются профили, эквидистантные теоретическим: на колесе 1 — кривая, эквидистантная удлиненной эпициклоиде, на колесе 2 — окружность радиуса r_2 .

В рассматриваемом зацеплении в качестве профилей используются полные ветви удлиненной

эпициклоиды. На всем колесе 1 должно разместиться целое число таких ветвей, что может быть соблюдено при определенном соотношении между радиусами центроид r_1 и r_2 .

Образование полных ветвей обычной эпициклоиды (B_0B_1) и удлиненной (D_0D_1) совершается за один и тот же угол поворота колеса 2, равный 2π . При этом по центроиде колеса 2 будет пройдена дуга $2\pi r_2$, а по центроиде колеса 1 — дуга $2\pi r_1 + \widehat{B_0B_1} = 2\pi r_1 + t$, где t — шаг зубцов. Следовательно,

$$t = 2\pi(r_2 - r_1) = 2\pi A.$$

С другой стороны,

$$t = \frac{2\pi r_1}{z_1},$$

где z_1 — целое число ветвей, размещаемых на центроиде колеса 1. Отсюда

$$r_1 = Az_1. \quad (56.12)$$

Радиус окружности 2

$$r_2 = r_1 + A = A(z_1 + 1). \quad (56.13)$$

На основании (56.12) и (56.13), так как $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$, получим

$$z_2 = z_1 + 1. \quad (56.14)$$

Иными словами, число цевок, размещаемых на колесе 2, должно быть на единицу больше числа ветвей эпициклоид, размещаемых на колесе 1.

Соотношение радиусов должно подчиняться условию

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_1 + 1} \quad (56.15)$$

Центроиды и профили зубцов во внецентроидном цевочном эпициклоидальном зацеплении изображены на рис. 130.

Аналогично эпициклоидальному можно создать *внецентроидное цевочное гипоциклоидальное зацепление* (рис. 131). Нормальная гипоциклоида B_0B_1 воспроизводится как траектория точки B_0 при перекачивании центроиды радиуса r_1 , с которой жестко связана точка B_0 , по центроиде радиуса r_2 . Если с окружностью r_1 связать точку D_0 , то при перекачивании будет воспроизведена удлиненная гипоциклоида D_0D_1 . При выполнении зацепления на практике колесо 1 снабжается цевками, а колесо 2 — профилями, эквидистантными удлиненной гипоциклоиде. Используя аналогичный путь вывода, найдем, что

$$z_2 = z_1 + 1,$$

а

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_1 + 1}.$$

Следует, однако, помнить, что в отличие от случая, изображенного на рис. 130, в цевочном внецентроидном гипоциклоидальном зацеплении цевками снабжается колесо 1, а не колесо 2.

При выполнении цевочного зацепления как внецентроидного должна, вообще говоря, повыситься скорость скольжения профилей. Однако, несмотря на удаление профилей зубцов от мгновенного центра вращения

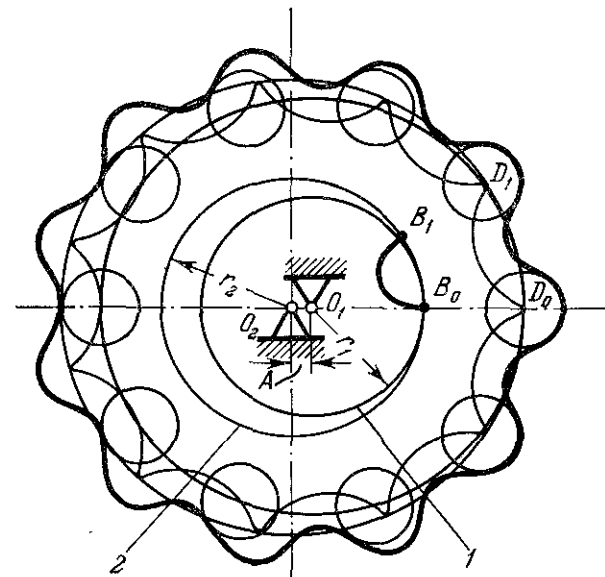


Рис. 131.

колес, скорости скольжения профилей остаются малыми. Во внутреннем зацеплении при малой разности чисел зубцов угловая скорость в

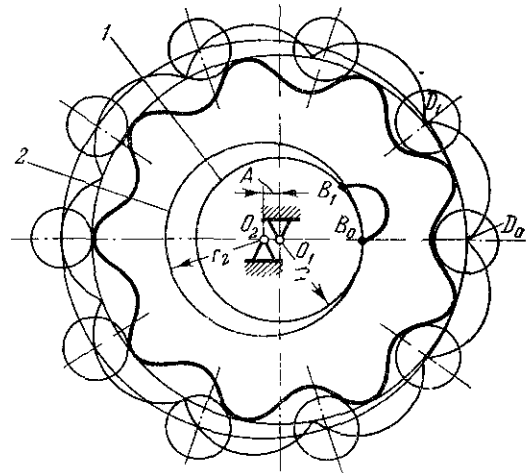


Рис. 130

относительном движении весьма мала:

$$\omega_{\text{отн}} = |\omega_1 - \omega_2| = \omega_1 \left| 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = \omega_1 \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2} \right|.$$

При $|z_2 - z_1| = 1$ $\omega_{\text{отн}} = \omega_1 \frac{1}{z_2}$.

В рассмотренных видах внецентроидного цевочного зацепления все цевки одновременно находятся в касании с профилями зубцов другого колеса. Это следует из того, что центры всех цевок находятся на соответствующих ветвях удлиненных эпи- или гипоциклоид (или эпи-, гипотрохоид). Через такие точки можно провести нормали к эпи-, гипотрохоидам, пересекающие линию межцентрового расстояния колес в полюсе зацепления. Точкой контакта цевки с профилем явится точка пересечения нормали к удлиненной эпи-, гипоциклоиде с окружностью цевки.

Хотя в одновременном зацеплении находятся все цевки, нагрузка может передаваться максимально лишь половиной их общего числа, так как передача усилий может осуществляться лишь в одном направлении нормали. Поэтому теоретическое значение коэффициента перекрытия во внецентроидном цевочном зацеплении составляет

$$\varepsilon = \frac{z_{\text{ц}}}{2},$$

где $z_{\text{ц}}$ — число цевок. Число цевок, реально участвующих в передаче нагрузки, меньше, чем $z_{\text{ц}}/2$, из-за погрешностей изготовления и сборки.

Подробные сведения о внецентроидном цевочном зацеплении читатель найдет в работах В. М. Шанникова [255] и В. Н. Кудрявцева [146].

§ 57. Колеса Рута

1°. Колеса Рута нашли применение в воздуходувках, используемых в металлургической промышленности и в дизелестроении. В воздуходувках применяются двух- и трехлопастные роторы как прямо-

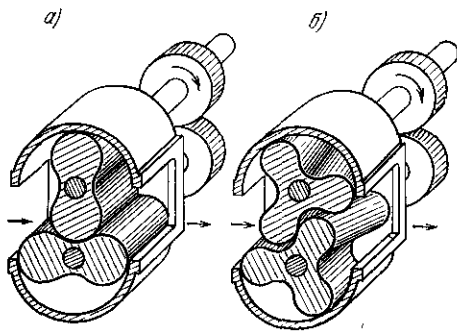


Рис. 132.

зубые (рис. 132, а), так и винтовые (рис. 132, б). Роторы приводятся во вращение зубчатыми колесами с передаточным отношением, равным единице. Поверхности роторов во время работы не соприкасаются друг с другом, но зазор между ними сохраняется постоянным. Это обеспечивается тем, что профили роторов строятся как сопряженные, а при сборке роторы соответствующим образом заклиниваются на валах.

В отечественной литературе вопросам геометрии колес Рута, а также расчету и конструкции воздуходувок с такими колесами была посвящена обстоятельная работа А. М. Каца [109].

Рассмотрим особенности зацепления колес Рута.

На рис. 133 окружности радиуса r — центроиды роторов. Профиль головки зубца очерчен радиусом ρ_1 из точки C , находящейся на расстоянии a от центра вращения. При перекачивании центроид друг по другу

точка C опишет укороченную эпициклоиду (на рис. 133 она не изображена). Теоретическими профилями здесь являются: а) точка C , жестко связанная с центроидой колеса 1; б) укороченная эпициклоида — на колесе 2. При практическом исполнении эти профили заменяются эквидистантными кривыми: а) окружностью радиуса ρ_1 ; б) кривой, отстоящей по нормали от укороченной эпициклоиды на величину ρ_1 ; по этой кривой очерчен профиль ножки, под которой понимается часть зубца ниже центроиды.

Для двух- и трехлопастного роторов угол, определяющий головку зубца, соответственно равен 90° и 60° (рис. 134, а и б). Геометрические размеры роторов связаны соотношениями:

для двухлопастного

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos 45^\circ = \rho_1^2, \quad (57.1)$$

для трехлопастного

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos 30^\circ = \rho_1^2. \quad (57.2)$$

Найдем аналитическое выражение линии зацепления и профиля ножки колеса Рута.

Свяжем с колесами 1 и 2 системы координат x_1, y_1 и x_2, y_2 (рис. 135); со стойкой связана неподвижная система координат x, y . Пусть колесо 1

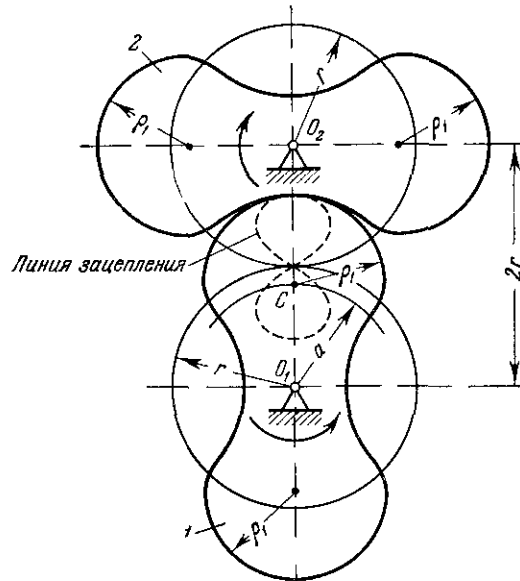


Рис. 133.

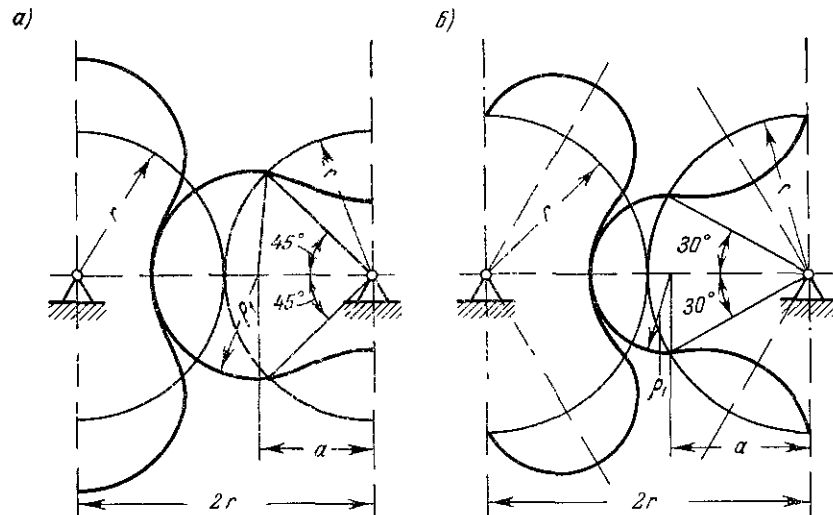


Рис. 134.

повернулось на угол φ и центр C_0 головки занял положение C . В этом положении колеса 1 профиль головки вступит в зацепление точкой M , поскольку нормаль MC проходит через полюс зацепления P .

Проектируя ломаную O_1CM на оси x, y , найдем координаты точки линии зацепления:

$$x = \rho_1 \cos \alpha - a \sin \varphi, \quad y = \rho_1 \sin \alpha + a \cos \varphi - r, \quad (57.3)$$

где $\alpha = \arctg \frac{r - a \cos \varphi}{a \sin \varphi}$.

Линия зацепления колес Рута изображена на рис. 133; точки верхней ветви соответствуют вводу в зацепление головки зубца колеса 1, а нижней ветви — вводу в зацепление ножки зубца этого колеса.

Для того чтобы найти уравнения профиля ножки колеса 2, сопрягающегося с профилем головки колеса 1, уравнения (57.3) нужно записать

в системе координат x_2, y_2 . Для этого нужно воспользоваться матрицей M_{20} , являющейся оператором для перехода от x, y к x_2, y_2 ,

$$M_{20} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & r \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -r \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Формулы перехода от системы координат x, y к системе x_2, y_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + r \sin \varphi, \\ y_2 &= x \sin \varphi + y \cos \varphi - r \cos \varphi, \\ t_2 &= t = 1. \end{aligned} \right\} \quad (57.4)$$

Используя уравнения (57.3) и (57.4), уравнения профиля ножки представим в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \rho_1 \cos (\alpha + \varphi) - a \sin 2\varphi + 2r \sin \varphi, \\ y_2 &= \rho_1 \sin (\alpha + \varphi) + a \cos 2\varphi - 2r \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (57.5)$$

где $\alpha = \arctg \left(\frac{r - a \cos \varphi}{a \sin \varphi} \right)$.

Выражения для x_2, y_2 можно было бы также получить, проектируя на оси O_2x_2 и O_2y_2 ломаную

$$r_2 = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1C} + \overline{CM}.$$

При вычислениях по уравнениям (57.3) и (57.4) значения φ должны быть (рис. 134) в пределах: для двухлопастного ротора $-45^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$, для трехлопастного ротора $-30^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$.

Определим радиус кривизны профиля ножки, для чего воспользуемся уравнением Эйлера — Савари (см. (16.4)). Применительно к нашему случаю имеем

$$\frac{2}{r} = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \sin \alpha, \quad (57.6)$$

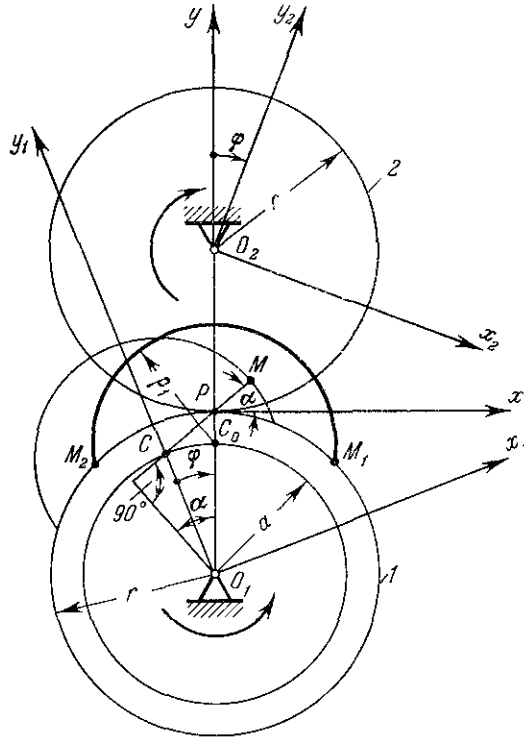


Рис. 135.

где l_1 и l_2 — отрезки, измеренные по профильной нормали от полюса зацепления до соответствующих центров кривизны сопряженных профилей.

При написании этого уравнения мы предположили, что в точке касания оба профиля выпуклые. Радиусы кривизны профилей можно выразить так (рис. 135):

$$\rho_1 = l_1 + PM, \quad \rho_2 = l_2 - PM = l_2 - \rho_1 + l_1. \quad (57.7)$$

На основании уравнений (57.6) и (57.7) после преобразований найдем

$$\rho_2 = \frac{2l_1^2}{2l_1 - r \sin \alpha} - \rho_1.$$

Основываясь на построениях рис. 135, найдем, что

$$a^2 - (r \sin \alpha - l_1)^2 = r^2 \cos^2 \alpha,$$

где $l_1 = PC$.

После преобразований найдем

$$r \sin \alpha = \frac{-a^2 + r^2 + l_1^2}{2l_1}$$

и

$$\rho_2 = \frac{4l_1^3}{3l_1^2 + a^2 - r^2} - \rho_1. \quad (57.8)$$

Профиль ножки может быть очерчен выпукло-вогнутой кривой. Для вогнутого участка профиля $\rho_2 < 0$, и центр кривизны находится слева от контактной точки M . В точке перегиба $\rho_2 = \infty$, что возможно, если

$$3l_1^2 + a^2 - r^2 = 0,$$

т. е. если

$$l_1 = \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{3}}. \quad (57.9)$$

Наличие на профиле ножки угловой точки ($\rho_2 = 0$) возможно, если

$$\rho_1 = \frac{4l_1^3}{3l_1^2 + a^2 - r^2}. \quad (57.10)$$

В своей работе [109] А. М. Кац, исходя из уравнений (57.9) и (57.10), получил следующие предельные значения a/r :

Т а б л и ц а V

Число лопастей		Плавные профили		Профили с угловыми точками
		выпуклые	выпукло-вогну- тые с точками перегиба	
2	$\frac{a}{r}$	$0 \div 0,5$	$0,5 \div 0,9288$	$> 0,9288$
3	$\frac{a}{r}$	$0 \div 0,5$	$0,5 \div 0,9670$	$> 0,9670$

Представляет известный интерес случай, когда отношение $a/r = 1$. Профиль ножки может быть при этом выполнен в виде дуги окружности того же радиуса, что и ρ_1 ; теоретическими профилями в этом случае

являются две точки, совпадающие друг с другом в полюсе зацепления P . Дуги окружностей с радиусами ρ_1 , которыми очерчиваются профили головки и ножки, являются эквидистантными точечным теоретическим

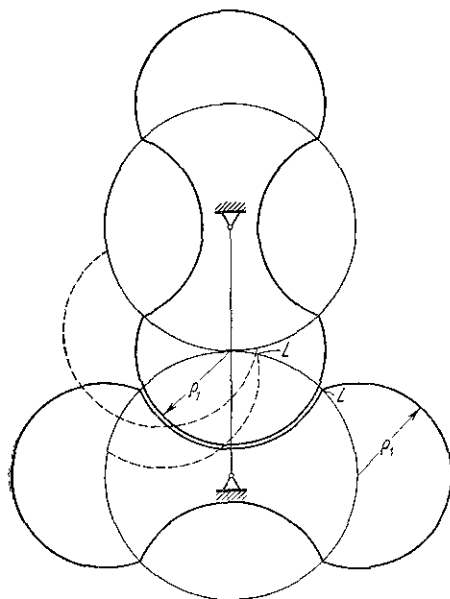


Рис. 136.

профилям. Такие профили касаются друг друга всеми точками в том мгновенном положении колес, когда центры кривизны профилей совпадают с полюсом зацепления. В остальных положениях колес имеет место кромочное касание профилей: выпуклый профиль касается вогнутого профиля в угловой точке L (рис. 136). Вследствие быстрого износа вблизи L при таких очертаниях профилей возможно появление больших зазоров.

2°. Роторы газовых счетчиков (рис. 137) являются разновидностью колес Рута. Роторы приводятся во вращение вследствие разности давлений в камере со стороны входа и выхода газа. В положении роторов, изображенном на рис. 137, равнодействующая избыточных давлений R_{n1} проходит вне центра вращения ротора 1, и этот ротор является ведущим; равнодействующая R_{n2} проходит примерно через O_2 , и ротор 2 является

ведомым. В процессе вращения роторы займут такое положение, когда они оба окажутся ведущими, а после поворота на 90° ведущим станет ротор 2,

ведомым — ротор 1. Вращение от ведущего ротора к ведомому, так же как и в воздуходувках, передается посредством пары зубчатых колес с передаточным отношением, равным единице. Поверхности роторов в процессе передачи вращения непосредственного соприкосновения не имеют, и между ними должен быть образован зазор постоянной величины. Это достигается установкой на обоих концах роторов по паре зубчатых колес, соответствующим образом заклипированных на валах роторов. За полный оборот обоих роторов газом заполняются четыре объема, один из которых заштрихован на чертеже. Зная величину такого объема, по числу оборотов ротора можно определить объем пропущенного газа.

Зацепление роторов является разновидностью циклоидального зацепления. В отличие от зацепления колес Рута рабочими являются

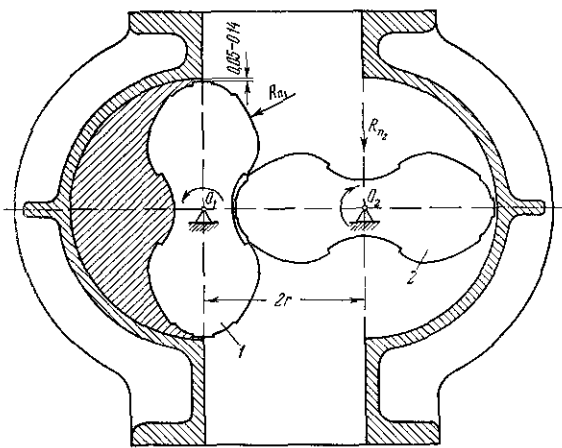


Рис. 137.

лишь участки профилей: $M_0L_1K_1$ на роторе 1, $M_0L_2K_2$ на роторе 2 (рис. 138). Выступ $B_1A_0A_1$ очерчен дугой окружности радиуса O_1A_0 ; наличие такого выступа способствует очистке газовой камеры острыми кромками B_1 и A_1 . Дно впадины очерчено дугой окружности $K_1E_0E_1$.

Рабочий участок профиля ротора 1 составлен из дуги окружности $M_0M_1L_1$ радиуса $C_1M_0 = \rho_1$ и кривой L_1K_1 переменной кривизны. У ротора 2 профиль составлен из кривой M_0L_2 , идентичной L_1K_1 , и дуги окружности L_2K_2 радиуса ρ_1 . Точки профиля $M_0M_1L_1$ вступают последовательно

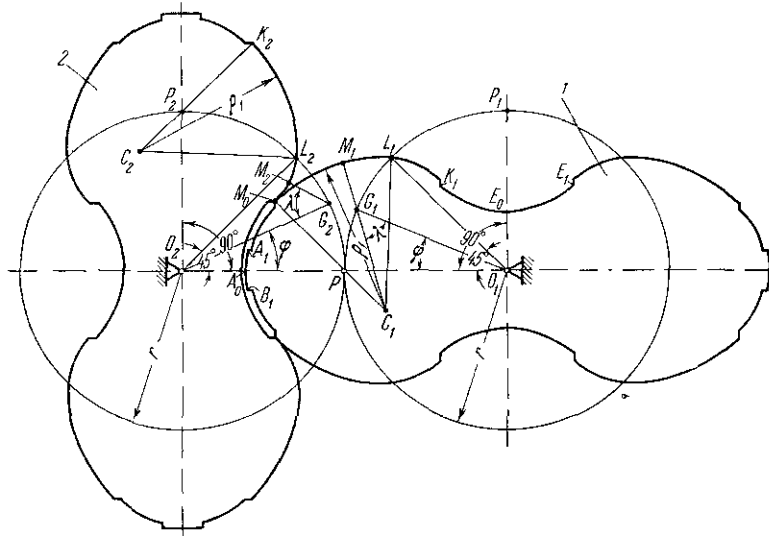


Рис. 138.

в зацепление с точками профиля $M_0M_2L_2$. В начальном положении, когда профили роторов касаются в точке M_0 , их общая нормаль проходит через полюс зацепления P . В конце зацепления в касание друг с другом вступят точки K_1 и K_2 профилей; каждый из роторов повернется при этом на угол $\pi/2$, и по центроидам роторов будут пройдены дуги $\widehat{PP}_1 = \widehat{PP}_2 \approx = r \frac{\pi}{2}$. Точки L_1 и L_2 являются соответственно точками пересечения профилей M_0L_1 и M_0L_2 с дугами центроид. Профили роторов вступят в касание с точками L_1 и L_2 после поворота роторов от начального положения на угол $\pi/4$.

Пусть на профиле M_0L_1 ротора 1 задана текущая точка M_1 ; на профиле M_0L_2 M_2 — точка, сопряженная с M_1 . После такого поворота роторов, когда по их центроидам будут пройдены дуги $\widehat{PG}_1 = \widehat{PG}_2$, точки M_1 и M_2 вступят в касание друг с другом. Отрезки нормалей к профилям $G_1M_1 = G_2M_2$, и каждая из этих нормалей должна образовать с соответствующим радиусом-вектором центроиды угол λ равной величины. Исходя из этого, для определения участка профиля K_1L_1 можно воспользоваться графическим способом, сущность которого легко уяснить из построений рис. 139.

Используя те же пути вывода, как и в случае зацепления колес Рута обычного вида, уравнения линии зацепления роторов газовых

счетчиков представим в системе x, y (рис. 140) следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_1 \cos \alpha - a \sin (\varphi + q), \\ y &= \rho_1 \sin \alpha + a \cos (\varphi + q) - r, \end{aligned} \right\} \quad (57.11)$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r - a \cos (\varphi + q)}{a \sin (\varphi + q)}.$$

Связь между параметрами a , ρ_1 и q находится из рассмотрения косоугольного треугольника $O_1 C_1 L_1$

$$\rho_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos (45^\circ + q). \quad (57.12)$$

При вычислениях x, y необходимо, чтобы $45^\circ \geq \varphi \geq 0$.

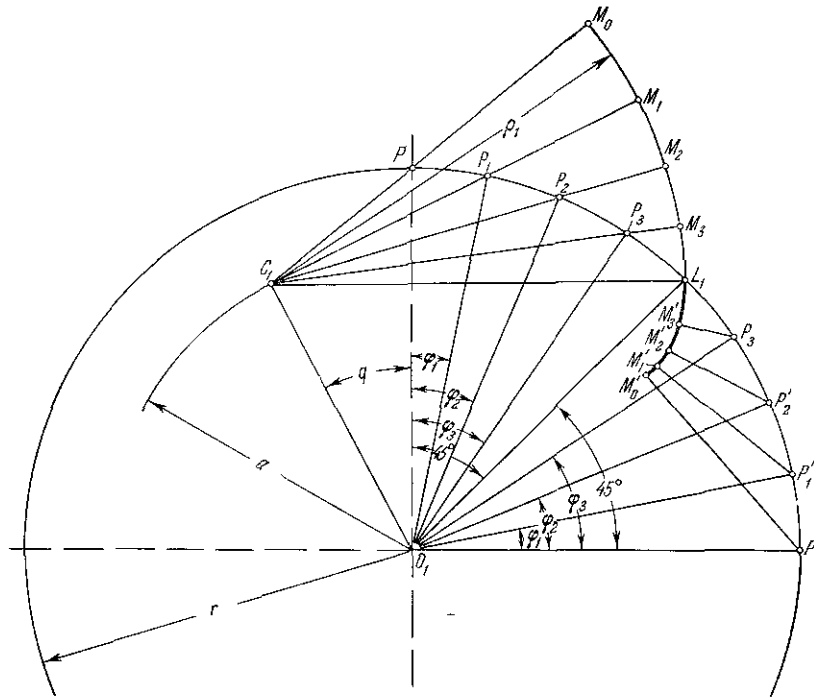


Рис. 139.

Связь между системами координат x_2, y_2 и x, y выражается уравнениями (57.4). Уравнения профиля $M_0 L_2$, сопряженного профилю $M_0 L_1$ (рис. 138), представим так:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \rho_1 \cos (\alpha + \varphi) - a \sin (2\varphi + q) + 2r \sin \varphi, \\ y_2 &= \rho_1 \sin (\alpha + \varphi) + a \cos (2\varphi + q) - 2r \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (57.13)$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r - a \cos (\varphi - q)}{a \sin (\varphi + q)}, \quad 45^\circ \geq \varphi \geq 0.$$

Для определения кривизны участка профиля M_0L_2 или L_1K_1 нужно воспользоваться уравнением (57.8). В случае роторов газовых счетчиков

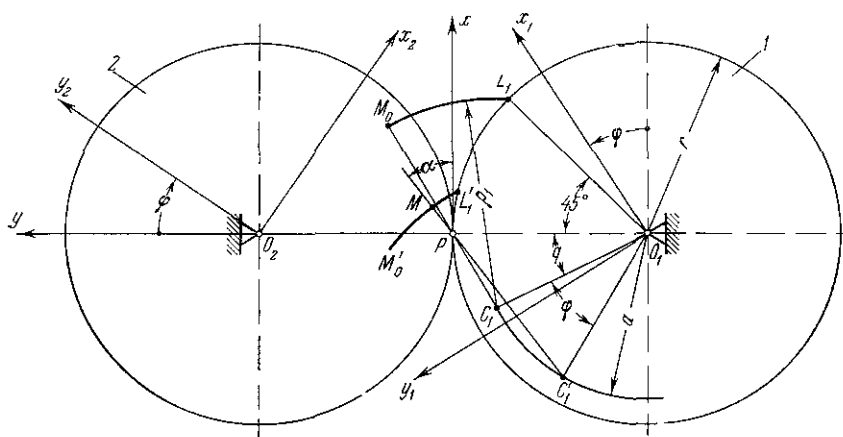


Рис. 140.

значения l_1 изменяются в пределах (рис. 140)

$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos q} \leq l_1 \leq \rho_1. \quad (57.14)$$

На основании (57.9) и (57.14) можно указать такую область расположения центров C_1 дугового профиля $M_0M_1L_1$, для которой можно гарантировать, что другой участок профиля $L_1M'_0$ (рис. 139) окажется очерченным выпуклой кривой и на этом профиле не будет точек, в которых $\rho_2 = \infty$. Границей этой области является дуга полуокружности RH радиуса $r/4$, касающаяся начальной окружности (центroids) ротора в полюсе зацепления P (рис. 141). Если центр C_1 окажется расположенным внутри полуокружности RH , профиль $L_1M'_0$ будет очерчен выпукло-вогнутой кривой и на нем окажется точка перегиба со значением $\rho_2 = \infty$. При расположении центра C_1 вне полуокружности RH профиль $L_1M'_0$ будет выпуклым; в предельном случае, когда центр C_1 окажется на самой полуокружности RH , на выпуклом профиле появится точка с значением $\rho_2 = \infty$. При расположении центра C_1 в P профиль $L_1M'_0$ будет очерчен вогнутой кривой постоянного радиуса кривизны (рис. 136).

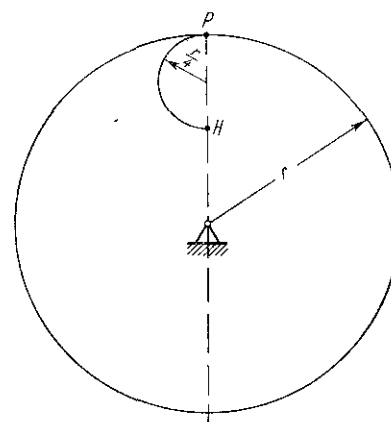


Рис. 141.

Глава VI

Некруглые зубчатые колеса

§ 58. Применение

В кинематическом отношении механизмы некруглых зубчатых колес характеризуются нелинейной зависимостью между углами поворота ведущего и ведомого звеньев; такой механизм может быть использован для передачи движения с переменным отношением скоростей.

Конструкторы машин с давних пор стремились использовать некруглые колеса в различных машинах-автоматах, но их предложения не находили широкого применения из-за отсутствия производительных и точных способов нарезания зубцов на таких колесах. Эти препятствия удалось устранить благодаря тому, что в последние годы были разработаны совершенные способы нарезания зубцов на некруглых колесах, основанные на использовании зуборезного инструмента эвольвентного зацепления. Нужно, однако, заметить, что из-за недостаточной распространенности специализированных станков механизмы с некруглыми колесами при проектировании машин до сих пор зачастую заменяются другими механизмами — кулачковыми и шарнирными, хотя это и приводит в ряде случаев к невыгодным конструктивным решениям.

Исходя из особенностей назначения некруглых колес, можно указать следующие типовые случаи их применения в машинах-автоматах:

1) для приведения в движение с переменной скоростью рабочих и управляющих органов машины; 2) в целях согласования циклового времени параллельно работающих механизмов; 3) для изменения нужным образом кинематических характеристик шарнирных механизмов, что достигается передачей движения ведущим звеньям этих механизмов от некруглых колес.

Достаточно полные сведения о применении некруглых колес в машиностроении приведены в нашей книге [172]. В настоящей работе мы ограничимся лишь несколькими иллюстративными примерами.

В блокообрабатывающей машине БО-2 применяются эллиптические колеса в цепи привода главного транспортера. Эта машина предназначена для кругления и оклейки книжных блоков. При выполнении этих операций книжный блок проводится транспортером через технологические секции машины. Главный транспортер получает прерывистое движение, так как ведущие спаренные звездочки приводятся в движение мальтийским крестом (рис. 142, а). В момент вхождения ролика кривошина в паз мальтийского креста (рис. 142, б) угловое ускорение звена 4 мгновенно изменяется от нуля до величины

$$\varepsilon_4 = \omega_3^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{z}, \quad (58.1)$$

где z — число пазов мальтийского креста.

Эллиптические колеса занимают при этом положение, изображенное на рис. 142, *в*, и $\omega_3 = \omega_2$, так как передаточное отношение конических колес равно единице. Передаточное отношение эллиптических колес в рассматриваемом положении составляет (см. § 64)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+e}{1-e}, \quad (58.2)$$

где e — эксцентриситет эллиптической центроиды. Угловое ускорение

$$\varepsilon_4 = \omega_1^2 \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}.$$

Привод мальтийского механизма от эллиптических колес позволяет уменьшить величину углового ускорения, не прибегая к снижению

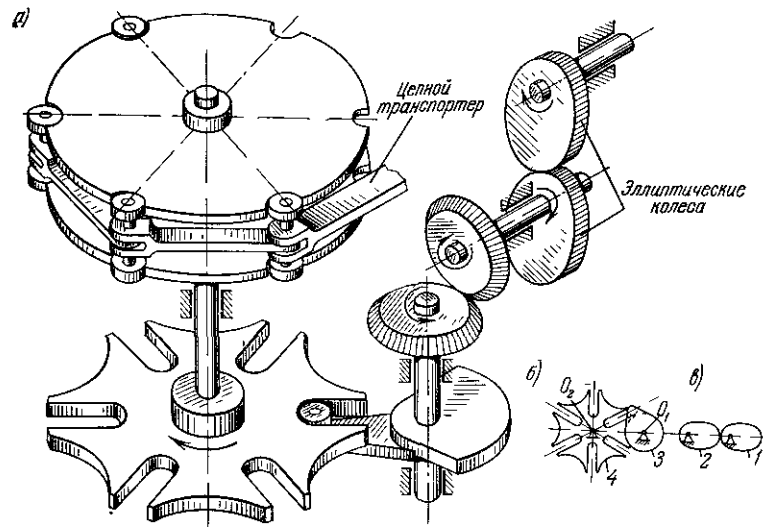


Рис. 142.

угловой скорости ω_1 главного вала. При $e = 0,24$ угловое ускорение ε_4 будет уменьшено примерно на 60%.

В качающемся конвейере фирмы Шмидт-Кранц эллиптические колеса применяются для привода кривошипно-ползунного механизма (рис. 143, *а*). Вращение от мотора передается на вал 1 эллиптического колеса 2, находящегося в зацеплении с таким же колесом 3, вращающимся на валу 4. С валом 4 жестко связана шайба, несущая кривошипный палец 5, на который насаживается шатун 6, присоединенный к желобу. При указанном на рис. 143, *а* взаиморасположении эллиптических колес и кривошипа можно добиться изменения скорости желоба по закону, изображенному на рис. 143, *б*. Общий вид качающегося конвейера со двоянными приводами от эллиптических колес изображен на рис. 144.

В полиграфическом машиностроении США [291] для передачи вращательного движения применяется механизм, представляющий сочетание некруглых колес и кулачкового механизма с коромыслом. Скорость ведомого вала изменяется по закону, изображенному на рис. 145. В интервалах 1 и 3 углов поворота ведущего вала передача вращения осуществляется кулачковым механизмом, а в интервале 2 — некруглыми колесами. На рис. 146 изображены четыре положения рассматриваемого механизма.

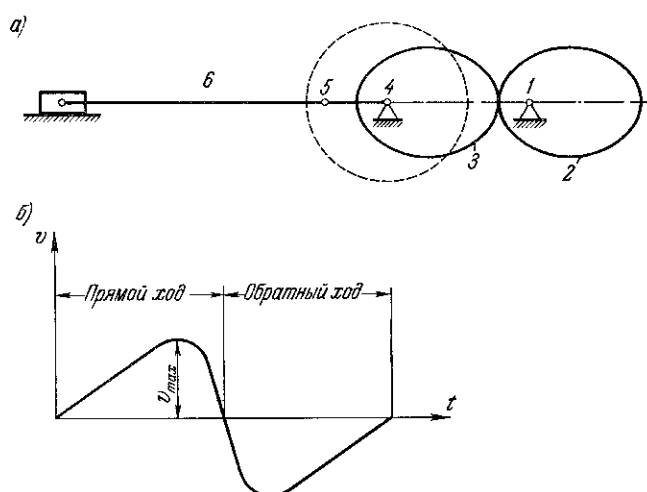


Рис. 143.

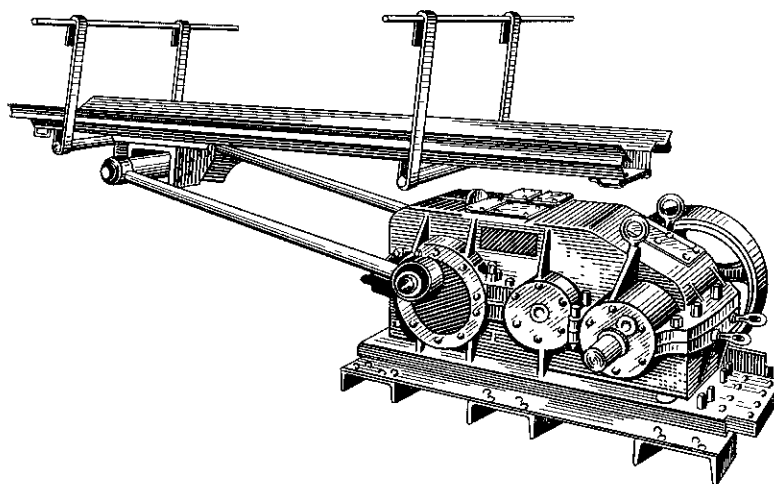


Рис. 144.

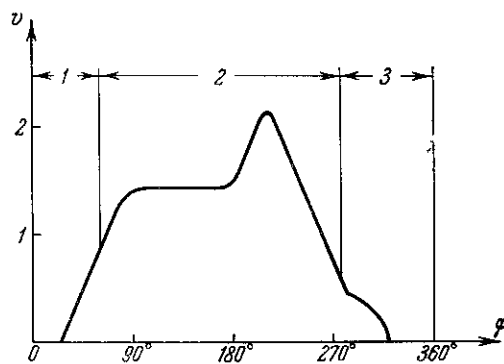


Рис. 145.

Некруглые колеса нашли широкое применение в приборостроении, где они применяются для воспроизведения функций одного независимого переменного. При проектировании угол поворота ведущего колеса задают пропорциональным значению независимого переменного, центроиды

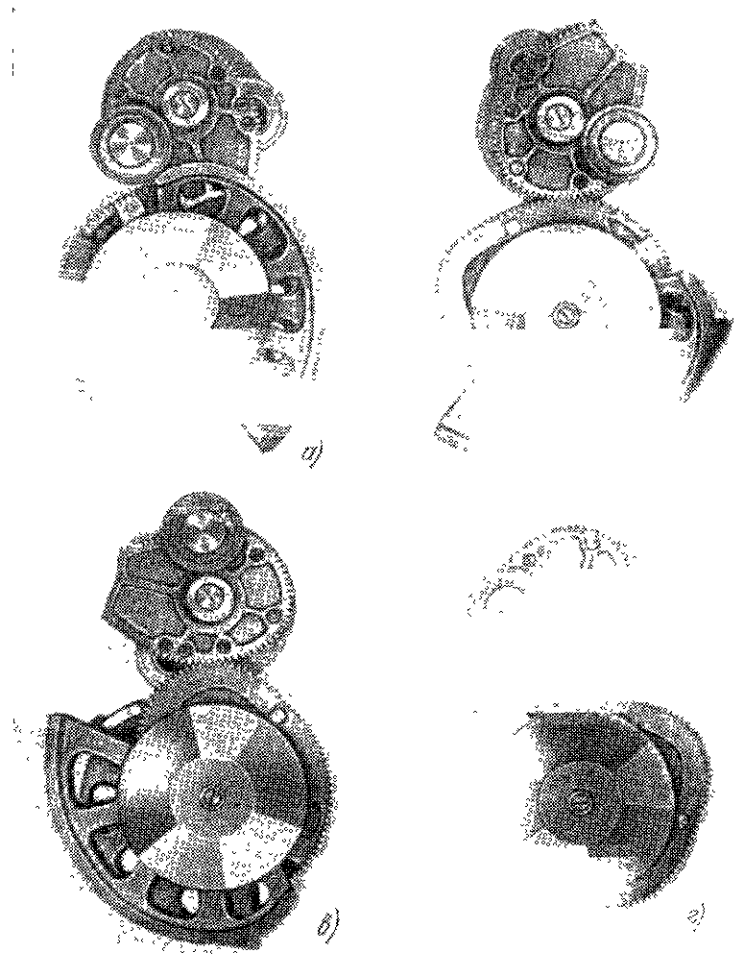


Рис. 146.

некруглых колес рассчитывают так, чтобы угол поворота ведомого колеса был прямо пропорционален значению воспроизводимой функции.

Некруглые колеса, применяемые в приборостроении, имеют незамкнутые центроиды, если воспроизводятся функции, производные которых в промежутке воспроизведения являются неперiodическими. Три пары таких колес представлены на рис. 147.

Сочетание некруглых колес с электрическими и механическими функциональными устройствами дает возможность в ряде случаев более выгодным образом выбрать параметры таких устройств и придать линейный характер зависимостям, воспроизводимым функциональными устройствами.

Одним из таких примеров может служить применение некруглых колес для привода во вращение токосъемной щетки функционального потенциометра (рис. 148). Применение некруглых колес позволяет здесь упростить форму каркаса потенциометра, который представляет свернутую в кольцо прямоугольную полосу. Таким потенциометром обрабатывается нелинейная функция

$$\frac{u_{\text{вых}}}{u_0} = f(\varphi_1),$$

где $u_{\text{вых}}$ — снимаемое напряжение, u_0 — питающее напряжение, φ_1 — угол поворота ведущего некруглого колеса.

При отсутствии некруглых колес для воспроизведения потенциометром нелинейной функции необходимо придавать его каркасу специальный профиль, что весьма затрудняет намотку сопротивления.

Интересный пример применения некруглых колес в приборостроении представляют овальные колеса в счетчиках расхода жидкости. Схема работы колес в счетчике представлена на рис. 149, где I, II и III изображают последовательные положения одной и той же пары овальных колес в

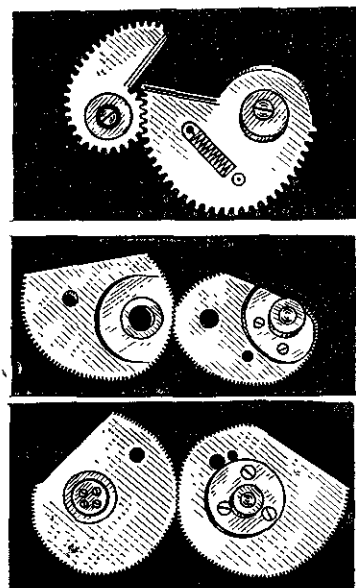


Рис. 147.

камере счетчика. Овальные колеса приводятся во вращение самой

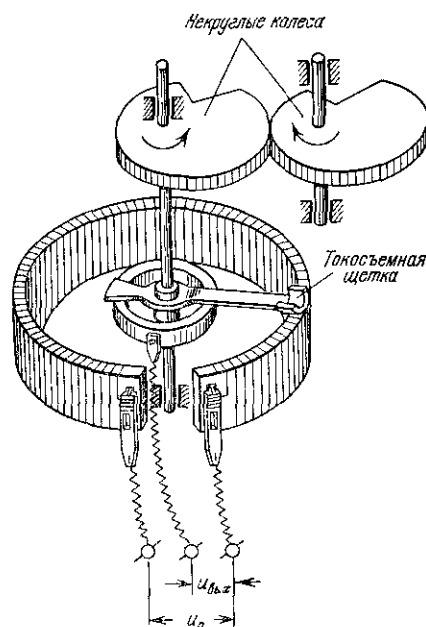


Рис. 148

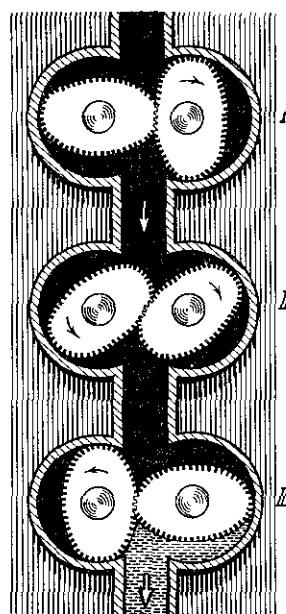


Рис. 149.

расходуемой жидкостью вследствие разности давлений со стороны напора и со стороны расхода.

При вращении овального колеса им периодически отсекается и опирается некоторый объем, заключенный между внутренним круговым цилиндром корпуса и внешним овальным цилиндром. За один оборот каждым из колес будут отсечены два таких объема, следовательно, за один оборот ведущей или ведомой оси будут отсечены четыре таких объема. Объем жидкости, прошедшей через счетчик, определяется по шкалам счетчика, вращение которым передается от второго овального колеса через зубчатые передачи обычного типа.

§ 59. Расчет центроид

В § 7 применительно к случаю, когда задана функция передаточного отношения $i_{12} = f(\varphi_1)$, уравнения центроид были записаны в такой форме (см. (7.1) и (7.2)):

$$r_1 = A \frac{1}{i_{12} \pm 1}, \quad (59.1)$$

$$r_2 = A \frac{i_{12}}{i_{12} \pm 1}, \quad \varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}}. \quad (59.2)$$

Для угла μ , образуемого радиусом-вектором центроида с положительным направлением касательной, были получены следующие выражения:

$$\operatorname{tg} \mu_1 = - \frac{i_{12} \pm 1}{i'_{12}}, \quad (59.3)$$

где

$$i'_{12} = \frac{d}{d\varphi_1}(i_{12}),$$

и

$$\operatorname{tg} \mu_2 = \pm \frac{i_{12} \pm 1}{i'_{12}}. \quad (59.4)$$

Положительное направление касательной к центроиду должно совпадать с направлением отсчета полярных углов центроида.

В приведенных уравнениях в местах двойных знаков нижний знак относится к случаю внутреннего зацепления. В последующем мы будем ограничиваться лишь случаем внешнего зацепления.

Легко установить, что функция передаточного отношения механизма некруглых колес должна удовлетворять следующим требованиям:

1) В области значений φ_1 функция передаточного отношения должна быть *гладкой*, т. е. она должна в этой области иметь непрерывную производную. Из уравнений (59.3) и (59.4) следует, что при соблюдении этого требования плавно изменяется угол μ между радиусом-вектором центроида и касательной, и центроида, как огибающая своих касательных, будет иметь плавные очертания.

2) В области изменения φ_1 функция передаточного отношения должна иметь *ограниченные* и притом *положительные значения*. При ограниченных значениях передаточного отношения исключается возможность появления чрезмерно крутых участков центроид колес, что недопустимо, как будет показано ниже, из-за неблагоприятных условий передачи сил. Значения передаточного отношения должны быть положительными, так как функция перемещения механизма некруглых колес должна быть

монотонно возрастающей. Такое требование к функции перемещения вытекает из того, что при вращении ведущего колеса в одном направлении (при возрастании φ_1) не должно изменяться направление вращения ведомого колеса и должны возрастать значения $\varphi_2 = F(\varphi_1)$.

Из всего изложенного следует: *передаточное отношение механизма некруглых колес должно выражаться гладкой функцией с ограниченными и притом положительными значениями.*

Рассмотрим теперь расчет центроид в случае, если механизм некруглых колес применяется как счетно-решающий и его назначением является воспроизведение заранее заданной функции одного независимого переменного.

Пусть задана функция $y = f(x)$, которую нужно воспроизвести в промежутке $x_2 \geq x \geq x_1$; предполагается, что в этом промежутке воспроизводимая функция является непрерывной и дифференцируемой.

Будем считать угол поворота φ_1 ведущего колеса прямо пропорциональным значению независимого переменного, а угол поворота ведомого колеса прямо пропорциональным значению воспроизводимой функции. Тогда

$$\varphi_1 = k_1(x - x_1), \quad \varphi_2 = k_2[f(x) - f(x_1)], \quad (59.5)$$

где k_1 и k_2 — принятые масштабные коэффициенты.

Начало отсчета углов поворота ведущего колеса определяется значением $x = x_1$ и начало отсчета углов поворота ведомого — значением $f(x) = f(x_1)$.

Уравнения (59.5) выражают в параметрической форме функцию перемещения механизма некруглых колес.

Функция передаточного отношения

$$i_{12} = \frac{1}{F'(\varphi_1)},$$

где $F(\varphi_1)$ — функция перемещения. Учитывая, что

$$F'(\varphi_1) = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi_1},$$

после дифференцирования уравнений (59.5) получим

$$i_{12} = \frac{k_1}{k_2 f'(x)}. \quad (59.6)$$

Для определения центроид ведущего и ведомого колес нужно воспользоваться уравнениями

$$\varphi_1 = k_1(x - x_1), \quad r_1 = A \frac{k_2 f'(x)}{k_1 + k_2 f'(x)}; \quad (59.7)$$

$$\varphi_2 = k_2[f(x) - f(x_1)], \quad r_2 = A \frac{k_1}{k_1 + k_2 f'(x)}. \quad (59.8)$$

В том случае, когда воспроизводимая функция задана в табличной форме, для нахождения производной следует воспользоваться численным дифференцированием; требования к точности численного дифференцирования должны определяться достижимой точностью изготовления копиров, используемых для нарезания колес.

Сформулируем требования, которым должны удовлетворять воспроизводимые функции. Используя результаты, полученные нами ранее для

функции передаточного отношения, можно утверждать следующее: *механизмом некруглых колес может быть воспроизведена функция $y = f(x)$, производная которой в интервале воспроизведения $x_2 \geq x \geq x_1$ является гладкой функцией с ограниченными и притом положительными значениями*. В случае, если $f'(x)$ выражается *гладкой, с ограниченными значениями, но знакпеременной функцией*, целесообразно воспользоваться следующим приемом: к заданной функции добавляется линейная, и новая функция $y_1 = f(x) + k_3 x$ воспроизводится некруглыми колесами. При соответствующем выборе масштабного коэффициента k_3 можно добиться, чтобы $f'(x) + k_3 > 0$. Одновременно круглыми колесами воспроизводится линейная функция $y_2 = k_3 x$. Значения y_1 и y_2 передаются в механизм для алгебраического суммирования (зубчатый дифференциал), и с выходного вала этого механизма снимается функция $y = y_1 - y_2$, первоначально заданная для воспроизведения.

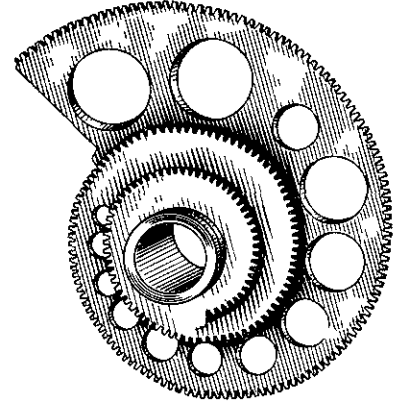


Рис 150.

Остановимся кратко на тех соображениях, которыми необходимо руководствоваться при выборе масштабных коэффициентов k_1 и k_2 в уравнениях (59.7) и (59.8).

Для обеспечения благоприятных условий передачи сил и более высокой точности воспроизведения заданной функции необходимо стремиться к большим значениям масштабных коэффициентов.

Максимальные значения масштабных коэффициентов k_1 и k_2 определяются из условий

$$k_{1\max} = \frac{\varphi_{1\max}}{x_2 - x_1}, \quad k_{2\max} = \frac{\varphi_{2\max}}{f(x_2) - f(x_1)},$$

где $\varphi_{1\max}$ и $\varphi_{2\max}$ — наибольшие возможные углы поворота ведущего и ведомого колес.

В подавляющем большинстве случаев центроиды некруглых колес, используемых для воспроизведения функций, являются незамкнутыми. Для некруглых колес с незамкнутыми центроидами, исходя из условий нарезания зубцов, допускают $\varphi_{\max} = 300^\circ \div 330^\circ$. Ограничения, связанные с выбором масштабных коэффициентов, можно в значительной мере устранить применением многовитковых некруглых колес (рис. 150), для которых можно принять $\varphi_{\max} \approx 6\pi$.

При передаче вращения валы многовитковых некруглых колес должны иметь возможность осевых перемещений.

§ 60. Замкнутые центроиды

При передаче некруглыми колесами непрерывного вращательного движения их центроиды должны быть замкнутыми.

Определим, какие условия обеспечивают замкнутость центроид.

При заданной функции передаточного отношения центроид ведущего колеса выражается уравнением (59.1)

$$r_1 = A \frac{1}{1 + i_{12}} = r_1(\varphi_1),$$

где

$$i_{12} = f(\varphi_1).$$

Для замкнутости центроиды ведущего колеса необходимо, чтобы функция передаточного отношения i_{12} была периодической и ее период T удовлетворял соотношению $T = T_1/n_1$, где T_1 — период оборота ведущего колеса, а n_1 — целое число.

Действительно, при таком периоде значения функции $r_1(\varphi_1)$ повторяются при углах поворота φ_1 , кратных $2\pi/n_1$, и при $\varphi_1 = 2\pi$ модуль радиуса-вектора центроиды будет иметь то же значение, что при $\varphi_1 = 0$.

Рассмотрим теперь условия замкнутости второй центроиды.

Из уравнений (59.2) ведомой центроиды

$$r_2 = A \frac{i_{12}}{1 + i_{12}} = r_2(\varphi_1), \quad \varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}}$$

видно, что, если i_{12} — периодическая функция с периодом $T = T_1/n_1$, значения r_2 также повторяются при углах поворота φ_1 , кратных $2\pi/n_1$.

Для того чтобы центроида ведомого колеса была замкнутой, этого недостаточно: нужно поставить дополнительное требование, выражающееся в том, чтобы значения r_2 повторялись при углах φ_2 , кратных $2\pi/n_2$, где n_2 — целое число. В этом случае модуль r_2 радиуса-вектора центроиды будет иметь одно и то же значение при $\varphi_2 = 0$, при $\varphi_2 = 2\pi/n_2$ и, следовательно, при $\varphi_2 = 2\pi$.

Поставленное требование будет соблюдено, если

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{\frac{2\pi}{n_1}} \frac{d\varphi_1}{i_{12}}. \quad (60.1)$$

Уравнением (60.1) выражается требование, чтобы при угле поворота ведущего колеса $\varphi_1 = 2\pi/n_1$ угол поворота ведомого колеса имел значение $\varphi_2 = 2\pi/n_2$, следовательно, выражается требование соизмеримости периодов оборотов колес, т. е. $T_1/T_2 = n_2/n_1$, где n_1 и n_2 — целые числа.

Из всего изложенного следует:

Для замкнутости центроид некруглых колес необходимо, чтобы функция передаточного отношения была периодической и ее период T был связан с периодами T_1 и T_2 оборотов колес соотношениями

$$T = \frac{T_1}{n_2} = \frac{T_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — целые числа.

Рассмотрим теперь такой случай: задана в виде замкнутой кривой центроида одного из колес, например ведущего, и требуется определить, при каких условиях центроида ведомого колеса будет также замкнутой, причем за n_1 целых оборотов ведущего колеса ведомое должно сделать n_2 целых оборотов.

Пусть центроида ведущего колеса задана уравнением

$$r_1 = r_1(\varphi_1).$$

Из уравнения (60.1)

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{\frac{2\pi}{n_1}} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} = \int_0^{\frac{2\pi}{n_1}} \frac{r_1(\varphi_1)}{A - r_1(\varphi_1)} d\varphi_1 \quad (60.2)$$

следует, что замкнутость центроида второго колеса обеспечивается выбором определенного значения A межцентрового расстояния некруглых колес.

Проиллюстрируем полученный результат на таком примере: в передаче, составленной из пары некруглых колес, одно из колес имеет эллиптическую центроиду с центром вращения в фокусе эллипса (рис. 151). Эллиптическая центроида имеет следующие размеры: длина большой оси $2a$, длина малой оси $2b$, расстояние между фокусами $2c$, длина хорды, проведенной через фокус эллипса перпендикулярно большой оси эллипса, — $2p$, эксцентриситет эллипса $e = \frac{c}{a}$.

Как известно, значения a и p связаны зависимостью

$$p = a(1 - e^2).$$

Уравнение эллипса в полярной форме представим в следующем виде:

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1}.$$

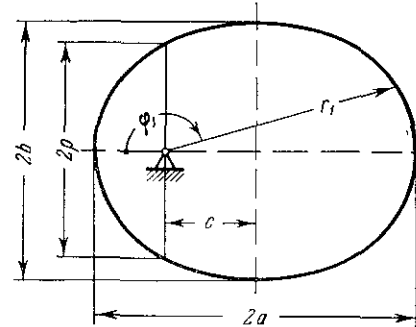


Рис. 151.

При проектировании второго колеса, сопряженного с эллиптическим, необходимо прежде всего определить, каково должно быть расстояние между осями колес для того, чтобы центроида второго колеса была очерчена замкнутой кривой.

Для этого решим уравнение (60.2), учитывая, что в рассматриваемом случае $n_1 = 1$, так как период функции $r_1(\varphi_1)$, а следовательно, и период функции передаточного числа i_{12} , равен периоду оборота ведущего колеса. Очевидно, что в этом случае n_2 равно числу оборотов n ведущего колеса, совершаемых им за один оборот ведомого.

Подставив выражение для r_1 в уравнение (60.2), получим

$$\frac{2\pi}{n} = \int_0^{2\pi} \frac{p}{A - p + Ae \cos \varphi_1} d\varphi_1 = 2\pi \frac{p}{\sqrt{(A-p)^2 - A^2e^2}},$$

$$A = \frac{p}{1 - e^2} [1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e^2)}]. \quad (60.3)$$

Если за один оборот ведущего колеса ведомое также совершает один оборот, т. е. $n = 1$, то межцентровое расстояние

$$A = \frac{2p}{1 - e^2} = 2a.$$

При этом центроида второго колеса также является эллиптической.

Перейдем теперь к определению условий замкнутости центроид некруглых колес, проектируемых для воспроизведения функции $y = f(x)$ в интервале $x_2 \geq x \geq x_1$.

Анализируя уравнения (59.7) и (59.8) центроид, можно установить, что центроиды будут замкнутыми при соблюдении следующих требований:

а) производная воспроизводимой функции должна быть периодической функцией с периодом $\frac{x_2 - x_1}{n_1}$, где n_1 — целое число;

б) масштабные коэффициенты k_1 и k_2 должны удовлетворять соотношениям:

$$k_1 = \frac{2\pi}{x_2 - x_1}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

§ 61. Условия выпуклости центроид

Кривая, определяющая центроиду некруглого колеса, может иметь как выпуклые, так и вогнутые участки, что нужно выяснить заранее, при проектировании колес, для выбора соответствующей схемы нарезания зубцов и вида зуборезного инструмента. При наличии на центроиде вогнутых участков нарезание зубцов должно, как правило, основываться на использовании не червячной фрезы, а долбяка.

Выясним условия отсутствия вогнутости центроид.

Как уже указывалось, центроида колеса при выбранном значении межцентрового расстояния однозначно определяется функцией передаточного отношения. Предполагается, что функция передаточного отношения i_{12} является гладкой и поэтому при всех значениях углов поворота функция i_{12} имеет непрерывную производную.

При отсутствии вогнутости центроиды радиус кривизны $\rho > 0$. Если же центроида некруглого колеса имеет выпукло-вогнутые очертания, на центроиде колеса имеется такая точка, в которой радиус кривизны принимает значение бесконечности.

Радиус кривизны центроиды как кривой, заданной в полярной форме, выражается следующим уравнением:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}}. \quad (61.1)$$

Используя уравнение (61.1), условие отсутствия вогнутости ($\rho > 0$) представим в таком виде:

$$r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2} \geq 0. \quad (61.2)$$

Запишем условия отсутствия вогнутости отдельно для ведущей и ведомой центроид.

Применительно к ведущей центроиде имеем

$$r_1^2 + 2 \left(\frac{dr_1}{d\varphi_1} \right)^2 - r_1 \frac{d^2r_1}{d\varphi_1^2} \geq 0, \quad (61.3)$$

где r_1 согласно уравнению (59.1) выражается так:

$$r_1 = A \frac{1}{1 + i_{12}}.$$

Произведя дифференцирование, найдем

$$\frac{dr_1}{d\varphi_1} = -A \frac{i'_{12}}{(1 + i_{12})^2},$$

где $i'_{12} = \frac{d}{d\varphi_1} (i_{12})$,

$$\frac{d^2r_1}{d\varphi_1^2} = -A \frac{(1 + i_{12}) i''_{12} - 2 (i'_{12})^2}{(1 + i_{12})^3}.$$

Подставив найденные выражения $dr_1/d\varphi_1$ и $d^2r_1/d\varphi_1^2$ в неравенство (61.3), после преобразований получим, что центроида ведущего некруглого колеса не будет иметь вогнутости, если

$$1 + i_{12} + i''_{12} \geq 0. \quad (61.4)$$

Применительно к центроиду ведомого колеса имеем

$$r_2^2 + 2 \left(\frac{dr_2}{d\varphi_2} \right)^2 - r_2 \frac{d^2 r_2}{d\varphi_2^2} \geq 0. \quad (61.5)$$

Используя уравнения (59.2) ведомой центроиды, найдем

$$\begin{aligned} r_2 &= A \frac{i_{12}}{1 + i_{12}}, \\ \frac{dr_2}{d\varphi_2} &= A \frac{i_{12} i'_{12}}{(1 + i_{12})^2}, \\ \frac{d^2 r_2}{d\varphi_2^2} &= A \frac{(1 + i_{12}) [(i'_{12})^2 + i_{12} i''_{12}] - 2 i_{12} (i'_{12})^2}{(1 + i_{12})^3} i_{12}. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения для r_2 , $dr_2/d\varphi_2$ и $d^2 r_2/d\varphi_2^2$, неравенство (61.5) представим в следующем виде:

$$1 + i_{12} + (i'_{12})^2 - i_{12} i''_{12} \geq 0. \quad (61.6)$$

В предельном случае, когда неравенства (61.5) и (61.6) обращаются в нуль, это свидетельствует о наличии на каждой из центроид колес точки, в которой $\rho = \infty$.

Пусть исходным условием для проектирования некруглых колес является заданная для воспроизведения функция $y = f(x)$.

В этом случае

$$i_{12} = \frac{k_1}{k_2 f'(x)},$$

а связь между φ_1 и x выражается уравнением

$$\varphi_1 = k_1 (x - x_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} i'_{12} &= \frac{d}{d\varphi_1} (i_{12}) = \frac{d}{dx} (i_{12}) \frac{dx}{d\varphi_1} = -\frac{1}{k_2} \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}, \\ i''_{12} &= \frac{1}{k_2 k_1} \frac{2 [f''(x)]^2 - f'(x) f'''(x)}{[f'(x)]^3}. \end{aligned}$$

Подставив найденные выражения для i_{12} , i'_{12} и i''_{12} в неравенства (61.4) и (61.6), условия отсутствия вогнутости центроид представим в следующем виде:

для ведущего колеса

$$k_1 k_2 [f'(x)]^3 + k_1^2 [f'(x)]^2 + 2 [f''(x)]^2 - f'''(x) f'(x) \geq 0, \quad (61.7)$$

для ведомого колеса

$$k_2 [f'(x)]^3 [k_1 + k_2 f'(x)] + f'(x) f'''(x) - [f''(x)]^2 \geq 0. \quad (61.8)$$

Условия отсутствия вогнутости центроид определяются в основном функцией, заданной для воспроизведения, поскольку выбор масштабных коэффициентов k_1 и k_2 связан с условиями передачи сил и с точностью механизма некруглых колес (см. § 68).

Пример 21. Найдем условие отсутствия вогнутости центроид овальных колес. Такие колеса применяются в счетчиках расхода жидкости (см. рис. 149 и 164). Вопросы проектирования овальных колес изложены в § 64, в настоящем примере расчета мы ограничимся лишь рассмотрением условий отсутствия вогнутости их центроид.

Центроида ведущего овального колеса выражается уравнением

$$r_1 = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos 2\varphi_1}. \quad (61.9)$$

Межцентровое расстояние овальных колес

$$A = 2a.$$

Передаточное отношение механизма овальных колес определим функцией

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{A - r_1}{r_1} = \frac{1 + 2e \cos 2\varphi_1 + e^2}{1 - e^2}. \quad (61.10)$$

Так как центры ведущего и ведомого колес имеют одинаковые очертания, ограничимся лишь рассмотрением условий отсутствия вогнутости центроиды ведущего колеса, для чего воспользуемся неравенством (61.4).

Дифференцируя функцию передаточного отношения, найдем

$$i'_{12} = -\frac{4e \sin 2\varphi_1}{1 - e^2}, \quad i''_{12} = -\frac{8e \cos 2\varphi_1}{1 - e^2}.$$

Используя выражения для i_{12} и i''_{12} , неравенство (61.4) представим в такой форме:

$$1 - 3e \cos 2\varphi_1 \geq 0. \quad (61.11)$$

Так как значения $3e \cos 2\varphi_1$ изменяются в пределах $\pm 3e$, для соблюдения неравенства (61.11), определяющего условие отсутствия вогнутости центроид овальных колес, необходимо, чтобы $e \leq 1/3$. Значение $e = 1/3$ можно назвать критическим; при таком значении e радиус кривизны овальной центроиды принимает в одной точке (при $\varphi_1 = \pi/2$) значение бесконечности и овальная центроида в этой точке переходит в прямую линию.

§ 62. Сопряжение колес с одинаковыми центроидами

Изготовление парных некруглых колес заметно облегчается, если центроиды колес имеют одинаковые очертания. Известно, однако, что

одинаковые центроиды у парных некруглых колес можно получить в сравнительно редких случаях.

Обозначим функцию положения механизма некруглых колес так:

$$\varphi_2 = F(\varphi_1).$$

Докажем, что центроиды парных некруглых колес будут иметь одинаковые очертания, если

$$\varphi_{2\max} = \varphi_{1\max}$$

или

$$F(\varphi_{1\max}) = \varphi_{1\max}, \quad (62.1)$$

а функция положения $F(\varphi_1)$ такова, что при этом выполняется функциональное уравнение

$$F[\varphi_{1\max} - F(\varphi_1)] = \varphi_{1\max} - \varphi_1. \quad (62.2)$$

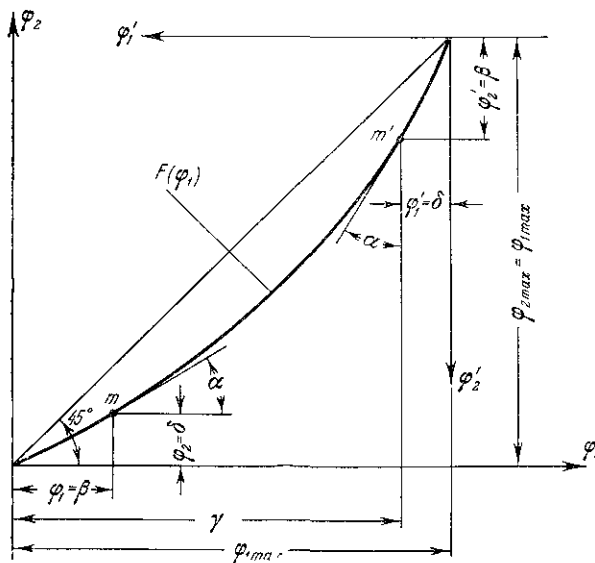


Рис. 152.

На рис. 152 изображена функция положения $F(\varphi_1)$ механизма некруглых колес, удовлетворяющая уравнениям (62.1) и (62.2). Точка m

графика этой функции определяется координатами (β, δ) , где $\varphi_1 = \beta$ и $\varphi_2 = \delta$ — углы поворота колес 1 и 2.

Введем в рассмотрение обратную функцию с новым началом отсчета, связывающую в системе координат φ'_2, φ'_1 углы поворота колес 2 и 1. Углы φ'_2 и φ'_1 отсчитываются от крайних положений колес в направлении, противоположном направлению отсчета φ_2 и φ_1 .

Сообщим колесу 2 поворот от его крайнего положения на угол $\varphi'_2 = \beta$, и пусть колесо 1 повернется при этом на угол $\varphi'_1 = \delta$. Если между углами φ_1 и φ_2 , φ'_2 и φ'_1 при всех текущих значениях соблюдается связь такого вида:

$$\varphi'_2 = \varphi_1, \quad \varphi'_1 = \varphi_2, \quad (62.3)$$

углы наклона касательной в точках m и m' функции положения будут удовлетворять условию

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi'_1}{d\varphi'_2}.$$

Это означает, что в точках центроид колес 1 и 2, соответствующих углам $\varphi_1 = \varphi'_2$, модули радиусов-векторов равны и центроиды, следовательно, имеют одинаковые очертания.

На основании (62.3) и построенный рис. 152 имеем

$$\varphi_1 = \varphi'_2 = \varphi_{2\max} - F(\gamma) = \varphi_{1\max} - F(\gamma). \quad (62.4)$$

Но

$$\gamma = \varphi_{1\max} - \varphi'_1 = \varphi_{1\max} - \varphi_2 = \varphi_{1\max} - F(\varphi_1). \quad (62.5)$$

Сопоставляя уравнения (62.4) и (62.5), получим

$$F[\varphi_{1\max} - F(\varphi_1)] = \varphi_{1\max} - \varphi_1.$$

В таком именно виде мы записали ранее функциональное уравнение (62.2), которому должна удовлетворять функция положения $F(\varphi_1)$ механизма некруглых колес для того, чтобы центроиды колес имели одинаковые очертания.

Точки m и m' функции перемещения могут быть названы сопряженными. Связь между производными в этих точках найдем в результате дифференцирования уравнения (62.2):

$$F'[\varphi_{1\max} - F(\varphi_1)] F'(\varphi_1) = 1. \quad (62.6)$$

В машиностроении нашли распространение *эллиптические колеса*. При расположении колес, изображенном на рис. 153, функция перемещения $F(\varphi_1)$ выражается уравнением

$$\varphi_2 = F(\varphi_1) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right), \quad (62.7)$$

где e — эксцентриситет эллипса.

Вывод этого уравнения будет приведен в § 64. На рис. 153 φ_1 — полярный угол центроиды колеса, равный по величине углу поворота этого колеса, но отсчитываемый в противоположном направлении. У колес с эллиптическими центроидами при $\varphi'_2 = \varphi_1$ радиусы-векторы r_1 и r_2 равны по модулю.

Легко удостовериться, что при функции перемещения, выражаемой уравнением (62.7), удовлетворяется функциональное уравнение (62.2).

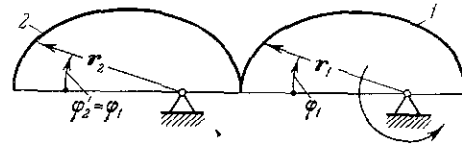


Рис. 153.

При $\varphi_{1\max} = \pi$, используя обозначение $F(\varphi_1) = \varphi_2$, уравнению (62.2) придадим такую форму:

$$F(\pi - \varphi_2) = \pi - \varphi_1.$$

Используя выражение (62.7) для F , получим

$$2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi_2}{2} \right) \right] = \pi - \varphi_1.$$

Выполнив преобразования, найдем

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi_1}{2} \right) = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi_2}{2} \right)$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2},$$

что совпадает с выражением (62.7).

Это и является доказательством того, что функциональное уравнение (62.2) действительно соблюдается, если функция перемещения колес выражается уравнением (62.7).

В одном из счетно-решающих устройств некруглые колеса применяются для воспроизведения функции $y = 1/x$ в промежутке $x_2 \geq x \geq x_1$. При этом

$$\varphi_1 = k_1(x - x_1), \quad \varphi_2 = k_2(y_1 - y) = k_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} \right), \quad (62.8)$$

где

$$k_1 = \frac{\varphi_{1\max}}{x_2 - x_1}, \quad k_2 = \frac{\varphi_{2\max}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}}.$$

Функция перемещения $F(\varphi_1)$ определится уравнением

$$\varphi_2 = F(\varphi_1) = \frac{a_2 \varphi_1}{a_3 + a_4 \varphi_1}, \quad (62.9)$$

где $a_2 = k_2$, $a_3 = k_1 x_1^2$, $a_4 = x_1$.

Если $\varphi_{2\max} = \varphi_{1\max}$, имеем

$$\varphi_{2\max} = \frac{a_2 \varphi_{1\max}}{a_3 + a_4 \varphi_{1\max}} = \varphi_{1\max}$$

и

$$\varphi_{1\max} = \frac{a_2 - a_3}{a_4}. \quad (62.10)$$

При функции перемещения (62.9) функциональное уравнение (62.2) можно записать так:

$$\frac{a_2 [\varphi_{1\max} - F(\varphi_1)]}{a_3 + a_4 [\varphi_{1\max} - F(\varphi_1)]} = \varphi_{1\max} - \varphi_1. \quad (62.11)$$

Подставив выражения (62.9) и (62.10), удостоверимся, что функциональное уравнение (62.11) соблюдается и центры некруглых колес очерчены одинаковыми кривыми.

§ 63. Простой ряд

Трехзвенным механизмом некруглых зубчатых колес может быть воспроизведена, как уже указывалось в § 59, монотонно возрастающая функция $y = f(x)$, производная которой в интервале воспроизведения $x_2 \geq x \geq x_1$ является гладкой функцией с ограниченными и притом

положительными значениями. При значительных изменениях производной воспроизводимой функции в промежутке $x_2 \gg x \gg x_1$ воспроизведение функции одной парой некруглых колес становится затруднительным вследствие значительных изменений модулей радиусов-векторов центроид некруглых колес и недопустимо больших изменений углов давлений (см. § 68).

В таких случаях воспроизведение функции в заданном промежутке становится возможным благодаря применению *простого ряда*, составленного из нескольких пар некруглых колес (рис. 154). На-

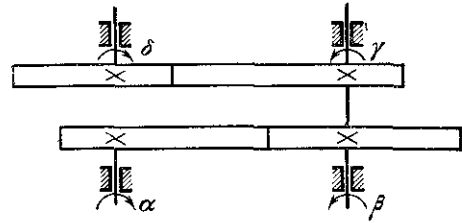


Рис. 154.

звание простого ряда в отличие от дифференциальных и планетарных рядов предполагает, что в ряде не имеется колес с подвижными осями.

Простой ряд, исходя из производственных соображений, целесообразно составить из одинаковых пар некруглых колес.

Обозначив углы поворота ведущего и ведомого колес ряда через α и δ , запишем

$$\alpha = k_1 (x - x_1), \quad \delta = k_4 (y - y_1).$$

Масштабные коэффициенты k_1 и k_4 определяются из условий

$$k_1 = \frac{\alpha_{\max}}{x_2 - x_1}, \quad k_4 = \frac{\delta_{\max}}{y_2 - y_1}.$$

При одинаковых парах некруглых колес необходимо, чтобы

$$\alpha_{\max} = \beta_{\max} = \gamma_{\max} = \delta_{\max},$$

где β и γ — углы поворота второго и третьего колес ряда, причем $\beta = \gamma$.

Введем обозначение $\psi(\alpha)$ для зависимости между углами поворота ведомого и ведущего колес простого ряда. Для того чтобы центроиды некруглых колес простого ряда имели попарно одинаковые очертания, необходимо удовлетворить функциональному уравнению

$$\psi(\alpha) = f(f(\alpha)), \quad (63.1)$$

где $f(\alpha)$ — зависимость между углами поворота колес первой пары.

Функциональным уравнением (63.1) выражается условие, что зависимость между углами поворота колеса каждой пары записывается одним уравнением

$$\beta = f(\alpha); \quad \delta = f(\beta).$$

Решение функционального уравнения (63.1) заключается в том, чтобы по заданной функции $\psi(\alpha)$ найти $f(\alpha)$. Точное решение этого уравнения возможно, по-видимому, для ограниченных классов функций. Так, если

$$\psi(\alpha) = a\alpha^n, \quad (63.2)$$

то

$$f(\alpha) = a^{\frac{1}{1+\sqrt[n]{n}}} \alpha^{\sqrt[n]{n}}. \quad (63.3)$$

В случае дробно-линейной функции, т. е. если

$$\psi(\alpha) = \frac{1 + a_2 \alpha}{a_3 + a_4 \alpha}, \quad (63.4)$$

то

$$f(\alpha) = \frac{1 + b_2\alpha}{b_3 + b_4\alpha}, \quad (63.5)$$

где

$$b_2 = a_2 \pm \sqrt{a_2 a_3 - a_4}, \quad b_3 = a_3 \pm \sqrt{a_2 a_3 - a_4}, \quad b_4 = a_4.$$

При воспроизведении функции $y = 1/x$ в промежутке $x_2 \gg x \gg x_1$ зависимость между углами поворота колес простого ряда имеет такой вид:

$$\psi(\alpha) = \frac{a_2\alpha}{a_3 + a_4\alpha}, \quad (63.6)$$

где $a_2 = k_4$, $a_3 = k_1 x_1^2$, $a_4 = x_1$, $\alpha = k_1(x - x_1)$.

Масштабные коэффициенты k_1 и k_4 определяются из соотношений

$$k_1 = \frac{\alpha_{\max}}{x_2 - x_1}, \quad k_4 = \frac{\delta_{\max}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}}.$$

Если $\psi(\alpha)$ выражается уравнением (63.6), то

$$f(\alpha) = \frac{b_2\alpha}{b_3 + b_4\alpha}, \quad (63.7)$$

где

$$b_2 = \sqrt{a_2} = \sqrt{k_4}, \quad b_3 = \sqrt{a_3} = \sqrt{k_1} x_1, \\ b_4 = \frac{a_4}{b_2 + b_3} = \frac{x_1}{\sqrt{k_4} + \sqrt{k_1} x_1}.$$

В § 62 было показано, что если функция перемещения механизма некруглых колес выражается уравнением (63.7), центроиды парных колес имеют одинаковые очертания. Следовательно, в случае воспроизведения функции $y = 1/x$ можно добиться идентичности центроидов всех четырех колес простого ряда.

Заметим также, что если

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{m} [\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} m\alpha)], \quad (63.8)$$

то

$$f(\alpha) = \frac{1}{m} [\operatorname{arctg}(\sqrt{a} \operatorname{tg} m\alpha)]. \quad (63.9)$$

Такая функция может быть воспроизведена некруглыми колесами, центроиды которых очерчены обычными (при $m = 1$) или деформированными эллипсами (см. § 64).

Нужно заметить, что если известно какое-нибудь частное значение искомой функции $f(\alpha_i)$, причем $f(\alpha_i) \neq \alpha_i$, то искомую функцию можно определить в дискретной форме, используя (рис. 155) уравнения

$$\alpha_{i+1} = f(\alpha_i), \quad f(\alpha_{i+1}) = \psi(\alpha_i). \quad (63.10)$$

Дифференцируя уравнение (63.10), получим

$$d\alpha_{i+1} = f'(\alpha_i) d\alpha_i, \quad d[f(\alpha_{i+1})] = \psi'(\alpha_i) d\alpha_i.$$

Отсюда

$$f'(\alpha_i) f'(\alpha_{i+1}) = \psi'(\alpha_i),$$

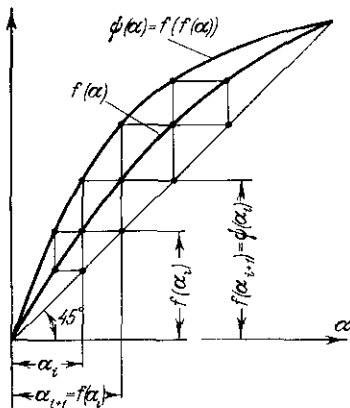


Рис. 155.

или

$$f'(\alpha) f'[f(\alpha)] = \psi'(\alpha). \quad (63.11)$$

Значения α_i и α_{i+1} , $f(\alpha_i)$ и $f(\alpha_{i+1})$ будем называть в последующем сопряженными.

В общем случае функциональное уравнение $\psi(\alpha) = f(f(\alpha))$ может быть решено приближенно. Если $g_1(\alpha)$ — приближенное решение уравнения $\psi(\alpha) = f(f(\alpha))$, необходимо, чтобы в промежутке $\alpha_{\max} \geq \alpha \geq 0$

$$|\psi(\alpha) - f(f(\alpha))| \leq \varepsilon,$$

где ε — заданное положительное число, характеризующее допускаемую неточность воспроизведения зависимости $\psi(\alpha)$.

Введем обозначение

$$\psi(\alpha) - g_1(g_1(\alpha)) = \delta(\alpha),$$

где $\delta(\alpha)$ — функция погрешностей.

Заметим, что $g_1(0) = \psi(0) = 0$, а $g_1(\alpha_{\max}) = \psi(\alpha_{\max}) = \alpha_{\max}$. При этих условиях $\delta(0) = 0$, $\delta(\alpha_{\max}) = 0$.

Обозначим через $\Delta(\alpha)$ некоторую исправляющую функцию, посредством которой для всех значений α можно уточнить найденное решение $g_1(\alpha)$. Новое решение с учетом исправляющей функции $\Delta(\alpha)$ представим в виде

$$g_2(\alpha) = g_1(\alpha) + \Delta(\alpha).$$

Нетрудно доказать, что если при α_i значение $g_1(\alpha_i)$ будет исправлено на величину $\Delta(\alpha_i)$, то сопряженное значение $g_1(\alpha_{i+1}) = g_1(g_1(\alpha_i))$ будет исправлено (с точностью до бесконечно малых первого порядка) на величину $\Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_{i+1})$.

Пусть для α_i новое приближенное решение функционального уравнения (63.1) составляет $g_2(\alpha_i) = g_1(\alpha_i) + \Delta(\alpha_i)$. Тогда $g_2(g_2(\alpha_i)) = g_2[g_1(\alpha_i) + \Delta(\alpha_i)]$. Раскладывая в ряд Тейлора по степеням $\Delta(\alpha_i)$ и ограничиваясь лишь первыми членами, получим

$$g_2[g_1(\alpha_i) + \Delta(\alpha_i)] = g_2(g_1(\alpha_i)) + \Delta(\alpha_i) g'_2(g_1(\alpha_i)).$$

При этом

$$g_2(g_1(\alpha_i)) = g_1(g_1(\alpha_i)) + \Delta(g_1(\alpha_i)) = g_1(g_1(\alpha_i)) + \Delta(\alpha_{i+1}),$$

$$g'_2(g_1(\alpha_i)) = g'_2(\alpha_{i+1}).$$

Так как $g_2(\alpha_{i+1}) = g_1(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_{i+1})$, то

$$g'_2(g_1(\alpha_i)) = g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta'(\alpha_{i+1}).$$

После преобразований получим

$$g_2(g_2(\alpha_i)) = g_1(g_1(\alpha_i)) + \Delta(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}). \quad (63.12)$$

При выводе уравнения (63.12) мы пренебрегли произведением $\Delta(\alpha_i) \Delta'(\alpha_{i+1})$, как величиной второго порядка малости, имея в виду, что $\Delta(\alpha)$ — малая и плавно изменяющаяся величина.

Разности $g_2(g_2(\alpha_i)) - g_1(g_1(\alpha_i)) = \Delta(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1})$ можно придать геометрическую интерпретацию, что и представлено на рис. 156.

На основании изложенного связь исправляющей функции с функцией погрешностей выразим уравнением

$$\Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_{i+1}) \approx \delta(\alpha_i).$$

Исправляющая функция $\Delta(\alpha)$ может быть найдена в результате численного решения системы линейных уравнений с сопряженными значениями α_i, α_{i+1}

$$\Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_{i+1}) = \delta(\alpha_i). \quad (63.13)$$

Такое решение по методу последовательных приближений ищется на сетке при достаточно густом ряде значений α_i .

Известно, что направление быстрого увеличения функции φ является направлением вектора градиента $\nabla \varphi$ [134]. Для функции

$$\varphi = a_1 x + a_2 y,$$

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Обозначим

$$\varphi = \delta(\alpha_i) = \Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_{i+1}) = a_1 x + y,$$

где $a_1 = g'_1(\alpha_{i+1})$.

Быстрейшее уменьшение $\delta(\alpha_i)$ будет иметь место, если значения $\Delta(\alpha_i)$ и $\Delta(\alpha_{i+1})$ в исходном приближении будут связаны соотношением

$$\frac{\Delta^{(0)}(\alpha_{i+1})}{\Delta^{(0)}(\alpha_i)} = \frac{1}{g'_1(\alpha_{i+1})}.$$

Обозначим $\frac{\Delta^{(0)}(\alpha_{i+1})}{\Delta^{(0)}(\alpha_i)} = \lambda_0$. Значения $\Delta^{(1)}(\alpha_i)$ на основании (63.13) найдем из уравнения

$$\Delta^{(1)}(\alpha_i) = \frac{\delta(\alpha_i)}{g'_1(\alpha_{i+1}) + \lambda_0}.$$

Используя найденную таблицу значений $\Delta^{(1)}(\alpha_i)$, находим в результате интерполирования значения $\Delta^{(1)}(\alpha_{i+1})$ и определяем

$$\lambda_1 = \frac{\Delta^{(1)}(\alpha_{i+1})}{\Delta^{(1)}(\alpha_i)}.$$

Значения $\Delta^{(2)}(\alpha_i)$ во втором приближении определяем из уравнения

$$\Delta^{(2)}(\alpha_i) = \frac{\delta(\alpha_i)}{g'_1(\alpha_{i+1}) + \lambda_1}.$$

В дальнейших шагах будем определять таблицу значений $\Delta^{(r)}(\alpha_i)$ из уравнения

$$\Delta^{(r)}(\alpha_i) = \frac{\delta(\alpha_i)}{g'_1(\alpha_{i+1}) + \lambda_{r-1}}. \quad (63.14)$$

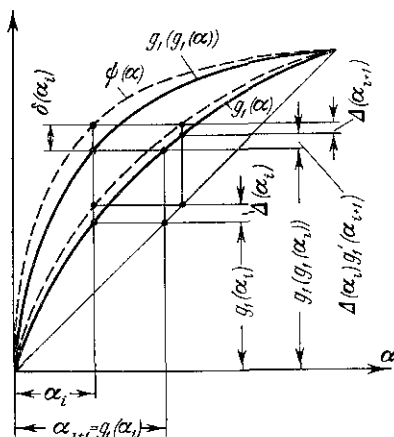


Рис. 156.

Решение будем считать удовлетворяющим по точности, если разность значений $\Delta^{(r)}(\alpha_i)$ и $\Delta^{(r-1)}(\alpha_i)$ не превышает заданной погрешности.

Отыскав по указанному методу значения исправляющей функции $\Delta(\alpha_i)$, следует выполнить контрольную проверку точности решения функционального уравнения (63.1). Приняв, что

$$g_2(\alpha) = g_1(\alpha) + \Delta(\alpha),$$

ищем новую функцию погрешностей

$$\delta(\alpha) = \psi(\alpha) - g_2(g_1(\alpha)).$$

Для удовлетворения заданной точности решения необходимо, чтобы $|\psi(\alpha) - g_2(g_1(\alpha))| \leq \varepsilon$.

Рассмотрим теперь, как могут быть заданы исходные выражения для $g_1(\alpha)$. По первому варианту примем, что

$$g_1(\alpha) = m\alpha^n.$$

Для определения неизвестных коэффициентов m и n составим следующие уравнения:

$$g_1(g_1(\alpha)) = \psi(\alpha), \quad \frac{d}{d\alpha} [g_1(g_1(\alpha))] = \psi'(\alpha).$$

Отсюда находим

$$\psi(\alpha) = m(m\alpha^n)^n = m^{n+1}\alpha^{n^2}, \quad \psi'(\alpha) = m^{n+1}n^2\alpha^{n^2-1}.$$

Следует заметить, что приведенные уравнения позволяют лишь приближенно определить искомые коэффициенты m и n , так как при дифференцировании эти коэффициенты были приняты постоянными.

После преобразований выражение для функции $g_1(\alpha)$ представим в следующем виде:

$$g_1(\alpha) = [\psi(\alpha) \alpha^n]^{\frac{1}{1+n}}, \quad (63.15)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{\alpha\psi'(\alpha)}{\psi(\alpha)}}.$$

По другому варианту выражение для функции $g_1(\alpha)$ можно найти, исходя из формулы Лагранжа для конечных приращений

$$\frac{g_1(\alpha+h) - g_1(\alpha)}{h} = g_1'(\alpha + \theta h),$$

где $0 < \theta < 1$.

Это означает, что внутри промежутка от α до $\alpha+h$ существует по крайней мере одна такая точка C (рис. 157), в которой касательная параллельна хорде AB , соединяющей концы промежутка.

Примем, что промежуток $h = g_1(\alpha) - \alpha$. Тогда

$$g_1(\alpha+h) = g_1(g_1(\alpha)) = \psi(\alpha)$$

и

$$\frac{\psi(\alpha) - g_1(\alpha)}{g_1(\alpha) - \alpha} = g_1'\{\alpha + \theta[g_1(\alpha) - \alpha]\}.$$

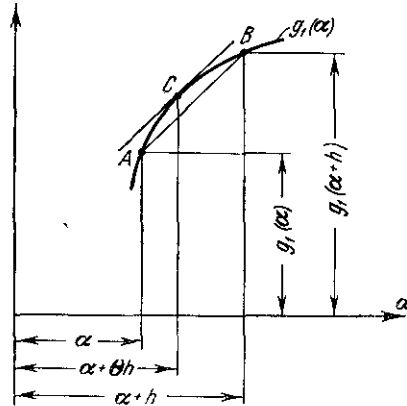


Рис. 157.

Основываясь на уравнении (63.11), можно записать, что

$$g_1'(\alpha) g_1'[g_1(\alpha)] = \psi'(\alpha).$$

По самому смыслу операции $\psi(\alpha) = g_1(g_1(\alpha))$ в случае применения для этой цели простого ряда некруглых колес искомая функция $g_1(\alpha)$ на промежутке h не должна значительно уклоняться от прямой и

$$g_1'(\alpha) \approx g_1'[g_1(\alpha)] \approx g_1'\{\alpha + \theta[g_1(\alpha) - \alpha]\}.$$

Исходя из этого, $g_1'(\alpha) \approx \sqrt{\psi'(\alpha)}$.

Тогда

$$\frac{\psi(\alpha) - g_1(\alpha)}{g_1(\alpha) - \alpha} = \sqrt{\psi'(\alpha)}.$$

После преобразований получим

$$g_1(\alpha) = \frac{\psi(\alpha) + \alpha \sqrt{\psi'(\alpha)}}{1 + \sqrt{\psi'(\alpha)}}. \quad (63.16)$$

Такое выражение для $g_1(\alpha)$ было до автора другим путем получено С. Г. Кислицыным [114].

В дискретной форме функцию $g_1(\alpha)$ можно задать, как уже указывалось, в виде таблицы сопряженных значений. Для определения исходного значения $g_1(\alpha)$ целесообразно разложить $g_1(\alpha)$ в ряд Маклорена, предполагая, что эта функция имеет хотя бы первую и вторую производные, а промежуток h достаточно мал.

Тогда

$$g_1(h) = h g_1'(0) + \frac{h^2}{2} g_1''(0), \quad (63.17)$$

так как

$$g_1(0) = 0.$$

Найдем значения производных $g_1'(0)$ и $g_1''(0)$, используя уравнение (63.11), которое, введя новые обозначения, запишем в таком виде:

$$g_1'(\alpha) g_1'[g_1(\alpha)] = \psi'(\alpha). \quad (63.18)$$

При $\alpha = 0$ $g_1(\alpha) = 0$.

Отсюда

$$[g_1'(0)]^2 = \psi'(0)$$

и

$$g_1'(0) = \sqrt{\psi'(0)}.$$

Дифференцируя уравнение (63.18), получим

$$g_1''(\alpha) g_1'[g_1(\alpha)] + g_1''[g_1(\alpha)] [g_1'(\alpha)]^2 = \psi''(\alpha).$$

При $\alpha = 0$ $g_1(0) = 0$.

На основании этого

$$g_1''(0) g_1'(0) + g_1''(0) [g_1'(0)]^2 = \psi''(0)$$

и

$$g_1''(0) = \frac{\psi''(0)}{g_1'(0) + [g_1'(0)]^2} = \frac{\psi''(0)}{\sqrt{\psi'(0)} + \psi'(0)}. \quad (63.19)$$

Подставив найденные значения $g_1'(0)$ и $g_1''(0)$ в уравнение (63.17), получим

$$g_1(h) = h \sqrt{\psi'(0)} + \frac{h^2}{2} \frac{\psi''(0)}{\sqrt{\psi'(0)} + \psi'(0)}. \quad (63.20)$$

Используя значение $g_1(h)$ как исходное, можно найти сопряженные значения при помощи уравнения (63.10). Обозначив $h = \alpha_1$, получим

$$g_1(\alpha_1) = \alpha_2, \quad g_1(\alpha_2) = \psi(\alpha_1), \quad g_1(\alpha_3) = \psi(\alpha_2), \quad \dots, \quad g_1(\alpha_n) = \psi(\alpha_{n-1}).$$

Аналогичным образом можно разложить в ряд Маклорена функцию $g_1(\alpha)$ в точке $(\alpha_{\max}, \delta_{\max})$ и определить значения $g_1(\alpha)$, используя приведенную выше процедуру. Из точек $(0, 0)$ и $(\alpha_{\max}, \delta_{\max})$ предпочтительнее та, в которой $\psi'(\alpha)$, а следовательно, и $g_1'(\alpha)$, имеет меньшее значение.

Приведем теперь уравнения для расчета центроид некруглых колес простого ряда, если в результате n приближений найдено приближенное решение $g_n(\alpha)$ функционального уравнения $g_n(g_n(\alpha)) = \psi(\alpha)$.

Для центроиды колеса 1

$$r_1 = \frac{A}{1 + \frac{1}{g_n'(\alpha)}}. \quad (63.21)$$

Для центроиды колеса 2

$$r_2 = \frac{A}{1 + g_n'(\alpha)}, \quad \beta = g_n(\alpha). \quad (63.22)$$

Центроиды колес 3 и 1, 4 и 2 имеют попарно одинаковые очертания.

Пример 22 Требуется воспроизвести функцию $y = \ln x$ в промежутке $100 \gg x \gg 1$. Ввиду значительных изменений в заданном промежутке производной воспроизводимой функции (от 1 до 0,01) в целях получения более благоприятных углов давления будем воспроизводить функцию посредством двух пар некруглых колес.

Углы поворота α и δ первого и четвертого колес простого ряда определяются уравнениями:

$$\alpha = k_1(x - 1), \quad \delta = k_4 \ln x.$$

Выберем $\alpha_{\max} = \beta_{\max} = \gamma_{\max} = \delta_{\max} = 10\pi/6$ радиан. Тогда

$$k_1 = \frac{\frac{10}{6}\pi}{99} = 0,052889, \quad k_4 = \frac{\frac{10}{6}\pi}{\ln 100} = 1,136976. \quad (63.23)$$

Функция, воспроизводимая простым рядом,

$$\delta = \psi(\alpha) = k_4 \ln \left(\frac{\alpha}{k_1} + 1 \right). \quad (63.24)$$

Отыскиваем приближенное решение функционального уравнения в виде

$$g_1(g_1(\alpha)) \approx \psi(\alpha),$$

где на основании (63.16)

$$g_1(\alpha) = \frac{\psi(\alpha) + \sqrt{\psi'(\alpha)}}{1 + \sqrt{\psi'(\alpha)}}.$$

Вычисляем α_i , $g_1(\alpha_i)$, $g_1(g_1(\alpha_i))$ и $\psi(\alpha_i)$. Напомним, что α_i и α_{i+1} — сопряженные значения, где

$$\alpha_{i+1} = g_1(\alpha_i), \quad g_1(\alpha_{i+1}) = g_1(g_1(\alpha_i)).$$

Определяем погрешность $\delta(\alpha_i) = \psi(\alpha_i) - g_1(g_1(\alpha_i))$.
Результаты выполненных вычислений сведены в таблицу VI.

Таблица VI

x	α	$g_1(\alpha)$	$g_1(g_1(\alpha))$	$\psi(\alpha)$	$\delta(\alpha)$
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
5	0,211555	0,738098	1,801134	1,829899	0,028765
10	0,475999	1,344538	2,594877	2,617994	0,023117
15	0,740443	1,804809	3,062479	3,079000	0,016521
20	1,004887	2,183817	3,394394	3,406089	0,011695
25	1,269330	2,509644	3,651516	3,659798	0,003282
30	1,533774	2,797410	3,861233	3,867095	0,005862
35	1,798218	3,056343	4,038229	4,042361	0,004132
40	2,062662	3,292550	4,191295	4,194183	0,002888
45	2,327106	3,510303	4,326106	4,328100	0,001994
50	2,591550	3,712728	4,446541	4,447893	0,001352
55	2,855994	3,902187	4,555364	4,556259	0,000895
60	3,120437	4,080512	4,654614	4,655189	0,000575
65	3,384881	4,249157	4,745868	4,746196	0,000328
70	3,649325	4,409298	4,830250	4,830455	0,000205
75	3,913769	4,561901	4,908789	4,908899	0,000110
80	4,178213	4,707767	4,982226	4,982278	0,000052
85	4,442657	4,847573	5,051186	5,051207	0,000021
90	4,707100	4,981894	5,116189	5,116195	0,000006
95	4,971544	5,111232	5,177668	5,177668	0,000000
100	5,235988	5,235988	5,235988	5,235988	0,000000

Значения исправляющей функции $\Delta(\alpha_i)$ были найдены при помощи зависимости (63.13)

$$\Delta(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta(\alpha_{i+1}) = \delta(\alpha_i).$$

В исходном приближении было принято, что

$$\lambda_0 = \frac{1}{g'_1(\alpha_{i+1})}$$

и

$$\Delta^{(1)}(\alpha_i) = \frac{\delta(\alpha_i)}{g'_1(\alpha_{i+1}) + \lambda_0}.$$

В последующих приближениях

$$\Delta^{(r)}(\alpha_i) = \frac{\delta(\alpha_i)}{g'_1(\alpha_{i+1}) + \lambda_{r-1}},$$

где

$$\lambda_{r-1} = \frac{\Delta^{(r-1)}(\alpha_{i+1})}{\Delta^{(r-1)}(\alpha_i)}.$$

Значения $\Delta^{(r-1)}(\alpha_{i+1})$, использованные для вычисления λ_{r-1} , были найдены интерполированием по значениям $\Delta^{(r-1)}(\alpha_i)$

Результаты вычислений сведены в таблицу VII. После пяти приближений была достигнута погрешность $|\delta(\alpha)| \leq 0,0001$. Через $\Delta[\delta(\alpha_i)]$ обозначена разность

$$\delta(\alpha_i) - [\Delta^{(5)}(\alpha_i) g'_1(\alpha_{i+1}) + \Delta^{(5)}(\alpha_{i+1})].$$

Таблица VII

№ п/п	x	Первое приближение					
		α_i	α_{i+1}	λ_0	$\Delta^{(1)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(1)}(\alpha_{i+1})$	
1	5	0,211555	0,738098	0,638853	0,013050	0,008242	
2	10	0,475999	1,344538	0,897517	0,011491	0,003635	
3	15	0,740443	1,804809	1,074218	0,008239	0,001889	
4	20	1,004887	2,183817	1,211230	0,005742	0,001112	
5	25	1,269331	2,509644	1,324189	0,003983	0,000680	
6	30	1,533774	2,797410	1,420012	0,002759	0,000429	
7	35	1,798218	3,056343	1,505535	0,001904	0,000276	
8	40	2,062562	3,292550	1,581170	0,001305	0,000173	
9	45	2,327106	3,510303	1,648944	0,000884	0,000111	
10	50	2,591550	3,712728	1,712207	0,000589	0,000075	
11	55	2,885994	3,902187	1,769958	0,000383	0,000046	
12	60	3,120437	4,080512	1,823616	0,000242	0,000029	
13	65	3,384881	4,249157	1,873754	0,000136	0,000017	
14	70	3,649325	4,409298	1,908500	0,000084	0,000010	
15	75	3,913769	4,561901	1,965287	0,000044	0,000006	
16	80	4,178213	4,707767	2,007384	0,000021	0,000002	
17	85	4,442657	4,847573	2,047368	0,000008	0,000001	
18	90	4,707101	4,981894	2,085478	0,000002	0,000000	
19	95	4,971544	5,111223	2,121894	0,000000	0,000000	
20	100	5,235988	5,235988	2,156776	0,000000	0,000000	
№ п/п	Второе приближение			Третье приближение			
	λ_1	$\Delta^{(2)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(2)}(\alpha_{i+1})$	λ_2	$\Delta^{(3)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(3)}(\alpha_{i+1})$	
1	0,631579	0,013094	0,014257	1,088875	0,010838	0,012833	
2	0,316322	0,016160	0,008341	0,516136	0,014179	0,007772	
3	0,229273	0,014240	0,005083	0,357645	0,012821	0,004812	
4	0,193671	0,011474	0,003292	0,295653	0,010430	0,003168	
5	0,170789	0,008944	0,002156	0,241064	0,008313	0,002084	
6	0,155476	0,006821	0,001438	0,210863	0,006408	0,001399	
7	0,145236	0,005117	0,000966	0,188853	0,004843	0,000943	
8	0,132756	0,003775	0,000622	0,164723	0,003624	0,000606	
9	0,126113	0,002721	0,000413	0,151938	0,002629	0,000405	
10	0,126700	0,001902	0,000287	0,150907	0,001840	0,000285	
11	0,120385	0,001306	0,000180	0,138177	0,001273	0,000185	
12	0,121932	0,000857	0,000119	0,138542	0,000837	0,000118	
13	0,127960	0,000495	0,000072	0,145741	0,000482	0,000067	
14	0,115619	0,000323	0,000040	0,124225	0,000318	0,000036	
15	0,122918	0,000174	0,000018	0,104597	0,000179	0,000021	
16	0,106288	0,000086	0,000019	0,137384	0,000082	0,000009	
17	0,128078	0,000033	0,000006	0,194910	0,000030	0,000005	
18	0,000000	0,000012	0,000002	0,134453	0,000009	0,000000	
19	0,000000	0,000002	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
20	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
№ п/п	Четвертое приближение			Пятое приближение			Достигнутая погрешность
	λ_3	$\Delta^{(4)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(4)}(\alpha_{i+1})$	λ_4	$\Delta^{(5)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(5)}(\alpha_{i+1})$	
1	1,184155	0,010462	0,012650	1,209126	0,010368	0,012633	0,000097
2	0,048091	0,013907	0,007700	0,553689	0,013860	0,007679	0,000005
3	0,375341	0,012648	0,004780	0,377950	0,012622	0,004779	0,000009

Продолжение табл. VII

№ п/п	Четвертое приближение			Пятое приближение			Достигнутая погрешность
	λ_3	$\Delta^{(4)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(4)}(\alpha_{i+1})$	λ_4	$\Delta^{(5)}(\alpha_i)$	$\Delta^{(5)}(\alpha_{i+1})$	
4	0,303717	0,010356	0,003158	0,304975	0,010344	0,003152	0,000003
5	0,250712	0,008234	0,002075	0,252031	0,008223	0,002061	0,000011
6	0,218260	0,006357	0,001386	0,218058	0,006309	0,001383	0,000038
7	0,194639	0,004810	0,000937	0,194798	0,004809	0,000936	0,000001
8	0,167297	0,003612	0,000609	0,168507	0,003606	0,000604	0,000003
9	0,153942	0,002622	0,000410	0,156298	0,002614	0,000406	0,000003
10	0,154954	0,001830	0,000296	0,161584	0,001813	0,000293	0,000000
11	0,145538	0,001260	0,000183	0,145158	0,001261	0,000178	0,000004
12	0,141013	0,000834	0,000119	0,142720	0,000832	0,000115	0,000004
13	0,138238	0,000488	0,000071	0,145961	0,000482	0,000068	0,000003
14	0,114285	0,000323	0,000039	0,119319	0,000321	0,000036	0,000002
15	0,115513	0,000176	0,000023	0,129545	0,000172	0,000022	0,000001
16	0,110840	0,000086	0,000012	0,110023	0,000082	0,000018	0,000000
17	0,160000	0,000032	0,000006	0,201255	0,000030	0,000006	0,000000
18	0,000000	0,000012	0,000000	0,000000	0,000012	0,000000	0,000000
19	0,000000	0,000002	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
20	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

§ 64. Преобразованные эллиптические колеса

В машиностроении весьма часто исходным условием для проектирования некруглых колес является закон изменения передаточного отношения $i_{21} = \omega_2/\omega_1 = f(\varphi_1)$. Исходя из назначения механизма некруглых колес в машине, во многих случаях можно было бы ограничиться указанием максимального и минимального значений передаточного отношения i_{21} и углов поворота, при которых $i_{21} = i_{21\max}$ и $i_{21} = i_{21\min}$. Для оценки же динамических условий работы механизма некруглых колес, а также для определения параметров зацепления, по которым рассчитываются копиры зуборезных станков, необходимо иметь полные данные о функции передаточного отношения. Таким образом, задача заключается в выборе наиболее целесообразных выражений для функции $i_{21} = f(\varphi_1)$. Во многих случаях проектирования можно воспользоваться типовыми функциями передаточного отношения, что позволит свести применение некруглых колес в машиностроении к ограниченному числу различных видов.

Функция передаточного отношения в общем случае должна быть несимметричной, т. е. наибольшее и наименьшее значения передаточного отношения должны наступать через неравные доли оборота ведущего колеса.

Известными до последнего времени в машиностроении разновидностями некруглых колес можно было осуществить передачу вращения с симметричным законом изменения передаточного отношения. В настоящем параграфе указываются принципы образования и аналитический расчет передач с несимметричной функцией передаточного отношения.

Необходимость применения некруглых колес с несимметричным законом изменения передаточного отношения вызывается следующими причинами: а) рабочий и «холостой» ходы механизма в целях повышения производительности должны совершаться за различные промежутки времени; поэтому механизмы с симметричным характером рабочего и «холостого» ходов целесообразно приводить в движение от некруглых колес

с несимметричным законом изменения передаточного отношения; б) в ряде случаев необходимо уравнивать промежутки времени рабочих ходов механизма некруглых колес и других параллельно работающих механизмов, что легко выполнить при соответствующей асимметрии передаточного отношения.

Будем считать, что при проектировании некруглых колес с несимметричной функцией i_{21} заданы $i_{21 \max}$ и $i_{21 \min}$; известно также, что $i_{21} = i_{21 \max}$ при $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_1 = 2\pi$, а $i_{21} = i_{21 \min}$ при $\varphi_1 = \pi/m_1$.

Период функции i_{21} равен периоду одного оборота первого колеса. Среднее передаточное отношение равно $1/n$, где n — целое число оборотов первого колеса, совершаемых им за один оборот второго.

Обратимся к рис. 158, на котором изображены функции передаточного отношения i_{21} . Будем считать, что i_{21} задана двумя гладкими функциями I и II , причем для функции I $\frac{\pi}{m_1} \geq \varphi_1 \geq 0$, а для функции II $2\pi \geq \varphi_1 \geq \frac{\pi}{m_1}$. В точке с абсциссой $\varphi_1 = \frac{\pi}{m_1}$ кривые I и II имеют общую касательную.

При передаче непрерывного вращательного движения центроиды некруглых колес должны быть очерчены замкнутыми кривыми. Условия замкнутости центроид были рассмотрены ранее (§ 60).

Исходя из этих условий, можно установить, что центроида первого некруглого колеса будет очерчена замкнутой кривой, поскольку период функции передаточного отношения i_{21} равен периоду оборота первого колеса. Для замкнутости же центроиды второго колеса необходимо, согласно ранее сформулированному условию, чтобы период T функции i_{21} был равен периоду T_2/n , где T_2 — период оборота второго колеса. Иными словами, необходимо, чтобы за один оборот первого колеса второе колесо повернулось на угол $\varphi_2 = \frac{2\pi}{n}$, где n — целое число. Это условие, учитывая, что $i_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$, запишем так:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m_1}} i_{21}^I d\varphi_1 + \int_{\frac{\pi}{m_1}}^{2\pi} i_{21}^{II} d\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}. \quad (64.1)$$

В настоящей работе функции i_{21}^I и i_{21}^{II} передаточного отношения предлагается выразить уравнениями:

$$i_{21}^I = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-t^2}{1-2t \cos m_1 \varphi_1 + t^2}, \quad (64.2)$$

где $\frac{\pi}{m_1} \geq \varphi_1 \geq 0$,

$$i_{21}^{II} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-t^2}{1-2t \cos [m_1 (2\pi - \varphi_1)] + t^2}, \quad (64.3)$$

где $2\pi \geq \varphi_1 \geq \frac{\pi}{m_1}$.

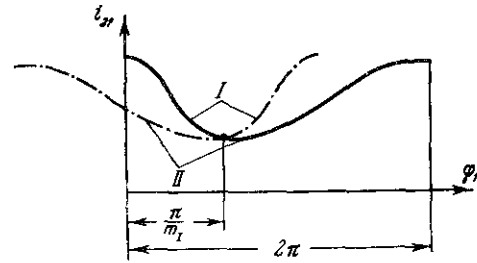


Рис. 158.

Используя выражения (64.2) и (64.3) для функций передаточного отношения, легко установить, что при выбранном характере функции i_{21}^I и i_{21}^{II} условие (64.1) замкнутости второй центроиды действительно соблюдается.

Найдем связь между коэффициентами m_I и m_{II} , характеризующими асимметрию функции передаточного отношения i_{21} . При $\varphi_1 = \pi/m_I$ функции i_{21}^I и i_{21}^{II} должны иметь равные значения, что приводит, как это видно из уравнения (64.2) и (64.3), к следующему условию:

$$\pi = m_{II} \left(2\pi - \frac{\pi}{m_I} \right).$$

Следовательно,

$$m_{II} = \frac{m_I}{2m_I - 1}. \quad (64.4)$$

Исходя из уравнений (64.2) и (64.3), найдем

$$i_{21 \max} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+t}{1-t}, \quad i_{21 \min} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-t}{1+t},$$

$$\frac{i_{21 \max}}{i_{21 \min}} = \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^2.$$

Найдем уравнение центроиды первого колеса, используя зависимость (59.1):

$$r_1^I = A \frac{\frac{1-t^2}{(n+1)+t^2(n-1)}}{1 - \frac{2tn}{(n+1)+t^2(n-1)} \cos m_I \varphi_1}, \quad (64.5)$$

где $\frac{\pi}{m_I} \geq \varphi_1 \geq 0$,

$$r_1^{II} = A \frac{\frac{1-t^2}{(n-1)+t^2(n-1)}}{1 - \frac{2tn}{(n+1)+t^2(n-1)} \cos [m_{II} (2\pi - \varphi_1)]}, \quad (64.6)$$

где $2\pi \geq \varphi_1 \geq \frac{\pi}{m_I}$.

Кривые, выражаемые уравнениями (64.5) и (64.6), можно интерпретировать как результат своеобразного преобразования («деформации») эллипса, состоящего в том, что при сохранении модуля радиуса-вектора соответствующий полярный угол уменьшается на верхней половине эллипса в m_I , а на нижней половине — в m_{II} раз. Это иллюстрируется построениями, приведенными на рис. 159, при выполнении которых принято, что $m_{II} < 1$.

При такой деформации эллипса сумма наибольшего и наименьшего радиусов-векторов полученной кривой окажется равной $2a$, где $2a$ — большая ось эллипса. Уравнения кривых r_1^I и r_1^{II} , полученных в результате деформации эллипса, можно представить в следующем виде:

$$r_1^I = \frac{a_1 (1-e_1^2)}{1-e_1 \cos m_I \varphi_1} = \frac{p}{1-e_1 \cos m_I \varphi_1}, \quad (64.7)$$

где $\frac{\pi}{m_I} \geq \varphi_1 \geq 0$,

$$r_1^{II} = \frac{a_1 (1-e_1^2)}{1-e_1 \cos [m_{II} (2\pi - \varphi_1)]} = \frac{p}{1-e_1 \cos [m_{II} (2\pi - \varphi_1)]}, \quad (64.8)$$

где $2\pi \geq \varphi_1 \geq \frac{\pi}{m_I}$.

В этих уравнениях: $2r$ — длина хорды, проведенной через фокус эллипса, перпендикулярно большой оси эллипса; e_1 — эксцентриситет эллипса.

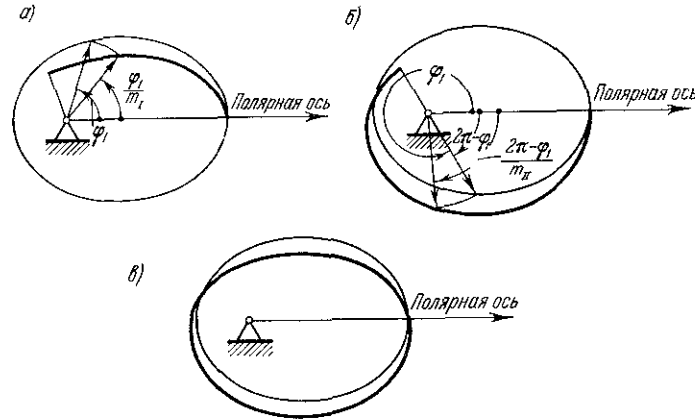


Рис. 159.

Сопоставляя уравнения (64.7) и (64.8) с уравнениями (64.5) и (64.6), получим

$$e_1 = \frac{2tn}{(n+1) + t^2(n-1)}, \quad (64.9)$$

$$a_1 = A \frac{(n+1) + t^2(n-1)}{(n+1)^2 - t^2(n-1)^2}. \quad (64.10)$$

При $n=1$ выражения для e_1 и a_1 упрощаются, а именно:

$$e_1 = t, \quad a_1 = \frac{A}{2}.$$

Исключая из уравнений (64.9) и (64.10) параметр t , зависимость между A , a_1 , e_1 и n представим в следующем виде:

$$A = a_1 [1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e_1^2)}]. \quad (64.11)$$

Найдем функцию положения рассматриваемых колес, для чего используем выражение

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} i_{21} d\varphi_1.$$

В результате интегрирования, после преобразований получим

$$\operatorname{tg} \frac{nm_1\varphi_2}{2} = \frac{1+t}{1-t} \operatorname{tg} \frac{m_1\varphi_1}{2}, \quad (64.12)$$

где $\frac{\pi}{m_1} \gg \varphi_1 > 0$,

$$\operatorname{tg} \frac{m_{II}(2\pi - n\varphi_2)}{2} = \frac{1+t}{1-t} \operatorname{tg} \frac{m_{II}(2\pi - \varphi_1)}{2}, \quad (64.13)$$

где $2\pi \gg \varphi_1 \gg \frac{\pi}{m_1}$.

Уравнения центроиды второго колеса можно представить так:

$$r_2 = A - r_1, \quad \varphi_2 = F(\varphi_1),$$

где $F(\varphi_1)$ — функция положения некруглых колес.

После ряда преобразований уравнение центроиды второго колеса представим в такой форме:

$$r_2^I = \frac{a_1(1-e_1^2)n^2}{\sqrt{1+(n^2-1)(1-e_1^2)} + e_1 \cos nm_1\varphi_2}, \quad (64.14)$$

где $\frac{\pi}{m_1 n} \gg \varphi_2 \gg 0$,

$$r_2^{II} = \frac{a_1(1-e_1^2)n^2}{\sqrt{1+(n^2-1)(1-e_1^2)} + e_1 \cos m_{II}(2\pi - n\varphi_2)}, \quad (64.15)$$

где $\frac{2\pi}{n} \gg \varphi_2 \gg \frac{\pi}{m_1 n}$.

Уравнения (64.14) и (64.15) определяют участок центроиды второго некруглого колеса, который n раз повторяется на всей центроиде этого колеса.

Участки I и II центроиды второго колеса, выражаемые уравнениями (64.14) и (64.15), можно получить в результате деформации эллипса, при которой сохраняется модуль радиуса-вектора, а полярный угол уменьшается на участке I в nm_1 раз, а на участке II — в nm_{II} раз. Уравнениям участков I и II такого деформированного эллипса можно придать следующий вид:

$$r_2^I = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1 + e_2 \cos nm_1\varphi_2}, \quad (64.16)$$

где $\frac{\pi}{m_1 n} \gg \varphi_2 \gg 0$,

$$r_2^{II} = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1 + e_2 \cos [m_{II}(2\pi - n\varphi_2)]}, \quad (64.17)$$

где $\frac{2\pi}{n} \gg \varphi_2 \gg \frac{\pi}{m_1 n}$.

В этих уравнениях e_2 и a_2 — эксцентриситет и большая полуось эллипса, деформируемого для образования центроиды второго колеса.

Параметры эллипсов, выбираемых для деформации при образовании центроид первого и второго колес, связаны следующими соотношениями:

$$e_2 = \frac{e_1}{\sqrt{1+(n^2-1)(1-e_1^2)}}, \quad (64.18)$$

$$a_2 = a_1 \sqrt{1+(n^2-1)(1-e_1^2)}. \quad (64.19)$$

При $n=1$ центроида второго колеса имеет такие же очертания, как и центроида первого колеса (рис. 160); угол $O_1\hat{O}_2K$ между наибольшими радиусами-векторами обеих центроид равен π/m_1 .

Таким образом, мы получили следующий важный результат: *если участок одной из центроид некруглых колес представляет деформированный эллипс с коэффициентом деформации m , то соответствующий участок сопряженной центроиды будет также деформированным эллипсом с коэффициентом деформации nm , где $1/n$ — среднее значение функции передаточного числа i_{21} .*

В нашей книге [172] приведены зависимости, необходимые для определения длины дуги деформированных эллипсов, выбора модуля, эксцентриситета исходного эллипса и т. д.

На рис. 160 изображены центроиды некруглых колес, рассчитанные при следующих данных: $m_1 = 3/2$, $n = 1$, $e_1 = 0,5$. На этом же рисунке приведены построения, выполненные для преобразования точек A , B , C , D первичных эллипсов в точки A' , B' , C' , D' деформированных эллипсов.

На рис. 161 изображены центроиды некруглых колес, при расчете которых приняты следующие данные: $m_1 = 3/2$, $n = 2$, $e_1 = 2/\sqrt{67}$.

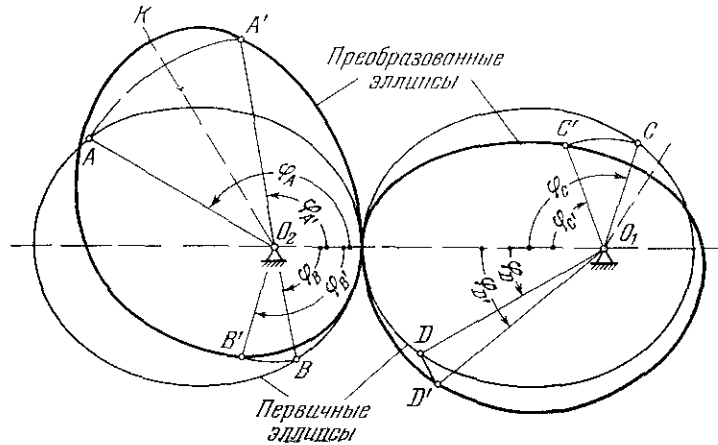


Рис. 160.

Изложенный принцип деформации симметричных центроид некруглых колес для воспроизведения движения с несимметричной функцией i_{21} является общим и может быть применен не только для эллиптических колес, рассмотренных в настоящем параграфе.

Однако именно случай преобразования эллиптических центроид должен найти наибольшее распространение, что объясняется следующим: а) при среднем передаточном отношении, равно единице, центроиды сопряженных колес очерчены одинаковыми кривыми, что значительно упрощает изготовление; б) при проектировании таких колес упрощается ряд расчетов: определение длины дуги центроиды, для чего используется эллиптический интеграл второго рода; определение межцентрового расстояния колес из условий замкнутости центроид; расчет зависимости между углами поворота некруглых колес и т. п.

Зависимости, приведенные нами для общего случая эллиптических колес, могут быть использованы для расчета эллиптических колес обычного вида, а также так называемых овальных колес.

В случае обычных эллиптических колес центроида хотя бы одного из парных колес представляет недеформированный эллипс.

В выражениях для i_{21} и в других зависимостях, приведенных в настоящем параграфе, необходимо положить $m_1 = m_{II} = 1$.

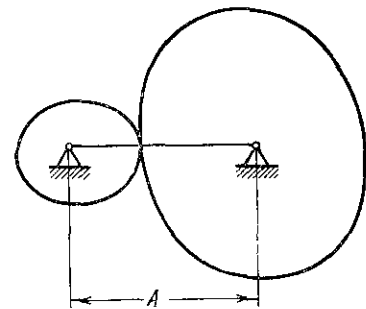


Рис. 161.

При этом получим

$$i_{21} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e_1^2}{1 - 2e_1 \cos \varphi_1 + e_1^2}, \quad (64.20)$$

где e_1 — эксцентриситет первого колеса,

$$\operatorname{tg} \frac{n\varphi_2}{2} = \frac{1 + e_1}{1 - e_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}. \quad (64.21)$$

Центроида первого колеса является эллипсом, а сопряженная центроида будет деформированным эллипсом. При этом деформация основывается на том, что, сохраняя величину модуля радиуса-вектора, полярный угол уменьшают в n раз, где n — среднее передаточное число. Параметры

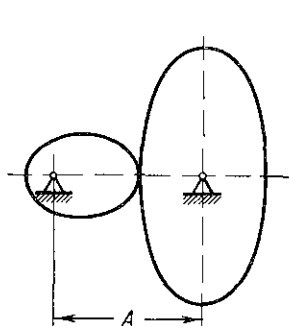


Рис. 162.

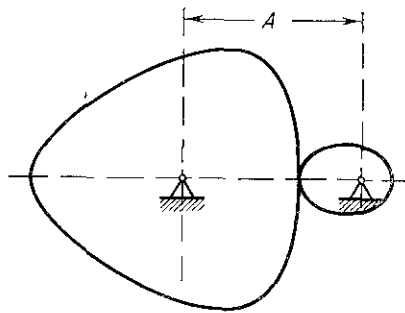


Рис. 163.

эллипса, которым очерчена центроида первого колеса, и параметры эллипса, деформируемого для образования центроиды второго колеса, связаны зависимостями (64.18) и (64.19).

Межцентровое расстояние колес

$$A = a_1 [1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e_1^2)}].$$

При $n = 1$ центроида второго колеса очерчена таким же эллипсом, как и центроида первого колеса, $A = 2a_1$.

В этом случае целесообразно число зубцов эллиптического колеса выбирать нечетным, что позволяет выполнить оба колеса идентичными в отношении зубцов и простейшим образом соблюсти в начале резания соответствие установок инструмента по отношению к центроидам парных колес.

Центроиды парных колес, одно из которых является эллиптическим, вычисленные при $n = 2$ и $n = 3$, изображены на рис. 162 и 163.

Эллиптические центроиды сопряженных колес можно преобразовать в овальные, если, сохраняя модуль радиуса-вектора эллиптической центроиды, уменьшить в целое число раз полярный угол, определяющий положение соответствующего радиуса-вектора эллиптической центроиды. В результате можно получить некруглые колеса с двумя, тремя и другим числом овалов, в зависимости от того, во сколько раз (в два, в три и т. д.) уменьшается полярный угол радиуса-вектора эллиптической центроиды.

На практике нашли широкое распространение некруглые колеса с двукратными овалами (рис. 164, а, б). Такие колеса применяются в счет-

чиках расхода жидкостей (рис. 149). Их центры имеют по отношению к центру вращения четыре симметричных участка и равные значения наибольших радиусов-векторов. Каждое из овальных колес за один оборот дважды отсекает некоторый объем жидкости, заключенный между внутренним круговым цилиндром корпуса и овальным цилиндром некруглого колеса. Следовательно, за один оборот ведомой или ведущей оси будут отсечены четыре таких объема.

Зависимости для расчета некруглых колес, полученные в предположении несимметричного зако-

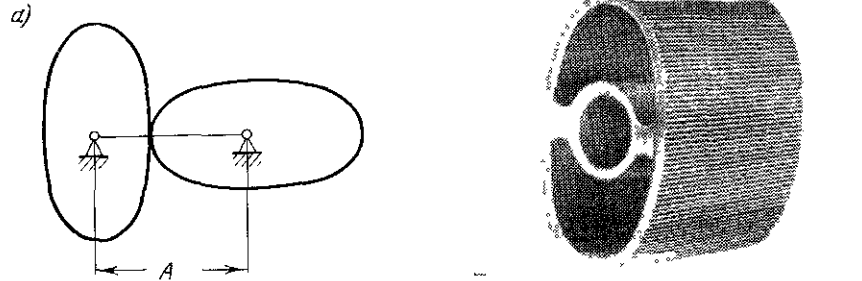


Рис. 164.

на изменения передаточного числа, можно использовать для расчета овальных колес, если положить $m_I = m_{II} = m$, где $m > 1$ и должно быть целым числом.

Для колес с двукратными овалами $m = 2$. Центроида такого колеса выражается уравнением

$$r_1 = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 - e \cos 2\varphi_1} = \frac{P}{1 - e \cos 2\varphi_1}. \quad (64.22)$$

Центроиду второго колеса, сопряженную овальной центроиде, можно получить в результате деформации эллипса, при которой сохраняется модуль радиуса-вектора эллипса, а полярный угол уменьшается в nm раз, где n — среднее передаточное число.

Параметры эллипсов, деформируемых для образования центроид первого и второго колес, удовлетворяют уравнениям (64.18) и (64.19). При $n = 1$ центроида второго колеса имеет такие же очертания, как и центроида первого; при этом угол между наибольшими радиусами-векторами обеих центроид равен π/m .

При $n = 1$ межцентровое расстояние колес $A = 2a$. Функция перемещения овальных колес при $m = 2$ и $n = 1$ выражается уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (64.23)$$

Число зубцов овальных колес при $m = 2$ и $n = 1$ следует выбирать таким, чтобы на одной четверти овала разместить $c \pm 0,5$ шага, где c —

целое число. Этим достигается идентичность парных колес не только по очертаниям центроид, но и в части расположения зубцов [172].

На рис. 164 изображены центроиды овальных колес, рассчитанные при следующих данных $m = 2, n = 1, e_1 = e_{1\text{кр}} = 1/3$.

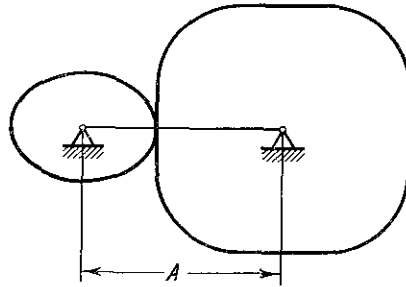


Рис. 165

Центроиды колес, изображенные на рис. 165, рассчитаны при следующих данных: $m = 2, n = 2, e_1 = e_{1\text{кр}} = 1/\sqrt{57}$.

§ 65. Сопряжение эксцентричного круглого колеса с некруглым

1°. Рассмотрим передачу, образованную колесами, одна из центроид которых представляет эксцентричную относительно центра вращения окружность.

Передачи такого вида могут быть применены при $n = 1, 2, 3, \dots$, где n — число оборотов круглого эксцентричного колеса, приходящееся на один оборот сопряженного колеса. Преимуществом такой передачи является то, что одно из колес можно выполнить как круглое, со смещенным центром вращения. Передачу наиболее целесообразно применять при $n > 1$ взамен передачи, составленной из эллиптического колеса и сопряженного ему некруглого колеса (рис. 162, 163).

2°. Уравнение центроиды первого колеса, как эксцентричной окружности, при заданном на рис. 166 начале отсчета полярных углов φ_1 представим в следующем виде:

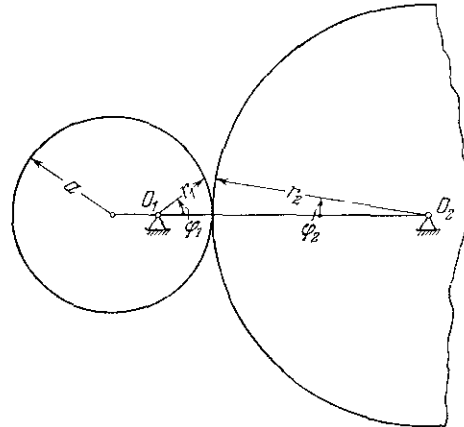


Рис 166.

$$r_1 = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1, \quad (65.1)$$

где a — радиус окружности, e — эксцентриситет. Функция передаточного отношения

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{A - r_1}{r_1} = \frac{A}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} - 1, \quad (65.2)$$

где A — межцентровое расстояние.

Отнесем линейные размеры к a и введем обозначения:

$$c = \frac{A}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Тогда

$$i_{21} = \frac{1}{i_{12}} = \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} - 1, \quad (65.3)$$

$$i_{21 \max} = \frac{1 - \varepsilon}{c - (1 + \varepsilon)}, \quad i_{21 \min} = \frac{1 - \varepsilon}{c - (1 - \varepsilon)}.$$

3°. Для того чтобы центроида некруглого колеса была замкнутой кривой, необходимо, чтобы межцентровое расстояние колес A удовлетворяло уравнению (60.2). Это приводит к уравнению такого вида:

$$\frac{2\pi}{n} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} - 1 \right) d\varphi_1. \quad (65.4)$$

Н. Н. Богданов [23] предложил приближенную формулу для вычисления относительного межцентрового расстояния c , вывод которой излагается ниже.

Представим выражение (65.4) в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} d\varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_\pi^{2\pi} \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} d\varphi_1 \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} d\varphi_1 = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} d\varphi_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} d\varphi_1 \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} + \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} - \varepsilon \cos \varphi_1} \right) d\varphi_1. \end{aligned}$$

После простейших преобразований получим

$$\frac{n+2}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 + \varepsilon^2 - 1}{c^2 - 2c \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + 1 - \varepsilon^2} d\varphi_1. \quad (65.5)$$

Обозначим $x = \varepsilon^2$ и запишем выражение (65.5) в таком виде:

$$f(c, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 + x - 1}{c^2 - 2c \sqrt{1 - x \sin^2 \varphi_1} + 1 - x} d\varphi_1 - \frac{n+2}{n} = 0. \quad (65.6)$$

Рассматривая c как функцию от x , разложим функцию $c = c(x)$ в ряд Маклорена

$$c = c_0 + x \frac{c'}{1!} + x^2 \frac{c''}{2!} + \dots + \frac{x^n c^n}{n!} + \dots, \quad (65.7)$$

где $c_0 = c(0)$, c' , c'' , ..., c^n — производные функции $c(x)$ при $x=0$.

Для определения производных c' , c'' , ..., c^n продифференцируем $f(c, x) = 0$, рассматривая ее как функцию c от x , заданную в неявном виде. Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c} c' = 0 \quad \text{и} \quad c' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Аналогичным образом можно найти и другие производные c'' , c''' , ..., c^n .

Приведем выражения для $f_x = \partial f / \partial x$ и $f_c = \partial f / \partial c$. Используя (65.6), получим

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(c, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2 + x - 1}{c^2 - 2c \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi_1} + 1 - x} \right] d\varphi_1,$$

$$f_c = \frac{\partial}{\partial c} f(c, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{c^2 + x - 1}{c^2 - 2c \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi_1} + 1 - x} \right] d\varphi_1.$$

При определении c' используются значения f_c и c_x при $x=0$.

Основываясь на приведенном выводе, Н. Н. Богданов получил следующую формулу для относительного межцентрового расстояния c , ограничившись первыми шестью членами ряда (65.7):

$$c = (n+1) (1 + k_1 \varepsilon^2 + k_2 \varepsilon^4 + k_3 \varepsilon^6 + k_4 \varepsilon^8 + k_5 \varepsilon^{10}),$$

где

$$k_1 = \frac{12-n}{4n}, \quad k_2 = \frac{1}{64n^3} (-3n^3 + 40n^2 - 4n - 8),$$

$$k_3 = \frac{1}{256n^5} (-5n^5 + 20n^4 - 20n^3 - 24n^2 + 24n + 16),$$

$$k_4 = \frac{1}{16384n^7} (-175n^7 + 754n^6 - 1172n^5 - 680n^4 + 2500n^3 +$$

$$+ 480n^2 - 1600n - 640),$$

$$k_5 = \frac{1}{65536n^9} (-441n^9 + 1956n^8 - 3924n^7 - 120n^6 + 10196n^5 - 4144n^4 -$$

$$- 11688n^3 + 1792n^2 + 6272n + 1792).$$

Величина c при различных значениях n и ε приведена в таблице VIII.

Т а б л и ц а VIII

ε	n				
	1	2	3	4	5
0,1	2,00498	3,00000	3,99666	4,99375	5,99099
0,2	2,01976	3,00000	3,98663	4,97490	5,96381
0,3	2,04379	2,99999	3,96978	4,94318	5,91804
0,4	2,07632	2,99995	3,94595	4,89812	5,85286
0,5	2,11637	2,99980	3,91476	4,83870	5,76701

Относительная погрешность межцентрового расстояния $\delta_c \leq 0,025\varepsilon^{12}$.

4°. Центроида некруглого колеса, сопряженного эксцентричному круглому колесу, определяется следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= A - r_1 - a(c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1), \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} = \varphi_1 + \int_0^{\varphi_1} \frac{c}{c - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1} d\varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (65.8)$$

Для вычисления значений φ_2 необходимо прибегнуть к численному интегрированию.

5. Центроида некруглого колеса может иметь наряду с выпуклыми и вогнутые участки. При наличии вогнутых участков нарезание колеса должно производиться долбяком. Радиус кривизны центроиды колеса 2 определяется уравнением [172]

$$\rho_2 = \frac{ar_1(A-r_1)}{r_1^2 + Ae \cos \varphi_1}. \quad (65.9)$$

Во избежание вогнутости центроиды колеса 2 необходимо, чтобы $\rho_2 \geq 0$ или чтобы

$$r_1^2 + Ae \cos \varphi_1 \geq 0. \quad (65.10)$$

§ 66. Схемы нарезания

Схемы нарезания зубцов некруглых колес, предложенные автором книги, основываются на воспроизведении принципа обкатки сочетанием определенных абсолютных движений изделия и инструмента. В отличие от ранее известных схем нарезания при этом исключается необходимость применения копиров, представляющих материальное воплощение центроид инструмента и нарезаемого колеса. Применение таких копиров делало невозможным нарезание некруглых колес с выпукло-вогнутыми центроидами, косозубых колес и весьма затрудняло нарезание колес в несколько проходов по глубине.

Воспроизведение принципа обкатывания сочетанием определенных абсолютных движений инструмента и изделия позволило осуществить нарезание зубцов на существующих зуборезных станках благодаря введению в кинематические цепи таких станков копирных устройств в виде кулачковых механизмов. Посредством таких механизмов и делительной цепи станка осуществляются необходимые зависимости между перемещениями изделия и инструмента.

Нарезание зубцов реечным инструментом. Основные положения способа нарезания зубцов инструментальной рейкой можно распространить и на случай червячной фрезы; при этом перемещение x рейки и углы поворота $\varphi_{\text{фр}}$ фрезы связываются соотношением

$$x = \varphi_{\text{фр}} \frac{t}{2\pi} = \varphi_{\text{фр}} \frac{m}{2},$$

где t и m — шаг и модуль зубцов нарезаемого колеса в плоскости, перпендикулярной его оси.

Для воспроизведения обкатывания центроид изделия и инструмента друг по другу необходимо, чтобы в точке касания их центроид скорость относительного движения была равна нулю. Это может быть осуществлено различными способами [172], из которых мы опишем лишь способ, наиболее удобный для практического осуществления.

Пусть инструментальной рейке сообщается перемещение со скоростью v_{A_2} в направлении касательной к центроидам, а некруглому колесу сообщаются вращения вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω и поступательное перемещение со скоростью v_{O_1} в направлении общей нормали к центроидам (рис. 167).

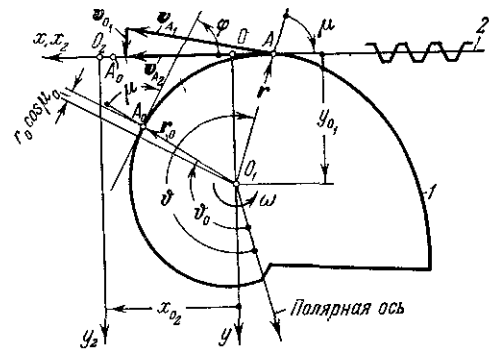


Рис. 167.

Из условия, что скорость относительного движения $v_{A_2A_1} = 0$, имеем

$$v_{A_2} = v_{A_1} + v_{O_1}. \quad (66.1)$$

Будем считать, что центроида задана уравнением $r = r(\vartheta)$ в полярных координатах, где ϑ — полярный угол.

Введем следующие системы координат: а) неподвижную xOy , ось x которой направим по центроиде 2 инструментальной рейки; б) подвижную

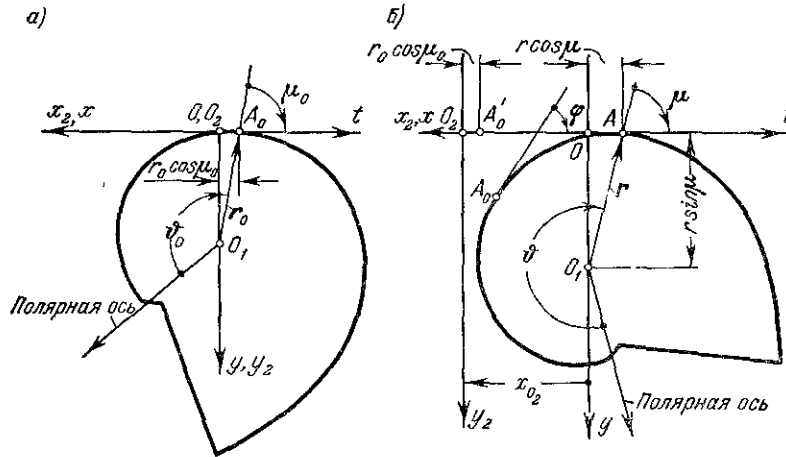


Рис. 168.

$x_2O_2y_2$, связанную с рейкой; ось x_2 этой системы также направлена по центроиде рейки; в) подвижную полярную систему координат, связанную с нарезаемым колесом I; начало O_1 полярной системы координат является центром вращения колеса при нарезании.

Относительно неподвижной системы координат будем задавать перемещения x_{O_2} рейки, поступательные перемещения y_{O_1} и угловые перемещения φ нарезаемого колеса.

Следует заметить, что полярный угол ϑ центроиды и угол поворота φ некруглого колеса при зацеплении с инструментальной рейкой отличаются по величине и направлению отсчета.

Исходя из построений рис. 167, можно указать, что

$$v_{A_2} = \frac{dx_{O_2}}{dt} = r\omega \sin \mu, \quad v_{O_1} = \frac{dy_{O_1}}{dt} = r\omega \cos \mu, \\ \varphi = (\vartheta + \mu) - (\vartheta_0 + \mu_0), \quad \omega = \frac{d\vartheta + d\mu}{dt}.$$

Дифференциальные зависимости между перемещениями инструмента и колеса после преобразований можно представить в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} dx_{O_2} &= r \sin \mu d\varphi = ds - d(r \cos \mu), \\ dy_{O_1} &= r \cos \mu d\varphi = d(r \sin \mu), \\ d\varphi &= d\vartheta + d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (66.2)$$

где ds — дифференциал дуги центроиды.

Для проектирования кулачковых механизмов, вводимых в кинематическую цепь зуборезного станка, нужно воспользоваться зависимостями между конечными перемещениями инструмента и нарезаемого колеса. Такие зависимости можно найти интегрированием уравнений (66.2) либо непосредственно, основываясь на построениях рис. 168.

Пусть в начальном положении касание центроид изделия и инструментальной рейки происходило в точке A_0 (рис. 168, а). В новом положении центроиды инструмента и колеса касаются друг друга в точке A . Полярная ось, жестко связанная с нарезаемым колесом, составляет в первом положении с положительным направлением A_0t касательной угол $\vartheta_0 + \mu_0$, а во втором положении — угол $\vartheta + \mu$. Следовательно, для перехода ко второму положению нарезаемое колесо нужно повернуть на угол

$$\varphi = (\vartheta + \mu) - (\vartheta_0 + \mu_0).$$

В относительном движении центроиды изделия и инструмента перекатываются друг по другу без скольжения. Путь $A'_0A = s$, пройденный

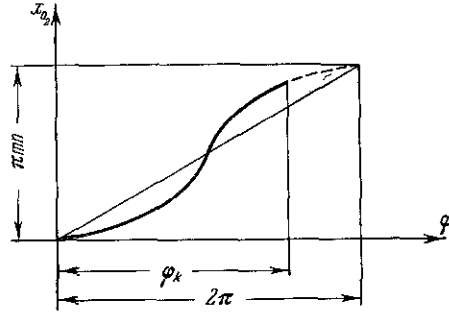


Рис. 169.

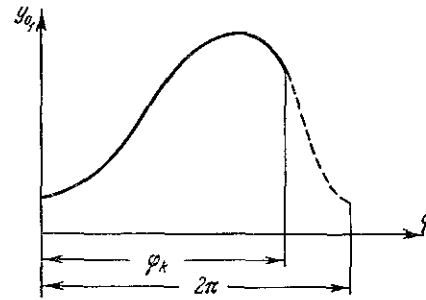


Рис. 170.

мгновенным центром вращения по центроиде рейки, равен дуге $\widehat{A_0A}$, пройденной по центроиде колеса. Так как (рис. 168, б)

$$O_2O = A'_0A - OA + O_2A'_0,$$

то положение начала O_2 системы координат $x_2O_2y_2$, связанной с рейкой, в неподвижной системе координат определится уравнением

$$x_{O_2} = s - (r \cos \mu - r_0 \cos \mu_0).$$

Ордината начала O_1 полярной системы координат изделия в неподвижной системе координат определяется уравнением

$$y_{O_1} = r \sin \mu.$$

С учетом полученных выражений зависимости между перемещениями инструмента и нарезаемого колеса запишем в виде следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_{O_2} &= s - (r \cos \mu - r_0 \cos \mu_0), \quad y_{O_1} = r \sin \mu, \\ \varphi &= (\vartheta + \mu) - (\vartheta_0 + \mu_0), \\ \text{где} \quad s &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{r}{\sin \mu} d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (66.3)$$

Зависимости (66.3) можно осуществить, как будет показано ниже, применяя два кулачковых механизма.

Рассмотренная схема нарезания зубцов пригодна для изготовления колес с замкнутыми и незамкнутыми центроидами. В случае нарезания неполных колес последним расчетным значениям функций $x_{O_2}(\varphi)$ и $y_{O_1}(\varphi)$ соответствует конечный угол поворота $\varphi_k < 2\pi$ (рис. 169 и 170) неполного

колеса. Функцию $x_{O_2}(\varphi)$ нужно продолжить так, чтобы при значении $\varphi = 2\pi$ получить перемещение $x_{O_2} = \pi m n$, где n — целое число. Тогда червячная фреза совершит n оборотов за один оборот нарезаемого колеса. Функцию $y_{O_1}(\varphi)$ нужно продолжить так, чтобы она стала периодической с периодом, равным периоду оборота нарезаемого колеса (рис. 170). Такое продолжение функций $x_{O_2}(\varphi)$ и $y_{O_1}(\varphi)$ позволит осуществить непрерывное нарезание зубцов на неполных колесах. Функцию $x_{O_2}(\varphi)$ целесообразно представить как сумму линейной и нелинейной функций (рис. 169). Линейная часть функции может быть воспроизведена существующей на зубофрезерном станке цепью деления, а нелинейные добавки должны быть осуществлены посредством кулачкового механизма.

Заметим также, что центр вращения некруглого колеса при нарезании зубцов может и не совпадать с центром вращения колеса в зубчатом механизме. В ряде случаев это положение можно с выгодой использовать при проектировании кулачковых механизмов, предназначенных для воспроизведения зависимостей (66.3). Так, в случае эллиптических колес за центр вращения при нарезании целесообразно выбрать центр симметрии эллипса, хотя центрами вращения эллиптических колес в механизме являются фокусы эллипсов.

При нарезании зубцов некруглых колес точка касания центроид инструмента и изделия перемещается вдоль оси x , поэтому рабочая часть червячной фрезы должна иметь повышенную длину, которую можно найти как расстояние между крайними точками бицентроиды. Уравнения бицентроиды (рис. 167)

$$x = OA = r \cos \mu, \quad y = 0. \quad (66.4)$$

Рассмотренная схема нарезания была осуществлена на станках ЗФН-01, ЗФН-02 и ЗФН-03, реконструированных для нарезания некруглых колес [183].

Нарезание зубцов долбяком. Применение долбяка становится обязательным в случае нарезания некруглых колес с внутренними зубцами многовитковых колес, колес с выпукло-вогнутыми центроидами и при необходимости ограничения осевых перемещений инструмента из-за особенностей конструкции изделий. Сопряженные профили зубцов некруглых колес можно получить при обкатывании долбяка одной и той же центроидой по центроидам парных колес. В простейшем случае центроидой долбяка может явиться окружность.

Требуемый характер относительного движения инструмента можно осуществить различными способами [172], из которых мы приведем лишь один, наиболее удобный, как нам кажется, для практического воплощения.

При нарезании зубцов долбяк вращается вокруг своей оси O_2 , а некруглое колесо участвует в двух движениях: вращательном вокруг оси O_1 и поступательном в направлении O_1O_2 (рис. 171). Из условия, что в точке A скорость относительного движения $v_{A_2A_1} = 0$,

$$v_{A_2} = v_{A_1} + v_{01}.$$

Для определения зависимостей между бесконечно малыми перемещениями долбяка и колеса спроектируем скорости на оси координат O_2x и O_2y . В результате, после преобразований, получим

$$d\varphi_2 = \frac{r_1 \cos \varepsilon}{r_2 \sin (\varepsilon + \mu)} d\varphi_1, \quad (66.5)$$

$$\begin{aligned} dy_{01} &= r_1 [\sin \varepsilon + \cos \varepsilon \operatorname{ctg} (\varepsilon + \mu)] d\varphi_1 = \\ &= r_2 [\operatorname{tg} \varepsilon \sin (\varepsilon + \mu) + \cos (\varepsilon + \mu)] d\varphi_2, \end{aligned} \quad (66.6)$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{r_2 \cos \mu}{r_1 + r_2 \sin \mu}. \quad (66.7)$$

Рассматривая в обращенном движении качение долбяка по некруглому колесу, найдем зависимости между перемещениями долбяка и колеса (рис. 171).

Пусть в начале обкатывания центроиды долбяка и колеса касаются друг друга в точке A_0 с координатами r_0, ϑ_0 . Для того чтобы касание центроид происходило в точке $A(r_1, \vartheta)$, нарезаемое колесо нужно повернуть на угол φ_1 , образуемый линиями $O_1O'_2$ и O_1O_2 . Основываясь на построениях рис. 171, получим

$$\varphi_1 = (\vartheta - \vartheta_0) - (\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (66.8)$$

$$\varphi_2 = \frac{s}{r_2} - (\gamma - \gamma_0), \quad (66.9)$$

$$y_{01} = \frac{r_2 \cos \mu}{\sin \varepsilon} = \frac{r_1 + r_2 \sin \mu}{\cos \varepsilon}. \quad (66.10)$$

Здесь $s = A_0A$ — длина дуги, пройденная по центроиде,

$$s = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{r_1}{\sin \mu} d\vartheta, \quad (66.11)$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{r_2 \cos \mu}{r_1 + r_2 \sin \mu}, \quad (66.12)$$

$$\gamma = 90^\circ - (\varepsilon + \mu). \quad (66.13)$$

В кинематическую цепь зубодолбежного станка нужно ввести два кулачковых механизма для воспроизведения зависимостей $\varphi_1 = f_1(\varphi_2)$ и $y_{01} = f_2(\varphi_2)$. Так же, как в схеме нарезания на зубофрезерном станке, линейную часть функции $\varphi_1 = f_1(\varphi_2)$ целесообразно воспроизводить цепью деления зубодолбежного станка, а нелинейные добавки осуществлять кулачковым механизмом. Поступательные перемещения y_{01} можно задавать не изделию, а инструменту, изменив при этом знак перемещений y_{01} .

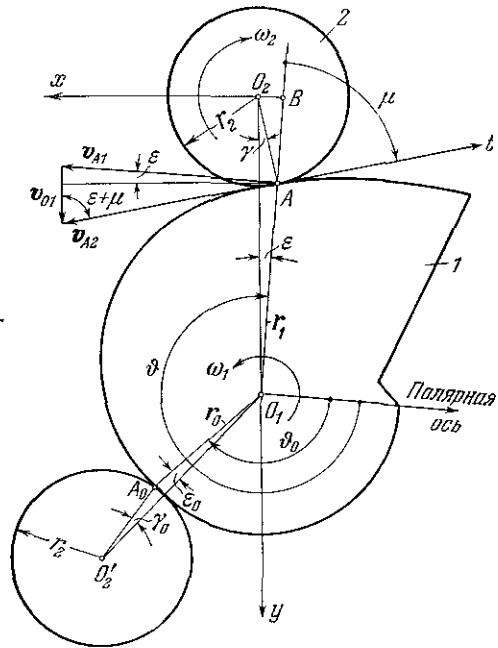


Рис. 171.

§ 67. Эволюты и профили зубцов

В § 15 было приведено в общей форме уравнение (15.6) эволют профилей зубцов, справедливое для плоского зацепления как с постоянным, так и с переменным передаточным отношением.

Согласно этому уравнению

$$l = r \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\left(1 + \frac{d\lambda}{d\vartheta}\right) \sin \mu},$$

где r — модуль радиуса-вектора центроиды некруглого колеса; μ — угол между радиусом-вектором центроиды и положительным направлением

касательной; положительное направление касательной совпадает с направлением отсчета полярных углов центроиды; λ — угол между радиусом-вектором центроиды и профильной нормалью, отсчитываемый в том же направлении, что и μ ; l — расстояние между соответствующими точками центроиды и эволюты профилей, измеренное по направлению профильной нормали.

На основе построений рис. 24 углы λ были определены уравнениями (15.4)

$$\lambda_{лев} = \mu + \alpha_n, \quad \lambda_{пр} = \pi + \mu - \alpha_n,$$

где α_n — угол профиля зубцов инструментальной рейки, индексы «пр» и «лев» относятся соответственно к правой и левой сторонам зуба некруглого колеса.

Используя приведенные выражения для λ , получим следующее уравнение эволюты профилей:

$$l = r \frac{\sin \alpha_n}{\left(1 + \frac{d\mu}{d\theta}\right) \sin \mu}. \quad (67.1)$$

Радиус кривизны центроиды

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2}}, \quad \mu = \arctg\left(\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\right).$$

Используя приведенные выражения для ρ и μ , уравнение (67.1) после преобразований можно привести к такому виду:

$$l = \rho \sin \alpha_n. \quad (67.2)$$

Этому уравнению можно дать следующее истолкование: если способом нарезания обеспечивается такой закон распределения профильных нормалей, что касательная к центроиде и профильная нормаль образуют в общей точке угол α_n постоянной величины, то эволюта профилей представляет геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центров кривизны центроиды на соответствующие профильные нормали.

Уравнение (67.2) можно получить иным, более простым путем. Обратимся к построениям рис. 172, на котором $b-b$ — центроида некруглого колеса, $a-a$ — эволюта центроиды. Будем обкатывать по эволюте центроиды прямую $A_i B_i$, с которой жестко связана прямая $B_i C_i$, составляющая с ней угол $90^\circ - \alpha_n$. Следовательно, семейство профильных нормалей, каждая из которых составляет с соответствующей касательной к центроиде постоянный угол α_n , может быть воспроизведено с помощью жесткого контура

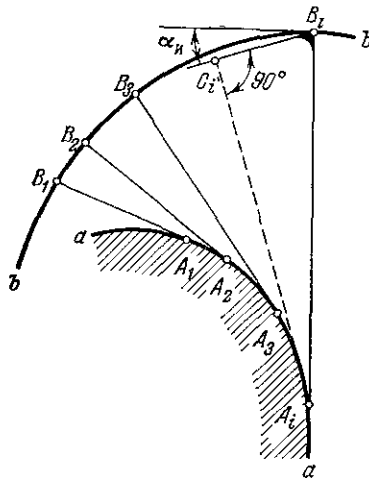


Рис. 172.

тура $A_i B_i C_i$ при качении его стороной $A_i B_i$ по эволюте центроиды. Мгновенным центром вращения жесткого контура $A_i B_i C_i$ при обкаты-

вании его по a — a будет точка A_i . Направление скорости в произвольной точке профильной нормали B_iC_i перпендикулярно мгновенному радиусу вращения вокруг A_i . Так как в точке C_i касания профильной нормали с эволютой профилей направление скорости должно совпасть с направлением профильной нормали, то точка C_i явится основанием перпендикуляра, опущенного из центра кривизны центроиды на направление B_iC_i профильной нормали. Геометрическое место точек C_i представляет искомую эволюту профилей зубцов некруглого колеса, которая согласно приведенному доказательству находится как геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центров кривизны центроиды на соответствующие профильные нормали.

В прямоугольных координатах эволюта профилей определяется такими уравнениями (см. § 15):

$$x_0 = r \cos \vartheta + l \cos (\vartheta + \lambda), \quad y_0 = r \sin \vartheta + l \sin (\vartheta + \lambda), \quad (67.3)$$

где l определяется из уравнения (67.2), а λ — из уравнений (15.1).

Пример 23. Требуется найти уравнения эволют профилей зубцов некруглого колеса с эллиптической центроидой при законе распределения профильных нормалей, определяемом условием $\lambda - \mu = \text{const.}$

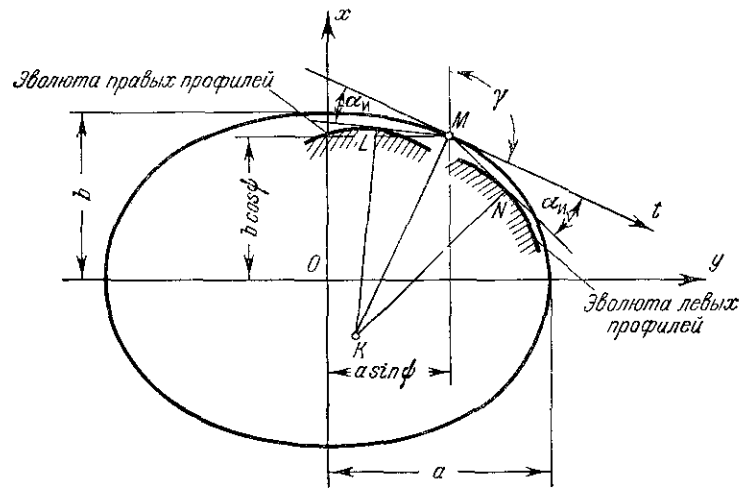


Рис. 173.

Обычно центром вращения эллиптического колеса является один из фокусов эллипса, но мы для упрощения выводов поместим начало прямоугольной системы координат в центре O симметрии эллипса (рис. 173) и уравнение эллипса зададим в такой форме:

$$x = b \cos \psi, \quad y = a \sin \psi. \quad (67.4)$$

Пусть на центроиде колеса задана текущая точка M , и радиус кривизны эллипса равен KM . Положительное направление касательной Mt определяется углом γ . Нормали левых и правых профилей имеют соответственно направления MN и ML , причем по уравнению (67.2)

$$ML = MN = \rho \sin \alpha_n,$$

где $\rho = KM$ — радиус кривизны эллипса в точке M ; N и L — точки касания соответствующей профильной нормали со своей эволютой.

В векторной форме

$$\vec{ON} = \vec{OM} + \vec{MN}, \quad \vec{OL} = \vec{OM} + \vec{ML}.$$

Проектируя векторы на оси координат, представим уравнения эволют левых и правых профилей в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b \cos \psi + \rho \sin \alpha_n \cos (\gamma + \alpha_n), \\ y_0 &= a \sin \psi + \rho \sin \alpha_n \sin (\gamma + \alpha_n); \end{aligned} \right\} \quad (67.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b \cos \psi + \rho \sin \alpha_n \cos (\pi + \gamma - \alpha_n), \\ y_0 &= a \sin \psi + \rho \sin \alpha_n \sin (\pi + \gamma - \alpha_n). \end{aligned} \right\} \quad (67.6)$$

Как известно из дифференциальной геометрии,

$$\cos \gamma = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \gamma = \frac{dy}{ds},$$

где ds — дифференциал дуги.

Применительно к нашему случаю имеем

$$\cos \gamma = -\frac{b \sin \psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}}, \quad \sin \gamma = \frac{a \cos \psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}}.$$

Радиус кривизны эллипса определяется из уравнения

$$\rho = \frac{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}{ab}.$$

Используя выражения для ρ , $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$, после преобразований уравнения эволют профилей представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b \cos \psi - \frac{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}{ab} \sin \alpha_n (a \cos \psi \sin \alpha_n \pm b \sin \psi \cos \alpha_n), \\ y_0 &= a \sin \psi \pm \frac{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}{ab} \sin \alpha_n (a \cos \psi \cos \alpha_n \mp b \sin \psi \sin \alpha_n). \end{aligned} \right\} \quad (67.7)$$

В этих уравнениях в местах применения двойных знаков верхний относится.

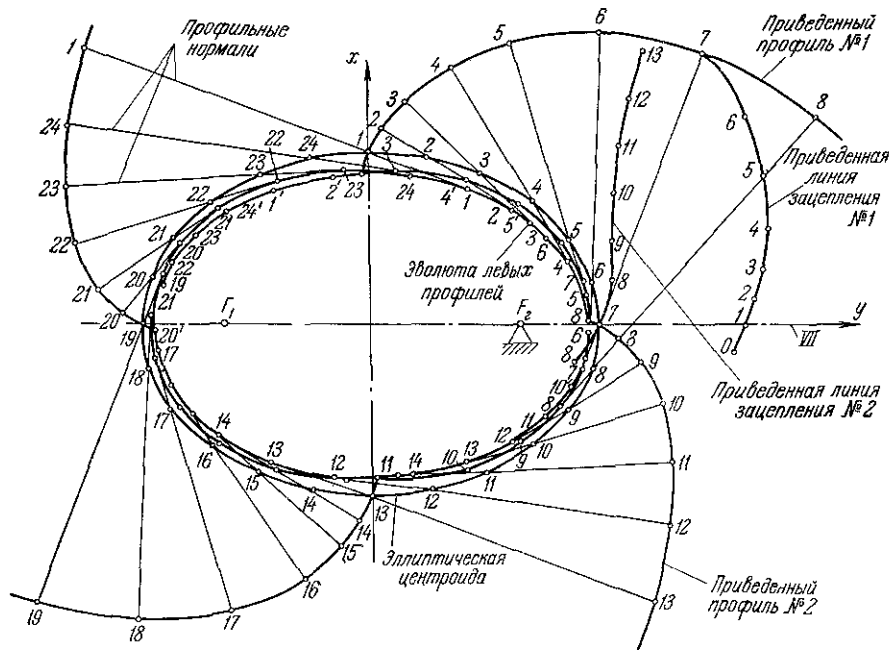


Рис. 174.

к эволюте левых, нижний знак — к эволюте правых профилей. Эволюты профилей при $e=0,643$ и $\alpha_n=20^\circ$ изображены на рис. 174.

Профили зубцов некруглых колес можно определить как эволюнты (развертки) их эволют. При этом возникает необходимость в спрямлении дуг эволют, что представляет известные вычислительные трудности. Определение профилей зубцов некруглых колес существенно упрощается, если воспользоваться для этого методом профильных нормалей. Поясним сущность этого способа применительно к некруглым колесам при законе распределения профильных нормалей, определяемом условием $\lambda - \mu = \text{const.}$

Обратимся к рис. 175, а, на котором представлена инструментальная рейка эвольвентного зацепления. Из приведенных построений следует

$$(a_1 n_1) = (a_0 a_1) \cos \alpha_n,$$

$$(a_2 n_2) = (a_0 a_2) \cos \alpha_n.$$

Согласно основной теореме зацепления точка n_1 профиля зубца рейки касается соответствующей точки сопряженного профиля зубца колеса в таком положении обкатываемой рейки, когда мгновенным центром вращения рейки является точка a_1 . Если в начальном положении обкатываемой рейки мгновенным центром вращения была точка a_0 , то дуга s , пройденная мгновенным центром вращения по центроиде колеса, определится из условия

$$s_1 = (a_0 a_1).$$

Аналогично точка n_2 профиля зубца рейки будет касаться соответствующей точки профиля зубца колеса в тот момент, когда мгновенным центром вращения явится точка a_2 и по центроиде колеса будет пройдена дуга $s_2 = (a_0 a_2)$.

В общем виде можно записать

$$(an) = s \cos \alpha_n,$$

где (an) — длина нормали к профилю зубца колеса в точке n , отсчитанная от центроиды колеса; s — длина дуги центроиды, отсчитанная от точки пересечения центроиды с профилем до текущей точки центроиды.

К таким же результатам можно прийти, рассматривая нарезание зубцов долбяком.

Основываясь на построениях рис. 175, б, имеем

$$(a_1 n_1) = (a_1 t_1) \cos \alpha_n = \widehat{a_0 a_1} \cos \alpha_n,$$

$$(a_2 n_2) = (a_2 t_2) \cos \alpha_n = \widehat{a_0 a_2} \cos \alpha_n,$$

т. е. здесь также выполняется условие

$$(an) = s \cos \alpha_n.$$

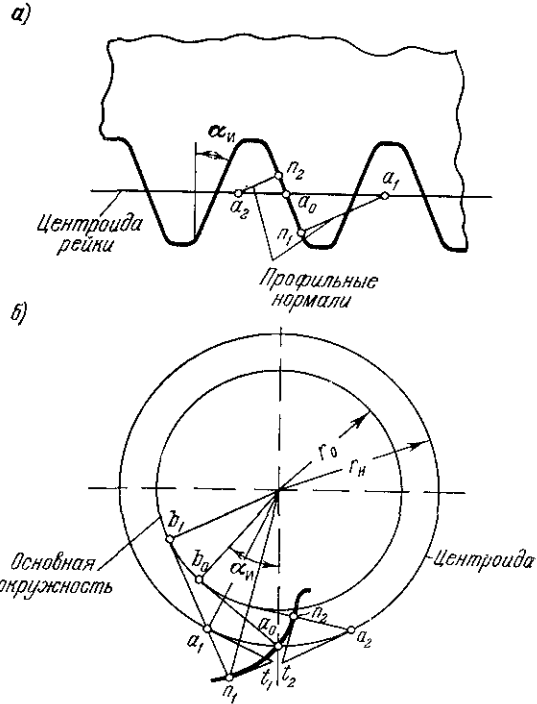


Рис. 175.

Построение профиля зубца может быть выполнено следующим образом (рис. 176). В точке центроиды, например a_1 , строится прямоугольный треугольник $a_1 n_1 t_1$ с углом α_n при вершине a_1 . Гипотенуза этого прямоугольного треугольника ($a_1 t_1$) равна по величине длине дуги центроиды $\widehat{a_0 a_1}$, отсчитанной от точки a_0 , в которой профиль зубца пересекается с центроидой. Для нахождения точек профиля, лежащих ниже центроиды, разворачивание следует производить в направлении, обратном направлению разворачивания при отыскании точек профиля, лежащих выше центроиды. Так, на рис. 176 показано построение прямоугольного треугольника $a_3 n_3 t_3$ для определения точки n_3 профиля. В этом треугольнике $(a_3 t_3) = \widehat{a_0 a_3}$, угол при вершине a_3 равен α_n .

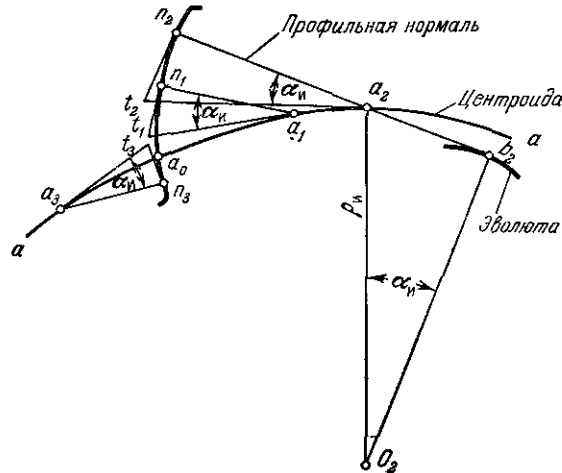


Рис. 176.

Радиус кривизны профиля в какой-нибудь точке, например n_2 , может быть найден из следующих построений (рис. 176). К профилю в точке n_2 проводится профильная нормаль до пересечения с центроидой. Длина этого отрезка профильной нормали $(a_2 n_2) = (\widehat{a_0 a_2}) \cos \alpha_n$. На продолжении профильной нормали отмечается центр кривизны профиля, для чего используется ранее доказанное условие [уравнение (67.2)]:

$$(a_2 b_2) = \rho_n \sin \alpha_n,$$

где ρ_n — радиус кривизны центроиды в точке a_2 .

Зависимость для определения радиуса кривизны профиля может быть представлена в следующем виде:

$$\rho_{пр} = \rho_n \sin \alpha_n \pm s \cos \alpha_n,$$

где $\rho_{пр}$ — радиус кривизны профиля зубца; ρ_n — радиус кривизны центроиды в точке, через которую проходит искомый радиус кривизны профиля; s — длина дуги центроиды, отсчитанная от точки пересечения центроиды с профилем до точки центроиды, через которую проходит радиус кривизны профиля; α_n — угол профиля инструментальной рейки.

Знак плюс или минус в уравнении берется соответственно для точек профиля, лежащих выше или ниже центроиды.

Приведенные рассуждения можно положить в основу аналитического способа определения профилей зубцов некруглых колес. Интересующихся этим вопросом мы отсылаем к нашей книге [172].

Заметим, что вместо построения профиля каждой стороны зубца в отдельности можно построить так называемый приведенный профиль, от которого легко перейти к профилям отдельно взятых зубцов, учитывая, что они являются эквидистантными в направлении профильной нормали. Эквидистантность профилей обеспечивается применением при нарезании

зуборезного инструмента с профилями, равноотстоящими друг от друга в направлении профильной нормали на величину основного шага, равного $lm \cos \alpha_n$, где m — модуль инструмента. Приведенные профили зубцов эллиптического колеса изображены на рис. 174.

Если закон распределения профильных нормалей удовлетворяет условию $\lambda - \mu = \text{const}$, профили зубцов некруглого колеса можно определить приближенно. Для этого необходимо заменить некруглое колесо системой круглых колес с приведенными числами зубцов $z_{пр2} \gg z_{пр} \gg z_{пр1}$, определяемыми из формулы

$$z_{пр} = \frac{2\rho_n}{m}, \quad (67.8)$$

где ρ_n — радиус кривизны центроиды некруглого колеса.

Обратимся к построениям рис. 177. Пусть известно, что точка A центроиды является серединой дуговой толщины зубца I некруглого колеса. Профили зубца I имеют приближенно очертания профилей зубцов эвольвентного круглого колеса с радиусом делительной окружности, равным радиусу кривизны ρ_A . Приведенное число зубцов

$$z_A = \frac{2\rho_A}{m}.$$

Профили зубца 10 некруглого колеса имеют очертания профилей зубцов круглого колеса с приведенным числом зубцов

$$z_B = \frac{2\rho_B}{m}.$$

Используя идею выражения профилей зубцов некруглого колеса через профили зубцов системы круглых колес с числами

зубцов $z_{пр2} \gg z_{пр} \gg z_{пр1}$, можно решить вопрос о подрезании зубцов некруглых колес инструментом и о коэффициенте перекрытия [172].

При нарезании зубцов некруглого колеса рейкой максимальный модуль, допустимый из условий отсутствия подрезания, должен удовлетворять неравенству

$$m_{\max} \leq \frac{\rho_{\min} \sin^2 \alpha_n}{f_0}, \quad (67.9)$$

где f_0 — коэффициент высоты нескругленной части головки зубца рейки; $\rho_{\min}$ — наименьший радиус кривизны центроиды.

При нарезании зубцов некруглого колеса долбяком вопрос о подрезании решается на основе условий зацепления долбяка с системой круглых колес с числами зубцов $z_{пр2} \gg z_{пр} \gg z_{пр1}$.

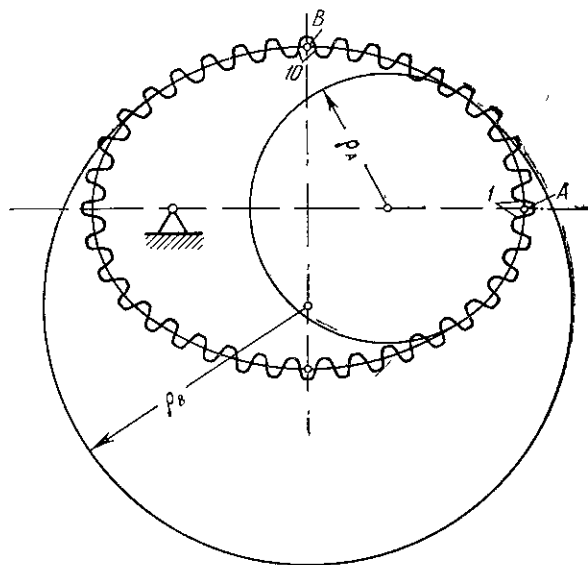


Рис. 177.

§ 68. Углы давления

Обратимся к рис. 178, на котором представлены взаимодействующие профили некруглых колес, вращающихся вокруг центров O_1 и O_2 . К ведущему колесу приложен момент $M_{дв}$; ведомое колесо нагружено моментом сопротивления $M_{пс}$. Направление v_{P_2} абсолютной скорости ведомой точки P_2 составляет с линией действия нормального давления R_{n12} некоторый угол, который в теории механизмов носит название *угла давления*.

В последующем этот угол будем обозначать через α_{12} , указывая тем самым, что за ведущее принято звено 1.

Если ведущими являются левые профили зубцов колеса I, то на основании построений рис. 178 угол давления в полюсе зацепления

$$\alpha_{12} = \mu_1 + \alpha_{и1} - \frac{\pi}{2}. \quad (68.1)$$

В случае же, если ведущими являются правые профили,

$$\alpha_{12} = \mu_1 - \alpha_{и1} - \frac{\pi}{2}. \quad (68.2)$$

Направление профильной нормали у некруглых колес определяется в основном углом μ между радиусом-вектором и касательной к центроиду, так как профильная нормаль от касательной к центроиду отклоняется на постоянный

угол $\alpha_{и1}$ — угол профиля инструментальной рейки. Следовательно, в механизме некруглых колес нужно считаться с тем, что углы давления являются переменными, поскольку переменным является угол μ . Это усложняется еще и тем, что угол давления меняется также в зависимости от положения точки касания на профильной нормали, так как с изменением положения точки касания меняется также и направление абсолютной скорости ведомой точки.

Помимо этого, при определении углов давления следует также учитывать, что в зацеплении могут находиться одновременно одна и две пары профилей. Если в зацеплении одновременно участвуют две пары профилей, передача усилий каждой пары профилей происходит при разных углах давления.

Углы давления в механизме некруглых колес могут быть переменными не только по величине, но и по знаку. Изменение знака угла давления не нарушает передачи движения и указывает лишь на то, что профильная нормаль меняет свое положение в неподвижной плоскости, проходя через другие четверти [172].

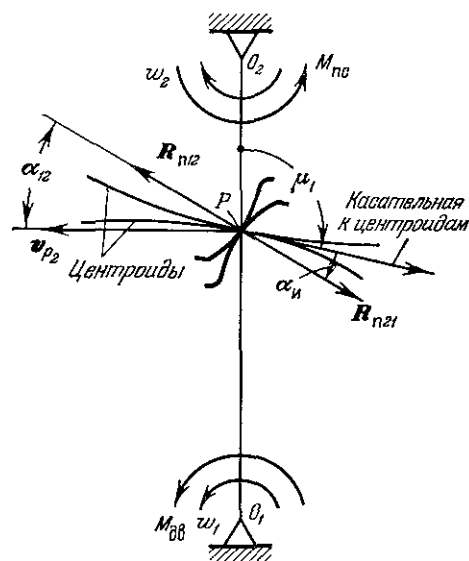


Рис. 178.

Глава VII

Цилиндрические колеса с винтовыми зубцами для передачи вращения между параллельными осями

§ 69. Условия зацепления

Цилиндрические колеса с винтовыми зубцами используются для передачи вращения между параллельными и перекрещивающимися осями (рис. 179). В зубчатых редукторах нашли преимущественное применение колеса с эвольвентными винтовыми поверхностями, работающие при параллельных осях. В энергомашиностроении возродилось циклоидальное зацепление в новых модификациях. Примерами этих разновидностей циклоидального зацепления могут служить винтовые компрессоры (рис. 180), а также винтовые насосы (рис. 181). Роторы таких компрессоров и насосов являются цилиндрическими колесами с винтовыми зубцами циклоидального зацепления. Подробные сведения о зацеплениях такого вида читатель найдет в работах И. А. Сакуна [232] и А. Е. Жмудь [85].

В передаче с параллельными осями применяются цилиндрические колеса с винтовыми зубцами разноименного направления при внешнем зацеплении колес. Аксоидами таких колес являются цилиндры, радиусы которых удовлетворяют зависимости

$$\frac{r_{н2}}{r_{н1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12}.$$

Линия касания таких цилиндров представляет ось зацепления (см. § 31). В относительном движении цилиндры с радиусами $r_{н1}$ и $r_{н2}$ перекатываются друг по другу без скольжения; винтовые линии на этих цилиндрах имеют одинаковые значения углов подъема.

У колеса с винтовыми зубцами боковая поверхность зуба является геликоидом и выражается, как уже указывалось в § 27, уравнением (27.4).

При выводе этого уравнения было принято, что геликоид образуется винтовым движением торцового профиля. Геликоид можно образовать винтовым движением не торцового, а осевого профиля, под которым понимается кривая, представляющая сечение поверхности геликоида осевой плоскостью. Пусть осевой профиль задан уравнением

$$r_1 = f_1(u) i_1 + f_2(u) k_1. \quad (69.1)$$

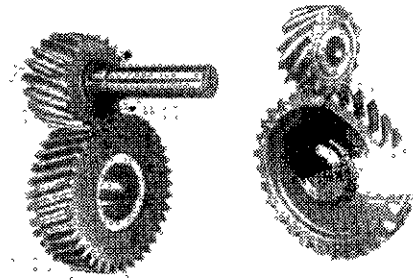


Рис. 179.

Поверхность геликоида, образуемая винтовым движением профиля (69.1), определится уравнением такого вида:

$$\mathbf{r}_1 = f_1(u) \cos \vartheta \mathbf{i}_1 + f_1(u) \sin \vartheta \mathbf{j}_1 + [f_2(u) + p\vartheta] \mathbf{k}_1, \quad (69.2)$$

где ϑ — угол поворота в винтовом движении, p — винтовой параметр

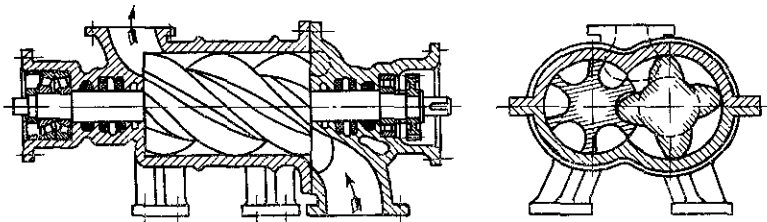


Рис. 180.

Для общности записи будем считать, что поверхность геликоида задана уравнением

$$\mathbf{r}_1 = x_1(u, \vartheta) \mathbf{i}_1 + y_1(u, \vartheta) \mathbf{j}_1 + z_1(u, \vartheta) \mathbf{k}_1. \quad (69.3)$$

Нормаль к поверхности (69.3) определится так:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \vartheta}. \quad (69.4)$$

Особым свойством геликоида является то, что координаты точки поверхности и проекции вектора нормали связаны уравнением (27.9), согласно которому

$$x_1 n_{y1} - y_1 n_{x1} - p n_{z1} = x_1 e_{y1} - y_1 e_{x1} + p e_{z1} = 0. \quad (69.5)$$

Параметр p считается положительным при правом направлении винтовых линий геликоида.

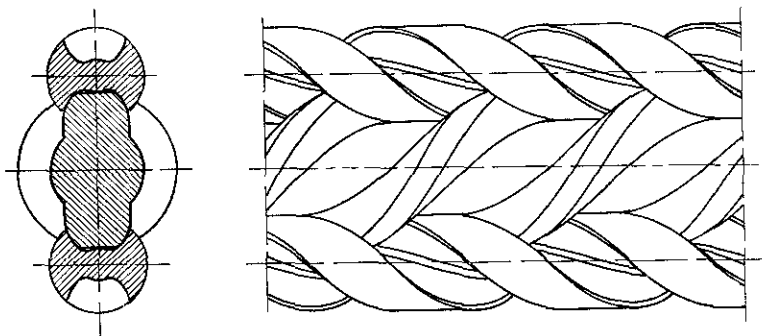


Рис. 181.

При исследовании зацепления возникает необходимость решения следующих задач: а) определение поверхности зубцов, сопряженной заданной поверхности; б) определение поверхности зацепления; в) определение линии контакта сопрягаемых поверхностей.

Первые две задачи целесообразнее всего свести к аналогичным задачам плоского зацепления, учитывая, что в плоскости, перпендикулярной осям вращения колес, профили зубцов колес можно рассматривать как профили

прямоугольных колес бесконечно малой толщины. Считая заданным профиль зубцов одного из колес, можно найти профиль зубцов сопряженного колеса и линию зацепления профилей, для чего нужно воспользоваться материалами §§ 13 и 14. После этого не представит труда определение винтовой поверхности, образованной найденным торцовым профилем, и поверхности зацепления, которая может быть образована поступательным движением найденной линии зацепления в направлении, параллельном оси колес. Определение линии контакта сопряженных поверхностей является пространственной задачей, и для ее решения нужно использовать один из методов гл. III. Развернутое решение этого вопроса излагается ниже.

К перечисленным задачам примыкает расчет профиля инструмента, используемого для обработки винтовой поверхности. Решение этой задачи излагается в гл. XII.

Перейдем теперь к определению линии контакта сопрягаемых поверхностей. Используем условие (см. § 31), что в передаче с параллельными осями нормаль в точках контакта должна пересекать ось зацепления PP (рис. 182). Положение оси зацепления определяется уравнением

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{H2}}{r_{H1}},$$

где r_{H2} и r_{H1} — расстояния между осью зацепления и осью вращения соответствующего колеса. В системе координат x, y, z ось зацепления выражается уравнением

$$X = -r_{H1}, \quad Y = 0. \quad (69.6)$$

Связь между системами координат x, y, z и x_1, y_1, z_1 выражается уравнениями

$$x_1 = x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1, \quad y_1 = -x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1, \quad z_1 = z. \quad (69.7)$$

Уравнения оси зацепления на основании (69.6) и (69.7) в системе x_1, y_1, z_1 запишем так:

$$X_1 = -r_{H1} \cos \varphi_1, \quad Y_1 = r_{H1} \sin \varphi_1. \quad (69.8)$$

Нормаль к поверхности зубца колеса, пересекающая ось зацепления, определяется в системе x_1, y_1, z_1 уравнениями

$$\frac{X_1 - x_1}{n_{x1}} = \frac{Y_1 - y_1}{n_{y1}} = \frac{Z_1 - z_1}{n_{z1}}, \quad (69.9)$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты точки поверхности зубца; X_1, Y_1, Z_1 — координаты точки пересечения нормали с осью зацепления; n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} — проекции вектора нормали к поверхности.

На основании уравнений (69.9) и (69.8)

$$r_{H1} (\cos \varphi_1 n_{y1} + \sin \varphi_1 n_{x1}) = y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1}. \quad (69.10)$$

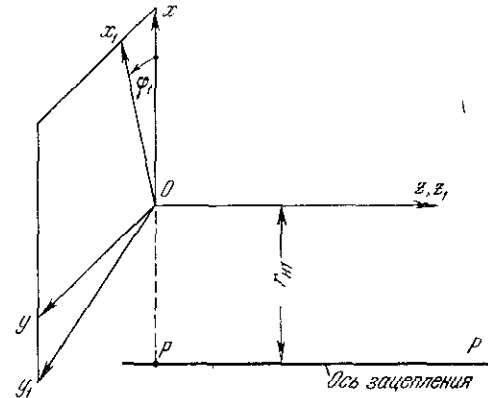


Рис. 182.

Используя уравнение (69.5) для геликоида, получим

$$r_{n1} (\cos \varphi_1 n_{y1} + \sin \varphi_1 n_{x1}) = y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1} = p n_{z1}. \quad (69.11)$$

В уравнении (69.11) x_1, y_1, n_{x1}, n_{y1} являются функциями от двух параметров: u и ϑ . Уравнение (69.11) выражает связь параметров u, ϑ и угла поворота φ_1 колеса, что можно записать так:

$$F_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \quad (69.12)$$

Контактная линия на поверхности зубца определится уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \\ z_1 &= z_1(u, \vartheta), \quad F_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (69.13)$$

Для вычисления координат контактной линии нужно поступать так: фиксируя значение φ_1 , задаемся одним из параметров, например u , и вычисляем из (69.12) другой параметр ϑ . Используя (69.13), вычисляем при связанных таким образом параметрах u и ϑ координаты x_1, y_1, z_1 контактной линии.

§ 70. Эвольвентные косозубые колеса *)

Цилиндрические колеса с эвольвентными винтовыми поверхностями зубцов применяются для передачи вращения между параллельными и пересекающимися осями. В передаче с параллельными осями углы наклона винтовых линий на начальных цилиндрах обоих колес при внешнем зацеплении равны по величине и противоположны по направлению; в передаче с пересекающимися осями углы наклона винтовых линий

различны по величине. Для краткости будем в дальнейшем пользоваться терминами: «косозубые колеса», предполагая, что оси колес параллельны, и «винтовые колеса», если оси колес пересекаются. Нужно сразу же оговорить, что поверхности зубцов колес в обоих случаях являются винтовыми и косозубые колеса тоже являются колесами с винтовыми зубцами.

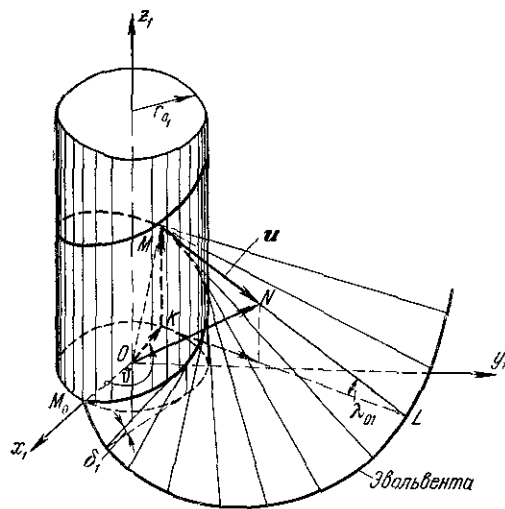


Рис. 183.

А. Уравнения эвольвентной винтовой поверхности

Эвольвентная винтовая поверхность может быть воспроизведена винтовым движением образующей прямой ML (рис. 183). Точка M касания образующей

прямой с цилиндром радиуса r_{01} описывает в таком движении винтовую линию M_0M . Наклон образующей прямой выбирается так, чтобы ML была касательной к винтовой линии M_0M . Цилиндр радиуса r_{01} носит на-

*) Обозначения приведены в конце настоящего параграфа.

звание основного цилиндра. Сечение эвольвентной винтовой поверхности плоскостью, перпендикулярной оси винтового движения (оси z_1), представляет эвольвенту окружности радиуса r_{01} .

Уравнения эвольвентной винтовой поверхности можно получить, рассматривая образование такого геликоида как результат винтового движения эвольвентного профиля — кривой, лежащей в плоскости $z_1 = 0$. Более удобная форма записи искомого уравнения получится, если рассматривать эвольвентную винтовую поверхность как линейчатую винтовую поверхность, образуемую винтовым движением прямой ML .

Радиус-вектор $\overline{ON}$ точки N эвольвентной винтовой поверхности равен (рис. 183)

$$\overline{ON} = \overline{OK} + \overline{KM} + \overline{MN}, \quad (70.1)$$

где $\overline{MN} = u$ — отрезок образующей прямой, отсчитанный от точки касания M с основным цилиндром до текущей точки N эвольвентной винтовой поверхности; $OK = r_{01}$ — радиус основного цилиндра; $KM = p\vartheta$ — величина осевого перемещения в винтовом движении при повороте на угол ϑ . Проектируя на оси координат, получим

$$\begin{aligned} r = \overline{ON} = (r_{01} \cos \vartheta + u \cos \lambda_{01} \sin \vartheta) i_1 + \\ + (r_{01} \sin \vartheta - u \cos \lambda_{01} \cos \vartheta) j_1 + (p\vartheta - u \sin \lambda_{01}) k_1, \end{aligned} \quad (70.2)$$

где $p = r_{01} \operatorname{tg} \lambda_{01}$; λ_{01} — угол подъема образующей прямой MN , равный углу подъема винтовой линии на основном цилиндре.

Орт нормали определится уравнением

$$e_1 = k \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial \vartheta_1} \right) = \sin \lambda_{01} \sin \vartheta i_1 - \sin \lambda_{01} \cos \vartheta j_1 + \cos \lambda_{01} k_1, \quad (70.3)$$

где k — нормирующий множитель.

Так как эвольвентная винтовая поверхность — развертывающаяся поверхность, направление орта нормали при перемещении по образующей MN не изменяется, и в выражении (70.3) u не содержится.

Точки M касания образующей прямой с основным цилиндром являются особыми точками эвольвентной винтовой поверхности, так как в этих точках $\frac{\partial r_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial \vartheta_1} = 0$ (см. пример 16).

В. Уравнения линии контакта при зацеплении колес

Для определения контактной линии нужно воспользоваться уравнением (69.11) связи между параметрами u , ϑ и φ_1 .

В нашем случае это уравнение связывает лишь параметры φ_1 и ϑ , так как e_{x1} , e_{y1} , e_{z1} являются функциями лишь одного параметра ϑ .

Используя уравнения (69.11) и (70.3), получим

$$r_{n1} \operatorname{tg} \lambda_{01} \cos (\varphi_1 + \vartheta) = -p.$$

Отношение $r_{01}/r_{n1} = \cos \alpha_{s1}$, где α_{s1} — угол давления эвольвентного профиля в точке пересечения его с начальным цилиндром; $p = r_{01} \operatorname{tg} \lambda_{01}$. После преобразований найдем

$$\cos (\varphi_1 + \vartheta) = -\cos \alpha_{s1}$$

или

$$\varphi_1 + \vartheta - \alpha_{s1} = \pi. \quad (70.4)$$

Этот результат иллюстрируется построениями на рис. 184, а, где P — проекция оси зацепления на плоскость чертежа.

Из уравнения (70.4) следует, что при фиксированном значении угла поворота φ_1 колеса параметр ϑ для всех точек контактной линии сохраняет

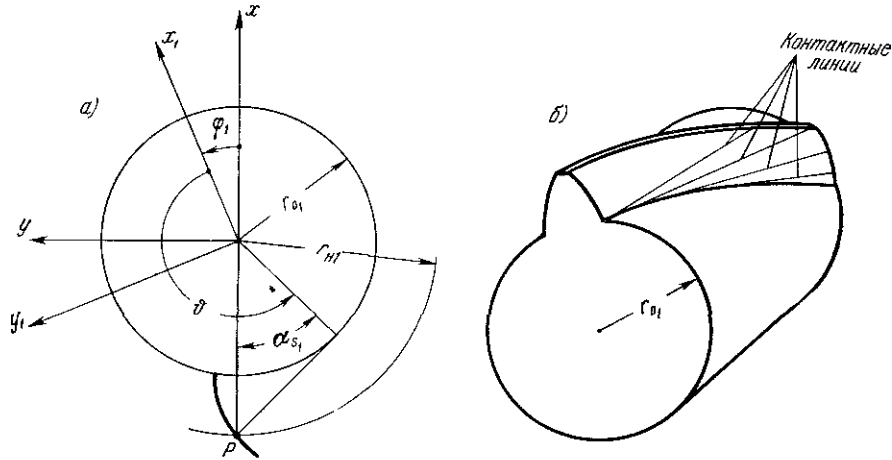


Рис. 184.

постоянное значение. Следовательно, контактной линией является образующая прямая, касательная к винтовой линии на основном цилиндре (рис. 184, б).

С. Зацепление колеса с рейкой

В плоскости, перпендикулярной оси колеса, его зацепление с рейкой сводится к зацеплению эвольвентного прямозубого колеса бесконечно малой ширины с соответствующей рейкой.

Аналитическое решение основывается на том, что поверхность зубца рейки ищется как огибающая эвольвентной винтовой поверхности зубца колеса в относительном движении.

Пусть абсолютные движения колеса и рейки связаны уравнением

$$\frac{v_{\text{п}}}{\omega_1} = r_1,$$

где r_1 — радиус некоторого цилиндра, являющегося аксоидом при за-

цеплении с рейкой; $v_{\text{п}}$ — скорость поступательного движения рейки; ω_1 — угловая скорость вращения колеса. Тогда осью зацепления $P-P$ в рассматриваемой передаче явится прямая линия, параллельная оси z_1 колеса и отстоящая от нее на величину r_1 (рис. 185).

Свяжем с колесом и рейкой системы координат x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 ; неподвижная система координат x, y, z связана со стойкой (рис. 185).

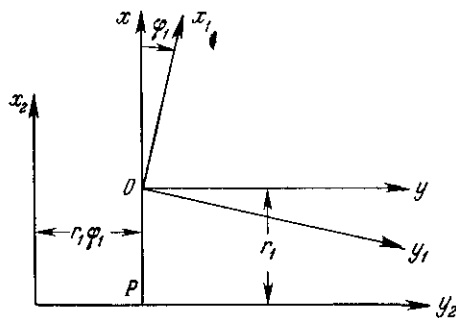


Рис. 185.

Оси z_1 , z_2 и z на рис. 185 перпендикулярны плоскости чертежа. Переход от системы координат x_1, y_1, z_1 к x_2, y_2, z_2 выражается уравнением

$$r_2 = M_{21}r_1, \quad (70.5)$$

где матрица

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & r_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & r_1 \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (70.6)$$

Уравнения семейства эвольвентных винтовых поверхностей в системе, связанной с рейкой, получим на основании (70.2) и (70.5)

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_{01} \cos(\varphi_1 + \vartheta) + u \cos \lambda_{01} \sin(\varphi_1 + \vartheta) + r_1, \\ y_2 &= r_{01} \sin(\varphi_1 + \vartheta) - u \cos \lambda_{01} \cos(\varphi_1 + \vartheta) + r_1 \varphi_1, \\ z_2 &= p\vartheta - u \sin \lambda_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (70.7)$$

Выше было доказано, что, если осью зацепления передачи является прямая линия

$$X = -r_1, \quad Y = 0,$$

параметры φ_1 и ϑ связаны уравнением (50.4)

$$\varphi_1 + \vartheta = \pi + \alpha_{s1},$$

где $\cos \alpha_{s1} = r_{01}/r_1$.

Уравнения (70.7) и (70.4), рассмотренные совместно, выражают поверхность зубца рейки как семейство контактных линий, записанных в системе x_2, y_2, z_2 уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1} - u \cos \lambda_{01}) \sin \alpha_{s1}, \\ y_2 &= r_{01} \left(\frac{\varphi_1}{\cos \alpha_{s1}} - \sin \alpha_{s1} \right) + u \cos \lambda_{01} \cos \alpha_{s1}, \\ z_2 &= p(\pi + \alpha_{s1} - \varphi_1) - u \sin \lambda_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (70.8)$$

Исключив параметры φ_1 и u из уравнений (70.8), найдем, что поверхность зубца рейки является плоскостью

$$x_2 \operatorname{tg} \alpha_{s1} - y_2 - \frac{z_2}{\operatorname{tg} \lambda_{01} \cos \alpha_{s1}} + r_1(\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) = 0, \quad (70.9)$$

где $\operatorname{inv} \alpha_{s1} = \operatorname{tg} \alpha_{s1} - \alpha_{s1}$.

Сечение поверхности зубца рейки плоскостью $z_2 = \text{const}$ представляет прямую линию, образующую с осью x_2 угол α_{s1} ; эта прямая является профилем зубца рейки бесконечно малой толщины, находящейся в зацеплении с прямозубым колесом тоже бесконечно малой толщины. Профиль зубцов этого колеса получается в результате пересечения эвольвентной винтовой поверхности плоскостью, перпендикулярной оси колеса.

Рассечем поверхность (70.9) зубца рейки плоскостью $x_2 = 0$. Уравнения такого сечения будут

$$y_2 + \frac{z_2}{\operatorname{tg} \lambda_{01} \cos \alpha_{s1}} - r_1(\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) = 0. \quad (70.10)$$

Прямая линия (70.10) образует с осью z_2 , а следовательно, и с осью колеса угол $90^\circ - \lambda_1$, где

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \lambda_{01} \cos \alpha_{s1}. \quad (70.11)$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при зацеплении с рейкой огибающей эвольвентной винтовой поверхности является плоскость. Такая плоскость представляет поверхность зубца косозубой рейки (рис. 186). Направление

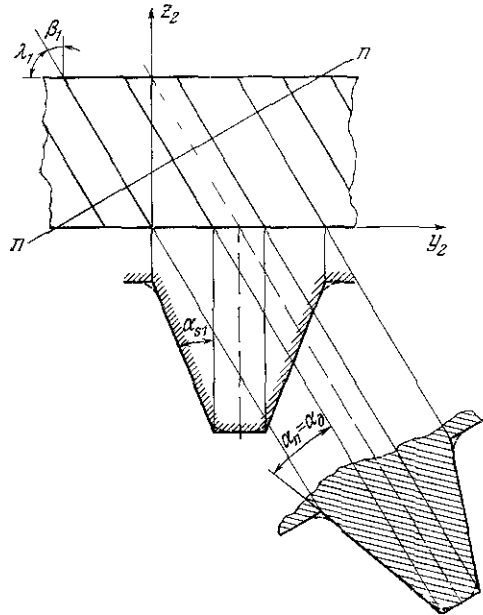


Рис. 186.

продольной линии зубца рейки определяется углом $\lambda_1 = 90^\circ - \beta_1$, где β_1 — угол, образуемый с осью колеса касательной к винтовой линии на цилиндре радиуса r_1 . Одна и та же эвольвентная винтовая поверхность, определяемая параметрами r_{01} и λ_{01} , может быть воспроизведена косозубыми рейками с различными значениями параметров α_{s1} и λ_1 . Значения α_{s1} и λ_1 зависят лишь от соотношения $v_n/\omega_1 = r_1$.

Для того чтобы при нарезании косозубых колес использовать тот же инструмент, который применяется для прямозубых колес, параметры нормального сечения рейки (сечения $n-n$) задают совпадающими с параметрами исходного контура для прямозубых колес. При этом предполагается, что при зацеплении рейки с колесом соблюдается соотношение $v_n/\omega_1 =$

$= r_{d1}$, где r_{d1} — радиус делительного цилиндра колеса; аксоидом колеса при зацеплении с рейкой явится делительный цилиндр колеса.

Найдем уравнение сечения $n-n$ рейки, приняв

$$r_1 = r_{d1}, \quad \cos \alpha_{sd1} = \cos \alpha_{s1} = \frac{r_{01}}{r_{d1}}, \quad \lambda_{d1} = \lambda_1 = \arctg(\tg \lambda_{01} \cos \alpha_{sd1}).$$

Присоединив к (70.9) уравнение секущей плоскости $n-n$, профиль нормального сечения определим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 \tg \alpha_{sd1} - y_2 - \frac{z_2}{\tg \lambda_{01} \cos \alpha_{sd1}} + r_{d1} (\pi - \text{inv } \alpha_{sd1}) &= 0, \\ y_2 - z_2 \tg \lambda_{d1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70.12)$$

Нормальное сечение рейки можно задать уравнениями и такого вида:

$$\frac{x_2 + r_{d1} (\pi - \text{inv } \alpha_{sd1}) \ctg \alpha_{sd1}}{\ctg \alpha_{sd1}} = \frac{y_2}{\sin^2 \lambda_{d1}} = \frac{z_2}{\cos \lambda_{d1} \sin \lambda_{d1}}. \quad (70.13)$$

Угол α_n , образуемый прямой (70.13) с осью x_2 , определится из уравнения

$$\cos \alpha_n = \frac{\ctg \alpha_{sd1}}{\sqrt{\ctg^2 \alpha_{sd1} + \sin^4 \lambda_{d1} + \cos^2 \lambda_{d1} \sin^2 \lambda_{d1}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tg^2 \alpha_{sd1} \sin^2 \lambda_{d1}}}.$$

Так как $\alpha_n = \alpha_d$ — углу профиля исходного контура, получим

$$\tg \alpha_{sd1} = \frac{\tg \alpha_d}{\sin \lambda_{d1}} = \frac{\tg \alpha_d}{\cos \beta_{d1}}. \quad (70.14)$$

Д. Геометрические соотношения у косозубых колес

Сечение $n-n$ косозубой рейки определяется параметрами исходного контура α_d, f_0, c_0 . Для того чтобы воспользоваться при геометрическом расчете косозубого колеса формулами, применяемыми для прямозубых колес, целесообразно исходить из зацепления косозубого колеса и косозубой рейки в плоскости, перпендикулярной оси колеса. Параметры α_{sd}, f_{s0} и c_{s0} такой рейки определяются уравнением (70.14) и выражениями:

$$f_{s0} = f_0 \cos \beta_d, \quad c_{s0} = c_0 \cos \beta_d. \quad (70.15)$$

Здесь f_{s0} и c_{s0} — коэффициенты высоты головки и радиального зазора в торцовом сечении, отнесенные к торцовому модулю m_s . Торцовый модуль и торцовый шаг по делительной окружности определяются так:

$$m_{sd} = \frac{m_n}{\cos \beta_d}, \quad t_{sd} = \frac{t_n}{\cos \beta_d}, \quad (70.16)$$

где m_n и t_n — модуль и шаг в нормальном сечении косозубой рейки, совпадающие со значениями m и t для исходного контура. Коэффициенты смещения ξ_s и ξ , отнесенные к торцовому и нормальному модулям, связаны зависимостью

$$\xi_s = \xi \cos \beta_d. \quad (70.17)$$

Углы подъема винтовой линии на основном и делительном цилиндрах связаны зависимостью, аналогичной (70.11). После преобразований эту зависимость представим в таком виде:

$$\cos \beta_0 = \cos \beta_d \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_{sd}}, \quad (70.18)$$

$$\sin \beta_0 = \sin \beta_d \cos \alpha_d, \quad (70.19)$$

где β_0 — угол наклона винтовой линии на основном цилиндре.

Индекс 1 у параметров колеса здесь и ниже опущен для сокращения записей.

Для определения кривизны поверхности зубца в нормальном сечении воспользуемся формулой (34.2). После преобразований получим

$$\kappa = - \frac{u \cos \lambda_0 \sin \lambda_0 \frac{d\phi}{dt}}{(v_r)^2}, \quad (70.20)$$

где $v_r^2 = \left(\frac{r_0^2}{\cos^2 \lambda_0} + u^2 \cos^2 \lambda_0 \right) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{2r_0}{\cos \lambda_0} \frac{d\phi}{dt} \frac{du}{dt} + \left(\frac{du}{dt} \right)^2$.

Отношение $\frac{d\phi}{dt} : \frac{du}{dt}$ определяет направление вектора v_r , т. е. направление нормального сечения, в котором ищется нормальная кривизна.

Используя (34.9) найдем, что главным направлениям I и II отвечают следующие уравнения связи производных du/dt и $d\phi/dt$: а) $d\phi/dt = 0$; du/dt может иметь любое значение, отличное от нуля; б) $p \frac{d\phi}{dt} - \sin \lambda_0 \times \frac{du}{dt} = 0$.

Главные кривизны в направлениях I и II имеют следующие значения:

$$\kappa_I = 0, \quad \kappa_{II} = - \frac{1}{u \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Согласно (70.2) $r^2 = x_I^2 + y_I^2 = r_0^2 + u^2 \cos^2 \lambda_0$, где r — текущее значение радиуса окружности колеса в торцовом сечении колеса. Учитывая, что

$r_0 = r \cos \alpha_s$ (α_s — угол давления эвольвентного профиля на окружности радиуса r), получим

$$\kappa_{II} = -\frac{\sin \lambda_0}{r \sin \alpha_s}. \quad (70.21)$$

Е. Геометрический расчет косозубых колес

Геометрический расчет косозубых колес, включая и проверку условий отсутствия подрезания и интерференции, определяется по аналогичным формулам, приведенным в гл. IV для расчета прямозубых колес.

Следует иметь в виду, что коэффициент перекрытия косозубых колес должен определяться как сумма двух слагаемых

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_{\text{прод.}} \quad (70.22)$$

Коэффициент перекрытия ε_s в торцовом сечении определяется по формуле, аналогичной (45.3):

$$\varepsilon_s = \frac{z_1 (\lg \alpha_{e1} - \lg \alpha_s) + z_2 (\lg \alpha_{e2} - \lg \alpha_s)}{2\pi}. \quad (70.23)$$

Продольный коэффициент перекрытия $\varepsilon_{\text{прод}}$ на основании построений рис. 187 определяется из формулы

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{AB}{l_{сд}} = \frac{b \operatorname{tg} \beta_d}{\pi m_{сд}} = \frac{b \sin \beta_d}{\pi m}. \quad (70.24)$$

Ф. Определение толщины зубцов

Толщина зубцов косозубого колеса находится: а) измерением по общей нормали, б) определением положения ролика (шарика), вложенного во впадину колеса.

1°. Измерение толщины зубцов по общей нормали выполняется посредством штангенциркуля, скобы или микрометра; зубцы измеряемого колеса ока-

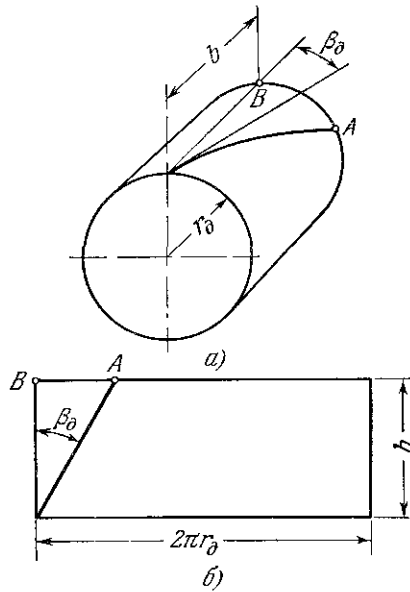


Рис. 187.

зываются при измерении между параллельными плоскостями мерительного инструмента. В отличие от контроля прямозубых колес, плоскости губок инструмента образуют при измерении известный угол с осью колеса.

Плоскости губок измерительного инструмента можно рассматривать как поверхности зубца рейки с нулевым углом зацепления ($\alpha_{s1} = 0$). При зацеплении такой рейки с косозубым колесом нужно положить $r_{s1} = r_0$, и тогда окажется, что $\alpha_{s1} = 0$.

Направление зубцов рейки с нулевым углом зацепления составляет с осью колеса угол $90^\circ - \lambda_0$. В этом можно удостовериться, положив в уравнении (70.9) зубца рейки $\alpha_{s1} = 0$.

Здесь и ниже индекс 1 перед параметрами колеса опущен.

При измерении определяется размер между губками в направлении $n - n$ (рис. 186), составляющем с осью y_2 в рассматриваемом случае угол λ_0 .

В сечении, перпендикулярном оси косозубого колеса, расстояние по общей нормали находится из уравнения, аналогичного уравнению (52.7):

$$L_s = (nm_{sd}\pi + s_{sd} + m_{sd}z \operatorname{inv} \alpha_{sd}) \cos \alpha_{sd}.$$

Мерительное расстояние — размер между мерительными плоскостями в направлении $n - n$:

$$L_n = (nm_{sd}\pi + s_{sd} + m_{sd}z \operatorname{inv} \alpha_{sd}) \cos \alpha_{sd} \sin \lambda_0.$$

Преобразуем полученную формулу, используя выражение

$$s_{sd} = \frac{m_{sd}\pi}{2} + 2\xi_s m_{sd} \operatorname{tg} \alpha_{sd}$$

и формулы (70.16), (70.17), (70.18).

После преобразований получим

$$L_n = \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_n + z \operatorname{inv} \alpha_{sd} \right] m_n \cos \alpha_n. \quad (70.25)$$

Число захватываемых впадин n определяется из уравнения [24]

$$n = \frac{\alpha_n^{\circ} z}{180^{\circ} \cos \beta_d \cos^2 \beta_0}.$$

2°. Перейдем теперь к расчету положения ролика или шарика, вложенного во впадину косозубого колеса. Ролик или шарик, вложенный во впадину колеса, имеет точечное касание с боковыми поверхностями двух зубцов, между которыми находится рассматриваемая впадина. Нормали, проведенные в точках касания боковых поверхностей зубцов и ролика, пересекают ось ролика в общей точке.

Нормаль к поверхности зубца определяется уравнением

$$\frac{X-x}{n_x} = \frac{Y-y}{n_y} = \frac{Z-z}{n_z}. \quad (70.26)$$

X, Y, Z — координаты точки нормали, x, y, z — координаты точки поверхности, в которой проведена нормаль. Пусть X, Y, Z — координаты точки пересечения нормали с осью ролика. Тогда

$$\frac{X-x}{e_x} = \frac{Y-y}{e_y} = \frac{Z-z}{e_z} = r_{\text{рол}}, \quad (70.27)$$

так как расстояние между точками (X, Y, Z) и (x, y, z) , измеренное по нормали, равно радиусу ролика; e_x, e_y, e_z — проекции орта нормали — косинусы углов, образуемых нормалью с осями координат. Для определения e_x, e_y, e_z нужно воспользоваться уравнением (70.3).

Выражения (70.27) представляют систему трех уравнений. Неизвестными же являются пять величин: координаты X, Y, Z , параметры u и ϕ контактной точки, через которые определяются координаты x, y, z и e_x, e_y, e_z . Для того чтобы число неизвестных оказалось равным числу уравнений, примем, что $Y = 0$, и присоединим к системе (70.27) еще одно добавочное уравнение, выражающее условие, что в плоскости $z = Z$ точка пересечения нормали с осью ролика должна лежать на оси симметрии впадины.

При $Y = 0$ имеем

$$X = \frac{x e_y - y e_x}{e_y}.$$

Так как боковая поверхность зубца является геликоидом, имеет место зависимость (69.5). На этом основании, введя обозначения $X = R$

Используя уравнения (70.29), (70.30) и (70.31), после преобразований получим

$$\operatorname{inv} \vartheta = \frac{r_{\text{рол}}}{r_0 \sin \lambda_0} - \sigma_{\text{сд}} + \operatorname{inv} \alpha_{\text{сд}},$$

где $\operatorname{inv} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta - \vartheta$.

Для определения положения ролика во впадине колеса нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{inv} \vartheta &= \frac{r_{\text{рол}}}{r_0 \sin \lambda_0} - \sigma_{\text{сд}} + \operatorname{inv} \alpha_{\text{сд}}, \\ R &= \frac{r_0}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (70.32)$$

Найдем зависимость между dR и $dw_{\text{сд}}$. Дифференцируя уравнения (70.32), получим

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \vartheta} - 1 \right) d\vartheta = -d\sigma_{\text{сд}} = -\frac{dw_{\text{сд}}}{2r_{\text{сд}}}, \quad dR = r_0 \frac{\sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta.$$

Следовательно,

$$dR = -\frac{\cos \alpha_{\text{сд}}}{2 \sin \vartheta} dw_{\text{сд}}. \quad (70.33)$$

Аналогичные уравнения можно получить для случая контроля толщин витков эвольвентных червяков. В последнем случае обычно задают осевую ширину $w_{\text{ос}}$ впадины на делительном цилиндре, причем

$$\frac{w_{\text{ос}}}{p} = 2\sigma_{\text{сд}}.$$

При дальнейших преобразованиях воспользуемся следующими соотношениями:

$$p = r_0 \operatorname{tg} \lambda_0 = r_{\text{д}} \operatorname{tg} \lambda_{\text{д}} = r_{\text{д}} \operatorname{ctg} \beta_{\text{д}}, \quad \frac{r_0}{r_{\text{д}}} = \cos \alpha_{\text{сд}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\text{д}} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{сд}} \cos \beta_{\text{д}}$$

(см. уравнение (70.14)). В результате для определения положения ролика или шарика во впадине колеса получим следующую систему уравнений:

$$\operatorname{inv} \vartheta = \frac{1}{mz} \left(\frac{d_{\text{рол}}}{\cos \alpha_{\text{д}}} - w_{\text{сд}} \cos \beta_{\text{д}} \right) + \operatorname{inv} \alpha_{\text{сд}}, \quad (70.34)$$

$$R = \frac{mz \cos \alpha_{\text{сд}}}{2 \cos \beta_{\text{д}} \cos \vartheta}, \quad (70.35)$$

$$dR = -\frac{\cos \alpha_{\text{сд}}}{2 \sin \vartheta} dw_{\text{сд}} = -\frac{dw_{\text{ос}}}{2 \sin \vartheta \operatorname{tg} \lambda_0}. \quad (70.36)$$

Полезно отметить, что при $d_{\text{рол}} = w_{\text{сд}} \cos \alpha_{\text{д}} \cos \beta_{\text{д}}$

$$\operatorname{inv} \vartheta = \operatorname{inv} \alpha_{\text{сд}} \quad \text{и} \quad R = r_{\text{д}}.$$

Диаметр ролика или шарика должен подбираться в зависимости от модуля косозубого колеса и величины коэффициента смещения ξ при корригировании с тем, чтобы поверхность ролика или шарика несколько выступала из впадин колеса. Ориентировочное значение

$$d_{\text{рол}} = [(1,7 \div 1,8) - 2\xi \sin \alpha_{\text{д}}] m. \quad (70.37)$$

3° При четном числе зубцов колеса размер M поверхности роликов или шариков определится так:

$$M = 2R + d_{\text{рол}}. \quad (70.38)$$

При нечетном числе зубцов колеса размеры M поверх шариков и поверх роликов должны определяться по разным формулам. В случае применения шариков (рис. 189), учитывая, что точки A и B — центры шариков, вложенных во впадины, C — принадлежит оси симметрии зубца, получим

$$M = 2R \cos \left(\frac{90^\circ}{z} \right) + d_{\text{ш}}. \quad (70.39)$$

Значительно сложнее при нечетном числе зубцов колеса определить размер поверх роликов. Решению этой задачи были посвящены

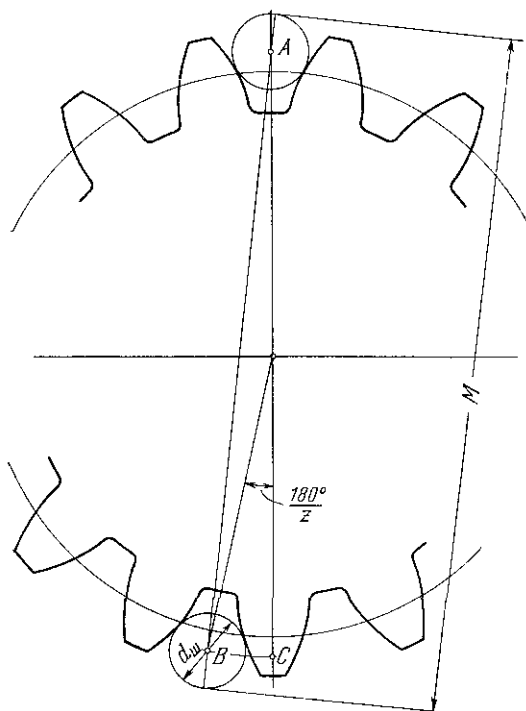


Рис. 189.

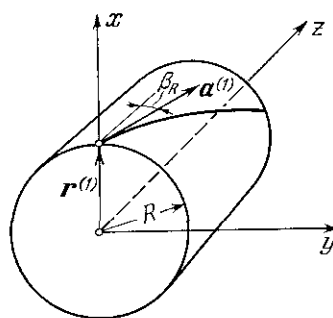


Рис. 190.

работы Н. П. Нежурина [212, 213], Н. Т. Халевского [250] и А. Кэнди [150]. В настоящей книге предлагается следующий способ вывода основных зависимостей.

Ось ролика находится на расстоянии R от оси колеса и является касательной к направлению винтовой линии на цилиндре радиуса R (рис. 190). Единичный вектор $a^{(1)}$, направленный по оси ролика, образует с осью колеса угол β_R , определяемый уравнением

$$\operatorname{ctg} \beta_R = \frac{p}{R} = \frac{r_d \operatorname{ctg} \beta_d}{R} = \frac{mz}{2 \sin \beta_d R}. \quad (70.40)$$

Вектор $r^{(1)}$ кратчайшего расстояния между $a^{(1)}$ и z определится так:

$$r^{(1)} = Ri. \quad (70.41)$$

Вектор

$$a^{(1)} = \sin \beta_R j + \cos \beta_R k. \quad (70.42)$$

Представим теперь, что в другую впадину колеса, отстоящую от первой на угол γ , вложен второй ролик. При нечетном числе зубцов угол $\gamma = 180^\circ (z \pm 1/z)$ и измеряется в торцевой плоскости колеса. Со вторым роликом жестко свяжем две системы координат: S_k и S_2 (рис. 191, а). В системе S_k векторы r_k и a_k определяются такими же уравнениями, как

(70.41) и (70.42):

$$r_k = R i_k, \quad a_k = \sin \beta_R j_k + \cos \beta_R k_k. \quad (70.43)$$

Каждый из роликов можно перемещать во впадине колес таким образом, чтобы он вступал в касание с боковыми поверхностями, ограничивающими впадину, в точках, принадлежащих одинаковым винтовым линиям. Угол скрепления осей ролика и колеса, а также кратчайшее расстояние между ними будут оставаться при этом неизменными. Это дает нам право сообщить ролику 2 и системам S_2 и S_k винтовое движение

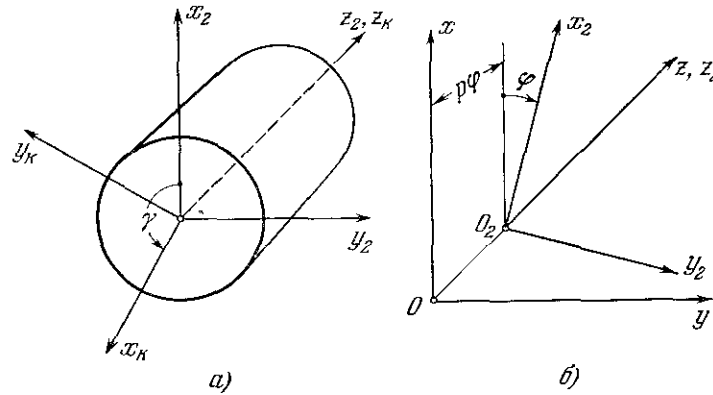


Рис. 191.

с тем же параметром p , что и у косозубого колеса (рис. 191, б). Матрицы перехода от системы S_k к S_2 и от S_2 к основной системе S (рис. 191) определяются так:

$$M_{2k} = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (70.44)$$

$$M_{02} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (70.45)$$

Переход от S_k к S определяется матрицей $M_{0k} = M_{02}M_{2k}$.

В результате ролик 2 займет в системе S_2 положение, определяемое столбцовыми векторами:

$$r^{(2)} = M_{0k}r_k, \quad a^{(2)} = L_{0k}a_k.$$

Матрица L_{0k} получается из M_{0k} после того, как в M_{0k} будут вычеркнуты последняя строка и последний столбец.

После преобразований получим

$$r^{(2)} = R \cos(\gamma - \varphi) i - R \sin(\gamma - \varphi) j + p\varphi k, \quad (70.46)$$

$$a^{(2)} = \sin \beta_R \sin(\gamma - \varphi) i + \sin \beta_R \cos(\gamma - \varphi) j + \cos \beta_R k. \quad (70.47)$$

Параметр φ , определяющий винтовое движение ролика 2 и системы S_2 относительно S , должен быть задан таким, чтобы кратчайшее расстояние

между векторами $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ (между осями роликов 1 и 2) достигло экстремального значения.

Найдем сначала выражение для величины кратчайшего расстояния между векторами $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ при произвольном значении φ . Единичный вектор b , направленный по линии кратчайшего расстояния между $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$, будет перпендикулярен плоскостям Π_1 и Π_2 , в которых расположены $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ (рис. 192). При этом

$$b = k(\alpha^{(2)} \times \alpha^{(1)}) = -k \sin \beta_R \cos \beta_R \{ [1 - \cos(\gamma - \varphi)] i + \sin(\gamma - \varphi) j - \operatorname{tg} \beta_R \sin(\gamma - \varphi) k \}, \quad (70.48)$$

где

$$k = \frac{1}{\sin \beta_R \sqrt{\cos^2 \beta_R [1 - \cos(\gamma - \varphi)]^2 + \sin^2(\gamma - \varphi)}}.$$

Кратчайшее расстояние c между $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ при произвольном значении φ определится из уравнения (рис. 192)

$$c = b \cdot \rho = b(r^{(2)} - r^{(1)}) = R \cos \beta_R \frac{2[1 - \cos(\gamma - \varphi)] + \varphi \sin(\gamma - \varphi)}{\sqrt{\cos^2 \beta_R [1 - \cos(\gamma - \varphi)]^2 + \sin^2(\gamma - \varphi)}}. \quad (70.49)$$

Формула (70.49) остается справедливой и для случая колеса с четным числом зубцов. Приняв $\gamma = \pi$ и $\varphi = 0$, получим, что $c = 2R$. При нечетном числе зубцов кратчайшее расстояние c между двумя роликами является функцией от φ . В том частном случае, когда $\gamma \neq \pi$ (число зубцов нечетное), но $\gamma - \varphi = \pi$, вновь получим, что $c = 2R$. Это соответствует способу измерения толщины витков червяков с помощью трех роликов, два из которых вкладываются в две соседние впадины снизу, третий — во впадину сверху.

При измерении толщины зубцов колес с помощью двух роликов необходимо найти такое значение параметра φ , при котором $c = c_{\min}$. Используя усло-

вие $dc/d\varphi = 0$, получим, что это имеет место при

$$\varphi = \sin(\gamma - \varphi) \operatorname{tg}^2 \beta_R. \quad (70.50)$$

Подставив выражение (70.50) в (70.49), получим

$$c = R \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{\gamma - \varphi}{2} \right) + \sin^2(\gamma - \varphi) \operatorname{tg}^2 \beta_R}. \quad (70.51)$$

Уравнения (70.51) и (70.50), рассмотренные совместно, позволяют найти $c_{\min}$.

Размер M , замсренный поверх роликов, окажется равным

$$M = c + d_{\text{рол}}. \quad (70.52)$$

Для последующих выводов нам понадобится связь между dM и допуском на ширину впадины колеса. Продифференцируем для этого выражение (70.51), рассматривая R как функцию от $w_{\text{зд}}$. При этом нужно учесть, что $\operatorname{ctg} \beta_R = p/R$ и $d\beta_R = \cos \beta_R \sin \beta_R \frac{dR}{R}$, а из (70.50) следует,

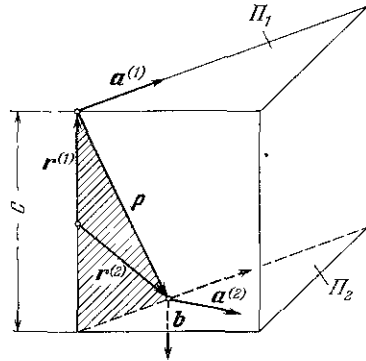


Рис. 192.

что $d\varphi = \frac{2 \sin(\gamma - \varphi) \operatorname{tg} \beta_R d\beta_R}{[1 + \cos(\gamma - \varphi) \operatorname{tg}^2 \beta_R] \cos^2 \beta_R}$. После преобразований получим

$$dM = \left[\frac{c}{R} - \frac{R}{c} \operatorname{tg}^2 \beta_R \sin^2(\gamma - \varphi) \right] dR, \quad (70.53)$$

где dR определяется из уравнения (70.33).

Приведем сводку зависимостей для определения размера M и dM :

$$\varphi - \sin(\gamma - \varphi) \operatorname{tg}^2 \beta_R = 0, \quad (70.54)$$

$$M = R \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{\gamma - \varphi}{2} \right) + \sin^2(\gamma - \varphi) \operatorname{tg}^2 \beta_R + d_{\text{пол}}}, \quad (70.55)$$

$$dM = \left[\frac{c}{R} - \frac{R}{c} \operatorname{tg}^2 \beta_R \sin^2(\gamma - \varphi) \right] dR. \quad (70.56)$$

Значения R и dR определяются из выражений (70.35) и (70.36).

Зависимость (70.54) должна быть решена по методу последовательных приближений. В качестве исходного приближения, приняв, что $\varphi \approx \sin \varphi$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{ctg}^2 \beta_R + \cos \gamma}. \quad (70.57)$$

Последующее значение

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta \varphi_1. \quad (70.58)$$

Здесь

$$\Delta \varphi_1 = - \frac{\Delta h_1}{1 + \cos(\gamma - \varphi_1) \operatorname{tg}^2 \beta_R}, \quad (70.59)$$

Δh_1 — невязка, определяемая уравнением

$$\Delta h_1 = \varphi_1 - \sin(\gamma - \varphi_1) \operatorname{tg}^2 \beta_R. \quad (70.60)$$

Принятые обозначения

$\alpha_n = \alpha_d$ — угол профиля зубцов косозубой рейки в нормальном сечении (рис. 186);

α_s — угол давления в точке пересечения торцового профиля с начальной окружностью; одновременно, α_s — угол зацепления корригированных колес при $\xi \Sigma \neq 0$;

α_d — угол профиля исходного контура;

α_{sd} — угол давления в точке пересечения торцового профиля с делительной окружностью;

β — угол, образованный с осью колеса касательной к винтовой линии на начальном цилиндре (угол наклона зубцов на начальном цилиндре);

β_d, β_0 — то же для винтовой линии на делительном, на основном цилиндре;

β_R — угол наклона винтовой линии на цилиндре радиуса R (см. обозначение R);

$\lambda = 90^\circ - \beta$; $\lambda_d = 90^\circ - \beta_d$ — углы подъема винтовых линий на начальном и делительном цилиндрах колеса;

γ — угол между осями симметрии впадин колеса, в которые вложены ролики;

$\lambda_0 = 90^\circ - \beta_0$ — угол подъема винтовой линии на основном цилиндре;

$\varepsilon, \varepsilon_s, \varepsilon_{np}$ — суммарный коэффициент перекрытия; коэффициент перекрытия в торцовом сечении; продольный коэффициент перекрытия;

ϕ — параметр (одна из криволинейных координат) эвольвентной винтовой поверхности;

κ, κ_I и κ_{II} — кривизны в нормальном и главных сечениях;

ξ, ξ_s — коэффициенты смещения исходного контура, отнесенные к нормальному и к торцовому модулям;

σ_{sd} — половина угловой ширины впадины в торцовом сечении на делительном цилиндре;

c_0 и c_{s0} — коэффициенты радиального зазора, отнесенные к нормальному и к торцовому модулям;

f_0 и f_{s0} — коэффициенты высоты головки, отнесенные к нормальному и к торцовому модулям;

$m = m_n, m_{sд}$ — модуль зубцов исходного контура (нормальный модуль), торцовый модуль;

p — винтовой параметр;

r_n, r_d — радиус начального, делительного цилиндра колеса;

R — кратчайшее расстояние от оси колеса центра шарика, вложенного во впадину (кратчайшее расстояние между осями колеса и ролика, вложенного во впадину);

$t = t_n, t_s; t_{сд}$ — шаг зубцов исходного контура; шаг зубцов на начальном цилиндре; шаг зубцов на делительном цилиндре;

u — параметр (одна из криволинейных координат) эвольвентной винтовой поверхности;

$w_{сд}$ — дуговая ширина впадины в торцовом сечении на делительном цилиндре.

§ 71. Косозубые колеса с зацеплением М. Л. Новикова

1°. Заслугой М. Л. Новикова является разработка метода синтеза сопряженных зацеплений с первоначально точечным касанием поверхностей, имеющих повышенную нагрузочную способность. Наибольшее распространение получила передача из косозубых колес, изображенных на рис. 193.

В. Н. Кудрявцев предложил и осуществил нарезание колес Новикова по методу обкатки посредством червячных фрез. Нормализованным у таких колес является нормальный модуль m_n и для нарезания колес

одного модуля m_n требуется вне зависимости от чисел зубцов парных колес применение двух червячных фрез: одной — для нарезания колеса с выпуклыми, другой — для колеса с вогнутыми зубцами. В основу такой пары червячных фрез В. Н. Кудрявцевым положены исходные контуры, изображенные на рис. 194, а, б. Под исходным контуром понимается сечение косозубой рейки плоскостью, перпендикулярной направлению ее зубцов.

2°. В рабочей части исходный контур очерчен дугой окружности, уравнения которой во вспомогательной системе координат x_a, y_a, z_a (рис. 195, а) представим в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \rho_i \sin \vartheta_i - b_i, \\ y_a &= -(\rho_i \cos \vartheta_i - a_i), \\ z_a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71.4)$$

Индексы $i = I, II$ относятся соответственно к исходным контурам для колес с выпуклыми и вогнутыми зубцами.

Поверхность зубца рейки будет образована при поступательном движении системы x_a, y_a, z_a вместе с дуговым профилем в направлении зубцов рейки (рис. 195, б). Уравнения образуемой поверхности в системе x_p, y_p ,

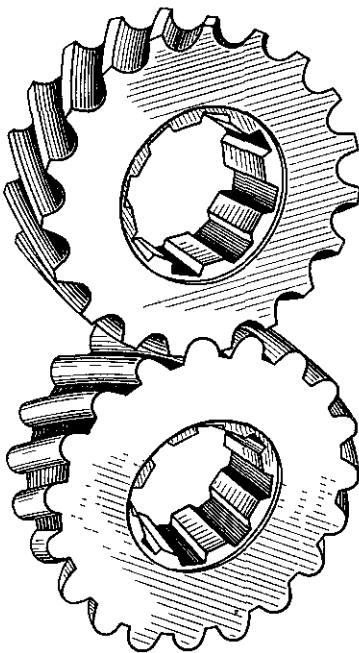


Рис. 193.

z_p таковы:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \rho_i \sin \vartheta_i - b_i, \quad y_p = -(\rho_i \cos \vartheta_i - a_i) \sin \lambda + u_i \cos \lambda, \\ z_p &= (\rho_i \cos \vartheta_i - a_i) \cos \lambda + u_i \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71.2)$$

3°. Две косозубые рейки, используемые для нарезания пары колес Новикова, касаются друг друга по прямой линии, для определения которой

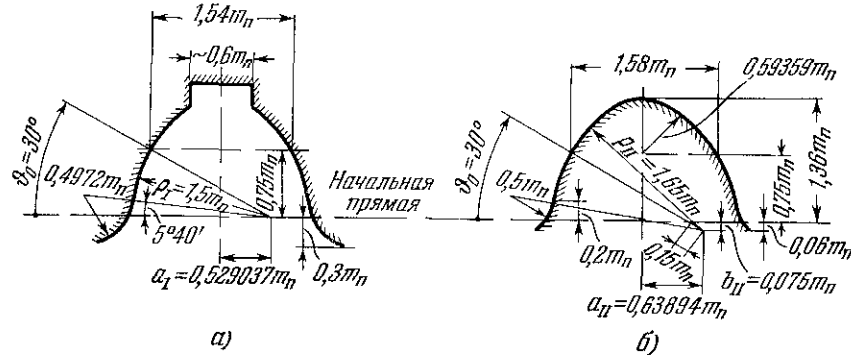


Рис. 194.

нужно использовать следующие уравнения:

$$r_p^{(I)} = r_p^{(II)}, \quad e_p^{(I)} = e_p^{(II)}, \quad (71.3)$$

где $r_p^{(I)}$ и $r_p^{(II)}$ — радиусы-векторы точек касания поверхностей зубцов обеих реек, $e_p^{(I)}$ и $e_p^{(II)}$ — единичные векторы нормалей к поверхностям зубцов реек.

Орт нормали определяется уравнением

$$\begin{aligned} e_p^{(i)} &= k \left(\frac{\partial r_p}{\partial \vartheta_i} \times \frac{\partial r_p}{\partial u_i} \right) = \\ &= \sin \vartheta_i i_p - \cos \vartheta_i \sin \lambda j_p + \\ &\quad + \cos \vartheta_i \cos \lambda k_p, \end{aligned} \quad (71.4)$$

где k — нормирующий множитель.

Проделив преобразования, найдем, что для точек касания поверхностей зубцов двух реек соблюдаются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} u_I &= u_{II}, \quad \vartheta_I = \vartheta_{II} = \vartheta_0, \quad \rho_I \sin \vartheta_I = \\ &= \rho_{II} \sin \vartheta_{II} - b_{II} \quad (b_I = 0), \\ \rho_I \cos \vartheta_0 - a_I &= \rho_{II} \cos \vartheta_0 - a_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (71.5)$$

Для определения линии ка-

сания поверхностей реек в уравнениях (71.2) нужно положить $\vartheta_i = \vartheta_0$.

4°. Как уже отмечалось в § 38, сопряженные зацепления с точечным касанием могут быть образованы посредством двух несовпадающих друг

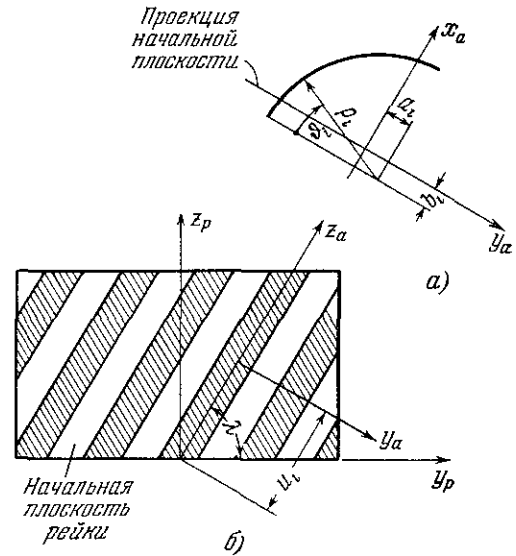


Рис. 195.

с другим производящих поверхностей, касающихся друг друга по некоторой линии L . В процессе нарезания такие две производящие поверхности остаются жестко связанными между собой. Они имеют одно и то же движение по отношению к каждому из нарезаемых колес, и каждой из производящих поверхностей воспроизводится поверхность зубцов своего колеса. Если линии контакта K_1 и K_2 производящих поверхностей с поверхностями зубцов колес будут касаться или пересекать друг друга в точке, принадлежащей линии L , поверхности зубцов колес будут сопряженными и передача вращения колесами будет осуществляться с постоянным передаточным отношением. Такому именно случаю соответствует

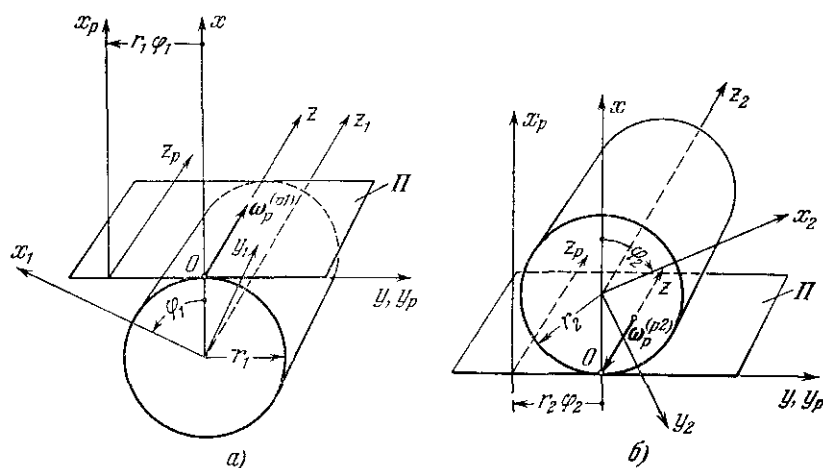


Рис. 196.

образование поверхностей зубцов колес посредством двух производящих реек, определяемых уравнениями (71.2). Эти рейки жестко между собой связаны и касаются друг друга по линии L , получаемой из (71.2) при $\varphi_1 = \varphi_0$. Нормальное сечение каждой производящей рейки совпадает с соответствующим исходным контуром, изображенным на рис. 194.

5°. Для дальнейших выводов нам, помимо системы координат S_p , связанной с рейкой, понадобятся (рис. 196): а) неподвижная система координат S , б) подвижные системы координат S_1 и S_2 , связанные соответственно с нарезаемыми колесами.

При нарезании зубцов каждого из колес скорости движения рейки и колеса находятся в следующем соотношении:

$$v_p = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

где r_1 и r_2 — радиусы начальных цилиндров (аксоидов) колес.

Угловые скорости колес находятся в отношении $i_{12} = \omega_1/\omega_2$, где i_{12} — наперед заданное передаточное отношение.

Аксоиды — начальные цилиндры колес 1 и 2 — одни и те же как при зацеплении колес между собой, так и при зацеплении колеса с рейкой. Линия касания начальных цилиндров — Oz — является осью зацепления в передаче, составленной из колес, и в передаче рейка-колесо. Плоскость Π является начальной плоскостью — аксоидом рейки — при нарезании колеса рейкой.

6°. Найдем в системе S_p уравнения линии контакта рейки с нарезаемым колесом. Воспользуемся для этого уравнениями, аналогичными (69.9). После преобразований получим

$$(r_k \varphi_k - u_i \cos \lambda - a_i \sin \lambda) \sin \vartheta_i + b_i \cos \vartheta_i \sin \lambda = 0 \\ (k = 1, 2; i = \text{I}, \text{II}). \quad (71.6)$$

При $b_{\text{I}} = 0$, что соответствует случаю, когда центр дугового профиля находится в начальной плоскости рейки (рейка I нарезает колесо I), уравнение (71.6) примет такой вид:

$$r_{\text{I}} \varphi_{\text{I}} - u_{\text{I}} \cos \lambda - a_{\text{I}} \sin \lambda = 0. \quad (71.7)$$

Из уравнения (71.7) следует, что каждому фиксированному значению φ_{I} угла поворота колеса соответствует единственное значение параметра u_{I} . При фиксированном значении u_{I} точки поверхности зубца рейки, как это следует из уравнений (71.2), являются точками дугового профиля радиуса ρ_{I} . Это означает, что при $b_{\text{I}} = 0$ линией контакта поверхности зубца рейки и колеса является дуговой профиль радиуса ρ_{I} . Линия контакта является при этом плоской кривой и находится в плоскости, образующей с торцевой плоскостью колеса (плоскостью $z_1 = \text{const}$) угол λ .

При $b_{\text{II}} \neq 0$ связь между параметрами ϑ_{II} , u_{II} и φ_2 выражается уравнением (71.6). При такой связи между параметрами линия контакта уже не является плоской кривой и не совпадает с дугой окружности. Отличие контактной линии от плоской кривой становится особенно заметным в точках, которым соответствуют значения параметра ϑ_{II} , близкие к нулю.

7°. Найдем уравнения поверхностей зубцов колес, нарезаемых рейками.

Переход от системы координат S_p к системе S_1 (рис. 196, а) выражается матрицей

$$M_{1p} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & r_1 (\cos \varphi_1 + \varphi_1 \sin \varphi_1) \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & r_1 (\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (71.8)$$

Связь между системами координат x_p, y_p, z_p и x_1, y_1, z_1 выражается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_p \cos \varphi_1 - y_p \sin \varphi_1 + r_1 (\cos \varphi_1 + \varphi_1 \sin \varphi_1), \\ y_1 &= x_p \sin \varphi_1 + y_p \cos \varphi_1 + r_1 (\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1), \\ z_1 &= z_p, \\ t_1 &= t_p. \end{aligned} \right\} \quad (71.9)$$

Поверхность зубцов колеса 1 определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_1 \varphi_1 - a_{\text{I}} \sin \lambda - u_{\text{I}} \cos \lambda &= 0, \\ x_1 &= \rho_{\text{I}} \sin \vartheta_{\text{I}} \cos \varphi_1 + [(\rho_{\text{I}} \cos \vartheta_{\text{I}} - a_{\text{I}}) \sin \lambda - u_{\text{I}} \cos \lambda] \sin \varphi_1 + \\ &\quad + r_1 (\cos \varphi_1 + \varphi_1 \sin \varphi_1), \\ y_1 &= \rho_{\text{I}} \sin \vartheta_{\text{I}} \sin \varphi_1 - [(\rho_{\text{I}} \cos \vartheta_{\text{I}} - a_{\text{I}}) \sin \lambda - u_{\text{I}} \cos \lambda] \cos \varphi_1 + \\ &\quad + r_1 (\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1), \\ z_1 &= (\rho_{\text{I}} \cos \vartheta_{\text{I}} - a_{\text{I}}) \cos \lambda + u_{\text{I}} \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71.10)$$

Исключив параметр u_I , поверхность зубцов колеса 1 выразим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho_I (\sin \vartheta_I \cos \varphi_1 + \cos \vartheta_I \sin \lambda \sin \varphi_1), \\ y_1 &= \rho_I (\sin \vartheta_I \sin \varphi_1 - \cos \vartheta_I \sin \lambda \cos \varphi_1), \\ z_1 &= \rho_I \cos \vartheta_I \cos \lambda - \frac{a_I}{\cos \lambda} + r_1 \varphi_1 \operatorname{tg} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71.11)$$

Сечение поверхности зубцов колеса плоскостью $z_1 = 0$ получим, присоединив к уравнениям (71.11) уравнение

$$\varphi_1 = \frac{\frac{a_I}{\cos \lambda} - \rho_I \cos \vartheta_I \cos \lambda}{r_1 \operatorname{tg} \lambda}. \quad (71.12)$$

Переход $S_p(x_p, y_p, z_p)$ к $S_2(x_2, y_2, z_2)$ выражается матрицей (рис. 196, б)

$$M_{2p} = \left\| \begin{array}{ccccc} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & -r_2 (\cos \varphi_2 + \varphi_2 \sin \varphi_2) \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & r_2 (\sin \varphi_2 - \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (71.13)$$

Выполнив аналогичные преобразования, поверхность зубцов колеса 2 представим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (\rho_{II} \sin \vartheta_{II} - b_{II} - r_2) \cos \varphi_2 - (\rho_{II} \cos \vartheta_{II} - b_{II} \operatorname{ctg} \vartheta_{II}) \sin \lambda \sin \varphi_2, \\ y_2 &= -(\rho_{II} \sin \vartheta_{II} - b_{II} - r_2) \sin \varphi_2 - (\rho_{II} \cos \vartheta_{II} - b_{II} \operatorname{ctg} \vartheta_{II}) \sin \lambda \cos \varphi_2, \\ z_2 &= \rho_{II} \cos \vartheta_{II} \cos \lambda - \frac{a_{II}}{\cos \lambda} + b_{II} \operatorname{ctg} \vartheta_{II} \sin \lambda \operatorname{tg} \lambda + r_2 \varphi_2 \operatorname{tg} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71.14)$$

Следует подчеркнуть, что при $\varphi_1 = \text{const}$ (аналогично при $\varphi_2 = \text{const}$) уравнения (71.12) [соответственно (71.14)] представят уравнения линии контакта поверхности зубца колеса с рейкой.

8°. Поверхности зубцов колес, нарезанные двумя не совпадающими друг с другом производящими поверхностями, имеют первоначально друг с другом точечное касание.

Уравнения линии зацепления колес — геометрического места точек касания в неподвижной системе координат — представляют уравнения линии касания производящих поверхностей в системе $S(x, y, z)$, что можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned} r_k \varphi_k - a_i \sin \lambda - u_i \cos \lambda + b_i \operatorname{ctg} \vartheta_0 \sin \lambda &= 0, \\ x &= \rho_i \sin \vartheta_0 - b_i, \\ y &= -(\rho_i \cos \vartheta_0 - a_i) \sin \lambda + u_i \cos \lambda - r_1 \varphi_1, \\ z &= (\rho_i \cos \vartheta_0 - a_i) \cos \lambda + u_i \sin \lambda \\ &\quad (k = 1, 2; i = I, II). \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_i \sin \vartheta_0 - b_i, \\ y &= -(\rho_i \cos \vartheta_0 - b_i \operatorname{ctg} \vartheta_0) \sin \lambda, \\ z &= \rho_i \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \frac{a_i}{\cos \lambda} + b_i \operatorname{ctg} \vartheta_0 \sin \lambda \operatorname{tg} \lambda + r_k \varphi_k \operatorname{tg} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71.15)$$

Из этих уравнений следует, что линия зацепления (71.15) представляет прямую линию, параллельную оси z ; положение текущей точки на линии зацепления определяется в зависимости от параметра φ_h — угла поворота колеса.

Назовем рабочей линией на поверхности зубцов совокупность точек касания этой поверхности с сопряженной ей поверхностью зубцов второго колеса.

Уравнения рабочей линии получим из уравнений поверхности зубцов колеса, положив в них $\vartheta_i = \vartheta_0$.

Проделав это, легко убедиться, что рабочая линия на поверхности зубца колеса рассматриваемого вида зацепления представляет винтовую линию с винтовым параметром: а) на первом колесе $p_1 = r_1 \operatorname{tg} \lambda$, б) на втором колесе $p_2 = r_2 \operatorname{tg} \lambda$.

На первом колесе такая винтовая линия принадлежит цилиндру радиуса

$$R_1 = \sqrt{(\rho_I \sin \vartheta_0 + r_1)^2 + (\rho_I \cos \vartheta_0 \sin \lambda)^2}. \quad (71.16)$$

На втором колесе винтовая линия находится на цилиндре радиуса

$$R_2 = \sqrt{(\rho_{II} \sin \vartheta_0 - b_{II} - r_2)^2 + [(\rho_{II} \cos \vartheta_0 - b_{II} \operatorname{ctg} \vartheta_0) \sin \lambda]^2}. \quad (71.17)$$

9°. Для определения условий отсутствия подрезания зубцов используем материалы § 36. Определитель при обозначениях настоящего параграфа, рассматривая зацепление рейки с колесом 1, запишем так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_i} & \frac{\partial f}{\partial \vartheta_i} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} & \frac{d\varphi_1}{dt} \\ \frac{\partial x_p}{\partial u_i} & \frac{\partial x_p}{\partial \vartheta_i} & v_{xp}^{(p1)} & \\ \frac{\partial y_p}{\partial u_i} & \frac{\partial y_p}{\partial \vartheta_i} & v_{yp}^{(p1)} & \end{vmatrix} = 0. \quad (71.18)$$

Через $f(u_i, \vartheta_i, \varphi_1) = 0$ обозначено уравнение зацепления (71.6). Скорость относительного движения $v_p^{(p1)}$ представляет скорость вращения рейки вокруг мгновенной оси z с угловой скоростью $\omega_p^{(p1)}$ (рис. 196, а) и определяется уравнением

$$v_p^{(p1)} = \omega_p^{(p1)} \times (r_p - R_p) = \omega^{(1)} [(r_1 \varphi_1 - y_p) i_p + x_p j], \quad (71.19)$$

где R_p — радиус-вектор точки O , принадлежащей линии действия вектора $\omega^{(p1)}$.

Частные производные, входящие в определитель (71.18), найдем, проинтегрировав уравнение зацепления (71.6) и уравнения (71.2) поверхности рейки. После преобразований получим два уравнения для определения граничных значений ϑ_i :

$$\cos \vartheta_i = 0, \quad (71.20)$$

$$\sin^4 \vartheta_i + \left(\frac{r_i}{\rho_i \cos^2 \lambda} - \frac{b_i}{\rho_i} \right) \sin^3 \vartheta_i + \frac{b_i}{\rho_i} \operatorname{tg}^2 \lambda \sin \vartheta_i - \frac{b_i^2}{\rho_i^2} \operatorname{tg}^2 \lambda = 0. \quad (71.21)$$

Выражение (71.20) нужно исключить из рассмотрения, так как на исходном контуре (рис. 194) нет точек с значением $\vartheta_i = 90^\circ$. Граничное значение ϑ_i должно быть определено из зависимости (71.21). Для исходного контура, представленного на рис. 194, а, в зависимости (71.21) нужно принять $b_i = 0$.

10°. Для определения нормальной и главных кривизн поверхности зубца воспользуемся методом, изложенным в § 35.

Поверхность зубца рейки в системе s определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^{(p)} &= \rho_i \sin \vartheta_i - b_i, \\ y^{(p)} &= -(\rho_i \cos \vartheta_i - a_i) \sin \lambda + u_i \cos \lambda - r_1 \varphi_1, \\ z^{(p)} &= (\rho_i \cos \vartheta_i - a_i) \cos \lambda + u_i \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71.22)$$

Орт нормали к поверхности (71.22) определяется уравнениями (71.4).

При нарезании колеса 1 с выпуклыми зубцами используется исходный контур, изображенный на рис. 190, a , индекс $i = I$, $b_I = 0$.

Нормальная кривизна поверхности зубца колеса 1 определится уравнением

$$\kappa^{(1)} = -\frac{\dot{e}_r^{(1)} v_r^{(1)}}{[v_r^{(1)}]^2}. \quad (71.23)$$

Так как движение рейки по отношению к колесу 1 представляет вращение вокруг оси z с угловой скоростью $\omega^{(p1)} = \omega_1 k$, то

$$v_r^{(1)} = v_r^{(p)} + v^{(p1)}, \quad \dot{e}_r^{(1)} = \dot{e}_r^{(p)} + \omega^{(p1)} \times e^{(p)}.$$

Проекции $v_r^{(1)}$ и $e_r^{(1)}$ определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} v_{xr}^{(1)} &= \rho_I \cos \vartheta_I \left(\frac{d\vartheta_I}{dt} + \omega_1 \sin \lambda \right), \\ v_{yr}^{(1)} &= \cos \lambda \frac{du_I}{dt} + \rho_I \sin \vartheta_I \left(\sin \lambda \frac{d\vartheta_I}{dt} + \omega_1 \right), \\ v_{zr}^{(1)} &= \sin \lambda \frac{du_I}{dt} - \rho_I \sin \vartheta_I \cos \lambda \frac{d\vartheta_I}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (71.24)$$

Связь между производными du_I/dt и ω_1 получим, продифференцировав уравнение зацепления (71.6) рейки и колеса 1, приняв в нем $b_i = 0$:

$$\frac{du_I}{dt} = \frac{r_1 \omega_1}{\cos \lambda}. \quad (71.25)$$

При перемещении точки контакта по касательной к линии контакта и дифференцировании (71.6) нужно принять, что $\varphi_1 = \text{const}$. В результате получим, что такому направлению соответствует значение производной $du_I/dt = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{xr}^{(1)} &= \cos \vartheta_I \left(\frac{d\vartheta_I}{dt} + \omega_1 \sin \lambda \right), \\ \dot{e}_{yr}^{(1)} &= \sin \vartheta_I \left(\sin \lambda \frac{d\vartheta_I}{dt} + \omega_1 \right), \\ \dot{e}_{zr}^{(1)} &= -\sin \vartheta_I \cos \lambda \frac{d\vartheta_I}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (71.26)$$

Главные кривизны и главные направления определим, используя формулу

$$\kappa^{(1)} v_r^{(1)} = -\dot{e}_r^{(1)}.$$

После преобразований получим квадратное уравнение для определения главных радиусов кривизны

$$[R^{(1)}]^2 + \left[2\rho_I + \frac{r_1}{\sin \vartheta_I \cos^2 \lambda} \right] R^{(1)} + \rho_I^2 + \frac{\rho_I r_1}{\sin \vartheta_I \cos^2 \lambda} = 0. \quad (71.27)$$

Главные радиусы кривизны соответственно равны

$$R_1^{(1)} = - \left(\frac{r_1}{\sin \vartheta_I \cos^2 \lambda} + \rho_I \right), \quad (71.28)$$

$$R_2^{(1)} = -\rho_I. \quad (71.29)$$

Знаки $R_1^{(1)}$ и $R_2^{(1)}$ указывают, что главные радиусы кривизны направлены противоположно орту нормали (71.4), точка поверхности является эллиптической.

Главным направлениям отвечают следующие значения производных: а) $d\vartheta_I/dt = -\omega_1 \sin \lambda$, $du_I/dt = r_1 \omega_1 / \cos \lambda$; б) $d\vartheta_I/dt$ может иметь любое значение, в частности и значение, равное нулю; $du_I/dt = 0$. Легко удостовериться, что первое из главных направлений перпендикулярно касательной к линии контакта поверхностей зубцов рейки и колеса, второе — совпадает с касательной к линии контакта.

Аналогичным образом находятся главные радиусы кривизны и главные направления для поверхности зубца колеса 2. Движение рейки по отношению к колесу 2 представляет вращение вокруг оси z с угловой скоростью $\omega^{(p2)} = -\omega_2 \mathbf{k}$ (рис. 196, б).

В уравнении (71.2) поверхности зубца рейки нужно принять $i = II$, $b_i = b_{II}$.

Уравнение зацепления рейки и колеса 2 имеет такой вид:

$$r_2 \varphi_2 - u_{II} \cos \lambda - a_{II} \sin \lambda + b_{II} \operatorname{ctg} \vartheta_{II} \sin \lambda = 0. \quad (71.30)$$

Проекции векторов $\mathbf{v}_r^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)}$ определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} v_{xr}^{(2)} &= \rho_{II} \cos \vartheta_{II} \frac{d\vartheta_{II}}{dt} - \omega_2 \operatorname{ctg} \vartheta_{II} \sin \lambda (\rho_{II} \sin \vartheta_{II} - b_{II}), \\ v_{yr}^{(2)} &= \cos \lambda \frac{du_{II}}{dt} + \rho_{II} \sin \vartheta_{II} \sin \lambda \frac{d\vartheta_{II}}{dt} - \omega_2 (\rho_{II} \sin \vartheta_{II} - b_{II}), \\ v_{zr}^{(2)} &= \sin \lambda \frac{du_{II}}{dt} - \rho_{II} \sin \vartheta_{II} \cos \lambda \frac{d\vartheta_{II}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (71.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{xr}^{(2)} &= \cos \vartheta_{II} \left(\frac{d\vartheta_{II}}{dt} - \omega_2 \sin \lambda \right), \\ \dot{e}_{yr}^{(2)} &= \sin \vartheta_{II} \left(\sin \lambda \frac{d\vartheta_{II}}{dt} - \omega_2 \right), \\ \dot{e}_{zr}^{(2)} &= -\sin \vartheta_{II} \cos \lambda \frac{d\vartheta_{II}}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (71.32)$$

Главные радиусы кривизны определяются из квадратного уравнения

$$\begin{aligned} [R^{(2)}]^2 + \left[2\rho_{II} + \frac{b_{II}}{\sin \vartheta_{II}} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \lambda}{\sin^2 \vartheta_{II}} - 1 \right) - \frac{r_2}{\sin \vartheta_{II} \cos^2 \lambda} \right] R^{(2)} + \\ + \rho_{II} \left(\frac{b_{II} \sin^2 \lambda}{\sin^3 \vartheta_{II} \cos^2 \lambda} + \rho_{II} \right) \left(1 - \frac{b_{II}}{\rho_{II} \sin \vartheta_{II}} \right) - \frac{\rho_{II} r_2}{\sin \vartheta_{II} \cos^2 \lambda} = 0. \end{aligned} \quad (71.33)$$

Главным направлениям отвечают производные, определяемые из уравнений

$$\frac{d\vartheta_{II}}{dt} = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{tg} \lambda}{(R^{(2)} + \rho_{II}) \sin \vartheta_{II} \cos \lambda - \frac{b_{II}}{\sin^2 \vartheta_{II}} \operatorname{tg} \lambda}, \quad (71.34)$$

$$\frac{du_{II}}{dt} = \frac{r_2 \omega_2 - \frac{b_{II}}{\sin^2 \vartheta_{II}} \sin \lambda \frac{d\vartheta_{II}}{dt}}{\cos \lambda}. \quad (71.35)$$

Подставив эти значения производных в выражения (71.31), найдем проекции скорости $\mathbf{v}_i^{(2)}$ на главном направлении.

До приработки колес Новикова поверхности их зубцов находятся первоначально в точечном касании. При сжатии, вследствие упругих деформаций, поверхности зубцов начинают касаться по некоторой площадке, размеры которой можно определить, используя формулы § 37. Угол σ между главными направлениями на поверхностях зубцов определяется уравнением

$$\cos \sigma = \frac{v_r^{(1)} v_i^{(2)}}{|v_r^{(1)}| |v_i^{(2)}|}. \quad (71.36)$$

При определении главных радиусов кривизны и главных направлений в формулах, полученных в п. 9° настоящего параграфа, нужно принимать значения $\vartheta_I = \vartheta_{II} = \vartheta_0$ (см. рис. 194).

11°. Влияние погрешностей межосевого расстояния колес может быть определено методами, изложенными в §§ 40 и 41. Решение этой задачи, выполненное автором, привело к следующим результатам: а) изменение межосевого расстояния колес Новикова не сказывается ни на величине, ни на постоянстве передаточного отношения; б) погрешность межосевого расстояния сказывается на положении пятна контакта. Новое значение ϑ , определяющее положение теоретической точки касания, находится из следующей приближенной формулы:

$$\sin \vartheta = \frac{\Delta A - b_{II}}{\rho_I - \rho_{II}}. \quad (71.37)$$

При значительной величине погрешности ΔA пятно контакта в зависимости от знака ΔA смещается к головке или к ножке зубца.

12°. При нарезании эвольвентных колес требуемая величина бокового зазора достигается смещением исходного контура. Для колес с зацеплением Новикова исходные контуры должны быть спроектированы таким образом, чтобы требуемая величина бокового зазора между нарезанными поверхностями достигалась за счет заранее предписанных отклонений от нормальных размеров толщин зубцов обоих исходных контуров. Неточная установка червячной фрезы относительно оси нарезаемого колеса приводит не только к изменению толщины зубцов нарезаемых колес, но и к изменению параметра ϑ_0 , определяющего угол давления и положение пятна контакта.

Исследование влияния смещения исходного контура, выполненное методом, описанным в § 40, привело к следующим результатам: а) передаточное отношение колес, нарезанных со сдвигом исходных контуров, остается постоянным и сохраняет свою прежнюю величину; б) при совместном действии погрешности ΔA межосевого расстояния и сдвигов исходных контуров имеет место смещение пятна контакта. Параметр ϑ , определяющий положение центра пятна контакта, находится из уравнения

$$2Af + f^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \vartheta \sin^2 \lambda) = 2A\Delta A + (\Delta A)^2, \quad (71.38)$$

где $f = (\rho_I - \rho_{II}) \sin \vartheta + b_{II} + (\xi_I + \xi_{II}) m_n$; ξ_i — сдвиг исходного контура. Приближенно, пренебрегая $(\Delta A)^2$ и f^2 , получим

$$\sin \vartheta = \frac{b_{II} - [\Delta A - (\xi_I + \xi_{II}) m_n]}{\rho_{II} - \rho_I}. \quad (71.39)$$

Тенденция к кромочному касанию ($\vartheta \rightarrow 0$) имеет место, если $\Delta A > 0$, $\xi_I < 0$, $\xi_{II} < 0$. Напомним, что при указанных знаках для ξ_i ($i = I, II$) колеса нарезаются со сдвигами исходных контуров в «тело» колес.

Глава VIII

Цилиндрические колеса с винтовыми зубцами

для передачи вращения между перекрещивающимися осями

§ 72. Условия зацепления при скрещивании осей

Передача вращения между перекрещивающимися осями может быть осуществлена посредством цилиндрических колес с винтовыми зубцами как одноименного, так и разноименного направлений винтовых линий. При разноименном направлении винтовых линий их углы наклона в отличие от случая передачи вращения между параллельными осями не равны. В частном случае одно из колес передачи может быть прямозубым.

А. Начальные поверхности колес

Касание начальных поверхностей колес происходит в точке $P(-r^{(p)}, 0, 0)$. Согласно § 25, п. 3° начальными поверхностями колес

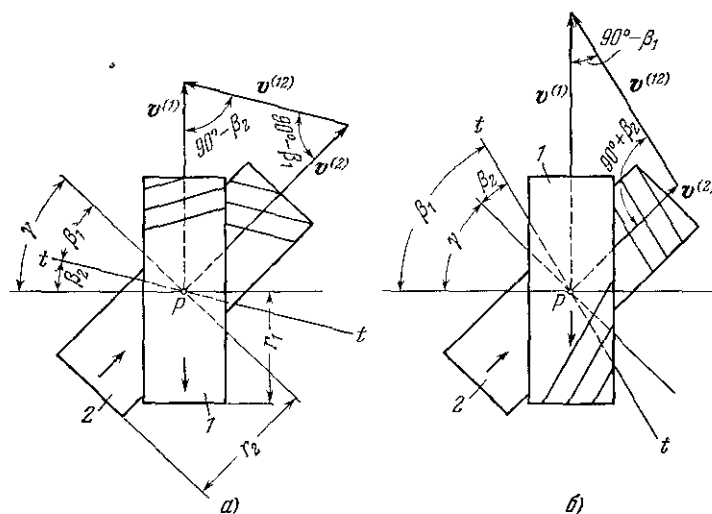


Рис. 197.

являются два скрещивающихся цилиндра. Проведем в точке P касательную плоскость к начальным цилиндрам и построим план скоростей (рис. 197). Общая касательная t к винтовым линиям зубцов и вектор скорости относительного движения $v^{(12)}$ должны иметь общую линию

действия. Из построений рис. 197 следует

$$\frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1}.$$

Отсюда следует

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1}. \quad (72.1)$$

Угол перекрещивания осей

$$\gamma = |\beta_1 \pm \beta_2|. \quad (72.2)$$

Верхний знак в этой формуле относится к одноименному направлению винтовых линий (рис. 197, а); нижний знак соответствует разноименному направлению винтовых линий зубцов (рис. 197, б).

Заданному передаточному отношению можно удовлетворить, выбирая произвольно отношение r_2/r_1 или $\cos \beta_2/\cos \beta_1$. Следует, однако, иметь в виду, что при неудачном назначении отношения r_2/r_1 (или $\cos \beta_2/\cos \beta_1$) могут возрасти скорости скольжения зубцов. В точке P

$$v_{\text{ск}} = |\omega_1 r_1 \sin \beta_1 \pm \omega_2 r_2 \sin \beta_2|. \quad (72.3)$$

В. О б р а з о в а н и е с о п р я ж е н н ы х п о в е р х н о с т е й

Способ образования сопряженных поверхностей зубцов колес основывается на возможности их нарезания двумя совпадающими друг с другом цилиндрическими поверхностями или плоскостями (см. § 38, п. 4°).

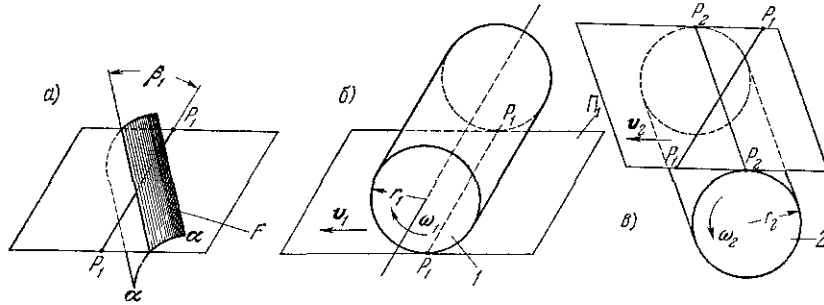


Рис. 198.

Такие инструментальные (производящие) поверхности являются подвижными друг относительно друга и могут перемещаться: а) в направлении общей образующей, если инструментальные поверхности цилиндрические; б) вдоль линии, принадлежащей совпадающим друг с другом инструментальным плоскостям.

Представим, что инструментальными поверхностями являются две совпадающие друг с другом цилиндрические поверхности с направляющей кривой $\alpha - \alpha$ (рис. 198, а). При нарезании зубцов первого колеса инструментальной поверхности F сообщается поступательное движение со скоростью $v_1 = \omega_1 r_1$, а колесу I — вращение с угловой скоростью ω_1 ; направление v_1 перпендикулярно оси колеса I (рис. 198, б). Аксоидами колеса I и инструментальной поверхности являются: начальный цилиндр радиуса r_1 и плоскость Π_1 . На колесе I будет образована поверхность зубца Σ_1 , являющаяся огибающей поверхности F в относительном движении.

При нарезании колеса 2 инструментальной поверхности F сообщается поступательное движение со скоростью $v_2 = \omega_2 r_2$, а нарезаемому колесу — вращение с угловой скоростью ω_2 (рис. 198, е). На колесе 2 будет образована поверхность зубца Σ_2 , как огибающая в относительном движении инструментальной поверхности F .

Образует из колес 1 и 2 передачу со скрещивающимися осями с углом скрещивания γ . Кратчайшее расстояние A между осями колес выберем так, что

$$A = r_1 + r_2,$$

где r_1 и r_2 — начальные цилиндры колес. Очевидно, что при этом плоскости Π_1 и Π_2 — аксоиды инструментальной поверхности при нарезании колес 1 и 2 — совпадут друг с другом, образуя общую плоскость Π . В такой передаче поверхности Σ_1 и Σ_2 будут иметь общую огибающую поверхность F . При вращении колес со скоростями ω_1 и ω_2 инструментальная поверхность будет перемещаться относительно каждого из колес с одной и той же скоростью v_n в направлении $n - n$, перпендикулярном направлению зубцов на плоскости Π (рис. 199). При этом

$$v_1 = v_n + v_{t1},$$

$$v_2 = v_n + v_{t2}.$$

Перемещения со скоростями v_{t1} и v_{t2} являются для обеих инструментальных поверхностей F внутренними сдвигами и на характере образования поверхностей Σ_1 и Σ_2 не сказываются.

Поверхности Σ_1 и Σ_2 цилиндрических колес при перекрещивании их осей имеют, вообще говоря, точечное касание, что можно подтвердить следующим образом. При образовании поверхности Σ_1 поверхностью F осью зацепления является линия P_1P_1 (рис. 198, б и 199); линией касания взаимоогibaемых поверхностей Σ_1 и F будет K_1 . При образовании поверхности Σ_2 той же инструментальной поверхностью F осью зацепления является P_2P_2 ; поверхности Σ_2 и F касаются друг друга по линии K_2 . Линии K_1 и K_2 лежат на поверхности F и, вообще говоря, не совпадают друг с другом. Если эти линии имеют общую точку M , в такой точке будут касаться друг друга поверхности Σ_1 и Σ_2 . Иными словами, точкой касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 является общая точка характеристик K_1 и K_2 .

При вращении колес 1 и 2 со скоростями ω_1 и ω_2 одновременно будет перемещаться рейка со скоростью v_n в направлении $n - n$, перпендикулярном направлению ее зубцов (рис. 199). Поверхности Σ_1 и Σ_2 зубцов колес находятся в точечном зацеплении друг с другом и в линейном касании с инструментальной поверхностью F , жестко связанной с рейкой.

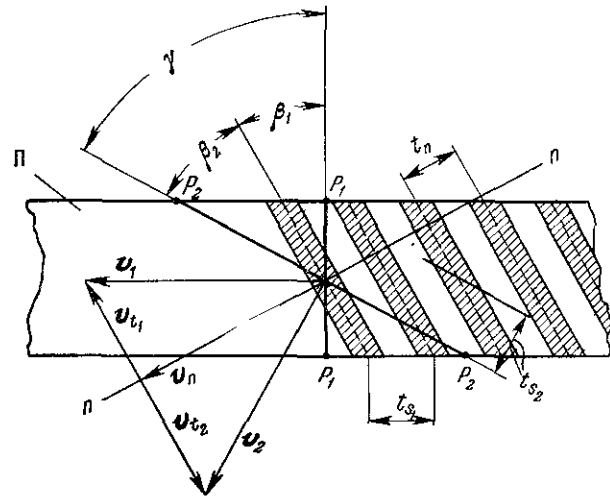


Рис. 199.

С. Линия зацепления

Совокупность точек касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 зубцов колес в неподвижной системе координат представляет линию зацепления.

Будем считать, что с колесом I связана система S_1 координат x_1, y_1, z_1 , а со стойкой — неподвижная система S координат x, y, z ; положение этих координат такое же, как на рис. 182.

Боковая поверхность зубцов колеса I является геликоидом, определяемым уравнениями:

$$x_1 = x_1(u, \vartheta), \quad y_1 = y_1(u, \vartheta), \quad z_1 = z_1(u, \vartheta). \quad (72.4)$$

Для перехода от системы координат x_1, y_1, z_1 к x, y, z нужно воспользоваться матричным равенством

$$r = M_{01}r_1, \quad (72.5)$$

где

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (72.6)$$

Семейство поверхностей зубцов колеса I в неподвижной системе координат x, y, z определится уравнениями;

$$x = x(u, \vartheta, \varphi_1), \quad y = y(u, \vartheta, \varphi_1), \quad z = z(u, \vartheta, \varphi_1). \quad (72.7)$$

Огибающей этого семейства является поверхность F рейки. Уравнения F в системе S можно найти как совокупность линий K_1 контакта поверхностей Σ_1 и F .

В точках контакта этих поверхностей нормаль должна пересекать ось зацепления P_1P_1 , выражаемую уравнениями:

$$X = -r_1, \quad Y = 0. \quad (72.8)$$

Нормаль к поверхности Σ_1 , пересекающая ось зацепления P_1P_1 , определяется уравнениями

$$-\frac{r_1 + x}{n_x} = -\frac{y}{n_y} = \frac{Z - z}{n_z}, \quad (72.9)$$

где n — вектор нормали к поверхности Σ_1 в системе S ; x, y, z — координаты точки поверхности Σ_1 в системе S . Связь между проекциями векторов n и n_1 выражается матричным равенством

$$n = L_{01}n_1. \quad (72.10)$$

Матрица L_{01} получится из M_{01} после того, как в M_{01} будут вычеркнуты последняя строка и последний столбец.

Подставим в систему (72.9) выражения для x, y, z , а также для n_x, n_y, n_z и исключим координату Z . Это позволит нам получить уравнение связи между параметрами u, ϑ и φ_1 :

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \quad (72.11)$$

При фиксированном значении угла поворота φ_1 колеса уравнение (72.11) является уравнением связи параметров u и ϑ тех точек поверхности Σ_1 первого колеса, которые принадлежат линии K_1 контакта

поверхностей Σ_1 и F . Уравнения (72.11) и (72.7), рассмотренные совместно, являются при фиксированном значении φ_1 уравнениями контактной линии K_1 .

Из всех точек линии контакта поверхностей Σ_1 и F нужно выделить ту единственную точку M , в которой касаются друг друга поверхности Σ_1 и Σ_2 . Точка M является общей точкой линий K_1 и K_2 . По K_1 касаются друг друга, как мы уже упоминали, поверхности Σ_1 и F ; K_2 — линия контакта поверхностей Σ_2 и F . При сопряжении поверхностей Σ_2 и F осью зацепления служит P_2P_2 , и во всех точках линии K_2 нормаль к этим поверхностям должна пересекать P_2P_2 . Так как M является общей точкой линий K_1 и K_2 , нормаль к поверхности Σ_1 в точке M должна пересекать обе оси зацепления: P_1P_1 и P_2P_2 . Так как эти прямые (рис. 199) лежат в одной плоскости (Π), а нормаль к поверхности Σ_1 , вообще говоря, не принадлежит плоскости Π , условие пересечения нормалью обеих осей зацеплений будет выполнено лишь в том случае, если она пройдет через точку P пересечения осей зацепления P_1P_1 и P_2P_2 .

Отсюда вывод: *точкой M касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 может явиться лишь такая точка, нормаль в которой пересекает обе оси зацепления P_1P_1 и P_2P_2 . В том частном случае, когда обе оси зацепления принадлежат одной плоскости, нормаль в точке M касания поверхностей должна пройти через точку P пересечения осей зацепления P_1P_1 и P_2P_2 .*

Условие прохождения нормали к поверхности через точку P ($-r_1, 0, 0$) выражается уравнениями

$$\frac{r_1 - x}{n_x} = \frac{y}{n_y} = \frac{z}{n_z}. \quad (72.12)$$

На основании системы (72.12) после преобразований получим

$$r_1 n_y = y n_x - x n_y.$$

Поверхность Σ_1 является геликоидом, и поэтому должна соблюдаться зависимость (27.9). Следовательно,

$$\frac{r_1}{p} = \frac{n_z}{n_y}. \quad (72.13)$$

Из системы (72.12) следует также, что

$$y n_z - z n_y = 0. \quad (72.14)$$

Выражения (72.13) и (72.14) равносильны двум уравнениям связи между параметрами u , ϑ и φ_1 :

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad f_2(u, \vartheta, \varphi_1) = 0. \quad (72.15)$$

Из системы уравнений (72.15) при фиксированном значении φ_1 находятся значения параметров u и ϑ , определяющие точку M касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Система уравнений (72.7) и (72.15), рассмотренных совместно, определяет линию зацепления поверхностей Σ_1 и Σ_2 в неподвижной системе координат x, y, z .

Д. Рабочая линия на поверхности Σ_1

Поверхности Σ_1 и Σ_2 зубцов цилиндрических винтовых колес находятся в каждый момент времени в точечном касании. Условимся называть рабочей линией ту совокупность точек поверхности Σ_1 (или Σ_2), в которых

эта поверхность в процессе зацепления будет касаться сопряженной поверхности. Для определения рабочей линии на поверхности Σ_1 нужно совместно рассмотреть уравнения связи (72.15) между параметрами u , θ , φ_1 и уравнения (72.4) поверхности Σ_1 .

§ 73. Эвольвентные винтовые колеса

Условимся называть *эвольвентными винтовыми* такие колеса, оси которых в передаче скрещиваются, а зубцы имеют эвольвентные винтовые поверхности. Как уже указывалось, одно из колес винтовой передачи может быть прямозубым. Передачи такого рода применяются главным образом в приборостроении; в машиностроении они применяются редко из-за недостаточной нагрузочной способности колес. Интересным примером эвольвентного винтового зацепления служит зацепление инструментального колеса в виде шевера с обрабатываемым колесом при особом виде чистовой обработки, называемом шевинг-процессом [166]. Геометрии и теории зацепления эвольвентных винтовых колес посвящены работы А. Шибеля [257], Г. Н. Листа [164] и автора книги [165].

А. О б р а з о в а н и е с о п р я ж е н н ы х п о в е р х н о с т е й

Как уже указывалось в § 72, В, образование сопряженных поверхностей зубцов цилиндрических винтовых колес основывается на возможности их нарезания общей инструментальной поверхностью. Эта поверхность является общей огибающей поверхностей зубцов колес передачи со скрещивающимися осями.

Колеса с эвольвентными винтовыми поверхностями могут быть нарезаны той же прямозубой рейкой, которая применяется для прямозубых колес; в сечении, перпендикулярном направлению зубцов рейки, угол профиля $\alpha_n - \alpha_d$, где α_d — угол профиля исходного контура. Зацепление прямозубой рейки и колеса с винтовыми поверхностями зубцов эквивалентно зацеплению такого же колеса с косозубой рейкой. Отличие заключается лишь в том, что прямозубой рейке при зацеплении с косозубым колесом должен сообщаться сдвиг в направлении ее зубцов; такой сдвиг является внутренним, так как поверхность зубцов рейки перемещается «в самой себе».

При нарезании рейкой колеса с винтовыми зубцами аксоидом колеса является делительный цилиндр колеса. Из двух колес с эвольвентными винтовыми зубцами можно образовать передачу со скрещивающимися осями, межосевое расстояние A которой и угол перекрещивания γ определяются уравнениями:

$$A = r_{d1} + r_{d2}, \quad \gamma = |\beta_{d1} \pm \beta_{d2}|. \quad (73.1)$$

Знак минус относится к случаю разноименных направлений винтовых линий. Если передача образуется из скорректированных колес, значения A и γ определяются из других зависимостей (см. п. С).

Общей производящей поверхностью F , образующей поверхности зубцов колес, является поверхность зубцов прямозубой рейки с углом профиля α_d , имеющей очертания исходного контура. Параметры зацепления колеса, нарезаемого такой рейкой, определяются по формулам, приведенным в § 70 для косозубых эвольвентных колес. Обозначения основных параметров и зависимости между ними приведены в таблицах IX, X, помещенных в конце настоящего параграфа.

В. Особенности зацепления

Для того чтобы определить характер зацепления колес при перекрещивании их осей, можно воспользоваться методом, изложенным в § 40.

При решении этой задачи нужно считать заданными: а) уравнения боковых поверхностей зубцов; б) кратчайшее межосевое расстояние A и угол скрещивания осей γ . В результате можно установить, что функция перемещения колес является линейной, передаточное отношение — постоянным, касание поверхностей — точечным; можно также определить линию зацепления колес, рабочие линии на поверхностях зубцов колес. Указанный способ исследования позволяет доказать, что изменение кратчайшего межосевого расстояния A и угла скрещивания γ осей колес не сказывается ни на величине, ни на постоянстве передаточного отношения.

В целях упрощения и сокращения выводов используем иной способ доказательства, основанный на том, что при изменении угла перекрещивания γ и межосевого расстояния A поверхности зубцов Σ_1 и Σ_2 колес, находясь в точечном касании, будут иметь общую производящую поверхность F' . Поверхность F' является плоскостью, и ее можно рассматривать как поверхность зубцов некоторой воображаемой рейки с углом профиля в нормальном сечении $\alpha'_n \neq \alpha_n$. Существование рейки с поверхностью F' вытекает из того, что колесо с эвольвентной винтовой поверхностью может быть образовано рейками с различным углом профиля α'_n в нормальном сечении.

Представим, что колесо 1, имеющее заданные параметры r_{01} , λ_{01} и t_{01} , введено в зацепление с новой рейкой так, что $v_{п1}/\omega_1 = r_1$ и $r_1 \neq r_{д1}$; $v_{п1}$ — скорость поступательного движения рейки в направлении, перпендикулярном оси колеса. Поверхность F' зубцов рейки явится огибающей поверхности зубцов колеса 1 и представит плоскость, сечение которой плоскостью $x_1 = -r_1$ (см. § 70) представляет прямую линию, составляющую с осью колеса угол $90^\circ - \lambda_1 = \beta_1$. При этом

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda_1 &= \operatorname{tg} \lambda_{01} \cos \alpha_{s1} = \frac{\operatorname{tg} \lambda_{д1}}{\cos \alpha_{сд1}} \cos \alpha_{s1}, \\ \cos \alpha_{s1} &= \frac{r_{01}}{r_1} = \frac{r_{д1} \cos \alpha_{сд1}}{r_1}. \end{aligned} \right\} \quad (73.2)$$

Угол профиля зубцов рейки F' в сечении плоскостью, перпендикулярной направлению ее зубцов, определится уравнением

$$\operatorname{tg} \alpha'_n = \operatorname{tg} \alpha_{s1} \sin \lambda_1. \quad (73.3)$$

Сопоставляя уравнения (73.2) и (73.3), получим

$$\cos \alpha'_n = \frac{\cos \lambda_{01}}{\cos \lambda_1} = \frac{\sin \beta_{01}}{\sin \beta_1}. \quad (73.4)$$

Шаг зубцов t'_n рейки F' в нормальном сечении определяется из уравнения

$$t'_n = \frac{t_{01}}{\cos \alpha_{s1}} \cos \beta_1 = \frac{t_{сд1} \cos \alpha_{сд1}}{\cos \alpha_{s1}} \cos \beta_1. \quad (73.5)$$

Аналогичным образом, считая заданными параметры r_{02} , λ_{02} и t_{02} колеса передачи, найдем, что

$$\cos \alpha'_n = \frac{\cos \lambda_{02}}{\cos \lambda_2} = \frac{\sin \beta_{02}}{\sin \beta_2}, \quad (73.6)$$

$$t'_n = \frac{t_{02}}{\cos \alpha_{s2}} \cos \beta_2 = \frac{t_{sd2} \cos \alpha_{sd2}}{\cos \alpha_{s2}} \cos \beta_2. \quad (73.7)$$

Для того чтобы поверхности Σ_1 и Σ_2 имели одну и ту же огибающую F' , необходимо удовлетворить следующим уравнениям:

$$\frac{\cos \lambda_{01}}{\cos \lambda_{02}} = \frac{\cos \lambda_1}{\cos \lambda_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}, \quad (73.8)$$

$$\gamma = |\beta_1 \pm \beta_2|. \quad (73.9)$$

При соблюдении условия (73.8) можно достигнуть одинакового значения угла профиля α'_n в нормальном сечении поверхности зубца F' рейки, зацепляющейся с обоими колесами. Уравнение (73.9) позволяет выбрать такое значение угла γ перекрещивания осей передачи, при котором будет обеспечено одинаковое направление зубцов рейки при зацеплении с обоими колесами.

Рассмотрев совместно уравнения (73.4), (73.8) и (73.9), после преобразований получим зависимость, связывающую углы α'_n , λ_{01} , λ_{02} и γ :

$$\cos \alpha'_n = \frac{\sqrt{\cos^2 \lambda_{01} \pm 2 \cos \lambda_{01} \cos \lambda_{02} \cos \gamma + \cos^2 \lambda_{02}}}{\sin \gamma}. \quad (73.10)$$

Верхний и нижний знаки в этой формуле относятся соответственно к случаям, когда $\gamma = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma = |\beta_1 - \beta_2|$.

Из уравнения (73.10) следует, что при заданных значениях углов подъема λ_{01} и λ_{02} на основных цилиндрах колес угол скрещивания осей γ может быть выбран произвольно. Величина угла γ сказывается лишь на значении угла α'_n нормального сечения плоскости F' , общей огибающей поверхностей зубцов колес; при $\gamma = \beta_{d1} \pm \beta_{d2}$ $\alpha'_n = \alpha_d$. Плоскость F' огибает поверхности зубцов колес, совершающих, как было принято при выводе, вращения с заданным передаточным отношением. Следовательно, изменение угла скрещивания не сказывается на передаточном отношении. Межцентровое расстояние колес при новом угле скрещивания целесообразно выбрать удовлетворяющим формуле

$$A = r_1 + r_2, \quad (73.11)$$

где r_1 и r_2 — радиусы цилиндров, являющихся аксоидами колес при зацеплении с рейкой с углом профиля α_n .

Так как поверхности колес имеют общую огибающую плоскость F' вне зависимости от выбранного значения A , изменение A на передаточном отношении колес не сказывается.

Ниже будет показано, что ширина колес будет минимальной, если при назначении A исходить из формулы (73.11).

Найдем выражения для r_1 и r_2 , считая заданными r_{01} , λ_{01} , r_{02} , λ_{02} и γ . На основании (73.3) и (73.4)

$$\cos \alpha_{s1} = \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_{01}} \cos \alpha'_n. \quad (73.12)$$

На основании (73.12), (73.4) и (73.10) получим

$$\cos \alpha_{s1} = \frac{\sin \gamma \sin \lambda_{01}}{|\cos \lambda_{01} \cos \gamma \pm \cos \lambda_{02}|}. \quad (73.13)$$

Аналогичным образом получим

$$\cos \alpha_{s2} = \frac{\sin \gamma \sin \lambda_{02}}{|\cos \lambda_{01} \pm \cos \lambda_{02} \cos \gamma|}. \quad (73.14)$$

Нижний знак в формулах (73.13) и (73.14) относится к случаю, когда винтовые линии обоих колес противоположного направления.

Учитывая, что

$$r_i = \frac{r_{0i}}{\cos \alpha_{si}} \quad (i = 1, 2), \quad (73.15)$$

получим

$$r_1 = r_{01} \frac{\sin \gamma \sin \lambda_{01}}{|\cos \lambda_{01} \sin \gamma \pm \cos \lambda_{02}|}, \quad (73.16)$$

$$r_2 = r_{02} \frac{\sin \gamma \sin \lambda_{02}}{|\cos \lambda_{01} \pm \cos \lambda_{02} \cos \gamma|}. \quad (73.17)$$

При рассмотрении условий сопряженности колес мы исходили из предположения, что поверхности их зубцов находятся в точечном контакте. Известно, однако, что при некоторых условиях этот контакт может стать линейным. Для этого нужно принять $\alpha'_n = 0$, $A = r_{01} + r_{02}$ и $\gamma = |\beta_{01} - \beta_{02}|$; общей огибающей поверхностью зубцов колес явится поверхность зубцов рейки с нулевым углом профиля. Поверхности зубцов колес будут в этом случае касаться друг друга по прямой линии, касательной к винтовым линиям на основных цилиндрах колес. Винтовые передачи такого вида не нашли распространения на практике вследствие неблагоприятного расположения контактных линий и значительного износа рабочих поверхностей зубцов.

С. Расчет корригированных колес

Выше было показано, что в передаче из винтовых колес можно изменять угол скрещивания γ и межосевое расстояние колес, не нарушая при этом величины и постоянства передаточного отношения. Во избежание появления чрезмерного бокового зазора или даже заклинивания колес при $\gamma \neq |\beta_{d1} \pm \beta_{d2}|$, $A \neq r_{d1} + r_{d2}$ необходимо соблюсти определенные соотношения между толщинами зубцов. Здесь могут встретиться два случая. а) Заданы толщины зубцов s_{d1} и s_{d2} корригированных колес на их делительных окружностях. Требуется найти угол перекрещивания осей и межосевое расстояние A ; б) Задан угол перекрещивания $\gamma \neq |\beta_{d1} \pm \beta_{d2}|$. Требуется найти толщины зубцов s_{d1} и s_{d2} , кратчайшее межосевое расстояние A .

1°. Рассмотрим первый случай расчета корригированных колес, когда исходными являются заданные толщины зубцов s_{d1} и s_{d2} , что имеет, например, место при расчете установок шевера.

Найдем зависимость, связывающую толщины зубцов колес, исходя из того, что в плоскости, перпендикулярной направлению зубцов воображаемой рейки F' , толщина зуба одного колеса должна равняться ширине впадины другого колеса. Следовательно,

$$s_1 \sin \lambda_1 + s_2 \sin \lambda_2 = l'_n = \pi m'_n. \quad (73.18)$$

По

$$s_1 = \left[\frac{s_{d1}}{r_{d1}} + 2(\operatorname{inv} \alpha_{sd1} - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) \right] r_1, \quad (73.19)$$

$$s_2 = \left[\frac{s_{d2}}{r_{d2}} + 2(\operatorname{inv} \alpha_{sd2} - \operatorname{inv} \alpha_{s2}) \right] r_2. \quad (73.20)$$

После простых преобразований найдем

$$\begin{aligned} \frac{m_{s1}z_1}{2} \sin \lambda_1 \left[\frac{s_{d1}}{r_{d1}} + 2 (\operatorname{inv} \alpha_{s\pi 1} - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) \right] + \\ + \frac{m_{s2}z_2}{2} \sin \lambda_2 \left[\frac{s_{d2}}{r_{d2}} + 2 (\operatorname{inv} \alpha_{sd2} - \operatorname{inv} \alpha_{s2}) \right] = \pi m'_n. \end{aligned} \quad (73.21)$$

Так как $m_{s1} \sin \lambda_1 = m_{s2} \sin \lambda_2 = m'_n$, получим

$$z_1 \operatorname{inv} \alpha_{s1} + z_2 \operatorname{inv} \alpha_{s2} = k, \quad (73.22)$$

где $k = z_1 \left(\frac{s_{d1}}{2r_{d1}} + \operatorname{inv} \alpha_{sd1} \right) + z_2 \left(\frac{s_{d2}}{2r_{d2}} + \operatorname{inv} \alpha_{sd2} \right) - \pi$.

В уравнении (73.22) в качестве неизвестных содержатся $\operatorname{inv} \alpha_{s1}$ и $\operatorname{inv} \alpha_{s2}$. Второе уравнение, связывающее эти неизвестные, получим следующим путем.

На основании (73.3)

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{s1}}{\operatorname{tg} \alpha_{s2}} = \frac{\sin \lambda_2}{\sin \lambda_1}, \quad (73.23)$$

$$\frac{\cos \alpha_{s1}}{\cos \alpha_{s2}} = \frac{r_{01}}{r_1} : \frac{r_{02}}{r_2} = \frac{\operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_{02}}{\operatorname{tg} \lambda_{01} \operatorname{tg} \lambda_2}. \quad (73.24)$$

На основании (73.23) и (73.24)

$$\frac{\sin \alpha_{s1}}{\sin \alpha_{s2}} = \frac{\cos \lambda_2 \operatorname{tg} \lambda_{02}}{\cos \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_{01}}. \quad (73.25)$$

Рассмотрев (73.25) и (73.8), найдем

$$\frac{\sin \alpha_{s1}}{\sin \alpha_{s2}} = \frac{\sin \lambda_{02}}{\sin \lambda_{01}}. \quad (73.26)$$

Аналогичным путем можно доказать, что

$$\frac{\sin \alpha_{sd1}}{\sin \alpha_{sd2}} = \frac{\sin \lambda_{02}}{\sin \lambda_{01}}. \quad (73.27)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sin \alpha_{s1}}{\sin \alpha_{s2}} = \frac{\sin \alpha_{sd1}}{\sin \alpha_{sd2}}. \quad (73.28)$$

Система уравнений (73.22) и (73.28) содержит два неизвестных: α_{s1} и α_{s2} . Решение такой системы требует применения метода последовательных приближений. В исходном приближении можно принять, что

$$\operatorname{inv} \alpha_{s2}^{(1)} \approx \operatorname{inv} \alpha_{s1}^{(1)} \frac{\operatorname{inv} \alpha_{s\pi 2}}{\operatorname{inv} \alpha_{sd1}}. \quad (73.29)$$

Подставив $\operatorname{inv} \alpha_{s2}^{(1)}$ в (73.22), найдем $\operatorname{inv} \alpha_{s1}^{(1)}$ и $\alpha_{s1}^{(1)}$. Так как при значениях $\alpha_{s2}^{(1)}$ и $\alpha_{s1}^{(1)}$ уравнение (73.28) удовлетворяться не будет, потребуются следующие приближения. Во втором приближении примем, что

$$\sin \alpha_{s2}^{(2)} = \sin \alpha_{s1}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{sd1}}{\sin \alpha_{sd2}}. \quad (73.30)$$

Из уравнения (73.22) найдем $\operatorname{inv} \alpha_{s1}^{(2)}$. Если при значениях $\alpha_{s1}^{(2)}$ и $\alpha_{s2}^{(2)}$ уравнение (73.28) вновь удовлетворяться не будет, понадобится третье приближение и т. д.

Для решения системы трансцендентных уравнений (73.22) и (73.28) можно воспользоваться также методом Ньютона.

После определения α_{s1} и α_{s2} находим значения радиусов начальных цилиндров

$$r_1 = \frac{r_{01}}{\cos \alpha_{s1}}, \quad r_2 = \frac{r_{02}}{\cos \alpha_{s2}},$$

межосевое расстояние $A = r_1 + r_2$, углы наклона винтовых линий на цилиндрах радиусов r_1 и r_2

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{r_1 \operatorname{tg} \beta_{d1}}{r_{d1}}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{r_2 \operatorname{tg} \beta_{d2}}{r_{d2}},$$

угол перекрещивания осей $\gamma = |\beta_1 \pm \beta_2|$.

Огмстим, что при некотором сочетании коэффициентов смещения инструментальной рейки F' может оказаться, что $\alpha_{s1} = \alpha_{sd1}$ и $\alpha_{s2} = \alpha_{sd2}$. Это возможно, если согласно (73.22) окажется, что

$$\frac{s_{d1}}{r_{d1}} z_1 + \frac{s_{d2}}{r_{d2}} z_2 = 2\pi. \quad (73.34)$$

В этом случае $\gamma = |\beta_{d1} \pm \beta_{d2}|$, $A = r_{d1} + r_{d2}$.

2°. Рассмотрим теперь случай, когда исходным при расчете является заданный угол перекрещивания осей $\gamma \neq |\beta_{d1} \pm \beta_{d2}|$.

Используя формулы (73.16) и (73.17), определим радиусы r_1 и r_2 начальных цилиндров; межцентровое расстояние колес $A = r_1 + r_2$. Толщины зубцов на окружностях радиусов r_1 и r_2 должны удовлетворять уравнению (73.18). При этом, как было показано выше, должно соблюдаться уравнение (73.22). Левая часть этого уравнения теперь является известной, а в правой части содержатся толщины зубцов s_{d1} и s_{d2} на делительных окружностях. Из двух коэффициентов смещения один может быть выбран произвольно; второй коэффициент смещения должен быть определен так, чтобы удовлетворялось уравнение (73.22).

Д. Линия зацепления

При выводе уравнений линий зацепления будем считать заданными параметры эвольвентной винтовой поверхности первого колеса.

Уравнения эвольвентной винтовой поверхности в системе x_1, y_1, z_1 мы записали ранее в таком виде (см. уравнения (70.2)):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{01} \cos \vartheta + u \cos \lambda_{01} \sin \vartheta, & y_1 &= r_{01} \sin \vartheta - u \cos \lambda_{01} \cos \vartheta, \\ z_1 &= p\vartheta - u \sin \lambda_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (73.32)$$

Следуя пути выводов, указанному в § 72, В, найдем уравнения, аналогичные (72.7):

$$\left. \begin{aligned} x &= r_{01} \cos (\varphi_1 + \vartheta) + u \cos \lambda_{01} \sin (\varphi_1 + \vartheta), \\ y &= r_{01} \sin (\varphi_1 + \vartheta) - u \cos \lambda_{01} \cos (\varphi_1 + \vartheta), \\ z &= p\vartheta - u \sin \lambda_{01} \end{aligned} \right\} \quad (73.33)$$

Проекция орта нормали e , используя уравнения (72.10), (72.6) и (70.3), представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \sin \lambda_{01} \sin (\varphi_1 + \vartheta), & e_y &= -\sin \lambda_{01} \cos (\varphi_1 + \vartheta), \\ e_z &= \cos \lambda_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (73.34)$$

При определении линий зацепления будем вначале исходить из того, что межосевое расстояние колес $A = r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 — радиусы аксоидов колес при зацеплении с рейкой, а угол $\gamma = |\beta_1 \pm \beta_2|$. Тогда оси зацеплений колес с рейками пересекаются в точке $(-r_1; 0; 0)$.

На основании уравнения (73.33), так как $p = r_{01}\lambda_{01}$ и обозначив $\frac{r_{01}}{r_1} = \cos \alpha_{s1}$, получим

$$\cos(\varphi_1 + \vartheta) = -\cos \alpha_{s1}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1 + \vartheta = \pi + \alpha_{s1}. \quad (73.35)$$

Основываясь на уравнении (73.34), найдем

$$u \cos \lambda_{01} = z \operatorname{tg} \lambda_{01} + r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1}. \quad (73.36)$$

Уравнения линии зацепления, используя зависимости (73.33), (73.35) и (73.36), представим в следующем виде:

$$x + y \operatorname{tg} \alpha_{s1} + r_1 = 0, \quad y - z \operatorname{tg} \lambda_1 = 0, \quad (73.37)$$

где λ_1 — угол подъема винтовой линии на цилиндре радиуса r_1 ; $\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \lambda_{01} \cos \alpha_{s1}$.

Линия зацепления (73.37) представляет прямую линию, получающуюся в результате пересечения двух плоскостей; первая из них ($x + y \operatorname{tg} \alpha_{s1} + r_1 = 0$) является касательной к основному цилиндру радиуса r_{01} , вторая плоскость ($y - z \operatorname{tg} \lambda_1 = 0$) параллельна оси x и составляет с торцем колеса (плоскостью xOy) угол $90^\circ - \lambda_1$.

Через коэффициенты направления линия зацепления выразится уравнениями:

$$\frac{x + r_1}{\operatorname{tg} \alpha_{s1}} = -\frac{y}{1} = -\frac{z}{\operatorname{ctg} \lambda_1}$$

или

$$-\frac{x - r_1}{\sin \lambda_{01} \sin \alpha_{s1}} = \frac{y}{\sin \lambda_{01} \cos \alpha_{s1}} = \frac{z}{\cos \lambda_{01}}. \quad (73.38)$$

Нетрудно установить, что линия зацепления (73.38) образует с осями колес такие же углы, как и орт нормали e [см. (73.34)]. С осью x линия зацепления Δ образует угол

$$\cos(\Delta, x) = \sin \lambda_{01} \sin \alpha_{s1} = \sin \alpha'_n. \quad (73.39)$$

Как и в случае зацепления эвольвентных колес с параллельными осями, линия зацепления в передаче с перекрещивающимися осями является нормалью к поверхностям зубцов колес в точке их соприкосновения.

Приведенные уравнения линии зацепления получены для эвольвентной винтовой поверхности колеса, образуемой винтовым движением прямой MN с отсчетом углов ϑ от оси x_1 к оси y_1 в кратчайшем направлении (рис. 183, 184). Боковая поверхность противоположной стороны зубца может быть образована прямой MN' при таком направлении винтового движения, которому соответствует противоположный по направлению отсчет углов ϑ ; точка N' находится по отношению к N на другой стороне образующей прямой от точки M касания ее с основным цилиндром, т. е. $\overline{MN} = -\overline{MN'}$.

В соответствии с этим уравнения поверхности, образуемой прямой MN' , запишем так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{01} \cos \vartheta - u \cos \lambda_{01} \sin \vartheta, \\ y_1 &= -r_{01} \sin \vartheta - u \cos \lambda_{01} \cos \vartheta, \quad z_1 = -p\vartheta - u \sin \lambda_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (73.40)$$

В уравнениях (73.33) и (73.34) должен быть изменен знак перед ϑ . Как и в предыдущем исследовании, мы найдем, что $\cos(\varphi_1 - \vartheta) = -\cos \alpha_{s1}$. При этом, используя построения, аналогичные приведенным на рис. 184, получим

$$\vartheta = \varphi_1 - \pi + \alpha_{s1}. \quad (73.41)$$

Аналогично уравнению (73.36) получим

$$u \cos \lambda_{01} = z \operatorname{tg} \lambda_{01} - r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1}. \quad (73.42)$$

Линия зацепления для другой стороны зубца определится теперь уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x - y \operatorname{tg} \alpha_{s1} + r_1 &= 0, \\ y - z \operatorname{tg} \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73.43)$$

Из уравнений (73.37) и (73.43) следует, что обе линии зацепления лежат в одной плоскости ($y_1 = z_1 \operatorname{tg} \lambda_1 = 0$) и пересекаются друг с другом в точке $(-r_1; 0; 0)$.

Уравнениям линии зацепления можно придать такую форму, чтобы координаты текущей точки выражались функциями от угла поворота φ_1 колеса. На основании (73.35) и (73.36) найдем следующую связь параметров ϑ , u и угла поворота φ_1 :

$$\vartheta = \pi + \alpha_{s1} - \varphi_1, \quad u = p\vartheta \sin \lambda_{01} + r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1} \cos \lambda_{01}. \quad (73.44)$$

Рассмотрев совместно уравнения (73.33) и (73.44), получим такие уравнения линии зацепления:

$$\left. \begin{aligned} x &= -r_1 + r_{01} \sin^2 \lambda_{01} \sin \alpha_{s1} (\operatorname{inv} \alpha_{s1} - \pi + \varphi_1), \\ y &= -r_{01} \cos \alpha_{s1} \sin^2 \lambda_{01} (\operatorname{inv} \alpha_{s1} - \pi + \varphi_1), \\ z &= -r_{01} \sin \lambda_{01} \cos \lambda_{01} (\operatorname{inv} \alpha_{s1} - \pi + \varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (73.45)$$

Следуя указанным путем, можно получить аналогичные уравнения и для линии зацепления, соответствующей боковой поверхности другой стороны зубца.

Рассмотрим теперь особенности расположения линий зацепления при произвольном выборе межосевого расстояния колес, когда $A \neq r_1 + r_2$. В этом случае оси зацепления колес передачи с рейкой не находятся в одной плоскости и не пересекаются между собой.

Введем обозначение $A - (r_1 + r_2) = c$. В системе x, y, z ось зацепления P_1P_1 колеса I (рис. 198 и 200) определяется уравнениями

$$X_I = -r_1, \quad Y_I = 0. \quad (73.46)$$

Напомним, что ось z направлена по оси колеса I , а ось x направлена по межосевой линии. Вторая ось зацепления P_2P_2 параллельна оси

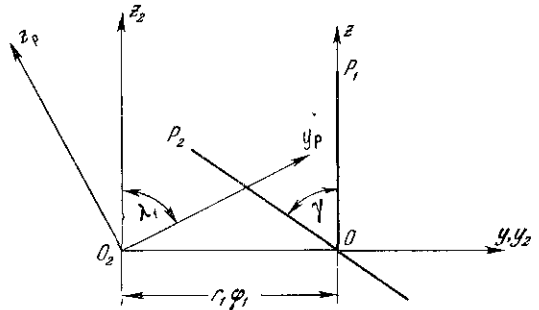


Рис. 200.

колеса 2 и отстоит от нее на расстоянии r_2 . Уравнения оси P_2P_2 таковы:

$$X_{II} = -(A - r_2) = -(r_1 + c), \quad Y_{II} + Z_{II} \operatorname{tg} \gamma = 0. \quad (73.47)$$

Нормаль к поверхностям зубцов в точке контакта должна пересекать обе оси зацеплений, выражаемые уравнениями (73.46) и (73.47). Уравнения нормали, пересекающей оси зацепления, запишем в таком виде:

$$\frac{X_I - x}{e_x} = \frac{Y_I - y}{e_y} = \frac{Z_I - z}{e_z}, \quad (73.48)$$

$$\frac{X_{II} - x}{e_x} = \frac{Y_{II} - y}{e_y} = \frac{Z_{II} - z}{e_z}. \quad (73.49)$$

В этих уравнениях X_I, Y_I, Z_I и X_{II}, Y_{II}, Z_{II} — координаты точек пересечения нормали с осями зацепления (73.46) и (73.47); x, y, z — координаты точки поверхности (73.33); e_x, e_y, e_z — проекции (73.34) орта нормали.

Используя уравнения (73.46) и (73.47) осей зацепления, уравнения нормали (73.48) и (73.49) представим в следующем виде:

$$\frac{r_1 + x}{e_x} = \frac{y}{e_y} = \frac{Z_I - z}{e_z}, \quad (73.50)$$

$$\frac{r_1 + c + x}{e_x} = \frac{Z_{II} \operatorname{tg} \gamma + y}{e_y} = -\frac{Z_{II} - z}{e_z}. \quad (73.51)$$

При дальнейших преобразованиях будем учитывать, что поверхность зубцов колеса является геликоидом, и поэтому должна соблюдаться зависимость (27.10), согласно которой $ye_x - xe_y = ze_z$.

Основываясь на системах уравнений (73.50) и (73.51), получим

$$\varphi_1 + \vartheta = \pi + \alpha_{s1}, \quad c = \frac{ze_y - ye_z}{e_y \operatorname{ctg} \gamma + e_z} \cdot \frac{e_x}{e_y}. \quad (73.52)$$

Уравнения (73.52) можно привести к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \pi + \alpha_{s1} - \varphi_1, \\ u &= p\vartheta \sin \lambda_{01} + r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1} \cos \lambda_{01} + c \frac{\cos \lambda_{01} + \sin \lambda_{01} \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha_{s1}}{\sin \alpha_{s1}}. \end{aligned} \right\} \quad (73.53)$$

Система уравнений (73.53) определяет связь между параметрами u, ϑ и φ_1 для точек контакта на поверхности зубцов.

На основании уравнений (73.52) и (73.53) линию зацепления можно определить такими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x + y \operatorname{tg} \alpha_{s1} + r_1 &= 0, \\ y + z \operatorname{tg} \lambda_1 - c \frac{1 + \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha_{s1}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73.54)$$

Аналогичным путем найдем, что линия зацепления для второй стороны зубца определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x - y \operatorname{tg} \alpha_{s1} + r_1 &= 0, \\ y - z \operatorname{tg} \lambda_1 + c \frac{1 + \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha_{s1}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73.55)$$

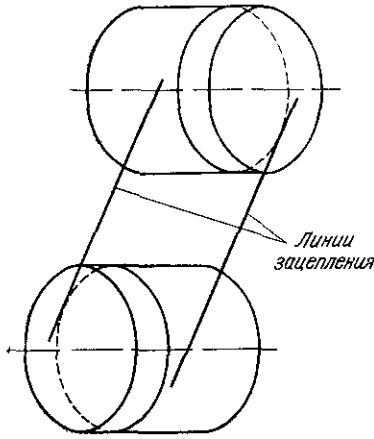


Рис. 201.

Из уравнений (73.54) и (73.55) линий зацепления следует, что если межосевое расстояние колес $A \neq r_1 + r_2$, линии зацепления колес уже не пересекаются между собой и смещаются в противоположных направлениях от линии кратчайшего расстояния между осями колес (рис. 204). Это требует увеличения рабочей ширины колес, если вращение передается в различных направлениях.

Е. Рабочий участок линии зацепления.

Коэффициент перекрытия.

Минимальная ширина колес.

Условия отсутствия интерференции

Крайние точки рабочего участка линии зацепления находятся как точки пересечения линии зацепления с цилиндрами выступов колес. Линия зацепления колес является линией пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 , касательных к основным цилиндрам (рис. 202). Каждая из таких плоскостей является поверхностью зацепления колеса со своей производящей (инструментальной) рейкой.

Определим сначала длину теоретической линии зацепления $K_0L_0 = PL_0 + PK_0$ (рис. 202). Из уравнения (73.38) следует, что с осью колеса 1 линия зацепления составляет угол λ_{01} ; можно доказать, что с осью колеса 2 линия зацепления составляет угол λ_{02} . Из построений рис. 203 следует, что

$$\left. \begin{aligned} PK_0 &= \frac{PC_1}{\sin \lambda_{01}} = \frac{r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1}}{\sin \lambda_{01}}, \\ PL_0 &= \frac{PC_2}{\sin \lambda_{02}} = \frac{r_{02} \operatorname{tg} \alpha_{s2}}{\sin \lambda_{02}}, \\ K_0L_0 &= \frac{r_{01} \operatorname{tg} \alpha_{s1}}{\sin \lambda_{01}} + \frac{r_{02} \operatorname{tg} \alpha_{s2}}{\sin \lambda_{02}}. \end{aligned} \right\} \quad (73.56)$$

Найдем теперь рабочий участок линии зацепления B_1B_2 , где B_1 и B_2 — точки пересечения линии зацепления с цилиндрами выступов колеса 2 и колеса 1:

$$PB_1 = B_1L_0 - PL_0 = \frac{r_{02} (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha_{s2})}{\sin \lambda_{02}}. \quad (73.57)$$

Используя построения, аналогичные приведенным на рис. 203, получим

$$PB_2 = K_0B_2 - PK_0 = \frac{r_{01} (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha_{s1})}{\sin \lambda_{01}}. \quad (73.58)$$

Здесь

$$\cos \alpha_{e2} = \frac{r_{02}}{r_{e2}}, \quad \cos \alpha_{e1} = \frac{r_{01}}{r_{e1}},$$

где r_{e2} и r_{e1} — радиусы цилиндров выступов колес.

Длина рабочей части линии зацепления

$$B_1B_2 = \frac{r_{01} (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha_{s1})}{\sin \lambda_{01}} + \frac{r_{02} (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha_{s2})}{\sin \lambda_{02}}. \quad (73.59)$$

Коэффициент перекрытия

$$\varepsilon = \frac{B_1B_2}{\pi m'_n \cos \alpha'_n} = \frac{B_1B_2}{t_{0k} \sin \lambda_{0k}} = \frac{B_1B_2}{t_{0k} \cos \beta_{0k}} \quad (k=1, 2), \quad (73.60)$$

где $\pi m'_n \cos \alpha'_n$ — шаг между профилями зубцов производящей рейки F' в нормальном сечении, измеренный по общей нормали к профилям.

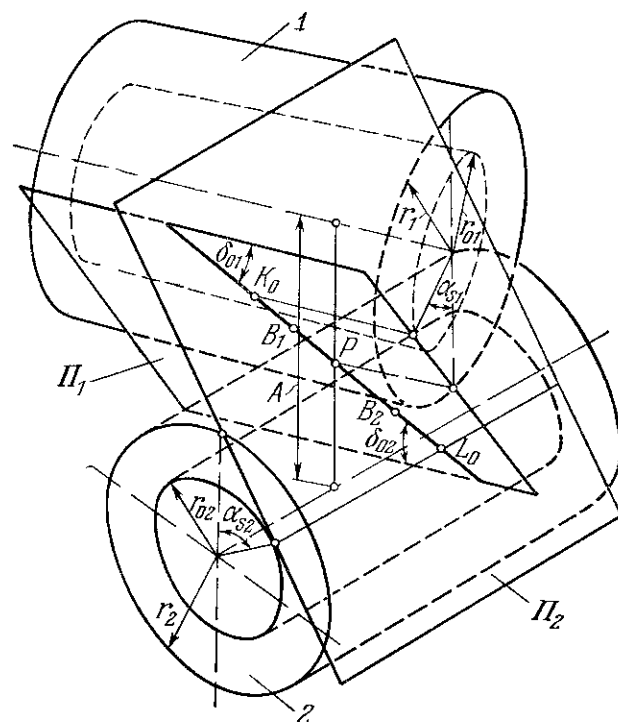


Рис. 202.

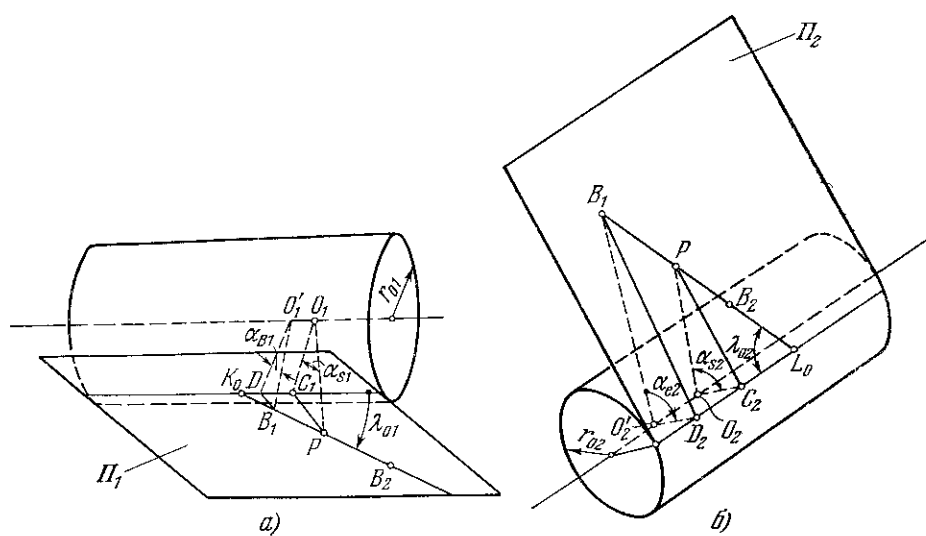


Рис. 203.

Подставим в (73.60) выражение (73.59) и произведем преобразования, используя следующие соотношения (см. таблицу X):

$$r_{0k} = \frac{m_{sk} z_k \cos \alpha_{sk}}{2}, \quad m'_n = m_{sk} \sin \lambda_k,$$

$$\cos \alpha'_n = \frac{\cos \lambda_{0k}}{\cos \lambda_k}, \quad \cos \alpha_{sk} = \operatorname{tg} \lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_{0k} \quad (k = 1, 2).$$

В результате получим

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha_{s1})}{\sin^2 \lambda_{01}} + \frac{z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha_{s2})}{\sin^2 \lambda_{02}} \right]. \quad (73.61)$$

Такой коэффициент перекрытия будет реализован, если при проектировании будет назначена определенная ширина зубчатого венца. Минимальная ширина b_k k -го колеса может быть найдена как проекция рабочего участка линии зацепления $B_1 B_2$ на ось колеса (рис. 202). В результате получим

$$b_k \geq B_1 B_2 \cos \lambda_{0k} \quad (k = 1, 2), \quad (73.62)$$

где $B_1 B_2$ определяется из формулы (73.59).

Если одно из колес винтовой передачи прямозубое ($\lambda_{0k} = \frac{\pi}{2}$), $b_k > 0$.

При геометрических расчетах возникает необходимость в определении радиусов $r_{B_1}^{(1)}$ и $r_{B_2}^{(2)}$ цилиндров колес 1 и 2, которым принадлежат точки B_1 и B_2 ножек зубцов этих колес.

Найдем сначала углы давления α_{B_1} и α_{B_2} . Из построений рис. 203, а получим

$$\operatorname{tg} \alpha_{B_1} = \frac{B_1 D}{r_{01}} = \frac{B_1 K_0 \sin \lambda_{01}}{r_{01}} = \frac{(PK_0 - PB_1) \sin \lambda_{01}}{r_{01}} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha_{s1} - \frac{z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{e2} - \operatorname{tg} \alpha_{s2}) \sin^2 \lambda_{01}}{z_1 \sin^2 \lambda_{02}}. \quad (73.63)$$

Аналогичным образом найдем

$$\operatorname{tg} \alpha_{B_2} = \operatorname{tg} \alpha_{s2} - \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{e1} - \operatorname{tg} \alpha_{s1}) \sin^2 \lambda_{02}}{z_2 \sin^2 \lambda_{01}}. \quad (73.64)$$

Интерференция колес будет отсутствовать, если окажется, что

$$\alpha_{B_1} > \alpha_{G_1}, \quad \alpha_{B_2} > \alpha_{G_2},$$

где G_k ($k = 1, 2$) — точка сопряжения эвольвентного профиля с переходной кривой.

Углы давления α_{G_1} и α_{G_2} определяются так же, как для прямозубых колес, нарезаемых рейками с углами профиля исходного контура α_{sd1} и α_{sd2} .

Радиусы цилиндров $r_{B_1}^{(1)}$ и $r_{B_2}^{(2)}$ определяются из формул (см. рис. 203, а):

$$r_{B_1}^{(1)} = \frac{r_{01}}{\cos \alpha_{B_1}}, \quad r_{B_2}^{(2)} = \frac{r_{02}}{\cos \alpha_{B_2}}. \quad (73.65)$$

Пусть колесо 2 — шевр. Тогда $r_B^{(1)}$ — радиус цилиндра колеса 1, на котором заканчивается шевингование — обработка его поверхности — вблизи цилиндра его впадин. Соответственно $r_{B_2}^{(2)}$ — радиус цилиндра шевра, на котором вблизи цилиндра впадин шевра заканчивается его зацепление с колесом.

Ф. Рабочая линия на поверхности зубцов

Под рабочей линией понимается совокупность точек касания на поверхности зубца. Иными словами, рабочая линия представляет линию зацепления на поверхности зубца колеса в системе координат, связанной с колесом.

Для определения рабочей линии, ограничиваясь случаем, когда $A = r_1 + r_2$, нужно рассмотреть совместно уравнения (73.44) связи между параметрами u , ϑ и φ_1 и уравнения (73.32) эвольвентной поверхности. Прделаав это, после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \pi + \alpha_{s1} - \varphi_1, \\ x_1 &= r_{01} \cos \vartheta (1 + \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \alpha_{s1}) + r_{01} \sin^2 \lambda_{01} \sin \vartheta (\vartheta - \operatorname{tg} \alpha_{s1}), \\ y_1 &= r_{01} \sin \vartheta (1 - \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{tg} \alpha_{s1}) - r_{01} \sin^2 \lambda_{01} \cos \vartheta (\vartheta - \operatorname{tg} \alpha_{s1}), \\ z_1 &= r_{01} \sin \lambda_{01} \cos \lambda_{01} (\vartheta - \operatorname{tg} \alpha_{s1}). \end{aligned} \right\} \quad (73.66)$$

Если в винтовой передаче одно из колес, например колесо 1, прямо-зубое, рабочая линия принадлежит плоскости, перпендикулярной z_1 , и является плоской эвольвентой. В этом можно удостовериться, приняв $\lambda_{01} = \pi/2$. Тогда

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r_{01} \sqrt{1 + \vartheta^2}, \quad z_1 = 0. \quad (73.67)$$

Г. Угол между направлениями характеристик

При сжатии упругих зубцов их поверхности касаются друг друга не в точке, а по некоторой площадке, размеры которой определяются по формулам § 37. При использовании этих формул необходимо определить предварительно главные кривизны поверхностей Σ_1 и Σ_2 и угол между соответствующими главными направлениями.

Одно из главных направлений на эвольвентной винтовой поверхности совпадает с координатной линией u (см. § 70). Такая координатная линия является одновременно характеристикой (линией контакта) поверхностей зубцов колеса и рейки. Угол σ между главными направлениями на поверхностях Σ_1 и Σ_2 является одновременно углом между характеристиками K_1 и K_2 — линиями контакта Σ_1 и F' , Σ_2 и F' (F' — поверхность рейки).

В системе x_2, y_2, z_2 , связанной с рейкой F' (z_2 направлено по оси колеса 1), поверхность зубца рейки выразим уравнением, аналогичным уравнению (70.9):

$$x_2 \operatorname{tg} \alpha_{s1} - y_2 - z_2 \operatorname{ctg} \lambda_1 + r_1 (\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) = 0.$$

Перейдем к новой системе координат x_p, y_p, z_p ; ось x_p совпадает с x_2 , а направления других осей указаны на рис. 200; система x, y, z является неподвижной, и в ней заданы положения осей зацепления OP_1 и OP_2 колес с рейкой (см. также рис. 199), соответствующих случаю образования передачи с одноименными направлениями винтовых линий.

Формулы связи между системами координат S_2 и S_p определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_p, \quad y_2 = y_p \sin \lambda_1 - z_p \cos \lambda_1, \\ z_2 &= y_p \cos \lambda_1 + z_p \sin \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (73.68)$$

В системе x_p, y_p, z_p поверхность зубца рейки определится уравнением

$$x_p \operatorname{tg} \alpha_{s1} - \frac{y_p}{\sin \lambda_1} + r_1 (\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) = 0.$$

Так как $\operatorname{tg} \alpha_{s1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_n}{\sin \lambda_1}$, получим:

$$x_p \sin \alpha'_n - y_p \cos \alpha'_n + r_1 (\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) \sin \lambda_1 \cos \alpha'_n = 0. \quad (73.69)$$

Формулы связи между системами координат x, y, z и x_p, y_p, z_p выражаются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x_p, & y &= y_p \sin \lambda_1 - z_p \cos \lambda_1 - r_1 \varphi_1, \\ z &= y_p \cos \lambda_1 + z_p \sin \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (73.70)$$

В системе x, y, z оси зацепления OP_1 и OP_2 выражаются уравнениями:

$$X_I = 0, \quad Y_I = 0, \quad (73.71)$$

$$X_{II} = 0, \quad Y_{II} + Z_{II} \operatorname{tg} \gamma = 0. \quad (73.72)$$

В передаче, составленной из колес с одноименными направлениями винтовых линий, $\gamma = \beta_1 + \beta_2 = 180^\circ - (\lambda_1 + \lambda_2)$. В системе x_p, y_p, z_p оси зацепления определяются уравнениями:

$$X_p^I = 0, \quad Y_p^I \sin \lambda_1 - Z_p^I \cos \lambda_1 - r_1 \varphi_1 = 0, \quad (73.73)$$

$$X_p^{II} = 0, \quad Y_p^{II} \sin \lambda_2 + Z_p^{II} \cos \lambda_2 + r_1 \varphi_1 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) = 0. \quad (73.74)$$

Характеристики K_1 и K_2 на поверхности (73.69) зубца рейки найдем, используя условие, что в точках характеристики нормали к поверхности должна пересекать соответствующую ось зацепления. Уравнения нормали, пересекающей ось зацепления, представим в таком виде:

$$\frac{X_p^r - x_p}{\sin \alpha'_n} = - \frac{Y_p^r - y_p}{\cos \alpha'_n} = \frac{Z_p^r - z_p}{0}, \quad (73.75)$$

где $r = I, II$; X_p^r, Y_p^r, Z_p^r — координаты точки пересечения нормали с соответствующей осью зацепления.

На основании систем (73.73), (73.74) и (73.75)

$$Z_p^r = z_p, \quad Y_p^r = x_p \operatorname{ctg} \alpha'_n + y_p. \quad (73.76)$$

Рассмотрев совместно уравнения (73.76) и (73.73) и (73.76) и (73.74), получим

$$x_p \operatorname{ctg} \alpha'_n \sin \lambda_1 + y_p \sin \lambda_1 - z_p \cos \lambda_1 - r_1 \varphi_1 = 0, \quad (73.77)$$

$$x_p \operatorname{ctg} \alpha'_n \sin \lambda_2 + y_p \sin \lambda_2 + z_p \cos \lambda_2 + r_1 \varphi_1 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) = 0. \quad (73.78)$$

Линии контакта K_1 и K_2 определяются следующими системами уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_p \sin \alpha'_n - y_p \cos \alpha'_n + r_1 (\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) \sin \lambda_1 \cos \alpha'_n &= 0, \\ x_p \operatorname{ctg} \alpha'_n \sin \lambda_1 + y_p \sin \lambda_1 - z_p \cos \lambda_1 - r_1 \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (73.79)$$

$$\left. \begin{aligned} x_p \sin \alpha'_n - y_p \cos \alpha'_n + r_1 (\pi - \operatorname{inv} \alpha_{s1}) \sin \lambda_1 \cos \alpha'_n &= 0, \\ x_p \operatorname{ctg} \alpha'_n \sin \lambda_2 + y_p \sin \lambda_2 + z_p \cos \lambda_2 + r_1 \varphi_1 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73.80)$$

Таблица IX

Обозначения параметров эвольвентных винтовых колес;
индекс $k=1, 2$ указывает номер колеса

Обозначение параметра	Определение
A	Кратчайшее расстояние между осями колес
b_k	Ширина колеса (длина зубчатого венца)
F	Инструментальная косозубая рейка; сечение такой рейки плоскостью, перпендикулярной направлению зубцов, совпадает с исходным контуром для прямозубых колес
F'	Рейка, находящаяся в одновременном зацеплении с обоими колесами скорректированной передачи (суммарный коэффициент смещения $\xi_\Sigma \neq 0$)
r_{dk}	Радиус делительного цилиндра колеса; цилиндр радиуса r_{dk} является начальным цилиндром (аксоидом) колеса при зацеплении с рейкой F
r_k	Цилиндр радиуса r_k — начальный цилиндр при зацеплении колеса с рейкой F'
r_{0k}	Радиус основного цилиндра
$r_{B1}^{(1)}$	Радиус цилиндра колеса 1. Точка поверхности колеса 1, принадлежащая цилиндру радиуса $r_{B1}^{(1)}$, вступает в касание с точкой поверхности колеса 2, принадлежащей цилиндру выступов r_{e2} колеса 2
$r_{B2}^{(2)}$	Радиус цилиндра колеса 2. Определяется аналогично цилиндру $r_{B1}^{(1)}$ колеса 1
s_{dk}	Толщина зубца колеса на делительной окружности
s_k	Толщина зубца колеса на окружности радиуса r_k
t_n и m_n	Шаг и модуль зубцов рейки F в нормальном сечении (перпендикулярном направлению зубцов)
t'_n и m'_n	То же для рейки F'
t_{sdk} , m_{sdk}	Шаг и модуль зубцов колеса по делительной окружности
t_{sk} , m_{sk}	Шаг и модуль зубцов колеса по окружности r_k
u	Криволинейная координата в двухпараметрическом уравнении эвольвентной винтовой поверхности
α_n	Угол профиля зубцов инструментальной рейки в нормальном сечении
α'_n	То же для рейки F'
α_{sdk}	Угол давления эвольвентного профиля в точке пересечения его с делительной окружностью радиуса r_{dk} . Одновременно α_{sdk} — угол профиля зубца рейки F в сечении торцовой плоскостью k -го колеса
α_{sk}	Угол давления эвольвентного профиля в точке пересечения его с окружностью радиуса r_k . Одновременно α_{sk} — угол профиля зубца рейки F' в сечении торцовой плоскостью k -го колеса
α_{Bk}	Угол давления эвольвентного профиля зубца колеса в точке пересечения с окружностью радиуса $r_{Bk}^{(k)}$ (см. определение $r_{B1}^{(1)}$ и $r_{B2}^{(2)}$)
β_{dk} , β_k , β_{0k}	Угол наклона винтовой линии на делительном, начальном и основном цилиндрах колеса
γ	Угол скрещивания осей колес
ϑ	Криволинейная координата в двухпараметрическом уравнении эвольвентной винтовой поверхности
λ_{dk} , λ_k и λ_{0k}	Угол подъема винтовой линии на делительном, начальном и основном цилиндрах колеса

Таблица X

Основные зависимости между параметрами эвольвентных винтовых колес; индекс $k = 1, 2$ указывает номер колеса

i_{12}	$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{d2} \cos \beta_{d2}}{r_{d1} \cos \beta_{d1}} = \frac{r_2 \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1} = \frac{r_{02} \sin \lambda_{02}}{r_{01} \sin \lambda_{01}} = \frac{z_2}{z_1}$
α_n	$\alpha_n = \alpha_d \quad \cos \alpha_n = \frac{\cos \lambda_{0k}}{\cos \lambda_{dk}} = \frac{\sin \beta_{0k}}{\sin \beta_{dk}}$ $\sin \alpha_n = \sin \alpha_{sdk} \cos \beta_{0k} \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_{sdk} \cos \beta_{dk}$
α'_n	$\cos \alpha'_n = \frac{\cos \lambda_{0k}}{\cos \lambda_k} = \frac{\sin \beta_{0k}}{\sin \beta_k} \quad \sin \alpha'_n = \sin \alpha_{sk} \cos \beta_{0k} \quad \operatorname{tg} \alpha'_n = \operatorname{tg} \alpha_{sk} \cos \beta_k$
α_{sdk}	$\operatorname{tg} \alpha_{sdk} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_d}{\cos \beta_{dk}} \quad \cos \alpha_{sdk} = \frac{r_{0k}}{r_{dk}} = \operatorname{ctg} \beta_{dk} \operatorname{tg} \beta_{0k} = \operatorname{tg} \lambda_{dk} \operatorname{ctg} \lambda_{0k}$ $\sin \alpha_{sdk} = \frac{\sin \alpha_d}{\cos \beta_{0k}}$
α_{sk}	$\operatorname{tg} \alpha_{sk} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_n}{\cos \beta_k} \quad \cos \alpha_{sk} = \frac{r_{0k}}{r_k} = \operatorname{ctg} \beta_k \operatorname{tg} \beta_{0k} = \operatorname{tg} \lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_{0k}$ $\sin \alpha_{sk} = \frac{\sin \alpha'_n}{\cos \beta_{0k}} = \frac{\sin \alpha_{s1}}{\sin \alpha_{s2}} = \frac{\sin \alpha_{sd1}}{\sin \alpha_{sd2}}$
m_{sdk}	$m_{sdk} = \frac{m_n}{\sin \lambda_{dk}} = \frac{m_n}{\cos \beta_{dk}}$
m_{sk}	$m_{sk} = m_{sdk} \frac{r_k}{r_{dk}} = m_{sdk} \frac{\cos \alpha_{sdk}}{\cos \alpha_{sk}}$
m'_n	$m'_n = m_{sk} \cos \beta_k = m_{sk} \sin \lambda_k$
t_{sdk}	$t_{sdk} = \frac{m_n \pi}{\sin \lambda_{dk}} = \frac{m_n \pi}{\cos \beta_{dk}}$
	($m_n = m$, где m — модуль зубцов исходного контура)
t_{sk}	$t_{sk} = t_{sdk} \frac{r_k}{r_{dk}} = t_{sdk} \frac{\cos \alpha_{sdk}}{\cos \alpha_{sk}} = \frac{m_n \pi}{\cos \beta_k}$
r_{dk}	$r_{dk} = \frac{m_{sdk} z_k}{2} = \frac{m_n z_k}{2 \cos \beta_{dk}}$
r_k	$r_k = \frac{m_{sk} z_k}{2} = \frac{m'_n z_k}{2 \cos \beta_k} = \frac{r_{dk} \cos \alpha_{sdk}}{\cos \alpha_{sk}}$
r_{0k}	$r_{0k} = r_{dk} \cos \alpha_{sdk} = \frac{m_n z_k \cos \alpha_{sdk}}{2 \cos \beta_{dk}}$

Угловые коэффициенты прямых K_1 и K_2 имеют следующие выражения:

$$l_1 = \sin \alpha_{s1} \cos \alpha'_n \cos \lambda_1, \quad m_1 = \sin \alpha_{s1} \sin \alpha'_n \cos \lambda_1, \quad n_1 = \frac{\sin \alpha_{s1}}{\sin \alpha'_n} \cdot \sin \lambda_1,$$

$$l_2 = -\sin \alpha_{s2} \cos \alpha'_n \cos \lambda_2, \quad m_2 = -\sin \alpha_{s2} \sin \alpha'_n \cos \lambda_2, \quad n_2 = \frac{\sin \alpha_{s2}}{\sin \alpha'_n} \sin \lambda_2.$$

Угол σ между характеристиками K_1 и K_2 определится следующим уравнением:

$$\cos \sigma = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha'_n}{V(\sin^2 \lambda_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_n)(\sin^2 \lambda_2 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_n)} \left(-\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \frac{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2}{\sin^2 \alpha'_n} \right). \quad (73.81)$$

В тех случаях, когда при проектировании передачи выбирают $\lambda_1 = \lambda_2$, уравнение (73.81) после преобразований можно привести к такому виду:

$$\cos \sigma = -\cos 2\lambda_1 + \frac{2 \sin^2 \lambda_1 \cos^2 \lambda_1}{\operatorname{tg}^2 \alpha'_n - \sin^2 \lambda_1}. \quad (73.82)$$

В винтовой передаче угол σ между направлениями характеристик принимает довольно большие значения. Поэтому характер контакта поверхностей зубцов довольно близок к точечному и передача имеет невысокую нагрузочную способность. При $\gamma = 90^\circ$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 45^\circ$ и $\alpha'_n = 20^\circ$ $\sigma = 37^\circ 42'$.

При шевинговании шевр и обрабатываемая шестерня имеют различные направления винтовых линий. Примем, что индекс 1 относится к обрабатываемому колесу, а 2 — к шевру. В связи с изменением направления винтовой линии в уравнении (73.81) нужно изменить знак для λ_2 , после чего получим

$$\cos \sigma = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha'_n}{V(\sin^2 \lambda_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_n)(\sin^2 \lambda_2 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_n)} \left(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \frac{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2}{\sin^2 \alpha'_n} \right). \quad (73.83)$$

Обычно при шевинговании угол перекрещивания $\gamma = |\beta_2 - \beta_1|$ выбирается в пределах $5^\circ - 15^\circ$ и угол σ между направлениями характеристик является достаточно малым, что способствует созданию хороших условий для контакта поверхностей инструмента и нарезаемого колеса.

§ 74. Цилиндрические винтовые колеса с новым видом зацепления

Работа М. Л. Новикова [244, 245] способствовала разработке новых видов зацеплений с улучшенными параметрами. В настоящем параграфе рассматриваются цилиндрические винтовые колеса с точечным контактом

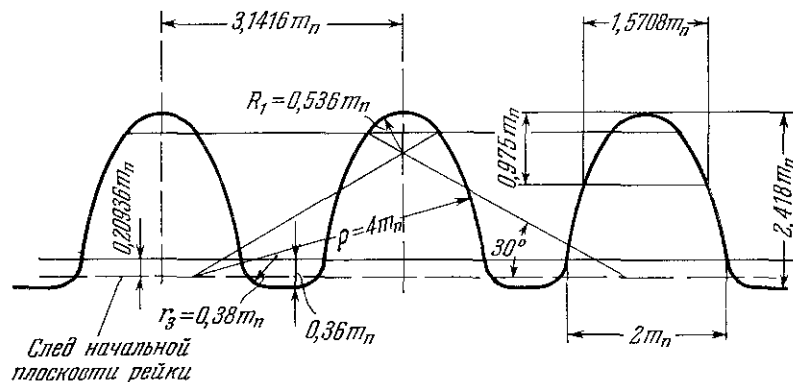


Рис. 204.

зубцов и с новым видом зацепления, обладающие повышенной нагрузочной способностью. Геометрия таких колес разработана автором книги совместно с В. В. Шульцем [188].

1°. Для получения сопряженных поверхностей зубцов использован принцип образования их посредством двух совпадающих друг с другом производящих поверхностей F . Эти поверхности являются цилиндрическими (рис. 198, а), в процессе зацепления они могут перемещаться друг относительно друга вдоль общих образующих. Сечение F плоскостью, перпендикулярной направлению зубцов, представляет исходный контур, изображенный на рис. 204. Рейки с таким контуром для изготовления

обоих колес передачи вкладываются друг в друга, как шаблон и контр-шаблон. В отличие от колес Новикова, передающих вращение между параллельными осями, исходный контур является здесь единым для обоих

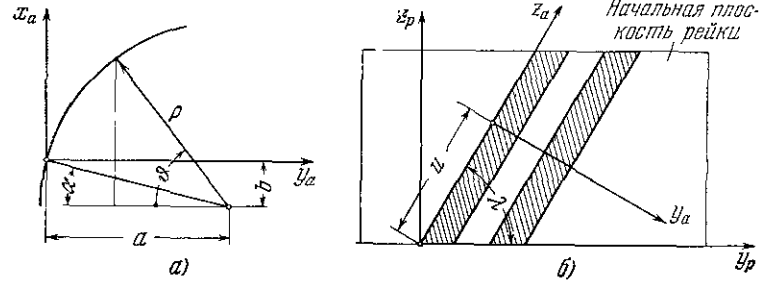


Рис. 205.

колес передачи. Как известно, для нарезания колес, работающих при параллельных осях, В. И. Кудрявцевым были разработаны два исходных контура: один для нарезания ведущего, другой для нарезания ведомого колеса (см. § 71).

В системе S_a (рис. 205, а) исходный контур определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} x_a &= \rho \sin \vartheta - b, & y_a &= \\ &= -(\rho \cos \vartheta - a), & z_a &= 0. \end{aligned} \quad (74.1)$$

Здесь $a = \rho \cos \alpha$, $b = \rho \sin \alpha$, где α — угол давления в точке исходного контура, совпадающей с началом координат.

Поверхность Σ_p зубца рейки будет образована поступательным движением системы S_a вместе с дуговым профилем в направлении зубцов рейки (рис. 205, б). Уравнения Σ_p таковы:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \rho \sin \vartheta - b, \\ y_p &= -(\rho \cos \vartheta - a) \sin \lambda + u \cos \lambda, \\ z_p &= (\rho \cos \vartheta - a) \cos \lambda + u \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (74.2)$$

Орт нормали к поверхности (74.2) определится уравнением

$$\begin{aligned} e_p &= \sin \vartheta i_p + \\ &+ \cos \vartheta (-\sin \lambda j_p + \cos \lambda k_p). \end{aligned} \quad (74.3)$$

2°. Для определения линии контакта (характеристики) поверхностей F и Σ_i воспользуемся способом, изложенным в §§ 71 и 72. Введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 206, а, б): неподвижную систему координат S , подвижные системы координат S_p , S_1 и S_2 ,

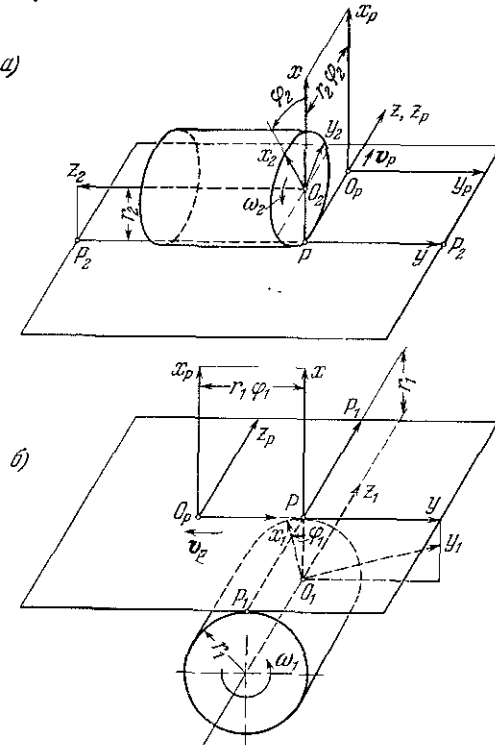


Рис. 206.

жестко связанные с рейкой и колесами передачи. Осями зацепления при нарезании колес 1 и 2 служат прямые $P_1 - P_1$ и $P_2 - P_2$. Поверхность Σ_1 в системе S_1 определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_1 \varphi_1 - a \sin \lambda - u \cos \lambda - b \operatorname{ctg} \vartheta \sin \lambda &= 0, \\ x_1 &= (\rho \sin \vartheta - b) \cos \varphi_1 + [(\rho \cos \vartheta - a) \sin \lambda - u \cos \lambda] \sin \varphi_1 + \\ &\quad + r_1 (\cos \varphi_1 + \varphi_1 \sin \varphi_1), \\ y_1 &= (\rho \sin \vartheta - b) \sin \varphi_1 - [(\rho \cos \vartheta - a) \sin \lambda - u \cos \lambda] \cos \varphi_1 + \\ &\quad + r_1 (\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1), \\ z_1 &= (\rho \cos \vartheta - a) \cos \lambda + u \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (74.4)$$

Исключив параметр u , поверхность зубцов колеса 1 выразим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (\rho \sin \vartheta - b + r_1) \cos \varphi_1 + (\rho \cos \vartheta - b \operatorname{ctg} \vartheta) \sin \lambda \sin \varphi_1, \\ y_1 &= (\rho \sin \vartheta - b + r_1) \sin \varphi_1 - (\rho \cos \vartheta - b \operatorname{ctg} \vartheta) \sin \lambda \cos \varphi_1, \\ z_1 &= \rho \cos \vartheta \cos \lambda - \frac{a}{\cos \lambda} + b \operatorname{ctg} \vartheta \sin \lambda \operatorname{tg} \lambda + r_1 \varphi_1 \operatorname{tg} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (74.5)$$

Уравнение зацепления рейки и колеса 2 имеет такой вид:

$$r_2 \varphi_2 + u \sin \lambda - (a - b \operatorname{ctg} \vartheta) \cos \lambda = 0. \quad (74.6)$$

После исключения параметра u поверхность колеса 2 в системе S_2 определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (\rho \sin \vartheta - b - r_2) \cos \varphi_2 - (\rho \cos \vartheta - b \operatorname{ctg} \vartheta) \cos \lambda \sin \varphi_2, \\ y_2 &= -(\rho \sin \vartheta - b - r_2) \sin \varphi_2 - (\rho \cos \vartheta - b \operatorname{ctg} \vartheta) \cos \lambda \cos \varphi_2, \\ z_2 &= -\rho \cos \vartheta \sin \lambda + \frac{a}{\sin \lambda} - b \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{ctg} \lambda \cos \lambda - r_2 \varphi_2 \operatorname{ctg} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (74.7)$$

Линии контакта поверхности зубца колеса с рейкой можно получать из уравнений (74.5) и (74.7) при $\varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$.

3°. Условие отсутствия подрезания зубцов колеса рейкой найдем, используя уравнение (36.18), согласно которому

$$\mathbf{v}_r^{(p)} \perp \mathbf{v}^{(p_i)} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Примем, что колесо 1 — колесо с меньшим числом зубцов. После преобразований получим

$$\sin^4 \vartheta + \left(\frac{r_1}{\rho \cos^2 \lambda} - \sin \alpha \right) \sin^3 \vartheta + \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \lambda \sin \vartheta - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \lambda = 0. \quad (74.8)$$

Из уравнения (74.8) можно найти предельный угол ϑ , которым должен быть ограничен исходный контур (рис. 205) во избежание подрезания зубцов колеса 1.

4°. Кривизна поверхностей зубцов определяется по формулам, приведенным в § 34. Опустив выводы, формулы для определения главных

радиусов кривизн приведем в следующем виде:

$$[R_i^{(1)}]^2 + R_i^{(1)} \left[\rho + r \frac{\rho \sin \alpha \sin^2 \lambda}{\sin^3 \vartheta \cos^2 \lambda} + \frac{r_1}{\sin \vartheta \cos^2 \lambda} + \rho \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\rho^2 \sin \alpha \sin^2 \lambda \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right)}{\sin^3 \vartheta \cos^2 \lambda} + \rho^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\rho r_1}{\sin \vartheta \cos^2 \lambda} = 0, \quad (74.9)$$

$$[R_i^{(2)}]^2 + R_i^{(2)} \left[\rho + \frac{\rho \sin \alpha \cos^2 \lambda}{\sin^3 \vartheta \sin^2 \lambda} - \frac{r_2}{\sin \vartheta \sin^2 \lambda} + \rho \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\rho^2 \sin \alpha \cos^2 \lambda \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right)}{\sin^3 \vartheta \sin^2 \lambda} + \rho^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right) - \frac{\rho r_2}{\sin \vartheta \sin^2 \lambda} = 0. \quad (74.10)$$

Здесь $i = I, II$ — индексы, указывающие главные направления на поверхностях; верхние индексы (1) и (2) относятся соответственно к первому и второму колесам. Если главные радиусы кривизн ищутся для точек поверхностей, совпадающих с полюсом, в приведенных выражениях нужно принять $\vartheta = \alpha$.

Угол σ между главными направлениями определяется из зависимости

$$\cos \sigma = \frac{Q}{\sqrt{G} \sqrt{E}}. \quad (74.11)$$

Здесь

$$Q = \rho^2 - (R_i^{(1)} + \rho)(R_i^{(2)} + \rho) \sin^2 \vartheta + \rho \sin^2 \vartheta [(R_i^{(2)} + \rho)C + (R_i^{(1)} + \rho)B] -$$

$$- \rho^2 (C + B) - \rho^2 \cos^2 \vartheta BC.$$

$$G = \rho^2 (1 - C)^2 + [(R_i^{(1)} + \rho) - \rho C]^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{ctg}^2 \lambda,$$

$$E = \rho^2 (1 - B)^2 + [(R_i^{(2)} + \rho) - \rho B]^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \lambda,$$

$$C = \frac{(R_i^{(1)} + \rho) \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right)}{R_i^{(1)} + \rho \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right)}, \quad B = \frac{(R_i^{(2)} + \rho) \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right)}{R_i^{(2)} + \rho \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} \right)}.$$

Укажем несколько частных случаев.

1) В полюсе зацепления $\vartheta = \alpha$ и с $B = 0$

$$\cos \sigma = \frac{\rho^2 - (R_i^{(1)} + \rho)(R_i^{(2)} + \rho) \sin^2 \alpha}{\sqrt{\rho^2 + (R_i^{(1)} + \rho)^2 \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda} \sqrt{\rho^2 + (R_i^{(2)} + \rho)^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \lambda}}. \quad (74.12)$$

2) При $\alpha = 0$, $C = 1$ и $B = 1$

$$\cos \sigma = 1. \quad (74.13)$$

3) Если в выражении (74.13) числитель и знаменатель разделить на ρ^2 и положить $\rho = \infty$, то получим формулу для угла между главными направлениями поверхностей зубцов эвольвентных колес, совпадающего в данном случае с углом между характеристиками на поверхности рейки, нарезающей эвольвентные колеса:

$$\cos \sigma_0 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \lambda}}. \quad (74.14)$$

4) При $\lambda = 45^\circ$ формула (74.14) приобретает вид

$$\cos \sigma_0 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}. \quad (74.15)$$

Подстановка в нее значения угла $\alpha = 20^\circ$ дает результат $\sigma_0 = 37^\circ 42'$.

5°. При назначении параметров исходного контура, при которых обеспечивается повышение нагрузочной способности колес, нужно руководствоваться следующими соображениями: при прочих равных условиях размеры мгновенной площадки контакта возрастают с уменьшением угла давления α в полюсе, с уменьшением радиуса ρ кругового профиля.

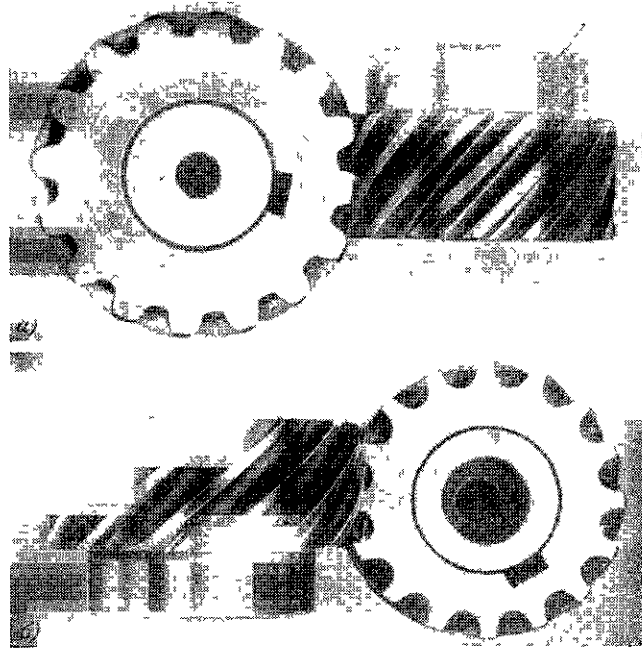


Рис. 207.

В то же время минимальный угол давления α должен быть ограничен условиями отсутствия подрезания зубцов; при значениях α , близких к нулю, даже незначительные погрешности в межцентровом расстоянии колес или установке фрез при нарезании зубцов приводят к кромочному контакту. Минимальные значения ρ должны быть ограничены из-за необходимости получения достаточного коэффициента перекрытия ε , определяемого уравнением $\varepsilon = \frac{n \sin \alpha (\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2)}{\pi}$, где $n = \rho/m$, φ_1 и φ_2 — минимальный и максимальный углы давления. При $\varphi_1 = \alpha$ (зацепление происходит только по одну сторону от полюса) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varepsilon = n/\pi$. Следовательно, при $\alpha \rightarrow 0$ $\varepsilon > 1$, если $n > \pi$.

На рис. 204 был изображен исходный контур, предложенный автором совместно с В. В. Шульцем для нарезания опытных образцов колес с новой геометрией. Экспериментальные исследования показали, что при соблюдении рекомендуемых норм точности и режимов приработки нагрузочная способность винтовых колес с новой геометрией зубцов в среднем в два раза превышает нагрузочную способность (нагрузку заедания) аналогичных эвольвентных винтовых колес.

На рис. 207 изображены винтовые колеса с новой геометрией.

Глава IX

Червячное зацепление при цилиндрической форме червяка

Червячное зацепление используется для передачи вращения между перекрещивающимися осями с постоянным отношением скоростей звеньев. Известны две разновидности червячного зацепления: а) с цилиндрическим червяком (поверхность витков такого червяка является геликоидом), б) с глобоидным червяком, по форме которого зацепление названо глобоидным (см. гл. XIII). На рис. 208 представлено червячное зацепление с червяком цилиндрической формы.

В отличие от винтовой передачи, составленной из цилиндрических колес с винтовыми зубцами, в червячном зацеплении поверхности зубцов имеют не точечное, а линейное касание, что позволяет использовать такое зацепление для передачи больших мощностей. Червячные передачи нашли широкое применение в редукторах машино- и приборостроения, в делительных цепях зуборезных станков. В подавляющем большинстве случаев угол скрещивания осей выбирается равным 90° , однако известны случаи применения червячных передач с углом скрещивания осей $\gamma \neq 90^\circ$.

Для передачи вращения с переменным отношением скоростей звеньев можно использовать механизм, составленный из цилиндрического червяка и некруглого червячного колеса; межосевое расстояние в такой передаче изменяется в процессе зацепления. Червячная передача с переменным передаточным отношением и переменным межосевым расстоянием была применена в зубофрезерном станке фирмы Бош и Рейтер для нарезания овальных колес [169].

Червячным зацеплениям посвящены работы многих исследователей: Штрибека [295], Штюблера [296], Шибеля [257], Альтманна [266], Н. И. Колчина [119], Бакингема [273], А. Н. Грубина [48, 49], О. А. Пыжа [225], В. Н. Кудрявцева [147], Ниманна [286], Л. И. Назаренко, И. П. Бернацкого [16-21], И. С. Кривенко [136], автора книги [168, 169, 182] и других исследователей.

В упомянутой нами работе Н. И. Колчина был изложен разработанный ее автором общий метод исследования червячных зацеплений,



Рис. 208.

распространяющийся и на передачи с углом скрещивания осей $\gamma \neq 90^\circ$. Для этой цели Н. И. Колчиным был использован метод исследования в форме, предложенной Х. И. Гохманом.

Разработке общих методов исследования червячных зацеплений посвящены также работы автора книги [173, 182], в которых уравнение зацепления получено кинематическим способом, с использованием матричного исчисления, а также предложен упрощенный способ построения контактных линий, поля зацепления, определения кривизны и условий отсутствия подрезания.

§ 75. Начальные поверхности и основные геометрические соотношения

Точкой касания начальных поверхностей в системе координат S избирается точка с координатами: $x^{(p)} = -r_n$; $y^{(p)} = z^{(p)} = 0$. Начальными поверхностями являются два цилиндра (см. § 25) с радиусами r_n и $R_n = A - r_n$, где r_n — радиус начального цилиндра червяка; оси начальных

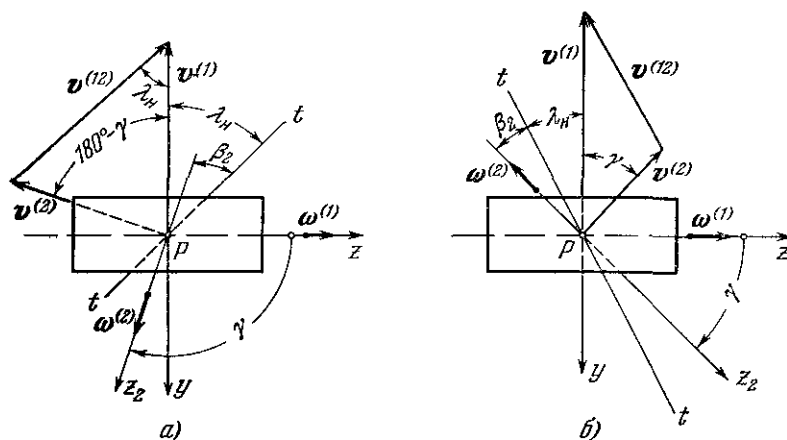


Рис. 209.

цилиндров перекрещиваются, образуя угол γ . На рис. 209 построен план скоростей в точке P ; $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ — векторы окружных скоростей червяка и колеса (червяк находится над колесом); $v^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения, направленный по $t-t$ — общей касательной к винтовым линиям червяка и колеса в точке P ; z_2 — ось вращения колеса. Рис. 209, *a* соответствует случаю, когда винтовые линии на червяке и колесе одного направления, а рис. 209, *б* — разноименным направлениям винтовых линий. Основываясь на выполненных построениях, получим

$$i_{21} = \pm \frac{r_n \sin \lambda_n}{R_n \sin (\gamma \mp \lambda_n)}. \quad (75.1)$$

Верхний и нижний знаки относятся соответственно к червякам с правым и левым направлениями винтовых линий; λ_n — угол подъема винтовой линии на червяке на цилиндре радиуса r_n ; β_2 — угол наклона винтовой линии на червячном колесе на цилиндре радиуса R_n .

На рис. 210, *a* представлен схематический чертеж червячной передачи. В корригированной червячной передаче (см. § 77) радиусы делительных цилиндров r_d и R_d не совпадают с начальными. На делительном

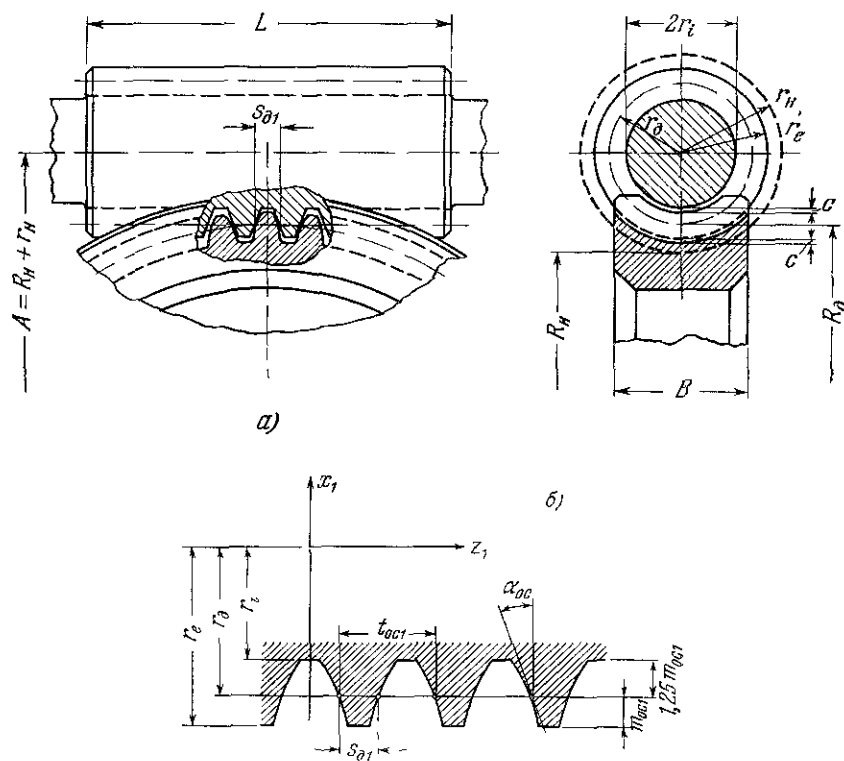


Рис. 210.

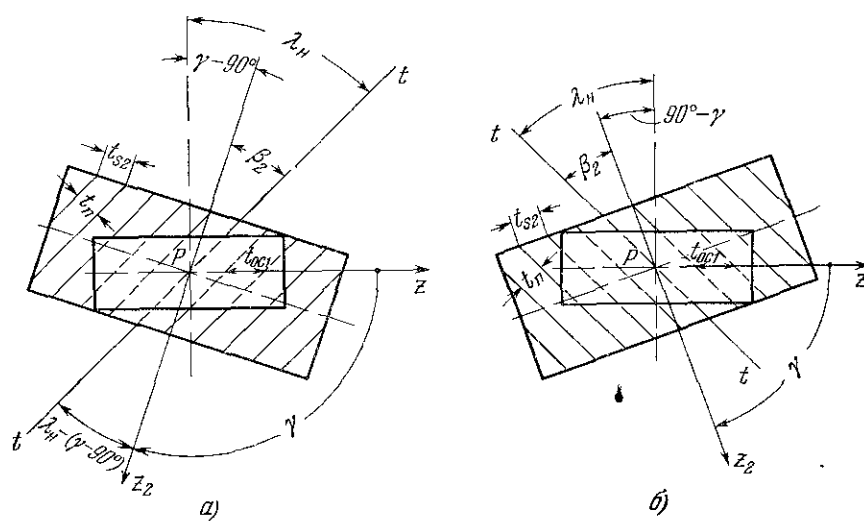


Рис. 211.

цилиндре червяка задается шаг t_{oc1} и толщина его зубцов s_{d1} ; от этого цилиндра отсчитываются высоты головок и ножек (рис. 210, б) *). Соотношения между шагами зубцов червяка и колеса и модулями определим на основании построений рис. 211; на рис. 211, а изображен правый, на рис. 211, б — левый червяк

$$t_n = t_{oc1} \cos \lambda_n = t_{s2} \sin (\gamma \mp \lambda_n), \quad (75.2)$$

$$m_n = m_{oc1} \cos \lambda_n = m_{s2} \sin (\gamma \mp \lambda_n). \quad (75.3)$$

Верхний и нижний знаки относятся к правому и левому червякам; t_n и m_n — шаг и модуль зубцов в направлении, перпендикулярном $t - t$. Так как в осевом сечении червяка его профили представляют параллельные кривые, t_{oc1} — осевой шаг зубцов червяка может быть задан на уровне любого цилиндра червяка; t_{s2} — шаг зубцов червячного колеса, измеренный по дуге окружности радиуса R_n . При угле скречивания $\gamma = 90^\circ$ $t_{oc1} = t_{s2}$.

Развернем делительный цилиндр червяка на плоскость (рис. 212).
Ход винтовой линии

$$h = t_{oc1} z_1 = 2\pi r_d \operatorname{tg} \lambda_d, \quad (75.4)$$

где z_1 — число заходов червяка.

Винтовой параметр

$$p = \frac{h}{2\pi} = \frac{m_{oc1} z_1}{2} = r_d \operatorname{tg} \lambda_d. \quad (75.5)$$

Так как h и p не зависят от размеров радиуса цилиндра, то

$$p = r_i \operatorname{tg} \lambda_i, \quad (75.6)$$

где r_i и λ_i — текущий радиус цилиндра и угол подъема винтовой линии на этом цилиндре.

Из выражения (75.5) следует, что

$$r_d = \frac{m_{oc1} z_1}{2 \operatorname{tg} \lambda_d}. \quad (75.7)$$

Подставим в (75.4) выражения

$$R_n = \frac{m_{s2} z_2}{2}, \quad r_n = \frac{m_{oc1} z_1}{2 \operatorname{tg} \lambda_n}$$

и учтем соотношение (75.3). После преобразований получим

$$i_{21} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (75.8)$$

Найдем соотношения между углами профиля витка червяка в различных сечениях его поверхности.

Поместим в точку O на поверхности витка червяка, принадлежащей его делительному цилиндру, начало прямоугольной системы координат, ось z которой параллельна оси червяка (рис. 213, а). Будем считать заданными единичные векторы касательных

$$\mathbf{a} = \cos \alpha_{oc} \mathbf{i} + \sin \alpha_{oc} \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \cos \lambda_d \mathbf{j} + \sin \lambda_d \mathbf{k}. \quad (75.9)$$

Здесь $\mathbf{a}$ — орт касательной к осевому профилю — сечению поверхности плоскостью xOz , $\mathbf{b}$ — орт касательной к сечению поверхности плоскостью yOz , λ_d — угол подъема винтовой линии на делительном цилиндре.

*) На рис. 210, б изображено осевое сечение червяка с вогнутым профилем витков.

Вектор нормали

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \sin \alpha_{oc} \cos \lambda_d \mathbf{i} + \cos \alpha_{oc} \sin \lambda_d \mathbf{j} - \cos \alpha_{oc} \cos \lambda_d \mathbf{k}. \quad (75.10)$$

Проведем теперь сечение поверхности витка червяка плоскостью $z = 0$

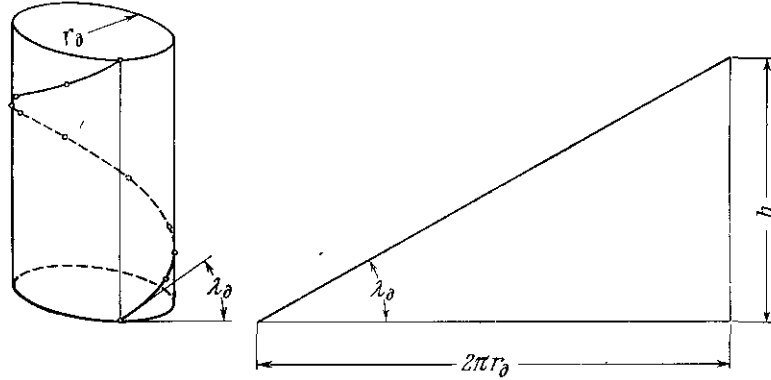


Рис. 212.

(торцовое сечение). Касательная к торцовому профилю образует с осью x угол α_{sd} , определяемый уравнением

$$\operatorname{ctg} \alpha_{sd} = \frac{n_y}{n_x} = \operatorname{ctg} \alpha_{oc} \operatorname{tg} \lambda_d. \quad (75.11)$$

Под нормальным сечением понимается сечение поверхности витка червяка плоскостью, перпендикулярной вектору $\mathbf{b}$ — касательной к винтовой

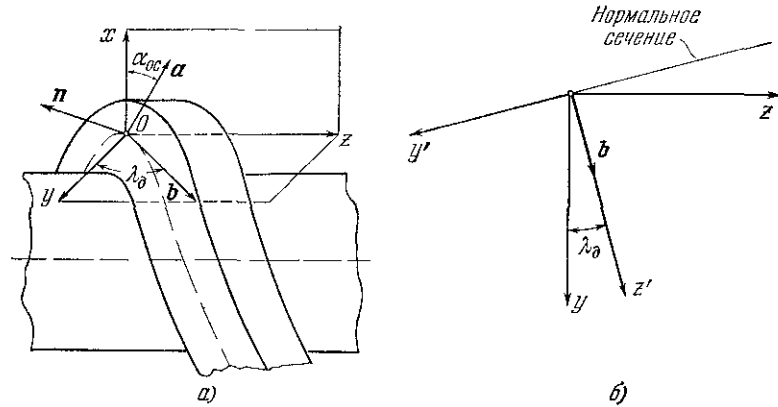


Рис. 213

линии (рис. 213, б). В системе координат (x', y', z') проекции вектора нормали будут такими:

$$\begin{aligned} n_{x'} &= n_x = \sin \alpha_{oc} \cos \lambda_d, \\ n_{y'} &= n_y \sin \lambda_d - n_z \cos \lambda_d = \cos \alpha_{oc}, \\ n_{z'} &= n_y \cos \lambda_d + n_z \sin \lambda_d = 0. \end{aligned}$$

Вектор касательной к нормальному сечению образует с осью x' угол α_n , определяемый уравнением

$$\operatorname{ctg} \alpha_n = \frac{n_{y'}}{n_{x'}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_{oc}}{\cos \lambda_d} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_{sd}}{\sin \lambda_d}. \quad (75.12)$$

§ 76. Образование сопряженных зацеплений

В червячном зацеплении для образования поверхности зубцов червячного колеса, сопряженной поверхности витков червяка, используется производящая поверхность, идентичная поверхности витков червяка. Нарезание зубцов колеса производится червячной фрезой, режущие кромки которой должны принадлежать винтовой поверхности такого же вида, как винтовая поверхность витков червяка. При нарезании зубцов колеса на зубофрезерном станке как бы воспроизводится то червячное зацепление, которое запроектировано конструктором. Для этого необходимо: а) соблюсти то же соотношение между угловыми скоростями червячной фрезы и нарезаемого колеса, как и в червячной передаче;

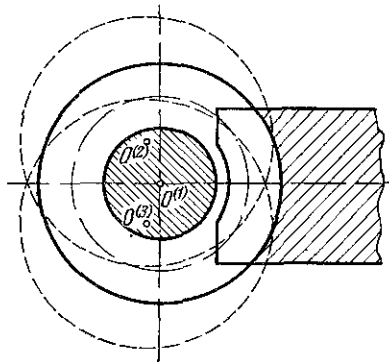


Рис. 214.

б) обеспечить идентичность установок по отношению к колесу: червячной фрезы — при нарезании, червяка — при зацеплении.

Для уменьшения влияния погрешностей изготовления и монтажа целесообразно локализовать контакт поверхностей зубцов червяка и колеса таким образом, чтобы с учетом упругих деформаций поверхностей зубцов вместо линейного контакта стал бы промежуточным между линейным и точечным. Возможны два способа локализации контакта.

а) Применение подачи червячной фрезы в направлении оси червячного колеса при нарезании зубцов. При малой величине такой подачи на один оборот фрезы поступательное перемещение червячной фрезы

можно считать мало зависящим от ее вращения и рассматривать это перемещение как второй, независимый параметр по отношению к параметру, определяющему вращение фрезы и колеса. Поверхность зубцов червячного колеса явится при этом двухпараметрической огибающей поверхности витков червячной фрезы. Указанный способ нарезания позволяет получить червячную передачу, нечувствительную к погрешностям установки червяка в направлении оси червячного колеса и, как следует ожидать, менее чувствительную к другим первичным ошибкам, вызывающим появление циклических погрешностей (погрешностей, повторяющихся при повороте червячного колеса на один зубец).

б) Второй способ локализации контакта основывается на использовании двух жестко связанных производящих поверхностей (см. § 38, п. 3°).

Представим, что поверхности Σ_1 червяка придаются отклонения по отношению к поверхности F червячной фрезы такого рода, что F и Σ_1 касаются друг друга по некоторой линии C . Проще всего добиться, чтобы поверхности F и Σ_1 касались друг друга по винтовой линии. При нарезании зубцов червячного колеса поверхности F фрезы и Σ_2 колеса касаются в каждое мгновение по линии $D^{(F2)}$. Предположим, что каждая из линий $D^{(F2)}$ имеет общую точку с линией C касания F и Σ_1 . Введем в зацепление поверхности Σ_1 и Σ_2 червяка и колеса, представив, что с Σ_1 как бы жестко связана поверхность F . Очевидно, что Σ_2 и F будут находиться в линейном, а Σ_1 и Σ_2 — в точечном контакте. Контакт поверхностей Σ_1 и Σ_2 зубцов червяка и колеса в каждый момент времени будет происходить в точке, общей для линии C и характеристики $D^{(F2)}$.

в) В ФРГ предложен способ локализации контакта в червячной передаче, способствующий улучшению условий смазки [297].

Представим, что колесо нарезается червячной фрезой, занимающей положение $O^{(1)}$. Затем производится повторное нарезание зубцов фрезой, установленной сначала в положении $O^{(2)}$, а затем в положении $O^{(3)}$ (рис. 214). В результате этого вблизи торцовых поверхностей I и II колеса из поверхности Σ_2 зубцов колеса будут изъяты участки, приводящие к кромочному касанию при наличии погрешностей изготовления. Одновременно с этим будут улучшены условия образования масляного клина между поверхностями зубцов червяка и колеса.

Создание червячных передач с локализованным контактом является актуальной задачей. В первую очередь ее нужно решить для червячных передач с вогнутым профилем червяка (гл. XI), а также для эвольвентных червячных передач (гл. X), червячных передач с червяком, обрабатываемым дисковым коническим инструментом (гл. XI).

§ 77. Корригирование ортогональной червячной передачи

В § 36 было показано, что в ортогональной передаче (угол скрещивания $\gamma = 90^\circ$) точка касания начальных цилиндров червяка и колеса является обыкновенной узловой точкой контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2

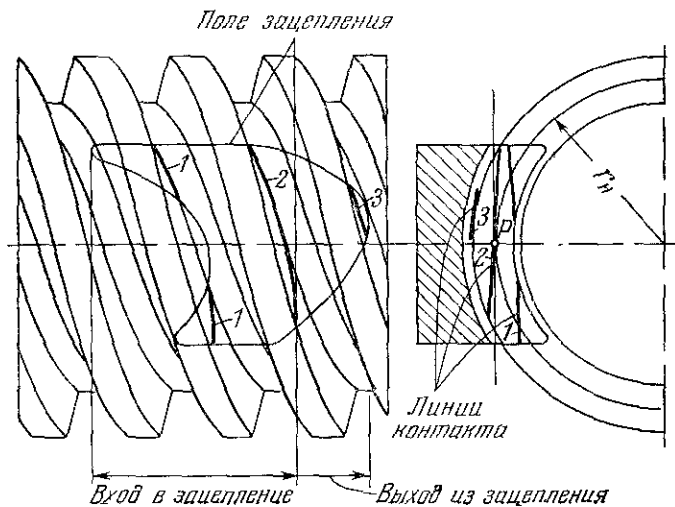


Рис. 215а.

червяка и колеса. Так как в такой точке скорость перемещения $v_r^{(1)} = 0$, необходимо исключить из зацепления участки поверхности, расположенные вблизи этой точки. А. И. Грубин [48], Ниманн [286] и Бакингом [273] предложили применить для этой цели такое корригирование, при котором точка касания начальных цилиндров червяка и колеса будет исключена из зацепления. Это возможно при соблюдении одного из следующих условий: а) при $r_e \leq r_n$; б) либо при $r_i \geq r_n$, где r_e и r_i — радиусы цилиндров выступов и впадин червяка, r_n — радиус начального цилиндра

червяка. У скорректированной червячной передачи создаются лучшие условия образования масляного клина благодаря более благоприятной форме линий контакта поверхностей зубцов червяка и колеса (см. § 78). На рис. 215 представлены линии контакта для трехзаходной эвольвентной червячной передачи с углом подъема $\lambda_d \approx 14^\circ$, углом профиля $\alpha_n = 14,5^\circ$; рис. 215а соответствует случаю, когда начальный цилиндр червяка совпадает с делительным цилиндром; на рис. 215б радиус начального цилиндра значительно уменьшен, что привело к улучшению формы линий контакта (см. § 78). Линии контакта для червячной передачи с вогнутым профилем червяка изображены на рис. 244.

Выбор вида коррекции ($r_e \leq r_n$, $r_i \geq r_n$) должен, по мнению автора, явиться предметом специального исследования. Несомненно одно: скорректированные червячные передачи должны найти широкое применение.

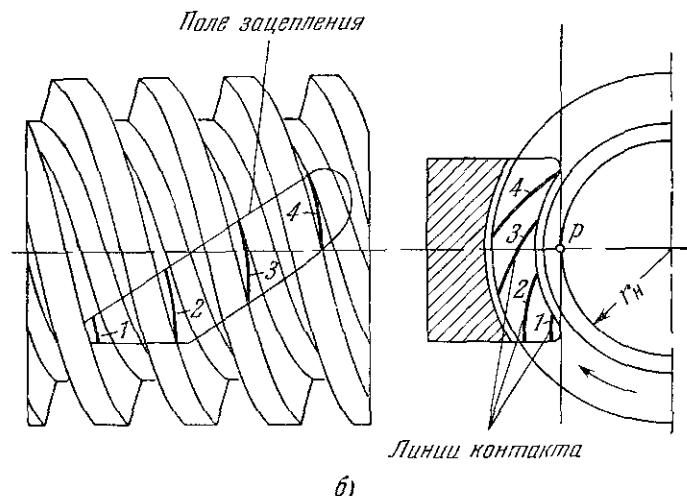


Рис. 215б.

Необходимо вместе с тем отметить, что корректирование червячной передачи позволяет исключить из зоны зацепления только часть обыкновенных узловых точек контакта. Полное исключение обыкновенных узловых точек контакта, видимо, возможно только в спироидной передаче и в неортогональной червячной передаче.

§ 78. Выбор рационального вида червячного зацепления

Ниже будет показано, что в червячных передачах применяются червяки со следующими видами винтовых поверхностей: а) архимедовой, б) конвольютной, в) эвольвентной, г) нелинейчатой, воспроизводимой дисковым коническим инструментом, д) нелинейчатой винтовой поверхностью с вогнутым профилем червяка. При сравнении указанных видов червячных передач нужно учитывать технологические трудности, связанные с их изготовлением, достижимую нагрузочную способность.

Для полноты контакта поверхностей зубцов червяков и червячных колес нужно обеспечить технологическим путем идентичность червячной фрезы и червяка. Это может быть достигнуто, если чистовое нарезание зубцов червячных колес производится шеврной червячной фрезой, прошлифованной так же, как и червяк передачи. В этом случае поверхность

витков червяков наиболее целесообразно выполнять в виде эвольвентной винтовой поверхности, нелинейчатой поверхности, воспроизводимой дисковым коническим инструментом, нелинейчатой поверхности, воспроизводимой тороидальным инструментом (см. гл. X и XI). При таких формах поверхностей витков червяки можно выполнять с повышенной твердостью; после термической обработки изготовление таких червяков заканчивается шлифованием поверхностей витков.

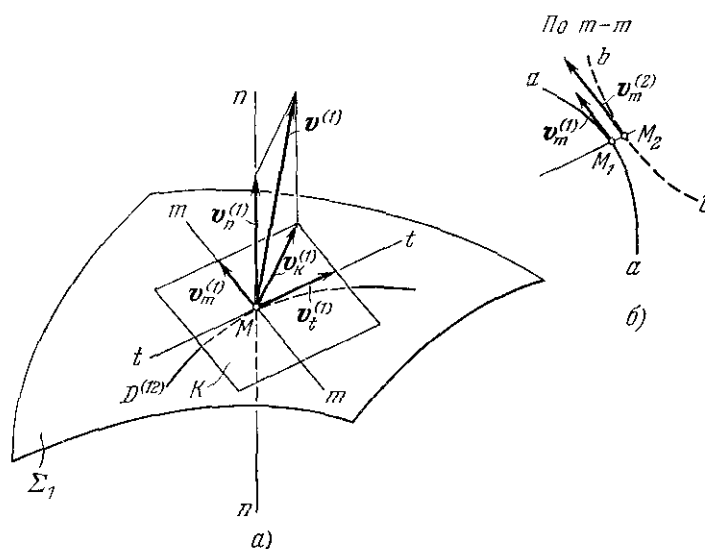


Рис 216

Архимедовы и конволютные червяки целесообразно применять лишь в тех случаях, когда нет необходимости в применении червяков с повышенной твердостью и нарезание червяков производится резцом на токарном станке. Для обеспечения должной полноты контакта червячные колеса нужно нарезать с помощью летучих резцов, особенно при больших углах подъема червяков, так как при архимедовой и конволютной винтовой поверхностях практически очень сложно добиться соответствия червячной фрезы и червяка. Из этого следует, что червяки с такой геометрией, помимо указанных выше ограничений, можно применять лишь в условиях мелкосерийного производства.

Повышение нагрузочной способности червячной передачи достигается: а) использованием коррекции, б) применением такой формы поверхности витков червяка, при которой обеспечиваются благоприятные условия образования масляного клина. Весьма перспективным в этом отношении является применение червячных передач с вогнутым профилем червяка (см. гл. XI).

Гидродинамика червячной передачи в настоящее время разработана недостаточно. Можно привести лишь некоторые соображения, связывающие форму линий контакта поверхностей зубцов червяка и колеса с условиями образования масляного клина [48, 286].

Обратимся к построениям рис. 216, а, на котором представлены поверхность Σ_1 и линия контакта $\Gamma^{(12)}$ поверхностей Σ_1 и Σ_2 ; $t-t$ — направление касательной к $D^{(12)}$ в точке M ; $m-m$ — направление,

перпендикулярное к $t-t$. Прямые $t-t$ и $m-m$ определяют плоскость K , касательную к поверхности Σ_1 в точке M ; $n-n$ — направление нормали к поверхности Σ_1 в точке M .

Представим, что $\mathbf{v}^{(1)}$ — скорость точки M поверхности Σ_1 . Разложим вектор $\mathbf{v}^{(1)}$ сначала на составляющие $\mathbf{v}_n^{(1)}$ и $\mathbf{v}_k^{(1)}$; $\mathbf{v}_n^{(1)}$ направлено по нормали $n-n$ к поверхности, $\mathbf{v}_k^{(1)}$ принадлежит касательной плоскости K . Вектор $\mathbf{v}_k^{(1)}$ в свою очередь вновь разложим на составляющие $\mathbf{v}_t^{(1)}$ и $\mathbf{v}_m^{(1)}$.

При таком разложении

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_n^{(1)} + \mathbf{v}_t^{(1)} + \mathbf{v}_m^{(1)}. \quad (78.1)$$

Аналогично для поверхности Σ_2 зубца червячного колеса получим

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}_n^{(2)} + \mathbf{v}_t^{(2)} + \mathbf{v}_m^{(2)}. \quad (78.2)$$

Рассечем поверхности Σ_1 и Σ_2 нормальной плоскостью, проходящей через направление $n-n$ нормали и через направление $m-m$ (рис. 216, б).

Между кривыми $a-a$ и $b-b$ образуется масляный клин, в котором частицы смазки движутся с переменной скоростью. В точках M_1 и M_2 масляного клина частицы смазки движутся со скоростями $\mathbf{v}_m^{(1)}$ и $\mathbf{v}_m^{(2)}$.

В первом приближении можно считать, что величина давления в масляном слое определяется суммой скоростей $\mathbf{v}_m^{(1)}$ и $\mathbf{v}_m^{(2)}$ и функцией, определяющей изменение зазоров в масляном клине между кривыми $a-a$ и $b-b$. При прочих равных условиях грузоподъемность червячной передачи будет повышаться с увеличением $\Sigma \mathbf{v}_m = \mathbf{v}_m^{(1)} + \mathbf{v}_m^{(2)}$. Для этого необходимо иметь контактные линии $D^{(12)}$ такой формы, чтобы составляющие $\mathbf{v}_m^{(1)}$ и $\mathbf{v}_m^{(2)}$ окружных скоростей, направленные перпендикулярно касательной к линии контакта,

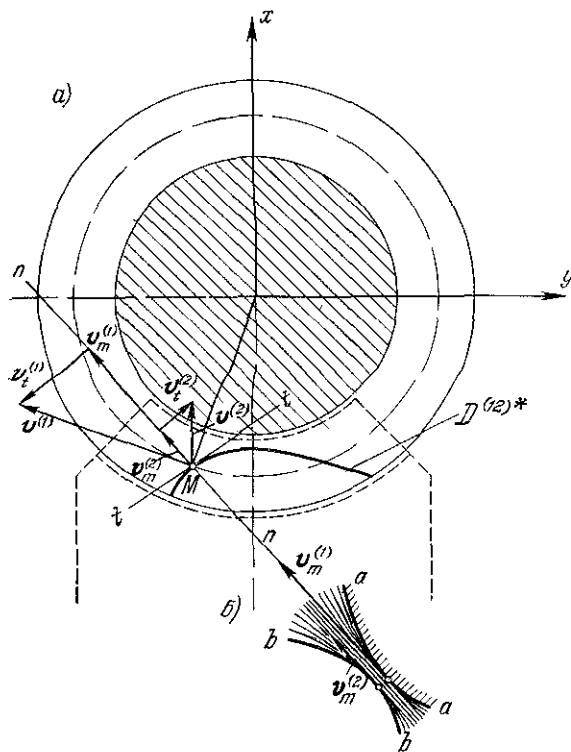


Рис. 217.

имели возможно большие значения. Это достигается, как будет показано ниже, применением червяков с вогнутым профилем. Как уже отмечалось выше, на форме линий контакта благоприятно сказывается корригирование червячной передачи.

Для оценки формы линий контакта червячной передачи целесообразно рассмотреть их проекции на плоскость xOy , перпендикулярную оси червяка. На рис. 217 $D^{(12)*}$ и $t-t$ — проекции на плоскость xOy линии контакта и касательной к $D^{(12)}$ в точке M , $\mathbf{v}^{(1)}$ — окружная скорость

червяка, $v^{(2)}$ — проекция на плоскость xOy скорости точки M червячного колеса. Для повышения нагрузочной способности передачи необходимо иметь линии контакта $D^{(12)}$ такой формы, чтобы суммарный вектор $\Sigma v_m = v_m^{(1)} + v_m^{(2)}$ имел возможно большее значение.

При изложении приведенных выше соображений мы, по существу, предполагали, что поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются друг друга по одной и той же линии $D^{(12)}$, занимающей неизменное положение в неподвижном пространстве. В действительности же линия контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 перемещается в неподвижном пространстве и по самим поверхностям, меняется также и форма линии контакта. Это сказывается на условиях образования масляного клина, что было отмечено П. С. Заком [87, 88] и Л. В. Коростелевым [131].

§ 79. Уравнение зацепления. Линии контакта

Уравнение зацепления определяет связь между параметрами поверхности червяка и углом его поворота φ_1 для точек касания этой поверхности с поверхностью зубца червячного колеса. Линия контакта представляет совокупность точек касания поверхностей червяка и колеса при фиксированном значении угла поворота φ_1 червяка.

В точке M касания поверхностей должно соблюдаться условие:

$$n_i v_i^{(12)} = 0. \quad (79.1)$$

Здесь n_i — вектор нормали, $v_i^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения, записанные в системе S_i ($i = 1, 0$).

В § 30, учитывая, что поверхность витков червяка является геликоидом, были получены следующие уравнения зацепления:

а) в неподвижной системе координат уравнение зацепления было представлено выражением (30.22), согласно которому

$$zn_x + A \operatorname{ctg} \gamma n_y - \left(x + A - p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) n_z = 0; \quad (79.2)$$

б) в подвижной системе S_1 , жестко связанной с червяком, уравнение зацепления было представлено в форме (30.12), согласно которому

$$(z_1 \cos \varphi_1 + A \operatorname{ctg} \gamma \sin \varphi_1) n_{x1} + (-z_1 \sin \varphi_1 + A \operatorname{ctg} \gamma \cos \varphi_1) n_{y1} - \\ - \left[(x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + A) - p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right] n_{z1} = 0. \quad (79.3)$$

Уравнения (79.2) и (79.3) после подстановки в них выражений координат x_1, y_1, z_1 точки поверхности червяка и проекций вектора нормали n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} приводят к следующей зависимости:

$$f_1(u, \vartheta, \varphi_1) = 0, \quad (79.4)$$

где u, ϑ — криволинейные координаты поверхности червяка, φ_1 — угол поворота червяка.

Приведенные уравнения удобны для использования, если уравнения поверхности червяка содержат в явном виде только два параметра. В ряде случаев поверхность витков червяка определяется как огибающая поверхности инструмента; уравнение поверхности червяка записывается тогда в трехпараметрической форме с наложенным уравнением связи (см. гл. XI). В этом случае удобно исходить из уравнения поверхности червяка в форме (27.4) и уравнения вектора нормали (27.7). Подставив в уравнение (79.1)

выражения (27.4) и (27.7), выражения (23.11) для $v_1^{(12)}$, получим

$$r \left[r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + A - p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right] \cos \mu + \\ + A p \operatorname{ctg} \gamma \cos \tau = p z \sin \tau = p^2 \zeta \sin \tau, \quad (79.5)$$

где $\tau = \theta + \zeta + \varphi_1 + \mu$, $r = r(\theta)$ — радиус-вектор текущей точки торцового профиля.

Для определения координат контактной линии нужно поступить так: а) считаем заданными r , θ и μ текущей точки торцового профиля червяка; фиксируем значение φ_1 угла поворота червяка; б) из уравнения (79.5) находим значение ζ ; в) подставляем значения ζ , θ и r в (27.4) и находим координаты текущей точки линии контакта в системе S_1 . Для определения координат текущей точки линии контакта в неподвижной системе координат S необходимо подставить значения r , θ , ζ и φ_1 в уравнения поверхности витков червяка в системе S , имеющие следующий вид:

$$x = r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1), \quad y = r \sin(\theta + \zeta + \varphi_1), \quad z = p\zeta. \quad (79.6)$$

При определении точек одной и той же линии контакта значение φ_1 сохраняется, изменяются лишь координаты r , θ и μ текущей точки торцового профиля.

§ 80. Поле зацепления

Под полем зацепления понимается рабочая часть поверхности зацепления. Используя поле зацепления, можно определить необходимую длину L червяка, а также ширину B обода червячного колеса (рис. 210).

На рис. 218 изображено поле зацепления ортогональной червячной передачи с цилиндрическим червяком, ограниченное кривыми $a - a$ и $b - b$. Кривая $a - a$ соответствует входу в зацепление точек поверхности червяка, лежащих на его цилиндре выступов; кривая $b - b$ соответствует входу в зацепление точек поверхности выступов червячного колеса. Для определения текущей точки M (рис. 218, b) кривой $a - a$ нужно воспользоваться следующими уравнениями:

$$\sin(\theta_e + \zeta + \varphi_1) = \frac{y}{r_e}, \quad (80.1)$$

$$z = \frac{r_e [r_e \cos(\theta_e + \zeta + \varphi_1) + r_n] \cos \mu_e}{p \sin [\mu_e + (\theta_e + \zeta + \varphi_1)]}, \quad (80.2)$$

$$x = r_e \cos(\theta + \zeta + \varphi_1). \quad (80.3)$$

В приведенных уравнениях радиус r_e цилиндра выступов и угол μ_e считаются известными. Задаваясь значениями y , из уравнений (80.1) — (80.3) последовательно вычисляются значения x и z точек кривой $a - a$ поля зацепления.

Уравнения (80.1) и (80.3) получены из (79.6); уравнение (80.2) получено из выражения (79.5), в котором принято: $\gamma = 90^\circ$, $r = r_e$ и $\mu = \mu_e$.

Рассмотрим теперь, как определяется точка N кривой $b - b$ поля зацепления.

Рассечем поверхности зубцов червяка и колеса плоскостью $y = \text{const}$; след этой плоскости на рис. 218, a — линия $m - n$. Сечение поверхности выступов червячного колеса плоскостью $y = \text{const}$ представляет дугу окружности радиуса R_e ; поэтому в плоскости xOz точка зацепления должна принадлежать окружности радиуса R_e (рис. 218, b). Для определения

точки N нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\sin(\theta + \xi + \varphi_1) = \frac{y}{r}, \quad (80.4)$$

$$z = \frac{r[r \cos(\theta + \xi + \varphi_1) + r_n] \cos \mu}{p \sin[\mu + (\theta + \xi + \varphi_1)]}, \quad (80.5)$$

$$x = r \cos(\theta + \xi + \varphi_1), \quad (80.6)$$

$$A - \sqrt{(r_d - m)^2 - y^2} = \sqrt{(A + x)^2 + z^2}. \quad (80.7)$$

При вычислениях нужно поступать так: считая фиксированным значение y , задаемся значением $r = r(\theta)$ и определяем значение μ из уравнения $\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$. Из формул (80.4)–(80.6) определяем z и x , которые должны

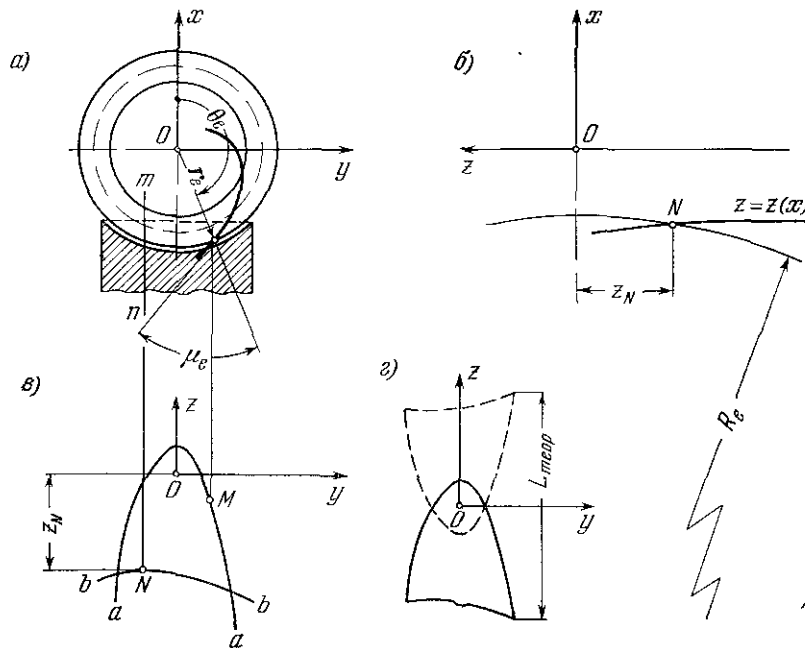


Рис. 218.

удовлетворить уравнению (80.7). Решение системы уравнений (80.4)–(80.7) требует применения метода последовательных приближений. Уравнения (80.4) и (80.6) получены из (79.6); (80.5) — из (79.5). Уравнение (80.7) получено из условия, что

$$R_e = A - \sqrt{(r_d - m)^2 - y^2} = \sqrt{(A + x)^2 + z^2}.$$

Для той части поверхности выступов колеса, которая очерчена цилиндром постоянного радиуса R_e^* , вместо (80.7) нужно пользоваться выражением:

$$R_e^* = \sqrt{(A + x)^2 + z^2}.$$

Линии a^* — a и b — b определяют поле зацепления червячной передачи. Проекция поля зацепления на плоскость yOz позволяет найти минимальную длину червяка. На рис. 218, z построены проекции полей зацепления

на плоскость yOz для обеих сторон витка; $L_{\text{теор}}$ — минимальная длина червяка реверсивной передачи. Проекция поля зацепления на плоскость xOy (см. рис. 244) позволяет найти минимальную ширину B червячного колеса.

§ 81. Подрезание зубцов червячного колеса

Решение этой задачи основывается на общих зависимостях, полученных в § 36. Будем считать, что уравнение зацепления (79.5) задано в форме

$$f_1(\theta, \zeta, \varphi_1) = 0, \quad (81.1)$$

а поверхность Σ_1 витков червяка определяется уравнением (27.4)

$$r_1 = r_1(\theta, \zeta). \quad (81.2)$$

Здесь θ, ζ — параметры поверхности червяка, φ_1 — параметр движения.

Во избежание подрезания зубцов червячного колеса поверхность Σ_1 должна быть ограничена по размерам. Для вычисления координат граничной линии нужно воспользоваться определителем (36.44). Этот определитель с учетом обозначений, принятых в выражениях (81.1) и (81.2), запишем так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} & \frac{d\varphi_1}{dt} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & v_{x1}^{(12)} & \\ 0 & \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} & v_{z1}^{(12)} & \end{vmatrix} = 0. \quad (81.3)$$

Раскрыв определитель (81.3), после преобразований получим следующее уравнение, связывающее r и $(\theta + \zeta + \varphi_1)$ для точек граничной линии:

$$\begin{aligned} [g + r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1)] \left[g \frac{r}{p} \sin \gamma \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + A \cos \gamma \right] \sin \tau \cos^2 \mu - \\ - [Ap \operatorname{ctg} \gamma + gr \cos \tau \cos \mu + r^2 \sin(\theta + \zeta + \varphi_1) \sin \tau \cos \mu] \times \\ \times \left[\cos \gamma \left(\sin \tau + \frac{A \sin \mu}{r} \right) - g \frac{\sin \gamma \sin(\theta + \zeta + \varphi_1) \cos \mu}{p} \right] - \\ - i_{12} \left[Ap \operatorname{ctg} \gamma + gr \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) \sin \tau \frac{d\mu}{dt} \right] + \\ + p \sin^3 \tau \sin \gamma [r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + A] = 0. \quad (81.4) \end{aligned}$$

В этом уравнении

$$g = r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + r_n + A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_n. \quad (81.5)$$

В случае ортогональной червячной передачи, когда угол скрещивания осей $\gamma = \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\begin{aligned} r \left[\cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{r_n}{r} \right] \times \\ \times \left\{ \left[2 \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{r_n}{r} \right] r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) \cos^2 \mu \sin \tau + \right. \\ \left. + \left(\cos \mu + \frac{r_n}{r} \cos \tau \right) r \sin(\theta + \zeta + \varphi_1) \cos^2 \mu - i_{12} p \sin \tau \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) \frac{d\mu}{dt} \right\} + \\ + p^2 \sin^3 \tau \left[\cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{A}{r} \right] = 0. \quad (81.6) \end{aligned}$$

В уравнения (81.4) и (81.6) входит производная $d\mu/dt$, для определения которой можно указать два пути.

Первый из них основывается на том, что

$$d\mu + d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{\frac{r}{\sin \mu} d\theta}{\rho}, \quad (81.7)$$

где ρ и ds — радиус кривизны и дифференциал дуги торцового профиля. Так как $\operatorname{tg} \mu = r d\theta/dr$, получим

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{r - \rho \sin \mu}{r \rho \cos \mu} \frac{dr}{dt}. \quad (81.8)$$

Для определения dr/dt воспользуемся следующими зависимостями:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \cos(\theta + \zeta) + \frac{dy_1}{dt} \sin(\theta + \zeta) = -v_{x1}^{(12)} \cos(\theta + \zeta) - v_{y1}^{(12)} \sin(\theta + \zeta).$$

После преобразований получим

$$\frac{dr}{dt} = z_1 i_{21} \cos(\theta + \zeta + \varphi_1). \quad (81.9)$$

Второй путь для определения $d\mu/dt$ основывается на том, что ищется выражение $\frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Производная $d\mu/dr$ определяется в результате дифференцирования функции

$$\mu = \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \right) = f(\theta), \quad (81.10)$$

$$\frac{d\mu}{dr} = f'(\theta) \frac{d\theta}{dr} = f'(\theta) \frac{\operatorname{tg} \mu}{r}. \quad (81.11)$$

Производная dr/dt определяется из уравнения (81.9).

Уравнение (81.6) с учетом сказанного может быть теперь записано в такой форме:

$$\begin{aligned} & r \left[\cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{r_H}{r} \right] \times \\ & \times \cos \mu \left\{ \left[2 \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{r_H}{r} \right] r \cos \mu \sin \tau \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos \mu + \frac{r_H}{r} \cos \tau \right) r \cos \mu \sin(\theta + \zeta + \varphi_1) - \right. \\ & \quad \left. - r^2 \left[\cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{r_H}{r} \right] \cos^2(\theta + \zeta + \varphi_1) \frac{d\mu}{dr} \right\} + \\ & \quad + p^2 \sin^3 \tau \left[\cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + \frac{A}{r} \right] = 0. \quad (81.12) \end{aligned}$$

Разъясним путь вычислений для нахождения координат текущей точки граничной линии для случая, когда угол скрещивания $\gamma = 90^\circ$.

Выбираем предварительно одну из точек торцового профиля червяка, для которой известно r , θ , μ и $d\mu/dr$. Подставив эти значения в уравнение (81.12), определяем $(\theta + \zeta + \varphi_1)$. Используя уравнение зацепления (79.5), находим

$$\zeta = \frac{r [r \cos(\theta + \zeta - \varphi_1) + r_H] \cos \mu}{p^2 \sin [\mu + (\theta + \zeta + \varphi_1)]}. \quad (81.13)$$

Теперь можно определить координаты x_1 , y_1 и z_1 граничной точки из уравнений (27.4). Для вычисления других точек граничной линии повторяем указанную процедуру вычислений при новых значениях координат точки торцового профиля r , θ , μ и $d\mu/dr$.

§ 82. Кривизна поверхностей зубцов в червячной передаче

Будем считать, что поверхность червяка, являющаяся геликоидом, и орт нормали к ней записаны уравнениями (27.4) и (27.8). В неподвижной системе координат S поверхность червяка представим уравнением, аналогичным (79.6):

$$r_0 = r \cos \xi i + r \sin \xi j + p \zeta k. \quad (82.1)$$

Здесь $r = r(\theta)$ — модуль радиуса-вектора текущей точки торцового профиля, r_0 — радиус-вектор текущей точки поверхности; $\xi = \theta + \zeta + \varphi_1$, где φ_1 — угол поворота червяка вокруг своей оси.

Орт нормали к поверхности червяка определится в системе S уравнением

$$e = \frac{1}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}} (p \sin \tau i - p \cos \tau j + r \cos \mu k). \quad (82.2)$$

Здесь $\tau = \theta + \zeta + \mu + \varphi_1$; μ — угол между радиусом-вектором r точки торцового профиля и касательной к торцовому профилю, определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{p} \frac{d\theta}{dr}. \quad (82.3)$$

Для определения главных кривизн поверхности геликоида воспользуемся формулой (34.8), согласно которой

$$\dot{e}_r^{(1)} = -\kappa_{I, II} v_r^{(1)}. \quad (82.4)$$

Скорость движения точки на поверхности червяка

$$v_r^{(1)} = \frac{\partial r_0}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial r_0}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} = r \left(\frac{\cos \tau}{\sin \mu} \frac{d\theta}{dt} - \sin \xi \frac{d\zeta}{dt} \right) i + \\ + r \left(\frac{\sin \tau}{\sin \mu} \frac{d\theta}{dt} + \cos \xi \frac{d\zeta}{dt} \right) j + p \frac{d\zeta}{dt} k. \quad (82.5)$$

Скорость конца орта нормали

$$\dot{e}_r^{(1)} = \frac{\partial e}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial e}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt}. \quad (82.6)$$

Уравнение (82.6) в развернутом виде является довольно громоздким. Простые выражения для $\dot{e}_{xr}^{(1)}$ и $\dot{e}_{yr}^{(1)}$ можно получить обходным путем, продифференцировав уравнение (27.10) для геликоида, согласно которому

$$y_1 e_{x1} - x_1 e_{y1} = p e_{z1}. \quad (82.7)$$

Продифференцируем (82.7) и перейдем затем к неподвижной системе координат S , после чего получим

$$v_{yr}^{(1)} e_x^{(1)} + y \dot{e}_{xr}^{(1)} - v_{xr}^{(1)} e_y^{(1)} - x \dot{e}_{yr}^{(1)} = p \dot{e}_{zr}^{(1)}. \quad (82.8)$$

Используя (82.2) и (82.5), получим

$$v_{yr}^{(1)} e_x^{(1)} - v_{xr}^{(1)} e_y^{(1)} = \frac{pr}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}} \left(\frac{1}{\sin \mu} \frac{d\theta}{dt} + \sin \mu \frac{d\zeta}{dt} \right). \quad (82.9)$$

На главных направлениях векторы $\mathbf{v}_r^{(1)}$ и $\mathbf{e}_r^{(1)}$ коллинеарны, следовательно,

$$\frac{\ddot{\mathbf{e}}_{xr}^{(1)}}{v_{xr}^{(1)}} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{yr}^{(1)}}{v_{yr}^{(1)}} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(1)}}{v_{zr}^{(1)}}, \quad (82.10)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{xr}^{(1)} = \frac{v_{xr}^{(1)}}{v_{zr}^{(1)}} \dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(1)}, \quad (82.11)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{yr}^{(1)} = \frac{v_{yr}^{(1)}}{v_{zr}^{(1)}} \dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(1)}. \quad (82.12)$$

Используя (82.2), после преобразований получим

$$\dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(1)} = \frac{p^2 r}{(p^2 + r^2 \cos^2 \mu)^{3/2}} \left(\frac{1}{\sin \mu} - \frac{r}{\rho_T} \right) \frac{d\theta}{dt}. \quad (82.13)$$

Здесь ρ_T — радиус кривизны торцового профиля, определяемый уравнением, аналогичным (15.6):

$$\rho_T = \frac{r \frac{d\theta}{dt}}{\sin \mu \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \right)}. \quad (82.14)$$

На основании (82.8), (82.9), (82.13), (82.12), (82.11), (82.1) и (82.5) получим следующее уравнение для определения главных направлений:

$$\left(1 - \frac{r}{\rho_T} \sin \mu \right) \left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 + \left(\sin^2 \mu - \frac{r}{\rho_T} \frac{\sin \mu}{\cos^2 \lambda_r} \right) \frac{d\theta}{d\zeta} - \left(\operatorname{tg}^2 \lambda_r + \cos^2 \mu \right) \sin^2 \mu = 0, \quad (82.15)$$

где $\lambda_r = \operatorname{arctg} \left(\frac{p}{r} \right)$.

Определив из (82.15) значение $d\theta/d\zeta$ для главного направления, главную кривизну на основании (82.4) определим из уравнения

$$\kappa_i^{(n)} = - \frac{\dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(1)}}{v_{zr}^{(1)}} \quad (i = \text{I, II}). \quad (82.16)$$

После определения главной кривизны кривизну в любом нормальном сечении легко найти, используя формулу Эйлера, записанную ранее выражением (34.13).

Л. В. Коростелев [133] показал, что особенно простым является выражение для кривизны в нормальном сечении, проведенном через касательную к винтовой линии геликоида. В уравнении (27.7) геликоида винтовая линия является координатной линией ζ и для нее $\theta = \text{const}$; для нормального сечения, проведенного через касательную к винтовой линии, $d\theta/dt = 0$. Кривизна в нормальном сечении, не являющемся

главным, определяется из формулы (34.2), согласно которой

$$\kappa = - \frac{v_r^{(1)} \dot{e}_r^{(1)}}{(v_r^{(1)})^2}.$$

При $d\theta/dt = 0$ получим

$$\kappa = - \frac{p \sin \mu \cos^2 \lambda_r}{r \sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}}. \quad (82.17)$$

Рассмотрим теперь, как определяется кривизна поверхности зубцов червячного колеса. Не приводя развернутых выражений, укажем лишь, что нормальная, главная и приведенная кривизны определяются по формулам § 34. Эти формулы основываются на том, что значения $v_r^{(2)}$ и $\dot{e}_r^{(2)}$ для поверхности зубцов червячного колеса выражаются через $v_r^{(1)}$ и $\dot{e}_r^{(1)}$, найденные для червяка, и параметры, определяющие относительное движение.

Цилиндрические червячные передачи с линейчатой винтовой поверхностью червяков

§ 83. Конволютная винтовая поверхность

Линейчатые винтовые поверхности червяков образуются винтовым движением прямой линии. Известны три вида линейчатых винтовых поверхностей червяков: конволютная, архимедова и эвольвентная поверхности. Начнем рассмотрение с конволютной винтовой поверхности.

Конволютные червяки нарезаются на токарном станке с помощью резца трапецевидного профиля, устанавливаемого таким образом, чтобы плоскость режущих кромок была перпендикулярна направлению средней винтовой линии, т. е. направлению винтовой линии на делительном цилиндре червяка (рис. 219).

1°. При нарезании конволютных червяков возможны две схемы установки резцов, представленные на рис. 219, *а* и *б*. В первом случае червяк имеет прямолинейные профили в нормальном сечении по витку, во втором — в нормальном сечении по впадине.

Рассмотрим вначале образование конволютной винтовой поверхности с прямолинейным сечением по впадине червяка рис.

220, *а*. Обратимся к рис. 220, *б*, на котором представлен резец с углом профиля α_n , имеющий толщину s_p на расстоянии r_d от оси червяка. Плоскость режущих кромок повернута по отношению к оси червяка на угол λ_d подъема винтовой линии на делительном цилиндре радиуса r_d . Продолженные направления режущих кромок касаются цилиндра радиуса ρ , который мы будем в последующем называть направляющим. Радиус ρ направляющего цилиндра можно определить как кратчайшее расстояние скрещивающихся прямых: ML и оси червяка z_1 .

Прямая ML в системе координат x_n, y_n, z_n определяется уравнениями

$$\frac{x_n - r_d}{\cos \alpha_n} = \frac{y_n}{0} = \frac{z_n - \frac{s_p}{2}}{\sin \alpha_n}, \quad (83.1)$$

где s_p — ширина резца на расстоянии r_d от оси червяка.

Найдем кратчайшее расстояние между прямой ML и осью z_1 . Единичный вектор a_n , направленный по LM , определится так:

$$a_n = \cos \alpha_n i_n + \sin \alpha_n k_n. \quad (83.2)$$

Орт b_n оси z_1 в системе S_n выражается уравнением

$$b_n = \sin \lambda_n j_n + \cos \lambda_n k_n. \quad (83.3)$$

Обозначим через $c = k(a \times b)$ орт единичного вектора, направленного

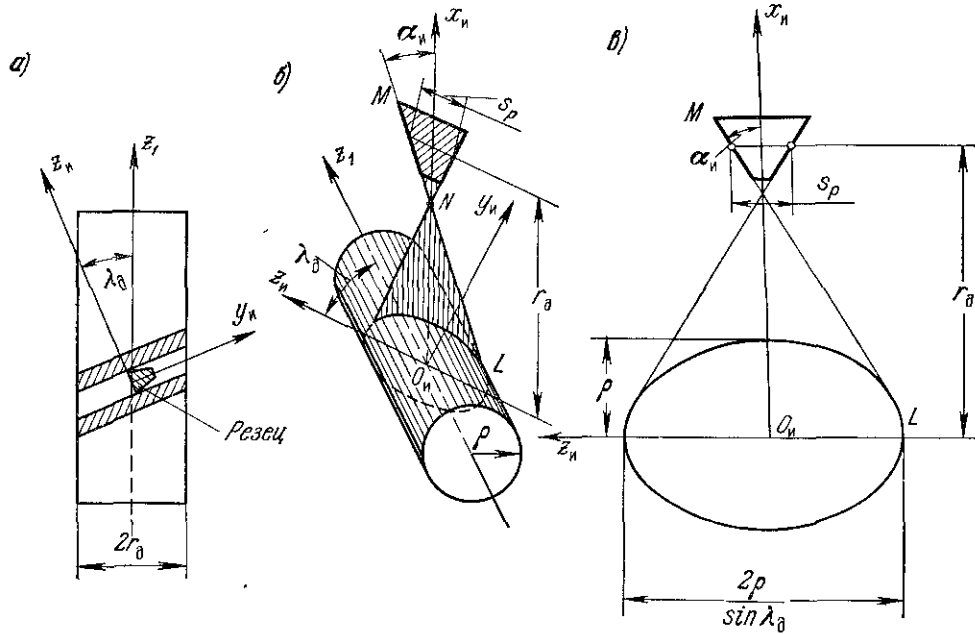


Рис. 220.

по линии кратчайшего расстояния между a и b ; k — нормирующий множитель,

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_n \sin^2 \lambda_n}} (-\operatorname{tg} \alpha_n \sin \lambda_n i_n - \cos \lambda_n j_n + \sin \lambda_n k_n). \quad (83.4)$$

Кратчайшее расстояние ρ (рис. 220, б) между векторами a и b определится уравнением

$$\rho = |\overline{O_n N} \cdot c| = \left(r_d - \frac{s_p}{2} \operatorname{ctg} \alpha_n \right) |i_n| = \frac{\left(r_d \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{s_p}{2} \right) \sin \lambda_n}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_n \sin^2 \lambda_n}}. \quad (83.5)$$

Угол δ , составленный образующей прямой ML с плоскостью, перпендикулярной оси z_1 , определяется уравнением

$$\sin \delta = \cos(\widehat{a_n, b_n}) = a_n b_n = \sin \alpha_n \cos \lambda_n. \quad (83.6)$$

2°. Рассмотрим теперь случай, когда конвольютный червяк нарезается по схеме рис. 249, а и прямолинейными являются его профили в нормальном сечении витка. Прямая KL (рис. 224) определяется в этом случае

уравнением

$$\frac{x_H - r_d}{\cos \alpha_H} = \frac{y_H}{0} = \frac{z_H + \frac{w_p}{2}}{\sin \alpha_H}. \quad (83.7)$$

Применив путь вывода, аналогичный приведенному выше, получим

$$\rho = \frac{\left(r_d \operatorname{tg} \alpha_H + \frac{w_p}{2}\right) \sin \lambda_d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_H \sin^2 \lambda_d}}. \quad (83.8)$$

Уравнение (83.6) для определения угла δ распространяется и на рассматриваемый случай.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением конволютных червяков с прямолинейными профилями в нормальном сечении впадины, поскольку такие червяки имеют наибольшее распространение.

3°. Для определения основных параметров конволютного червяка необходимо указать связь между осевой шириной впадины и толщиной резца s_p , измеренной на расстоянии r_d от оси червяка.

Свяжем с резцом вспомогательную систему координат x_0, y_0, z_0 , а с червяком — систему координат x_1, y_1, z_1 (рис. 222). При нарезании червяка режущие кромки инструмента находятся в плоскости, перпендикулярной направлению средней винтовой линии. Размер s_p резца, измеренный на расстоянии r_d от оси червяка, должен быть таким, чтобы режущие кромки инструмента пересекались с винтовыми линиями впадины червяка заранее заданной ширины.

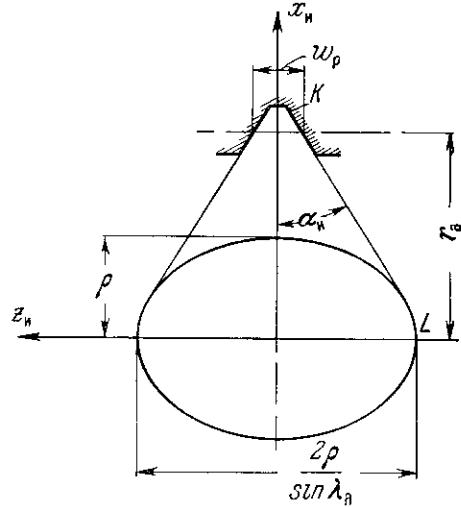


Рис. 221.

Винтовая линия на цилиндре радиуса r_d определяется уравнением

$$x_1 = r_d \cos \theta, \quad y_1 = r_d \sin \theta, \quad z_1 = p\theta, \quad (83.9)$$

где p — винтовой параметр.

Режущая кромка AB в системе S_0 выражается уравнением

$$\frac{z_0 + \frac{s_p}{2}}{x_0} = -\operatorname{tg} \alpha_H, \quad y_0 = 0. \quad (83.10)$$

Матрица перехода от S_0 к S_1 имеет такой вид:

$$M_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & r_d \\ 0 & \cos \lambda_d & -\sin \lambda_d & 0 \\ 0 & \sin \lambda_d & \cos \lambda_d & \frac{w_{oc}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (83.11)$$

Режущая кромка AB в системе S_1 определится уравнением

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + r_d, & y_1 &= y_0 \cos \lambda_d - z_0 \sin \lambda_d, \\ z_1 &= y_0 \sin \lambda_d + z_0 \cos \lambda_d + \frac{w_{oc}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (83.12)$$

Для того чтобы найти точки пересечения режущей кромки AB с винтовой линией (83.9), рассмотрим совместно (83.12), (83.10) и (83.9). В результате получим

$$p\theta - \frac{w_{oc}}{2} + r_d \sin \theta \operatorname{ctg} \lambda_d = 0, \quad (83.13)$$

$$\frac{s_p}{2} = \frac{r_d \sin \theta}{\sin \lambda_d} + r_d (1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \alpha_n. \quad (83.14)$$

Уравнение (83.13) является трансцендентным относительно θ . Считая заданными r_d , λ_d и w_{oc} , находим из этого уравнения θ , а затем, используя (83.14), определяем s_p . Приближенно

$$s_p = w_{oc} \cos \lambda_d. \quad (83.15)$$

Это соотношение можно получить, приняв в уравнениях (83.13) и (83.14), что в силу малости θ $\sin \theta \approx \theta$ и $1 - \cos \theta \approx 0$.

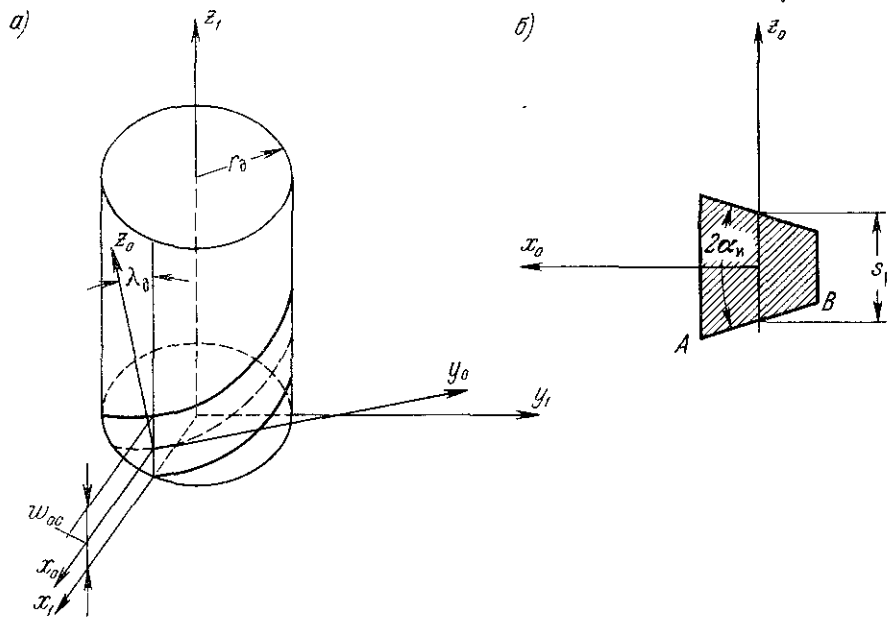


Рис. 222.

4°. Перейдем теперь к определению уравнения боковой поверхности витков червяка. Конволютная винтовая поверхность образуется винтовым движением режущей кромки (образующей прямой), остающейся при этом движении касательной к направляющему цилиндру радиуса ρ . Точка касания образующей прямой с направляющим цилиндром описывает

винтовую линию с углом подъема δ_p , определяемым из уравнения

$$\operatorname{tg} \delta_p = \frac{p}{\rho}.$$

Образующая прямая MN составляет с касательной к винтовой линии на направляющем цилиндре угол $\delta_p + \delta$ (рис. 223). Согласно уравнению (83.6) $\delta = \arcsin(\cos \lambda_d \sin \alpha_n)$. При образовании эвольвентной винтовой поверхности (рис. 183) образующая прямая MN является одновременно касательной к винтовой линии на основном цилиндре.

Радиус-вектор $\overline{ON}$ точки N конволютной винтовой поверхности (рис. 223) равен

$$\overline{ON} = \overline{OK} + \overline{KM} + \overline{MN}, \quad (83.16)$$

где $MN = u$ — длина отрезка образующей прямой от точки касания с направляющим цилиндром до текущей точки поверхности; $OK = \rho$ —

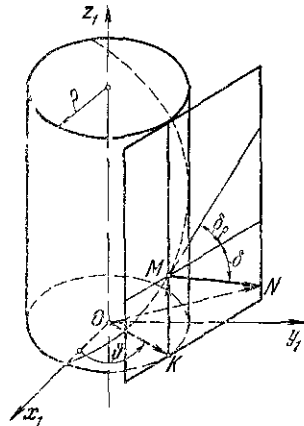


Рис. 223.

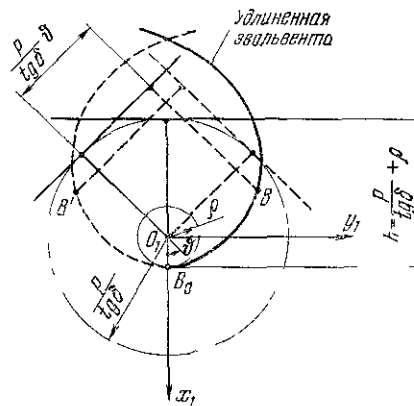


Рис. 224.

радиус направляющего цилиндра; $KM = p\vartheta$ — величина осевого перемещения в винтовом движении.

Проектируя векторы на оси координат, получим

$$r_1 = (\rho \cos \vartheta - u \cos \delta \sin \vartheta) i_1 + (\rho \sin \vartheta + u \cos \delta \cos \vartheta) j_1 + (p\vartheta - u \sin \delta) k_1. \quad (83.17)$$

Уравнение (83.17) получено в предположении, что образующей прямой MN (рис. 223) воспроизводится правая винтовая поверхность. В случае левой винтовой поверхности нужно считать отрицательным винтовой параметр p , изменить знак перед u в выражениях для x_1 и y_1 .

Торцовое сечение конволютного червяка получим, приняв в (83.17) $z_1 = 0$. В полярной форме торцовый профиль определится уравнением

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \delta} \vartheta\right)^2}. \quad (83.18)$$

Это — уравнение удлиненной эвольвенты. Такую кривую можно получить как траекторию точки B прямой линии, обкатываемой без скольжения по окружности радиуса $p/\operatorname{tg} \delta$; точка B смещена относительно обкатываемой прямой на величину $h = p/\operatorname{tg} \delta + \rho$ (рис. 224). Поперечное

сечение трехзаходного конволютного червяка с профилем витка в виде удлиненной эвольвенты изображено на рис. 225.

Осевое сечение получим, приняв в уравнении (83.17) $y_1 = 0$.
Искомое сечение определится уравнениями

$$x_1 = \frac{\rho}{\cos \vartheta}, \quad z_1 = p\vartheta + \rho \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \vartheta.$$

Найдем осевой угол профиля как угол наклона касательной к профилю в точке пересечения его с делительным цилиндром.

Приняв во внимание, что в точке пересечения осевого профиля с делительным цилиндром $x_1 = r_d = \rho / \cos \vartheta$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ос д}} &= \left| \frac{dz_1}{dx_1} \right| = \\ &= \left| \frac{p \frac{\rho^2}{r_d^2} + \rho \operatorname{tg} \delta}{\rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_d^2}}} \right| = \left| \frac{\operatorname{tg} \lambda_d \frac{\rho}{r_d} + \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_d^2}}} \right|. \end{aligned} \quad (83.19)$$

Вектор нормали к конволютной винтовой поверхности определяется уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \vartheta} = [(\rho \operatorname{tg} \delta + p) \cos \vartheta - u \sin \delta \sin \vartheta] \mathbf{i}_1 + \\ &+ [(\rho \operatorname{tg} \delta + p) \sin \vartheta + u \sin \delta \cos \vartheta] \mathbf{j}_1 + u \cos \delta \mathbf{k}_1. \end{aligned} \quad (83.20)$$

Орт нормали

$$\mathbf{e}_1 = k \mathbf{n}_1, \quad (83.21)$$

где k — нормирующий множитель,

$$k = \frac{1}{\sqrt{(\rho \operatorname{tg} \delta + p)^2 + u^2}}. \quad (83.22)$$

§ 84. Архимедова винтовая поверхность

Архимедовы червяки нарезаются на токарном станке резцом трапециевидного профиля, устанавливаемым так, чтобы режущие кромки резца располагались в осевой плоскости червяка (рис. 226). Червяки такого вида применяются главным образом при малых углах подъема винтовой линии примерно до 10° . При больших углах подъема резец для улучшения условий резания устанавливается перпендикулярно направлению средней винтовой линии и вместо архимедовой образуется конволютная винтовая поверхность.

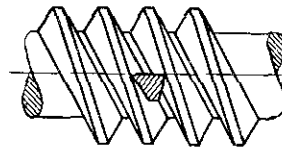


Рис. 226.

На рис. 227 ML — образующая прямая (режущая кромка резца), при винтовом движении которой воспроизводится архимедова винтовая поверхность; прямая ML пересекает при таком движении ось червяка. Радиус-вектор правой архимедовой винтовой поверхности определяется

уравнением

$$\mathbf{r}_1 = \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = u \cos \alpha_n (\cos \vartheta \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta \mathbf{j}_1) + (p\vartheta - u \sin \alpha_n) \mathbf{k}_1. \quad (84.1)$$

Для левой винтовой поверхности в уравнении (84.1) нужно изменить знак перед p и u .

Приняв в уравнении (84.1) $z_1 = 0$, получим поперечное сечение архимедова червяка, выражаемое уравнением

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha_n} \vartheta. \quad (84.2)$$

Это, как известно, уравнение архимедовой спирали, что и послужило основанием назвать винтовую поверхность (84.1) архимедовой.

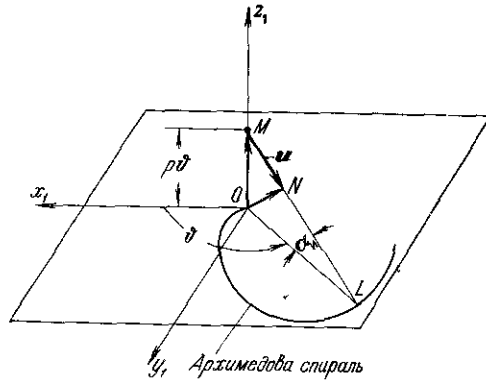


Рис. 227.

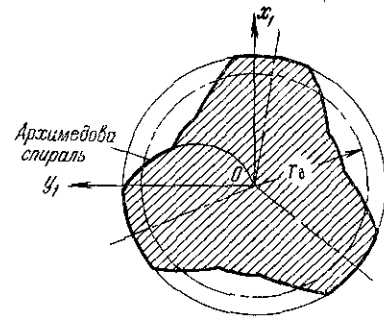


Рис. 228.

Поперечное сечение трехзаходного архимедова червяка представлено на рис. 228.

Орт нормали к поверхности (84.1) определяется уравнением

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{u^2 + p^2}} [(p \sin \vartheta + u \sin \alpha_n \cos \vartheta) \mathbf{i}_1 + (-p \cos \vartheta + u \sin \alpha_n \sin \vartheta) \mathbf{j}_1 + u \cos \alpha_n \mathbf{k}_1]. \quad (84.3)$$

§ 85. Эвольвентная винтовая поверхность

Вывод уравнения эвольвентной винтовой поверхности был приведен в § 70.

$$\mathbf{r}_1 = (r_0 \cos \vartheta + u \cos \lambda_0 \sin \vartheta) \mathbf{i}_1 + (r_0 \sin \vartheta - u \cos \lambda_0 \cos \vartheta) \mathbf{j}_1 + (p\vartheta - u \sin \lambda_0) \mathbf{k}_1, \quad (85.1)$$

где $p = r_0 \operatorname{tg} \lambda_0$. Орт нормали

$$\mathbf{e}_1 = \sin \lambda_0 \sin \vartheta \mathbf{i}_1 - \sin \lambda_0 \cos \vartheta \mathbf{j}_1 + \cos \lambda_0 \mathbf{k}_1. \quad (85.2)$$

Сечение эвольвентной винтовой поверхности плоскостью $z_1 = \text{const}$ представляет эвольвенту. При $z_1 = 0$ из (85.1) получим

$$u = \frac{r_0}{\cos \lambda_0} \vartheta, \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r_0 \sqrt{1 + \vartheta^2}. \quad (85.3)$$

Уравнение осевого сечения получим, приняв в (85.1) $y_1 = 0$. При этом

$$u = r_0 \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \lambda_0}, \quad x_1 = \frac{r_0}{\cos \vartheta}, \quad z_1 = -p \operatorname{inv} \vartheta. \quad (85.4)$$

Найдем осевой угол профиля в точке пересечения профиля с делительным цилиндром. В такой точке $x_1 = r_d$ и $\cos \vartheta = r_0/r_d$

$$\operatorname{tg} \alpha_{oc. д} = \left| \frac{dz_1}{dx_1} \right| = \operatorname{tg} \lambda_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r_d} \right)^2}. \quad (85.5)$$

При дальнейших преобразованиях учтем, что

$$\cos \alpha_{sd} = \frac{r_0}{r_d}, \quad \operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{\operatorname{tg} \lambda_d}{\cos \alpha_{sd}}.$$

В результате получим

$$\operatorname{tg} \alpha_{oc. д} = \operatorname{tg} \alpha_{sd} \operatorname{tg} \lambda_d, \quad (85.6)$$

что соответствует ранее записанному уравнению (75.11).

Из выражения (85.5), приняв во внимание, что $p = r_0 \operatorname{tg} \lambda_0 = r_d \operatorname{tg} \lambda_d$, получим следующее выражение для r_0 :

$$r_0 = \frac{p}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_{oc. д} + \operatorname{tg}^2 \lambda_d}}.$$

Червяки с эвольвентной винтовой поверхностью могут быть изготовлены: 1) точением на токарном станке; 2) фрезерованием: а) по методу обкатки на зубофрезерном станке, б) посредством дисковой или пальцевой фрезы (см. § 91); 3) шлифованием на станках типа Д. Браун.

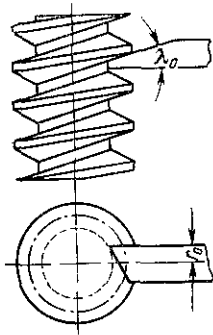


Рис. 229.

При токарной обработке нужно применить резец, режущая кромка которого составляет с плоскостью, перпендикулярной оси червяка, угол λ_0 (рис. 229). Расстояние передней грани от оси червяка должно равняться радиусу основного цилиндра. Разноименные боковые поверхности витков червяка должны обрабатываться отдельно. В том случае, когда разноименные боковые поверхности обрабатываются одновременно с соблюдением указанной выше установки резца, одна из боковых поверхностей витка получится эвольвентной, а другая — конвольвентной; направляющим цилиндром конвольвентной винтовой поверхности явится основной цилиндр эвольвентной винтовой поверхности другой стороны витка червяка. Эвольвентные червяки на токарных станках описанным способом изготавливаются редко вследствие неблагоприятных условий резания, связанных с необходимостью установки резца выше (или ниже) оси червяка.

Многозаходные эвольвентные червяки могут быть нарезаны на зубофрезерном станке посредством обычной червячной фрезы. Ограничением здесь является минимальное число зубцов колеса (для червяка — число заходов), на которое рассчитан используемый станок. Фрезерование червяков посредством дисковых и пальцевых фрез будет рассмотрено в §§ 91, 92.

В связи с повышением твердости рабочих поверхностей появилась необходимость в термической обработке червяков. Шлифование червяков с эвольвентной винтовой поверхностью осуществляется на станках Д. Браун. Станки такого типа снабжены шлифовальной головкой, схема

которой представлена на рис. 230. Шлифование червяка осуществляется плоскостью круга. Головка вместе с инструментальным шпинделем может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси $b - b$. Эта ось перпендикулярна оси червяка. В вертикальной плоскости оси инструментального шпинделя $h - h$ сообщается поворот вокруг оси $a - a$, жестко связанной с головкой. Головке вместе с шлифовальным кругом должна быть сообщена такая установка, чтобы поверхность круга стала касательной плоскостью эвольвентной винтовой поверхности. Очевидно, что при этом ось инструментального шпинделя, равно как и любая прямая, перпендикулярная плоскости шлифовального круга, должна быть параллельна нормали к эвольвентной винтовой поверхности червяка в точках касания ее с поверхностью круга.

В начальном положении ось $h - h$ инструментального шпинделя находится в горизонтальной плоскости. Ось $h - h$ и ось червяка в этом положении находятся в параллельных плоскостях, и их направления образуют угол γ (рис. 230). Представим теперь, что головке вместе с инструментальным шпинделем сообщен поворот вокруг оси $b - b$ (вокруг оси x на рис. 231) на угол q , в результате чего ось $a - a$ займет положение Oy_b , а ось $h - h$ инструментального шпинделя займет положение Ol (рис. 231). Ось Oz на рисунке параллельна оси червяка. Если инструментальный шпиндель повернуть теперь вокруг $a - a$ (Oy_b) на угол τ , ось инструментального шпинделя перейдет из Ol в положение Ol' (рис. 231). В системе $S_a(x_a, y_a, z_a)$, жестко связанной со шпинделем, единичный вектор c_a прямой Ol' определится уравнением

$$c_a = \sin \gamma j_a + \cos \gamma k_a. \quad (85.7)$$

В неподвижной системе S единичный вектор прямой Ol' определится так:

$$c = L_{0b} L_{ba} c_a. \quad (85.8)$$

Здесь

$$L_{ba} = \begin{vmatrix} \cos \tau & 0 & \sin \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tau & 0 & \cos \tau \end{vmatrix}, \quad L_{0b} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & \sin q \\ 0 & -\sin q & \cos q \end{vmatrix}.$$

После преобразований орт прямой Ol' в системе S определится уравнением

$$c = \sin \tau \cos \gamma i + (\sin \gamma \cos q + \cos \gamma \sin q \cos \tau) j + \\ + (-\sin \gamma \sin q + \cos \gamma \cos q \cos \tau) k. \quad (85.9)$$

Орт нормали к эвольвентной винтовой поверхности в системе координат S_1 , жестко связанной с червяком, выражается уравнениями (85.2).

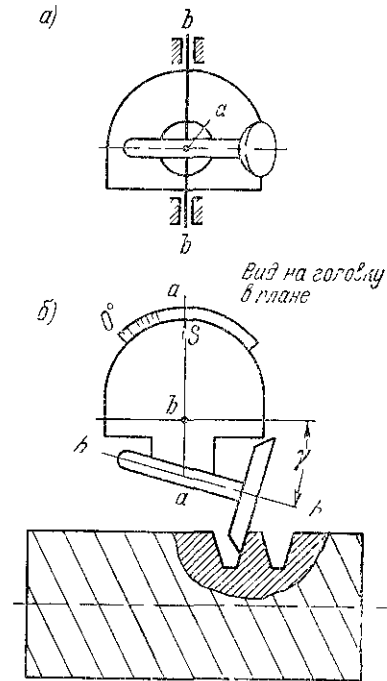


Рис. 230.

Червяку при шлифовании сообщается винтовое движение: вращение вокруг своей оси и поступательное движение вдоль этой оси. Обозначив угол поворота червяка через φ_1 , орт нормали к эвольвентной винтовой

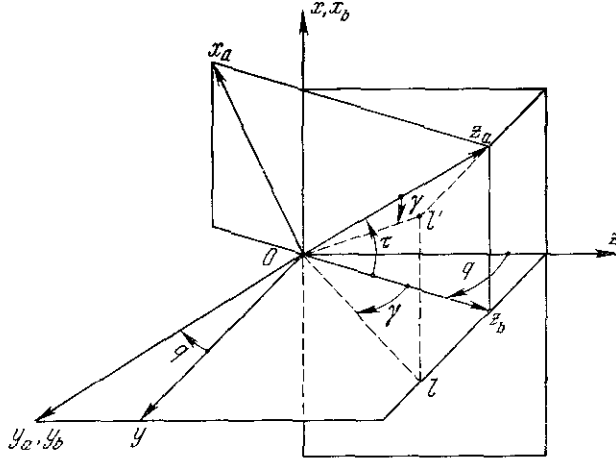


Рис. 231.

поверхности в неподвижной системе координат определим следующим уравнением:

$$e = \sin \lambda_0 \sin (\varphi_1 + \vartheta) i - \sin \lambda_0 \cos (\varphi_1 + \vartheta) j + \cos \lambda_0 k. \quad (85.10)$$

Используя условие: $e = c$ и переходя к проекциям, получим два независимых уравнения, связывающих три неизвестных: $(\varphi_1 + \vartheta)$, q и τ ; одно из этих неизвестных можно выбрать произвольно. Углы q и τ , опре-

деляющие установки шлифовальной головки и инструментального шпинделя, целесообразно определять из уравнения

$$\cos \lambda_0 = -\sin \gamma \sin q + \cos \gamma \cos q \cos \tau. \quad (85.11)$$

При заданном значении λ_0 существует бесчисленное множество сочетаний значений q и τ , удовлетворяющих формуле (85.11). Приняв в уравнении (85.10) $(\varphi_1 + \vartheta) = \frac{\pi}{2} + \alpha_{сд}$, используя затем условие $e = c$, получим формулы для определения τ и q , приведенные в статье А. Н. Грубина [51]:

$$\sin \tau = \frac{\sin \lambda_d \cos \alpha_n}{\cos \gamma}, \quad (85.12)$$

$$\cos q = \frac{\cos \lambda_d \cos \alpha_n \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \lambda_d \cos^2 \alpha_n} + \sin \alpha_n \sin \gamma}{1 - \sin^2 \lambda_d \sin^2 \alpha_n}. \quad (85.13)$$

Угол α_n профиля в нормальном сечении может быть определен из уравнения

$$\cos \alpha_n = \frac{\cos \lambda_0}{\cos \lambda_d}, \quad (85.14)$$

либо из уравнения

$$\sin \alpha_n = \sin \alpha_{сд} \sin \lambda_0. \quad (85.15)$$

Отметим, что при шлифовании левых эвольвентных червяков поворот на угол τ задается в направлении, противоположном принятому на рис. 231. На шкале горизонтальных углов поворота отсчет до поворота на угол q составляет γ (рис. 230); после поворота на угол q против индекса S установится деление

$$\sigma = \gamma + q. \quad (85.16)$$

§ 86. Линии контакта. Поверхность зацепления

Уравнения поверхности линейчатых червяков содержат в явной форме только два параметра. Для определения линий контакта в неподвижной системе координат было использовано уравнение (79.2), которое, как было указано выше, приводится к зависимости (79.4). Опуская выводы, приведем уравнения для определения линий контакта и поверхности зацепления эвольвентной и архимедовой червячной передач.

А. Эвольвентный червяк

В неподвижной системе координат, учитывая, что червяк совершает вращение вокруг оси z , семейство эвольвентных винтовых поверхностей определяется уравнением

$$\mathbf{r} = [r_0 \cos(\vartheta + \varphi_1) + u \cos \lambda_0 \sin(\vartheta + \varphi_1)] \mathbf{i} + \\ + [r_0 \sin(\vartheta + \varphi_1) - u \cos \lambda_0 \cos(\vartheta + \varphi_1)] \mathbf{j} + (p\vartheta - u \sin \lambda_0) \mathbf{k}. \quad (86.1)$$

Зависимость (79.4) примет такой вид:

$$u = p\vartheta \sin \lambda_0 - \operatorname{ctg}(\vartheta + \varphi_1) (r_0 \cos \lambda_0 + A \operatorname{ctg} \gamma \sin \lambda_0) + \\ + \left(p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} - A \right) \frac{\cos \lambda_0}{\sin(\vartheta + \varphi_1)}. \quad (86.2)$$

Уравнения (86.1) и (86.2) определяют при фиксированном значении φ_1 линию контакта поверхностей зубцов червяка и колеса. Совокупность таких линий определяет поверхность зацепления. Для того чтобы получить, например, поперечную линию зацепления как сечение поверхности зацепления плоскостью $z = \text{const}$, к уравнениям (86.2) нужно присоединить уравнение $z = a$. После преобразований, учитывая, что $p\vartheta = a + u \sin \lambda_0$, получим

$$u \cos \lambda_0 = a \operatorname{tg} \lambda_0 - \operatorname{ctg}(\vartheta + \varphi_1) (r_0 + A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_0) + \\ + \left(p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} - A \right) \frac{1}{\sin(\vartheta + \varphi_1)}. \quad (86.3)$$

Используя уравнение (86.3), уравнения поперечных линий зацепления запишем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{tg} \lambda_0 \sin(\vartheta + \varphi_1) - A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_0 \cos(\vartheta + \varphi_1) + p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} - A, \\ y &= \frac{r_0}{\sin(\vartheta + \varphi_1)} - a \operatorname{tg} \lambda_0 \cos(\vartheta + \varphi_1) + \\ &\quad + A \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \lambda_0 \operatorname{ctg}(\vartheta + \varphi_1) \cos(\vartheta + \varphi_1) - \\ &\quad - \left(p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} - A \right) \operatorname{ctg}(\vartheta + \varphi_1), \\ z &= a. \end{aligned} \right\} \quad (86.4)$$

Поверхность зацепления червячной передачи с эвольвентным червяком является линейчатой поверхностью. Образующей такой поверхности является прямая, полученная пересечением поверхности зацепления плоскостью, касательной к основному цилиндру.

В этом можно удостовериться, присоединив к уравнениям (86.1) и (86.2), определяющим поверхность зацепления, уравнение плоскости, касательной к основному цилиндру,

$$x \cos(\vartheta + \varphi_1) + y \sin(\vartheta + \varphi_1) = r_0. \quad (86.5)$$

Уравнения (86.1), (86.2) и (86.5), рассмотренные совместно, определяют при $\vartheta + \varphi_1 = \text{const}$ сечение поверхности зацепления в виде прямой линии.

На рис. 232 представлены линии контакта, определенные для эвольвентной червячной передачи со следующими параметрами: модуль

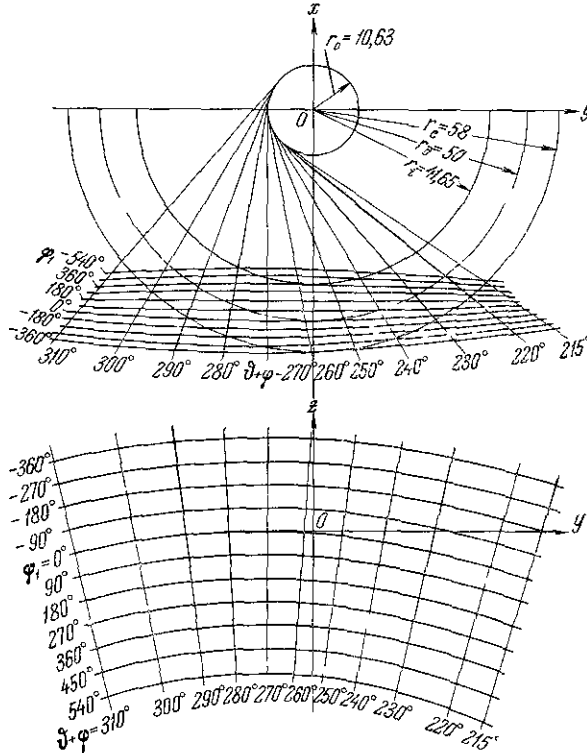


Рис. 232.

$m = 8$ мм; число заходов $z_1 = 1$; радиус делительного цилиндра $r_d = 50$ мм; передача некорректированная и $r_d = r_n$; передаточное отношение $i_{21} = \frac{1}{25}$; межосевое расстояние $A = 150$ мм; осевой угол профиля $\alpha_{ос.д} = 20^\circ$.

В. Архимедов червяк

Архимедову винтовую поверхность и орт нормали к ней мы ранее представили уравнениями (84.1) и (84.3).

После преобразований уравнения контактных линий представим в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} & u^2 + u \left[\sin \alpha_n \operatorname{tg} (\varphi_1 + \vartheta) (p - A \operatorname{ctg} \gamma) + \right. \\ & \quad + \left(A - p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) \frac{\cos \alpha_n}{\cos (\varphi_1 + \vartheta)} - p \vartheta \sin \alpha_n \left. \right] - \\ & \quad - p [p \vartheta \operatorname{tg} (\varphi_1 + \vartheta) - A \operatorname{ctg} \gamma] = 0; \\ & x = u \cos \alpha_n \cos (\varphi_1 + \vartheta); \quad y = u \cos \alpha_n \sin (\varphi_1 + \vartheta); \\ & z = p \vartheta - u \sin \alpha_n. \end{aligned} \right\} \quad (86.6)$$

Для вычисления координат контактной линии нужно зафиксировать значение угла поворота φ_1 червяка, а затем, задаваясь ϑ , вычислять соответствующие значения u . При архимедовой винтовой поверхности значения u определяются в результате решения квадратного уравнения. Используя связанные таким образом значения u и ϑ , находим, далее, координаты x , y , z контактной линии.

Совокупность контактных линий представляет поверхность зацепления. Для того чтобы получить сечение поверхности зацепления какой-нибудь плоскостью, к уравнениям (86.6) нужно присоединить уравнение такой плоскости. Так, например, присоединив к уравнению (86.6) уравнение секущей плоскости

$$z = p\vartheta - u \sin \alpha_n = a, \quad (86.7)$$

получим поперечную линию зацепления.

Рассмотрев уравнения (86.6) и (86.7) совместно, поперечную линию зацепления определим такими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u^2 \cos^2 \alpha_n + u \left[-A \operatorname{ctg} \gamma \sin \alpha_n \operatorname{tg} (\vartheta + \varphi_1) + \right. \\ \left. + \left(A - p \frac{1 - i_{21} \cos \gamma}{i_{21} \sin \gamma} \right) \frac{\cos \alpha_n}{\cos (\vartheta + \varphi_1)} - a \sin \alpha_n \right] - \\ - p [a \operatorname{tg} (\vartheta + \varphi_1) - A \operatorname{ctg} \gamma] = 0; \\ x = u \cos \alpha_n \cos (\vartheta + \varphi_1); \quad y = u \cos \alpha_n \sin (\vartheta + \varphi_1); \\ z = a. \end{aligned} \right\} \quad (86.8)$$

При вычислениях координат поперечной линии зацепления нужно задаваться значениями $(\vartheta + \varphi_1)$ и вычислять u . Используя связанные таким образом значения $(\varphi_1 + \vartheta)$ и u , нужно затем определить координаты x и y поперечной линии зацепления.

Цилиндрические червячные передачи с нелинейчатой винтовой поверхностью червяков

В отличие от линейчатых нелинейчатые винтовые поверхности не имеют ни в одном из сечений прямых линий. В зависимости от способа образования различаются нелинейчатые винтовые поверхности червяков, воспроизводимые: а) дисковым коническим инструментом, б) тороидальным инструментом (червяк имеет при этом вогнутый профиль в осевом и в нормальном сечении).

§ 87. Винтовая поверхность, воспроизводимая дисковым коническим инструментом

Решающим преимуществом эвольвентных червячных передач с шлифуемыми червяками является возможность простым технологическим путем обеспечить идентичность поверхностей витков червяка и червячной фрезы.

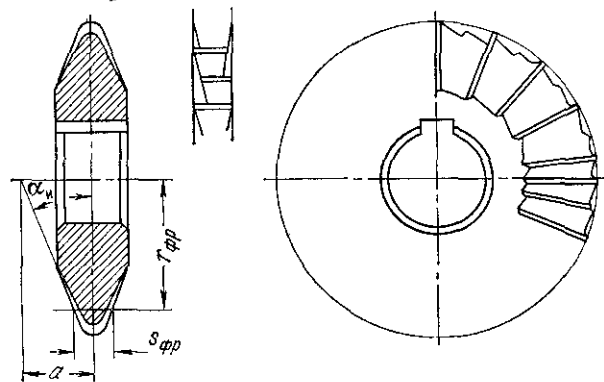


Рис. 233.

Этой же цели можно добиться, если обработку червяков выполнить дисковым коническим инструментом (шлифовальным кругом или дисковой фрезой) при перекрещивании осей инструмента и червяка. Поверхность такого инструмента является поверхностью кругового конуса (рис. 233). Простота формы инструмента упрощает его изготовление. Поверхность витков червяка является по отношению к поверхности инструмента огибающей в относительном движении.

Введем в рассмотрение следующие системы координат: $S_n(x_n, y_n, z_n)$, связанную с инструментом; $S(x, y, z)$ — неподвижную систему координат; $S_1(x_1, y_1, z_1)$ — связанную с червяком. Будем считать, что при обработке инструмент неподвижен, а червяк совершает винтовое движение с параметром p (рис. 234); оси инструмента и червяка перекрещиваются, образуя угол γ_n ; обычно выбирают $\gamma_n = \lambda_d$.

Переход от системы S_n к S и от S к S_1 совершается с помощью матриц

$$M_{0n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & A_n \\ 0 & \cos \gamma_n & -\sin \gamma_n & 0 \\ 0 & \sin \gamma_n & \cos \gamma_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (87.1)$$

$$M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (87.2)$$

где ψ — угол поворота червяка в винтовом движении при обработке его дисковым инструментом (рис. 234, в).

Произведение матриц

$$M_{1n} = M_{10}M_{0n} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \cos \gamma_n & -\sin \psi \sin \gamma_n & A_n \cos \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \cos \gamma_n & \cos \psi \sin \gamma_n & -A_n \sin \psi \\ 0 & \sin \gamma_n & \cos \gamma_n & -p\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (87.3)$$

Для перехода от системы координат S_n к системе S_1 нужно воспользоваться матричным равенством

$$r_1 = M_{1n}r_n. \quad (87.4)$$

Выражение (87.4) позволяет найти семейство боковых поверхностей дискового инструмента в системе S_1 червяка. Уравнения боковой поверхности витков червяка получим как семейство линий контакта поверхностей

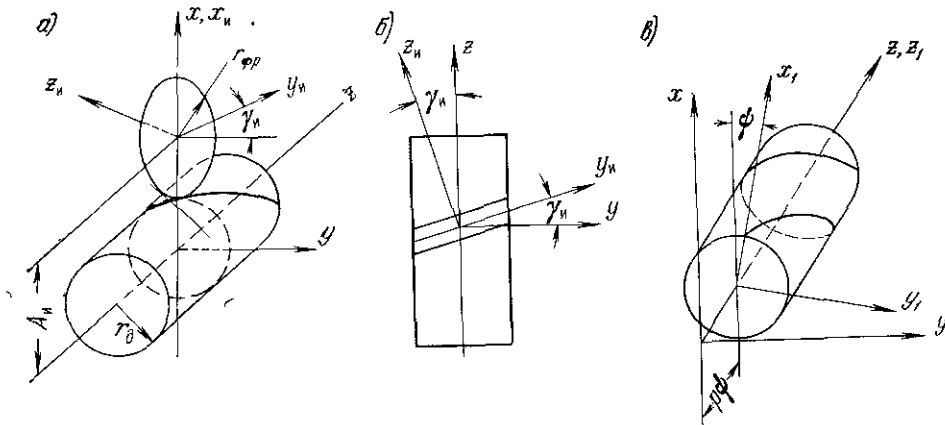


Рис. 234.

инструмента и червяка в системе S_1 . Для этого нужно рассмотреть совместно два уравнения: (87.4) и уравнение

$$n_n v_n^{(n1)} = 0. \quad (87.5)$$

Будем считать заданными следующие параметры инструмента (рис. 233):

α_n — угол профиля; a — расстояние плоскости инструмента от вершины конуса; $r_{\phi p}$ — радиус окружности инструмента, которой он касается

делительного цилиндра червяка (рис. 234, а); $s_{фр}$ — толщина инструмента, заданная на расстоянии $r_{фр}$ от оси инструмента.

Поверхность инструмента как поверхность конуса (рис. 235) определяется уравнением

$$\mathbf{r}_и = u \cos \alpha_и (\cos \vartheta \mathbf{i}_и + \sin \vartheta \mathbf{j}_и) + (u \sin \alpha_и - a) \mathbf{k}_и, \quad (87.6)$$

где u — расстояние точки поверхности конуса от его вершины.

В системе $S_и$ линия контакта поверхностей инструмента и червяка определяется уравнениями:

$$\mathbf{r}_и = \mathbf{r}_и(u, \vartheta), \quad \mathbf{n}_и \mathbf{v}_и^{(и1)} = \mathbf{e}_и \mathbf{v}_и^{(и1)} = 0. \quad (87.7)$$

Орт нормали $\mathbf{e}_и$ к поверхности (87.6) определяется уравнением

$$\mathbf{e}_и = -\sin \alpha_и (\cos \vartheta \mathbf{i}_и + \sin \vartheta \mathbf{j}_и - \operatorname{ctg} \alpha_и \mathbf{k}_и). \quad (87.8)$$

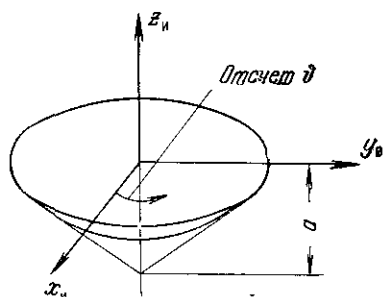


Рис. 235.

Найдем вектор $\mathbf{v}_и$ скорости инструмента по отношению к червяку, приняв, что это движение определяется скользящим вектором $\boldsymbol{\omega}$, направленным по оси z ,

и свободным вектором поступательного движения $p\boldsymbol{\omega}$, где p — винтовой параметр (рис. 236). Приведя вектор $\boldsymbol{\omega}$ к точке O , получим

$$\mathbf{v}_и^{(и1)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_и + \mathbf{R}_и \times \boldsymbol{\omega} + p\boldsymbol{\omega}. \quad (87.9)$$

Здесь $\mathbf{R}_и = -A_и \mathbf{i}$ — радиус-вектор точки O'_1 линии действия $\boldsymbol{\omega}$; $\boldsymbol{\omega} = \omega (\sin \gamma_и \mathbf{j}_и + \cos \gamma_и \mathbf{k}_и)$.

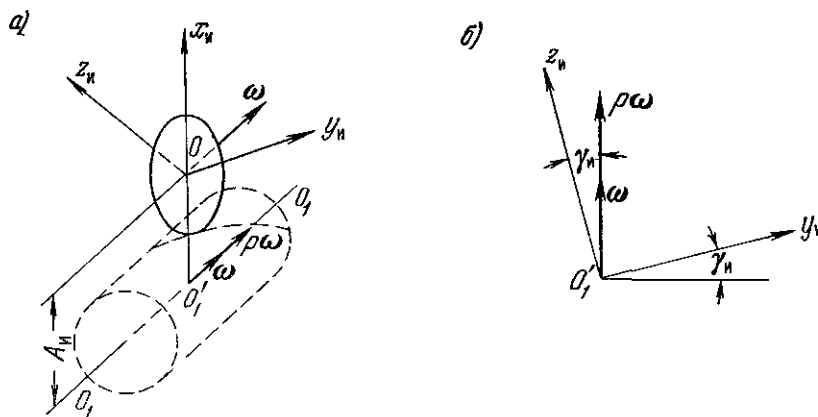


Рис. 236.

В проекциях на оси координат получим

$$\left. \begin{aligned} v_{xи}^{(и1)} &= \omega (\sin \gamma_и z_и - \cos \gamma_и y_и), \\ v_{yи}^{(и1)} &= \omega [\cos \gamma_и (x_и + A) + p \sin \gamma_и], \\ v_{zи}^{(и1)} &= -\omega [\sin \gamma_и (x_и + A) - p \cos \gamma_и]. \end{aligned} \right\} \quad (87.10)$$

Используя (87.7), (87.6), (87.8) и (87.10), после преобразований уравнение связи между параметрами u и ϑ поверхности и параметром r относительного движения представим в таком виде:

$$u = a \sin \alpha_n - (A_n \sin \alpha_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p \sin \alpha_n) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{(A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta}. \quad (87.11)$$

Уравнения винтовой поверхности червяка найдем, рассмотрев совместно уравнения (87.4), (87.3), (87.6) и (87.11). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \alpha_n - (A_n \sin \alpha_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p \sin \alpha_n) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{(A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta}, \\ x_1 &= u (\cos \alpha_n \cos \vartheta \cos \psi + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \sin \vartheta \sin \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \gamma_n \sin \psi) + a \sin \gamma_n \sin \psi + A_n \cos \psi, \\ y_1 &= u (-\cos \alpha_n \cos \vartheta \sin \psi + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \sin \vartheta \cos \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \gamma_n \cos \psi) + a \sin \gamma_n \cos \psi - A_n \sin \psi, \\ z_1 &= u (\sin \alpha_n \cos \gamma_n + \cos \alpha_n \sin \gamma_n \sin \vartheta) - p\psi - a \cos \gamma_n. \end{aligned} \right\} \quad (87.12)$$

Постоянные параметры α_n и A_n , входящие в эти уравнения, определяются по следующим формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_{oc.д} \cos \lambda_{д}, \quad (87.13)$$

где $\alpha_{oc.д}$ и $\lambda_{д}$ — осевой угол профиля червяка и угол подъема винтовой линии на делительном цилиндре червяка.

На расстоянии $r_{фр}$ от оси фрезы ($r_{фр}$ — радиус окружности инструмента, которой он касается делительного цилиндра червяка) толщина

$$s_{фр} \approx w_{oc} \cos \lambda_{д}, \quad (87.14)$$

где w_{oc} — ширина впадины червяка в осевом сечении на делительном цилиндре. Согласно построениям рис. 233

$$r_{фр} = \frac{a - \frac{s_{фр}}{2}}{\operatorname{tg} \alpha_n}.$$

Кратчайшее межосевое расстояние

$$A_n = r_{д} + r_{фр} = r_{д} + \frac{a - \frac{s_{фр}}{2}}{\operatorname{tg} \alpha_n}. \quad (87.15)$$

Осевое сечение поверхности (87.12) червяка получим, приняв $y_1 = 0$. После преобразования найдем

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \alpha_n - (A_n \sin \alpha_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p \sin \alpha_n) \operatorname{tg} \vartheta - \\ &\quad - \frac{(A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{u (\cos \alpha_n \sin \vartheta \cos \gamma_n - \sin \alpha_n \sin \gamma_n) + a \sin \gamma_n}{u \cos \alpha_n \cos \vartheta + A_n}, \\ x_1 &= \frac{u \cos \alpha_n \cos \vartheta + A_n}{\cos \psi}, \\ z_1 &= u (\sin \alpha_n \cos \gamma_n + \cos \alpha_n \sin \gamma_n \sin \vartheta) - p\psi - a \cos \gamma_n. \end{aligned} \right\} \quad (87.16)$$

Для определения поперечного сечения боковой поверхности витка червяка примем в уравнениях (87.12) $z_1 = 0$. После преобразований иско- мое сечение определим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \alpha_n - (A_n \sin \alpha_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p \sin \alpha_n) \operatorname{tg} \vartheta - \\ &\quad - \frac{(A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta}, \\ \psi &= \frac{u}{p} (\sin \alpha_n \cos \gamma_n + \cos \alpha_n \sin \gamma_n \sin \vartheta) - \frac{a}{p} \cos \gamma_n, \\ x_1 &= u (\cos \alpha_n \cos \vartheta \cos \psi + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \sin \vartheta \sin \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \gamma_n \sin \psi) + a \sin \gamma_n \sin \psi + A_n \cos \psi, \\ y_1 &= u (-\cos \alpha_n \cos \vartheta \sin \psi + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \sin \vartheta \cos \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \gamma_n \cos \psi) + a \sin \gamma_n \cos \psi - A_n \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (87.17)$$

Для определения линий контакта поверхностей зубцов червяка и червячного колеса и условий отсутствия подрезания зубцов колеса целесообразно исходить из уравнения поверхности витков червяка, заданного в форме (27.4). Переход к такой форме уравнения можно выполнить, рассматривая, что поверхность витков червяка образована винтовым движением торцового профиля (87.17).

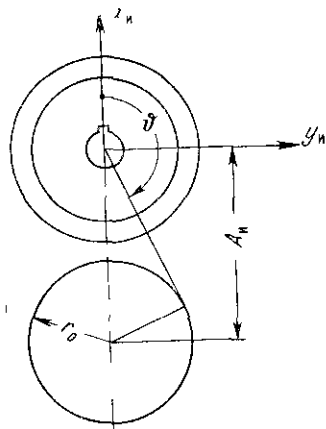


Рис. 237.

В работах А. Ф. Николаева [214] и автора [167] было доказано, что при угле перекрещивания осей дискового конического инструмента и червяка $\gamma_n = 0$ боковая поверхность витков червяка становится эвольвентной винтовой поверхностью.

При $\gamma_n = 0$ уравнение (58.11) связи между параметрами u и ϑ примет следующую форму:

$$\sin \vartheta = \frac{p}{A_n} \operatorname{ctg} \alpha_n. \quad (87.18)$$

Из уравнения (87.18) следует, что для контактной линии параметр ϑ поверхности инструмента является постоянным. Так как ϑ определяет положение образующей конической

поверхности инструмента, контактной линией на поверхности конического инструмента явится его образующая.

Выберем для конической поверхности угол $\alpha_n = \lambda_0$, где λ_0 — угол подъема винтовой линии на основном цилиндре радиуса r_0 ; тогда $A_n = r_0 / \sin \vartheta$. В неподвижной системе координат контактной линией явится такая образующая конической поверхности инструмента, которая будет касаться цилиндра червяка радиуса r_0 (рис. 237).

Поверхность витков червяка определится уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u \cos \alpha_n \cos (\vartheta - \psi) + \frac{r_0}{\sin \vartheta} \cos \psi, \\ y_1 &= u \cos \alpha_n \sin (\vartheta - \psi) - \frac{r_0}{\sin \vartheta} \sin \psi, \\ z_1 &= u \sin \alpha_n - p \psi - a. \end{aligned} \right\} \quad (87.19)$$

Рассечем поверхность (87.19) плоскостью $z_1 = -a$. Очевидно, что

$$u = \frac{p}{\sin \alpha_n} \psi = \frac{r_0}{\cos \alpha_n} \psi.$$

Обозначим угол развернутости эвольвенты через ψ' и выберем такое начало отсчета для ψ' , чтобы

$$\psi = \psi' - \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Новое уравнение для u запишем теперь так:

$$u = \frac{r_0}{\cos \alpha_n} (\psi' - \operatorname{ctg} \vartheta). \quad (87.20)$$

Рассмотрев совместно уравнения (87.19) и (87.20), получим, что поперечное сечение поверхности (87.19) представит эвольвентную кривую

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r_0 \sqrt{1 + (\psi')^2}. \quad (87.21)$$

Сочетание поверхности витка плоскостью, для которой $z_1 = \text{const}$, но не равно $-a$, представит эвольвентную кривую с тем же радиусом r_0 основной окружности, но повернутую относительно кривой (87.21).

Из приведенного доказательства следует, что коническим инструментом с углом профиля α_n при угле перекрещивания осей инструмента и червяка $\gamma_n = 0$ воспроизводится эвольвентная винтовая поверхность с параметрами

$$\lambda_0 = \alpha_n, \quad r_0 = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha_n}.$$

Такого рода установка дискового конического инструмента применяется в случае нарезания резьбы групповыми фрезами.

§ 88. Червячные передачи с шлифованными червяками вогнутого профиля (вариант I)

В книге рассматриваются две разновидности цилиндрических червячных передач с вогнутым профилем червяка: передачи варианта I применяются в ФРГ [286], червячные передачи варианта II были предложены автором книги [182]. Передачи обоих вариантов выполняются скорректированными, с коэффициентом смещения $\xi = 1 \div 1,3$. Во избежание заострения зубцов червячного колеса толщина витка червяка на делительном цилиндре задается $s_{\text{ос.д}} = 0,4t$.

Шлифование червяков варианта I. Шлифование червяков вогнутого профиля в ФРГ, согласно данным патентов, производится торoidalным шлифовальным диском, сечение которого осевой плоскостью представляет дугу окружности α — α радиуса ρ (рис. 238). Радиус

ρ выбирается равным примерно делительному радиусу r_d червяка; угол γ_n перекрещивания осей червяка и инструмента выбирается равным углу подъема винтовой линии на цилиндре радиуса r_d (рис. 239, а).

На рис. 239, б представлено сечение поверхностей червяка и инструмента вертикальной плоскостью, проходящей через z_n . Предполагается,

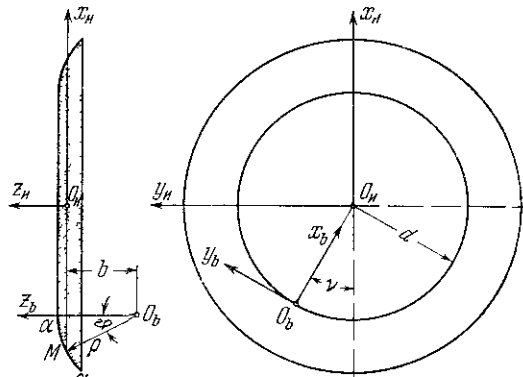


Рис. 238.

что линия кратчайшего расстояния между осями червяка и инструмента проходит через среднюю точку M профиля червяка. При этом предположении параметры установки шлифовального диска таковы:

$$b = \rho \cos \alpha_n, \quad a = r_d + \rho \sin \alpha_n. \quad (88.1)$$

Свяжем с инструментом систему координат x_n, y_n, z_n (рис. 238); система x_b, y_b, z_b является вспомогательной, и в ней дуговой профиль $\alpha - \alpha$

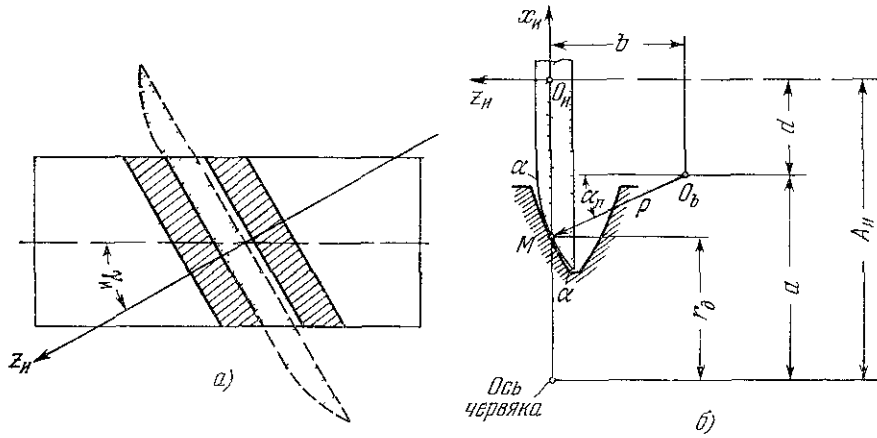


Рис. 239

определяется уравнением

$$r_b = \rho (-\sin \vartheta i_b + \cos \vartheta k_b). \quad (88.2)$$

Поверхность инструмента будет образована вращением дугового профиля $\alpha - \alpha$ вокруг оси z_n (рис. 238).

При этом

$$r_n = M_{nb} r_b, \quad (88.3)$$

где r_b — столбец радиуса-вектора точки профиля в системе S_b ; r_n — столбец радиуса-вектора точки поверхности в системе S_n .

Матрица перехода от S_b к S_n

$$M_{nb} = \begin{vmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 & -d \cos \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 & d \sin \nu \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (88.4)$$

Здесь

$$d = A_n - a = A_n - (r_d + \rho \sin \alpha_n). \quad (88.5)$$

Поверхность инструмента на основании выражений (88.2), (88.3) и (88.4) определится уравнениями:

$$x_n = -(\rho \sin \vartheta + d) \cos \nu, \quad y_n = (\rho \sin \vartheta + d) \sin \nu, \quad z_n = \rho \cos \vartheta - b. \quad (88.6)$$

Поверхность червяка является огибающей семейства поверхностей инструмента в относительном движении; линия контакта поверхностей

червяка и инструмента определятся уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} r_n &= r_n(\vartheta, \nu), \\ n_n v_n^{(n1)} &= e_n v_n^{n1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (88.7)$$

Орт нормали к поверхности (88.6) определится уравнением

$$e_n = \sin \vartheta (\cos \nu i_n - \sin \nu j_n) - \cos \vartheta k_n. \quad (88.8)$$

Относительное движение при шлифовании червяка является винтовым; проекции скорости $v_n^{(n1)}$ определяются уравнениями (87.10). Используя условие, что в точках линии контакта поверхностей инструмента и червяка $e_n v_n^{(n1)} = 0$, получим уравнение связи между параметрами ϑ и ν в следующем виде:

$$\sin \vartheta \cos \nu (z_n \sin \gamma_n - y_n \cos \gamma_n) - \sin \vartheta \sin \nu [(x_n + A_n) \cos \gamma_n + p \sin \gamma_n] + \\ + \cos \vartheta [\sin \gamma_n (x_n + A_n) - p \cos \gamma_n] = 0. \quad (88.9)$$

Подставив значения x_n , y_n и z_n из выражений (88.6) в (88.9), найдем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos \nu}{b \cos \nu + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin \nu}. \quad (88.10)$$

Линия контакта на поверхности инструмента определится в результате совместного рассмотрения уравнений (88.6) и (88.10).

Уравнения поверхности червяка. Поверхность червяка определяется как семейство линий контакта поверхностей инструмента и червяка в системе координат x_1 , y_1 , z_1 , связанной с червяком. Связь между системами координат S_n и S_1 (рис. 234) определяется уравнением

$$r_1 = M_{10} M_{0n} r_n = M_{1n} r_n. \quad (88.11)$$

Матрица M_{1n} была ранее представлена выражением (87.3).

Поверхность червяка определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos \nu}{b \cos \nu + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin \nu}, \\ x_1 &= (\rho \sin \vartheta + d) (-\cos \nu \cos \psi + \sin \nu \sin \psi \cos \gamma_n) - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \psi \sin \gamma_n + A_n \cos \psi, \\ y_1 &= (\rho \sin \vartheta + d) (\cos \nu \sin \psi + \sin \nu \cos \psi \cos \gamma_n) - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \cos \psi \sin \gamma_n - A_n \sin \psi, \\ z_1 &= (\rho \sin \vartheta + d) \sin \nu \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p \psi. \end{aligned} \right\} \quad (88.12)$$

Орт нормали к поверхности червяка найдем, используя матричное уравнение

$$e_1 = L_{1n} e_n.$$

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} e_{x1} &= \sin \vartheta (\cos \nu \cos \psi - \sin \nu \sin \psi \cos \gamma_n) + \cos \vartheta \sin \psi \sin \gamma_n, \\ e_{y1} &= -\sin \vartheta (\cos \nu \sin \psi + \sin \nu \cos \psi \cos \gamma_n) + \cos \vartheta \cos \psi \sin \gamma_n, \\ e_{z1} &= -\sin \vartheta \sin \nu \sin \gamma_n - \cos \vartheta \cos \gamma_n. \end{aligned} \right\} \quad (88.13)$$

В неподвижной системе координат S (рис. 45), используя матрицу (22.2) перехода M_{01} от S_1 к S , поверхность червяка и орт нормали

определим следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= (\rho \sin \vartheta + d) [-\cos v \cos(\psi - \varphi_1) + \sin v \sin(\psi - \varphi_1) \cos \gamma_n] - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \sin(\psi - \varphi_1) \sin \gamma_n + A_n \cos(\psi - \varphi_1), \\ y &= (\rho \sin \vartheta + d) [\cos v \sin(\psi - \varphi_1) + \sin v \cos(\psi - \varphi_1) \cos \gamma_n] - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \cos(\psi - \varphi_1) \sin \gamma_n - A_n \sin(\psi - \varphi_1), \\ z &= (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p\psi, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos v}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin v}, \end{aligned} \right\} \quad (88.14)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \sin \vartheta [\cos v \cos(\psi - \varphi_1) - \sin v \sin(\psi - \varphi_1) \cos \gamma_n] + \\ &\quad + \cos \vartheta \sin(\psi - \varphi_1) \sin \gamma_n, \\ e_y &= -\sin \vartheta [\cos v \sin(\psi - \varphi_1) + \sin v \cos(\psi - \varphi_1) \cos \gamma_n] + \\ &\quad + \cos \vartheta \cos(\psi - \varphi_1) \sin \gamma_n, \\ e_z &= -\sin \vartheta \sin v \sin \gamma_n - \cos \vartheta \cos \gamma_n. \end{aligned} \right\} \quad (88.15)$$

Торцовый профиль червяка. Для определения линий контакта поверхностей зубцов червяка и червячного колеса, условий отсутствия подрезания зубцов колеса уравнение поверхности червяка целесообразно представить в форме (27.4). При такой форме записи предполагается, что поверхность червяка образована винтовым движением его торцового профиля.

Уравнение торцового профиля получим, приняв в (88.12) $z_1 = 0$, после чего получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos v}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin v}, \\ \psi &= \frac{(\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n}{p}, \\ x_1 &= (\rho \sin \vartheta + d) (-\cos v \cos \psi + \sin v \sin \psi \cos \gamma_n) - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \psi \sin \gamma_n + A_n \cos \psi, \\ y_1 &= (\rho \sin \vartheta + d) (\cos v \sin \psi + \sin v \cos \psi \cos \gamma_n) - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \cos \psi \sin \gamma_n - A_n \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (88.16)$$

Используя зависимости (88.16), торцовый профиль червяка можно задать в полярной форме в виде функции $r = r(\theta)$, где r — модуль радиус-вектора торцового профиля, θ — полярный угол, отсчитываемый от оси x_1 . Для этого, используя уравнения (88.16), задаемся v , последовательно вычисляем ϑ , ψ , x_1 и y_1 , а затем находим

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \operatorname{arctg} \left(\frac{y_1}{x_1} \right), \\ r &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_1}{\cos \theta} = \frac{y_1}{\sin \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (88.17)$$

Угол μ между радиусом-вектором точки профиля и положительным направлением касательной к профилю (за положительное принято направление, совпадающее с направлением отсчета θ), определим на основании уравнения (27.5)

$$\operatorname{tg} \mu = 90^\circ - \operatorname{arctg} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{e_{y1}}{e_{x1}} \right). \quad (88.18)$$

Значение e_{x_1} и e_{y_2} определяются из уравнений (88.13), в которые нужно подставить ту же совокупность значений v , ϑ и ψ , при которых определялись значения x_1 и y_1 в уравнениях (88.16).

Узловые линии зацепления. Для определения верхних узловых линий зацепления воспользуемся формулами (32.4) — (32.3), приняв, что угол перекрещивания осей в червячной передаче $\gamma = 90^\circ$. В результате получим

$$b \operatorname{ctg} v - d \cos v \operatorname{tg} \gamma_n = -\frac{2A_n}{\sin 2\gamma_n}, \quad (88.19)$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = -\operatorname{tg} \gamma_n \sin v, \quad (88.20)$$

$$\operatorname{ctg} v \operatorname{ctg} (\psi - \varphi_1) = \frac{1}{\cos \gamma_n}. \quad (88.21)$$

При вычислениях последовательно определяются v , ϑ и $(\psi - \varphi_1)$, а затем, используя (88.14), находим значение y . Напомним, что для верхних узловых линий зацепления при $\gamma = 90^\circ$ $x = 0$.

Для определения нижних узловых линий зацепления воспользуемся формулами (32.4) — (32.6). Предполагая, что червяк правый, получим

$$\left\{ \frac{b \sin \gamma_n \sin (\psi - \varphi_1) + A_n \cos (\psi - \varphi_1) + r_n}{d \sin \gamma_n [\cos (\psi - \varphi_1) \sin \gamma_n - \cos \gamma_n \operatorname{ctg} \lambda_n]} \right\}^2 - \frac{\sin^2 (\psi - \varphi_1)}{\cos^2 \gamma_n + \sin^2 \gamma_n \operatorname{ctg}^2 \lambda_n + \sin 2\gamma_n \cos (\psi - \varphi_1) \operatorname{ctg} \lambda_n + \sin^2 (\psi - \varphi_1) \sin^2 \gamma_n} = 0, \quad (88.22)$$

$$\cos v = \frac{b \sin \gamma_n \sin (\psi - \varphi_1) + A_n \cos (\psi - \varphi_1) + r_n}{d \sin \gamma_n [\sin \gamma_n \cos (\psi - \varphi_1) - \cos \gamma_n \operatorname{ctg} \lambda_n]}, \quad (88.23)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \gamma_n \sin (\psi - \varphi_1)}{\sin v \sin (\psi - \varphi_1) \cos \gamma_n - \cos v \cos (\psi - \varphi_1)}. \quad (88.24)$$

При вычислениях последовательно определяем $(\psi - \varphi_1)$, v и ϑ , а затем, используя (88.14), находим значение y ; для нижних узловых линий зацепления $x = -r_n$.

Линии контакта. Линии контакта зубцов червяка и колеса в системе координат S определяются по формулам (79.5) и (79.6). На рис. 240 представлены проекции линий контакта, определенные для червячной передачи со следующими параметрами:

Число заходов червяка $z_1 = 3$, радиус делительного цилиндра $r_d = 46$, число зубцов червячного колеса $z_2 = 31$, модуль $m_{oc1} = 8$ мм, червяк скорректированный, и коэффициент коррекции $\xi = 1,25$. Поверхность червяка шлифуется инструментом с тороидальной поверхностью, радиус дугевого профиля инструмента в осевом сечении $\rho = 46$ мм, кратчайшее расстояние между осями круга и червяка $A_n = 201,733$ мм, угол перекрещивания осей инструмента и червяка при шлифовании $\gamma_n = \lambda_n = 14^\circ 37' 20''$, параметры установки инструмента $a = r_d (1 + \sin \alpha_n) = 61,733$ мм, $b = \rho \cos \alpha_n = 43,226$ мм.

Для верхних узловых линий зацепления были получены следующие значения параметров: $v = -3^\circ 8'$, $\vartheta = 89^\circ 11'$, $\psi - \varphi_1 = 93^\circ 14' 20''$ и $273^\circ 14' 20''$, $x = 0$, $y = \pm 16,33$ мм. Для нижней левой узловой линии зацепления: $\psi - \varphi_1 = 160^\circ 48' 50''$, $v = 38^\circ 48'$, $\vartheta = 5^\circ 04' 10''$, $x = -r_n = -56,00$ мм, $y = -111,3$ мм; для нижней правой узловой линии

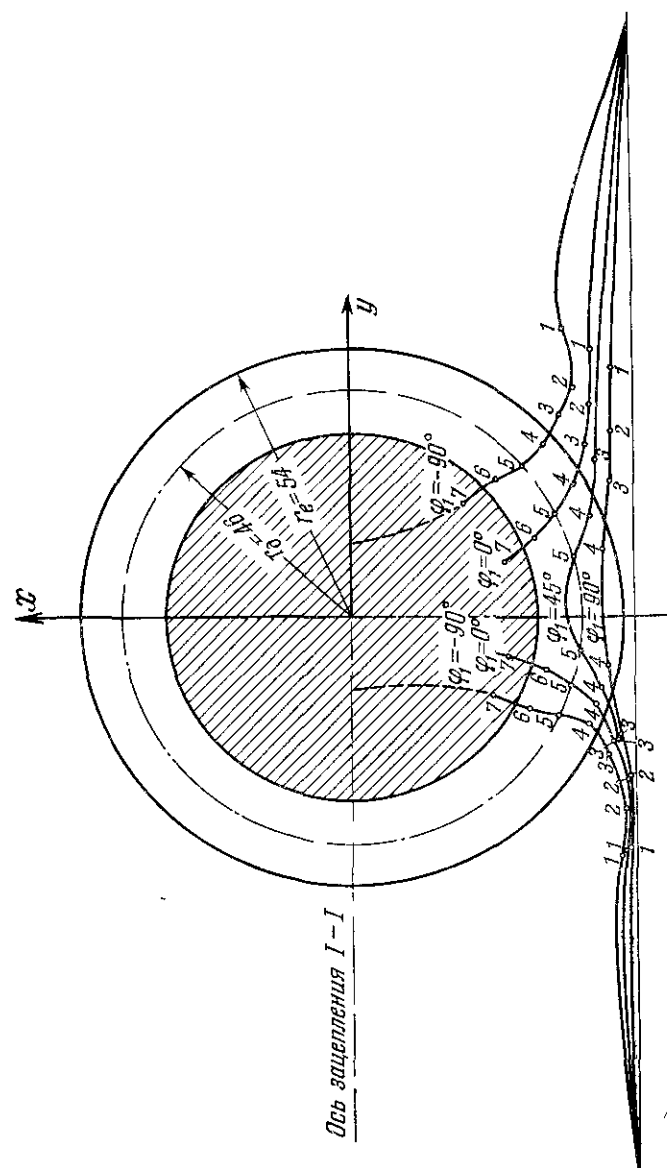


Рис. 240.

зацепления: $\psi - \varphi_1 = 202^\circ 24' 10''$, $\nu = -36^\circ 38' 50''$, $\theta = -5^\circ 42' 40''$,
 $x = -r_H = -56,00$ мм, $y = 108,4$ мм.

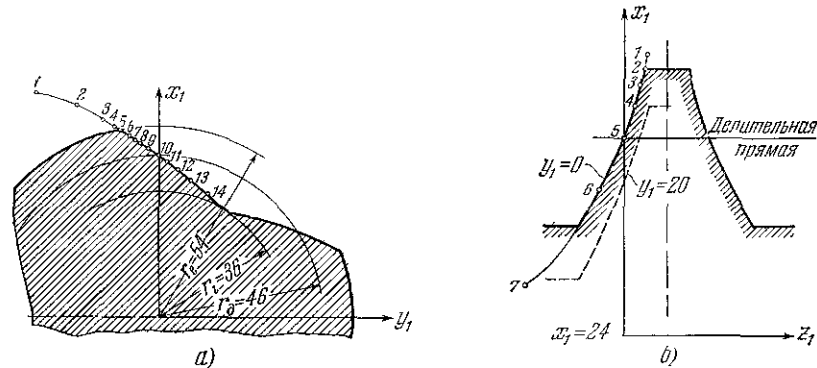


Рис. 241.

На рис. 241, а изображен торцовый профиль червяка, а на рис. 241, б — осевой профиль червяка ($y_1 = 0$) и профиль, полученный пересечением его поверхности плоскостью $y_1 = 20$ мм.

§ 89. Червячные передачи с шлифованными червяками вогнутого профиля (вариант II)

Способ шлифования. Способ шлифования червяков с вогнутым профилем, применяемый в ФРГ, имеет определенные недостатки. Линия контакта поверхностей шлифовального диска и червяка является пространственной кривой, поверхность червяка, образуемая в результате ее винтового движения, выражается сложными уравнениями, что затрудняет анализ и выбор наиболее выгодных параметров зацепления. Вследствие изменения диаметра шлифовального диска после переточек изменяется величина межосевого расстояния A_H , что приводит к изменению образуемой поверхности витков червяка. Форма части линий контакта в червячной передаче оказывается недостаточно благоприятной.

Автором книги предложен способ шлифования червяков [182] с вогнутым профилем, имеющий следующую отличительную особенность: инструмент, как и в варианте ФРГ, является тороидальным, но линия контакта поверхностей червяка и инструмента является не пространственной, а плоской кривой. Одно из сечений червяка совпадает с осевым профилем инструмента, очерченным по дуге окружности. Преимуществом нового способа шлифования червяков является и то, что уменьшение диаметра шлифовального диска после его переточек не приводит к изменениям поверхности витков. Поверхность витков червяка варианта II выражается простыми уравнениями, что упрощает анализ, проектирование и геометрический расчет червячной передачи.

При указанном способе шлифования можно улучшить форму линий контакта, но нужно учитывать, что этого можно добиться, если мириться с подрезанием зубцов червячного колеса. Для полного сопоставления преимуществ и недостатков червячных передач обоих вариантов необходимо провести подробные экспериментальные исследования.

Рассмотрим условия, при которых осевой профиль шлифовального диска является линией контакта поверхностей круга и червяка. В § 31 было доказано, что при обработке винтовой поверхности дисковым инструментом с боковой поверхностью в виде поверхности вращения существуют

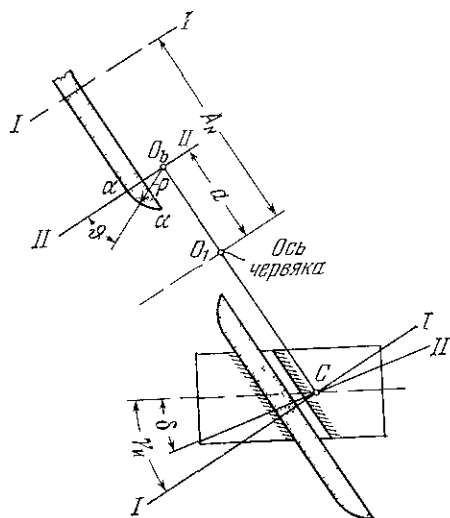


Рис. 242.

две так называемые оси зацепления — прямые линии, которые пересекаются нормалью в точках касания поверхностей инструмента и червяка. Одной из таких прямых является ось $I-I$ инструментальной поверхности вращения, а другой — прямая $II-II$, находящаяся на расстоянии a от оси червяка и пересекающая линию кратчайшего расстояния между осями круга и червяка. Прямая $II-II$ составляет с осью червяка угол δ (рис. 242) и находится на расстоянии a от оси. Координаты оси зацепления $II-II$ определяются из следующих уравнений:

$$a = \frac{p}{\operatorname{tg} \gamma_n}, \quad (89.1)$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \left(\frac{p}{A_n} \right). \quad (89.2)$$

В отличие от общепринятых значений параметров установки диска $\gamma_n \neq \lambda_d$; выбор угла γ_n перекрещивания осей круга и червяка и связанного с γ_n параметра a будет рассмотрен ниже.

Главная особенность предлагаемого способа шлифования заключается в том, что центр O_b осевого профиля $\alpha-\alpha$ шлифовального диска располагается на оси зацепления $II-II$. Для этого шлифовальный диск нужно установить так, чтобы центр дугового профиля $\alpha-\alpha$ оказался на линии $O_b O_1$ кратчайшего расстояния между осями червяка и диска, на расстоянии a от оси червяка (рис. 242). Очевидно, что при такой установке диска все нормали к дуговому профилю $\alpha-\alpha$ будут пересекать обе оси зацепления и этот профиль окажется линией контакта поверхностей инструмента и червяка.

Свяжем с инструментом систему координат S_n ; система x_b, y_b, z_b является вспомогательной (рис. 243). В отличие от случая шлифования червяка варианта I оси x_b и y_b системы координат x_b, y_b, z_b находятся в плоскости $z_n = 0$, и параметр $b = 0$ (ср. рис. 238 и 243). Относительное движение червяка варианта II при шлифовании то же, что и в случае шлифования червяка варианта I.

Положив в уравнениях (88.6) параметр $b = 0$, получим уравнение поверхности шлифовального круга

$$r_n = (\rho \sin \vartheta + d) (-\cos v i_n + \sin v j_n) + \rho \cos \vartheta k_n. \quad (89.3)$$

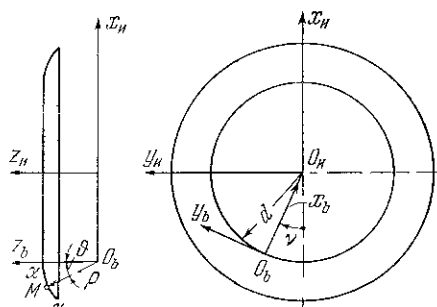


Рис. 243.

Уравнение связи между параметрами получим из уравнения (88.9), в которое подставим (89.3) и примем одновременно: $b=0$, $d=A_n-a$, $\operatorname{tg} \gamma_n = p/a$.

В результате найдем

$$(A_n - a)(1 - \cos v) - (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin \vartheta \sin v = 0. \quad (89.4)$$

Уравнение (89.4) удовлетворяется при следующих условиях: 1) при $v=0$ и любом значении ϑ ; 2) при связи значений ϑ и v в таком виде:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A_n - a}{A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (89.5)$$

Это означает, что на поверхности круга будут существовать две контактные линии. В первом случае при $v=0$ контактная линия является дугой окружности и совпадает с осевым профилем $\alpha - \alpha$ шлифовального круга; во втором случае контактная линия находится над червяком, вне его рабочей части, и поэтому мы ее исключим из рассмотрения.

При $v=0$ орт нормали в точках контактной линии в системе S_n , связанной с инструментом, определяется уравнением

$$e_n = \sin \vartheta i_n - \cos \vartheta k_n. \quad (89.6)$$

Интересной особенностью линии контакта поверхностей круга и червяка является то, что все нормали в точках этой линии располагаются в одной плоскости.

Шлифование червяков вогнутого профиля может быть осуществлено на червячно-шлифовальных станках различных типов. Расчет параметров установки шлифовального диска на станке изложен в работе [190], выполненной автором совместно с И. П. Бернацким.

Уравнения поверхности витков червяка. Для того чтобы получить уравнения поверхности витков червяка варианта II, положим в выражениях (88.2) для x_1 , y_1 , z_1 $v=0$, $b=0$ и $d=A_n-a$.

Поверхность витков червяка определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\rho (\sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma_n \cos \vartheta \sin \psi) + a \cos \psi, \\ y_1 &= \rho (\sin \vartheta \sin \psi - \sin \gamma_n \cos \vartheta \cos \psi) - a \sin \psi, \\ z_1 &= \rho \cos \gamma_n \cos \vartheta - p\psi. \end{aligned} \right\} \quad (89.7)$$

Положив в уравнениях (88.13) для проекций орта нормали $v=0$, получим выражения проекций орта нормали для поверхности червяка варианта II:

$$\left. \begin{aligned} e_{x1} &= \sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma_n \cos \vartheta \sin \psi, \\ e_{y1} &= -\sin \vartheta \sin \psi + \sin \gamma_n \cos \vartheta \cos \psi, \\ e_{z1} &= -\cos \gamma_n \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (89.8)$$

Уравнения поверхности витков червяка и орта нормали в неподвижной системе координат x , y , z получим из выражений (88.14) и (88.15), положив $v=0$, $b=0$, $d=A_n-a$:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\rho [\sin \vartheta \cos (\psi - \varphi_1) + \sin \gamma_n \cos \vartheta \sin (\psi - \varphi_1)] + a \cos (\psi - \varphi_1), \\ y &= \rho [\sin \vartheta \sin (\psi - \varphi_1) - \sin \gamma_n \cos \vartheta \cos (\psi - \varphi_1)] - a \sin (\psi - \varphi_1), \\ z &= \rho \cos \gamma_n \cos \vartheta - p\psi, \end{aligned} \right\} \quad (89.9)$$

где φ_1 — угол поворота червяка вокруг оси z_1 при зацеплении с червячным колесом,

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \sin \vartheta \cos (\psi - \varphi_1) + \sin \gamma_n \cos \vartheta \sin (\psi - \varphi_1), \\ e_y &= -\sin \vartheta \sin (\psi - \varphi_1) + \sin \gamma_n \cos \vartheta \cos (\psi - \varphi_1), \\ e_z &= -\cos \gamma_n \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (89.10)$$

Уравнения торцового профиля червяка получим из выражений (88.16) при указанных выше условиях

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{\rho \cos \gamma_n \cos \vartheta}{p}, \\ r &= \sqrt{(a - \rho \sin \vartheta)^2 - (\rho \sin \gamma_n \cos \vartheta)^2}, \\ \vartheta &= \operatorname{arctg} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\rho (\sin \vartheta \sin \psi - \sin \gamma_n \cos \vartheta \cos \psi) - a \sin \psi}{-\rho (\sin \vartheta \cos \psi - \sin \gamma_n \cos \vartheta \sin \psi) + a \cos \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (89.11)$$

При выводе угла $\mu = \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{dr/d\vartheta} \right)$ учтем, что

$$\left. \begin{aligned} d\vartheta &= \frac{x_1 dy_1 - y_1 dx_1}{r^2}, \\ dr &= \frac{\rho \cos \vartheta (\rho \cos^2 \gamma_n \sin \vartheta - a)}{r} d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (89.12)$$

После преобразований получим

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\frac{r^2}{\rho} \sin \vartheta \cos \gamma_n - (a \sin \vartheta - \rho) \sin \gamma_n}{(\rho \cos^2 \gamma_n \sin \vartheta - a) \cos \vartheta}. \quad (89.13)$$

При исследовании условий отсутствия подрезания зубцов червячного колеса нам понадобится выражение производной $d\mu/dr$. Продифференцируем уравнение (89.13) и подставим в него выражение $d\vartheta/dr$, которое определим на основании уравнения (89.12). После преобразований получим

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{r \cos^2 \mu}{p (\rho \cos^2 \gamma_n \sin \vartheta - a) \cos \vartheta} \left[2 \sin \vartheta \cos \gamma_n + \right. \\ \left. + \frac{r^2 \cos \gamma_n + a p \sin \gamma_n - p \operatorname{tg} \mu (a \sin \vartheta + \rho \cos^2 \gamma_n \cos 2\vartheta)}{\rho \cos \vartheta (\rho \cos^2 \gamma_n \sin \vartheta - a)} \right]. \quad (89.14)$$

Узловые линии зацепления. Ограничимся случаем ортогональной червячной передачи ($\gamma = 90^\circ$). Предполагается, что червяк правый.

Используя формулы (32.1) — (32.3), после преобразований получим

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin (\psi - \varphi_1) = \pm 1, \quad x = 0, \quad y = \pm (\rho - a). \quad (89.15)$$

Для определения нижних узловых линий зацепления воспользуемся формулами (32.4) — (32.6). После преобразований получим

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\operatorname{tg} (\psi - \varphi_1) \sin \gamma_n, \quad \cos (\psi - \varphi_1) = -\operatorname{tg} \gamma_n \operatorname{ctg} \lambda_n. \quad (89.16)$$

При таких значениях параметров согласно (89.9)

$$x = -r_n, \quad y = \frac{\rho p}{\sqrt{p^2 + r_n^2}} \mp \sqrt{a^2 - r_n^2}. \quad (89.17)$$

Линии контакта. Для определения линий контакта поверхностей зубцов червяка и колеса нужно совместно рассмотреть уравнения (89.9)

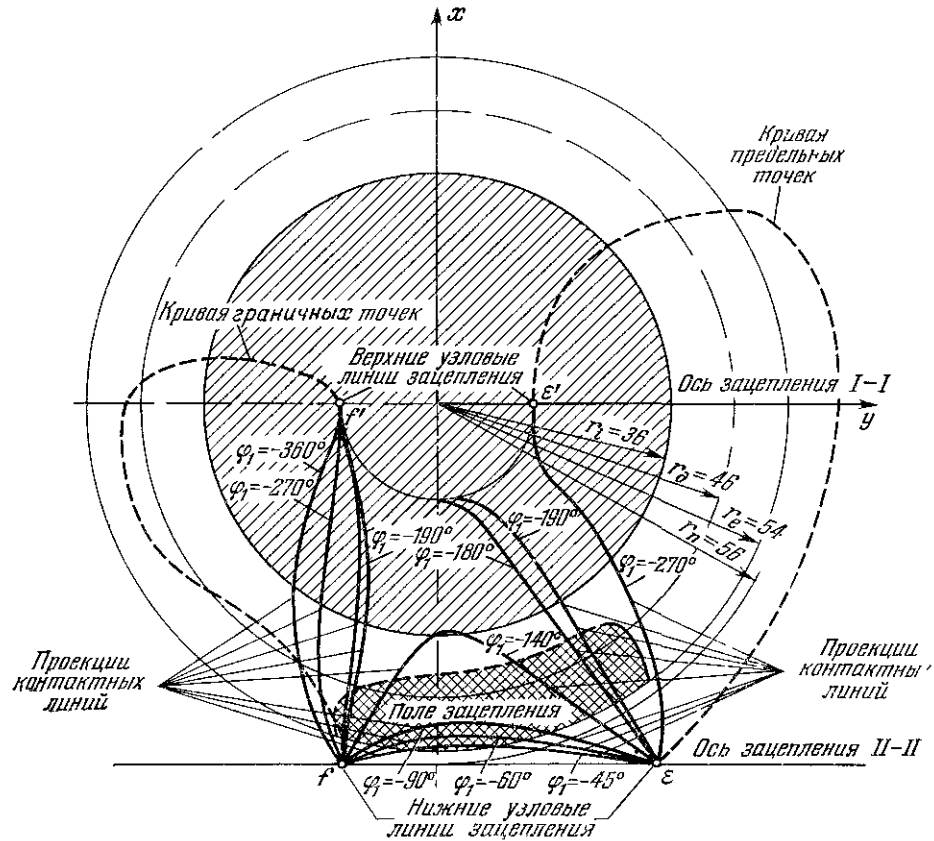


Рис. 244.

семейства поверхностей червяка и уравнение зацепления (30.22). В результате получим следующее уравнение связи между параметрами ϑ , ψ и φ_1 для точек линий контакта:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \left[a + \frac{r_n}{\cos(\psi - \varphi_1)} \right] \frac{\cos \gamma_n}{r\psi} - \sin \gamma_n \operatorname{tg}(\psi - \varphi_1). \quad (89.18)$$

При вычислении координат линий контакта необходимо, фиксируя φ_1 , задаваться значениями ψ и определять ϑ из формулы (89.18). Подставив связанные таким образом значения φ_1 , ψ и ϑ в выражения (89.9), определим координаты точек линий контакта.

На форме линий контакта существенно сказывается расположение узловых линий зацепления. Значение y для нижней левой узловой линии зацепления определяет область поля зацепления, свободную от подрезания (рекомендации по выбору значений y приведены ниже).

На рис. 244 изображены линии контакта, поле зацепления и кривая граничных точек; напомним, что кривая граничных точек — геометрическое место точек на поверхности червяка, образующих особые точки

на поверхности червячного колеса. Графики рис. 244 построены для червячной передачи со следующими параметрами:

Число заходов червяка $z_1 = 3$, радиус делительного цилиндра $r_d = 46$ мм, число зубцов червячного колеса $z_2 = 31$, модуль $m_{oc1} = 8$ мм, коэффициент коррекции $\xi = 1,25$. Поверхность червяка шлифуется торoidalным инструментом; радиус дугового профиля инструмента в осевом сечении $\rho = 46$ мм, угол перекрещивания осей инструмента и червяка при шлифовании $\gamma_n = 11^\circ 07' 50''$, параметры установки инструмента:

$$a = \frac{p}{\operatorname{tg} \gamma_n} = 61 \text{ мм}, \quad b = 0.$$

Как уже упоминалось выше, червячная передача с вогнутым профилем червяка должна проектироваться как скорректированная передача. Рекомендуется назначать коэффициент смещения $\xi = 1,25 \div 1,3$. Для назначения ρ рекомендуется воспользоваться следующим уравнением:

$$\rho^2 \left(\frac{p^2}{r_n^2 + p^2} - \sin^2 \alpha_n \right) - 2\rho \left(\frac{yp}{\sqrt{r_n^2 + p^2}} + r_d \sin \alpha_n \right) + y^2 + r_n^2 - r_d^2 = 0. \quad (89.19)$$

где y — координата, определяющая положение нижней узловой линии зацепления.

Уравнение (89.19) можно получить из выражения (89.17) для y , если учесть, что

$$a = r_d + \rho \sin \alpha_n. \quad (89.20)$$

Из уравнения (89.19) можно определить значение ρ , если задаться значением y для нижней узловой линии зацепления. Рекомендуется назначать

$$\frac{y}{m} = -nq,$$

где $q = 2r_d/m$, $n = 0,25$ при $\xi \geq 1$; $n = 0,3$ при $\xi < 1$.

Из уравнения (89.19) следует, что оно может существовать при

$$\left(\frac{yp}{\sqrt{r_n^2 + p^2}} + r_d \sin \alpha_n \right)^2 - 4 \left(\frac{p^2}{r_n^2 + p^2} - \sin^2 \alpha_n \right) (y^2 + r_n^2 - r_d^2) > 0. \quad (89.21)$$

Это неравенство соблюдается при

$$\frac{p^2}{r_n^2 + p^2} < \sin^2 \alpha_n. \quad (89.22)$$

Из неравенства (89.22) вытекает, что при проектировании червячной передачи на величину q должно быть наложено следующее ограничение:

$$q \geq 2 \left(\frac{p}{m} \operatorname{ctg} \alpha_n - \xi \right). \quad (89.23)$$

Параметры a и γ_n установки шлифовального диска определяются соответственно из уравнений (89.20) и (89.1).

Глава XII

Расчет профиля инструмента для обработки цилиндрических червяков и червячных колес

§ 90. Профили летучих резцов

При мелкосерийном производстве нарезание червячных колес зачастую производится посредством так называемых резцов-летучек. Применение таких резцов позволяет отказаться от изготовления сложных в производстве червячных фрез; однако по производительности резцы-летучки значительно уступают червячным фрезам.

При установке резца-летучки на фрезерной оправке для создания одинаковых условий резания на обеих режущих кромках добиваются, чтобы плоскость режущих кромок была перпендикулярна направлению средней винтовой линии. Профиль резца-летучки должен совпадать с профилем сечения витков червяка плоскостью, перпендикулярной направлению средней винтовой линии.

Пусть уравнение поверхности витка червяка задано в двухпараметрической форме:

$$\mathbf{r}_1 = f_1(u, \vartheta) \mathbf{i}_1 + f_2(u, \vartheta) \mathbf{j}_1 + f_3(u, \vartheta) \mathbf{k}_1. \quad (90.1)$$

Присоединив к (90.1) уравнение секущей плоскости

$$y_1 = \pm z_1 \operatorname{tg} \lambda_{\mathbf{d}}^{\pm}, \quad (90.2)$$

получим уравнения профиля резца. Знак плюс в уравнении (90.2) соответствует правому направлению винтовой поверхности.

Для того чтобы получить симметрично расположенные профили для обеих сторон резца, начало координат системы S_1 нужно перенести по оси z_1 с тем, чтобы осью симметрии сечения витка плоскостью $y_1 = 0$ служила ось x_1 . Тогда x_1 явится и осью симметрии резца-летучки.

А. Конволютный червяк

Конволютная винтовая поверхность определяется уравнением (83.17). После переноса начала координат по оси z_1 на величину a_0 уравнения поверхности витка запишем так:

$$\mathbf{r}_1 = (\rho \cos \vartheta - u \cos \delta \sin \vartheta) \mathbf{i}_1 + (\rho \sin \vartheta + u \cos \delta \cos \vartheta) \mathbf{j}_1 + \\ + (p\vartheta - u \sin \delta + a_0) \mathbf{k}_1. \quad (90.3)$$

Сечение поверхности (90.3) плоскостью $y_1 = 0$ определится уравнениями:

$$u = -\rho \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \delta}, \quad x_1 = \frac{\rho}{\cos \vartheta}, \quad z_1 = p\vartheta + \rho \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \delta + a_0. \quad (90.4)$$

Величину a_0 найдем из условия, что при $x_{1B} = -r_d$, $z_{1B} = s_{oc}/2$, где s_{oc} — осевая толщина витка на делительном цилиндре. Основываясь на уравнениях (90.4), найдем

$$\cos \vartheta_B = -\frac{\rho}{r_d}, \quad \vartheta_B = \frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\rho}{r_d} \right),$$

$$a_0 = \frac{s_{oc}}{2} - p \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\rho}{r_d} \right) + r_d \operatorname{tg} \delta \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_d^2}}.$$

Уравнения боковой поверхности витка конволютного червяка представим теперь в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \vartheta - u \cos \delta \sin \vartheta, \\ y_1 &= \rho \sin \vartheta + u \cos \delta \cos \vartheta, \\ z_1 &= p \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho}{r_d} \right) - u \sin \delta + \\ &\quad + \frac{s_{oc}}{2} + r_d \operatorname{tg} \delta \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_d^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (90.5)$$

Рассмотрев уравнения (90.5) совместно с уравнением секущей плоскости

$$y_1 = z_1 \operatorname{tg} \lambda_d,$$

получим

$$u \cos \delta = \frac{p \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho}{r_d} \right) + \frac{s_{oc}}{2} + r_d \operatorname{tg} \delta \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_d^2}} - \rho \sin \vartheta \operatorname{ctg} \lambda_d}{\operatorname{tg} \delta + \cos \vartheta \operatorname{ctg} \lambda_d}.$$

Введем обозначение $y_1^* = \sqrt{y_1^2 + z_1^2} = y_1 / \sin \lambda_d$.

Профиль резца-летучки определится следующими уравнениями:

$$u \cos \delta = \frac{p \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho}{r_d} \right) + \frac{s_{oc}}{2} + r_d \operatorname{tg} \delta \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_d^2}} - \rho \operatorname{ctg} \lambda_d \sin \vartheta}{\operatorname{tg} \delta + \cos \vartheta \operatorname{ctg} \lambda_d}, \quad (90.6)$$

$$x_1 = \rho \cos \vartheta - u \cos \delta \sin \vartheta, \quad y_1^* = \frac{\rho \sin \vartheta + u \cos \delta \cos \vartheta}{\sin \lambda_d}.$$

При вычислениях нужно задаваться такими значениями ϑ , чтобы модуль радиуса-вектора r точки поверхности изменялся в пределах $r_e \gg r \gg r_i$; при этом

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\rho^2 + u^2 \cos^2 \delta}. \quad (90.7)$$

За начальное значение можно выбрать $\vartheta = \pi/2$.

В. Эвольвентный червяк

Уравнения эвольвентной винтовой поверхности, у которой осью симметрии сечения витка плоскостью $y_1 = 0$ явится ось x_1 , имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \cos \vartheta + u \cos \lambda_0 \sin \vartheta, \\ y_1 &= r_0 \sin \vartheta - u \cos \lambda_0 \cos \vartheta, \\ z_1 &= p (\vartheta - \pi + \operatorname{inv} \alpha_{s_d}) - u \sin \lambda_0 + \frac{s_{oc}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (90.8)$$

Профиль резца-летучки определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u \cos \lambda_0 &= \frac{p(\vartheta - \pi + \operatorname{inv} \alpha_{sd}) + \frac{s_{oc}}{2} - r_0 \operatorname{ctg} \lambda_d \sin \vartheta}{\operatorname{tg} \lambda_0 - \cos \vartheta \operatorname{ctg} \lambda_d}, \\ x_1 &= r_0 \cos \vartheta + u \cos \lambda_0 \sin \vartheta, \quad y_1^* = \frac{r_0 \sin \vartheta - u \cos \lambda_0 \cos \vartheta}{\sin \lambda_d}. \end{aligned} \right\} \quad (90.9)$$

При вычислениях по уравнениям (90.9) нужно задаваться такими значениями ϑ , чтобы модуль радиуса-вектора $r = \sqrt{r_0^2 + u^2 \cos^2 \lambda_0}$ находился в пределах

$$r_e \geq r \geq r_i.$$

С. Архимедов червяк

Уравнения архимедовой винтовой поверхности, у которой осью симметрии сечения витка плоскостью $y_1 = 0$ является ось x_1 , представим в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u \cos \alpha_n \cos \vartheta, \quad y_1 = u \cos \alpha_n \sin \vartheta, \\ z_1 &= p(\vartheta - \pi) - u \sin \alpha_n + r_d \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{s_{oc}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (90.10)$$

Расчет профиля резца летучки должен быть выполнен по следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} u \cos \alpha_n &= \frac{p(\vartheta - \pi) + \frac{s_{oc}}{2} + r_d \operatorname{tg} \alpha_n}{\operatorname{tg} \alpha_n + \sin \vartheta \operatorname{ctg} \lambda_d}, \\ x_1 &= u \cos \alpha_n \cos \vartheta, \quad y_1^* = \frac{u \cos \alpha_n \sin \vartheta}{\sin \lambda_d}. \end{aligned} \right\} \quad (90.11)$$

Значения ϑ нужно выбирать в таких пределах, чтобы удовлетворить неравенству

$$r_e \geq u \cos \alpha_n \geq r_i.$$

Д. Червяк, обрабатываемый дисковым коническим инструментом

Поверхность витков червяка определяется уравнениями (87.12). При $\gamma_n = \lambda_d$ имеем

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \alpha_n - (A_n \sin \alpha_n \operatorname{ctg} \lambda_d + p \sin \alpha_n) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{(A_n - r_d) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta}, \\ x_1 &= u (\cos \alpha_n \cos \vartheta \cos \psi + \cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta \sin \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \lambda_d \sin \psi) + a \sin \lambda_d \sin \psi + A_n \cos \psi, \\ y_1 &= u (-\cos \alpha_n \cos \vartheta \sin \psi + \cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta \cos \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \lambda_d \cos \psi) + a \sin \lambda_d \cos \psi - A_n \sin \psi, \\ z_1 &= u (\sin \alpha_n \cos \lambda_d + \cos \alpha_n \sin \lambda_d \sin \vartheta) - p\psi - a \cos \lambda_d. \end{aligned} \right\} \quad (90.12)$$

Осью симметрии осевого сечения *впадины* червяка является ось x_1 , так как при обработке червяка плоскость симметрии инструмента проходит через эту ось. Для того чтобы получить профиль резца-летучки как нормальное сечение *витка*, рассечем поверхность витка плоскостью, перпендикулярной направлению средней винтовой линии на делительном цилиндре

червяка и проведенной через точку $M(r_d, 0, t_{oc}/2)$, где $t_{oc} = m\pi$ — осевой шаг червяка (рис. 245).

Уравнение секущей плоскости

$$y_1 = -\left(z_1 + \frac{m\pi}{2}\right) \operatorname{tg} \lambda_d. \quad (90.13)$$

При совместном рассмотрении уравнений (90.12) и (90.13) получим

$$(u \cos \alpha_n \cos \vartheta + A_n) \sin \psi - [u (\cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta - \sin \alpha_n \sin \lambda_d) + a \sin \lambda_d] \cos \psi + p \psi \operatorname{tg} \lambda_d = (u \sin \alpha_n - a) \sin \lambda_d + u \cos \alpha_n \sin \vartheta \sin \lambda_d \operatorname{tg} \lambda_d + \frac{m\pi}{2} \operatorname{tg} \lambda_d. \quad (90.14)$$

Это уравнение выражает трансцендентную зависимость ψ от параметров u и ϑ . При известных значениях u и ϑ соответствующее значение ψ будет найдено в результате решения (по методу последовательных приближений) уравнения (90.14).

Обозначим левую часть уравнения (90.14), в которой содержатся члены, зависящие от ψ , через $F_1(u, \vartheta, \psi)$, а правую часть, зависящую только от u и ϑ , обозначим через $F_2(u, \vartheta)$. Решение трансцендентного уравнения (90.14) заключается в том, чтобы при известных значениях u и ϑ определить такое значение ψ , при котором

$$F_1(u, \vartheta, \psi) = F_2(u, \vartheta).$$

Пусть при значении $\psi = \psi_1$ возникает невязка

$$dc = F_2(u, \vartheta) - F_1(u, \vartheta, \psi_1).$$

Для уменьшения этой невязки нужно задаться значением $\psi_2 = \psi_1 + d\psi$, где

$$d\psi = \frac{dc}{\frac{\partial F_1}{\partial \psi}}.$$

После преобразований, отождествив дифференциалы с соответствующими конечно-малыми приращениями, найдем, что

$$\Delta \psi = \frac{\Delta c}{E \cos \psi + B \sin \psi + D}, \quad (90.15)$$

где

$$\begin{aligned} E &= u \cos \alpha_n \cos \vartheta + A_n, \\ B &= u (\cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta - \sin \alpha_n \sin \lambda_d) - a \sin \lambda_d, \\ D &= p \operatorname{tg} \lambda_d. \end{aligned}$$

Приведем в окончательном виде уравнения, необходимые для определения профиля резца-летучки. Предварительно введем обозначение

$$z_1^* = \frac{z_1 + \frac{m\pi}{2}}{\cos \lambda_d} = u (\sin \alpha_n + \cos \alpha_n \operatorname{tg} \lambda_d \sin \vartheta) - \frac{p}{\cos \lambda_d} \psi - a + \frac{m\pi}{2 \cos \lambda_d}.$$

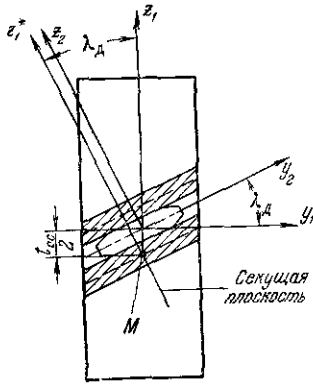


Рис. 245.

Профиль резца-летучки определится следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \alpha_n - (A_n \sin \alpha_n \operatorname{tg} \lambda_d + p \sin \alpha_n) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{(A_n - r_d) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta}, \\ (u \cos \alpha_n \cos \vartheta + A_n) \sin \psi &- \\ - [u (\cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta - \sin \alpha_n \sin \lambda_d) + a \sin \lambda_d] \cos \psi + p \operatorname{tg} \lambda_d &= \\ = (u \sin \alpha_n - a) \sin \lambda_d + u \cos \alpha_n \sin \vartheta \sin \lambda_d \operatorname{tg} \lambda_d + \frac{m\pi}{2} \operatorname{tg} \lambda_d, \\ \Delta \psi &= \frac{\Delta c}{E \cos \psi + B \sin \psi + D}, \\ \text{где } E &= u \cos \alpha_n \cos \vartheta + A_n, \\ B &= u (\cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta - \sin \alpha_n \sin \lambda_d) + a \sin \lambda_d, \\ D &= p \operatorname{tg} \lambda_d, \\ x_1 &= u (\cos \alpha_n \cos \vartheta \cos \psi + \cos \alpha_n \cos \lambda_d \sin \vartheta \sin \psi - \\ &\quad - \sin \alpha_n \sin \lambda_d \sin \psi) + a \sin \lambda_d \sin \psi + A_n \cos \psi, \\ z_1^* &= u (\sin \alpha_n + \cos \alpha_n \operatorname{tg} \lambda_d \sin \vartheta) - \frac{p}{\cos \lambda_d} \psi - a + \frac{m\pi}{2 \cos \lambda_d}. \end{aligned} \right\} \quad (90.16)$$

При вычислениях нужно действовать в таком порядке: 1) задаться значением ϑ и определить u из первого уравнения системы (90.16); 2) найти ψ из второго уравнения, решая его по методу последовательных приближений; для уменьшения числа приближений воспользоваться связью между невязкой Δc и приращением $\Delta \psi$, выражаемой третьим уравнением; 3) определить x_1 и z_1^* из четвертого и пятого уравнений системы (90.16). В качестве исходного целесообразно выбрать значение $\vartheta = 180^\circ$, при котором

$$u = a \sin \alpha_n + (A_n - r_d) \cos \alpha_n. \quad (90.17)$$

Значение ψ при $\vartheta = 180^\circ$ определяется из приближенной зависимости

$$\psi = \frac{\frac{m\pi}{2} \operatorname{tg} \lambda_d}{p \operatorname{tg} \lambda_d - u \cos \alpha_n + A_n}. \quad (90.18)$$

Выражение (90.18) можно получить из второго уравнения системы (90.16), приняв, что $\vartheta = 180^\circ$ и в силу малости ψ

$$\sin \psi \approx \psi, \quad \cos \psi \approx 1.$$

Согласно уравнению (87.15)

$$a = (A_n - r_d) \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{c_{\text{фр}}}{2} = (A_n - r_d) \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{m\pi}{4} \cos \lambda_d.$$

После преобразований уравнение (90.18) представим в таком виде:

$$\psi = \frac{\operatorname{tg} \lambda_d}{2 \frac{z_1}{\pi \sin 2\lambda_d} - \frac{\cos \lambda_d \sin 2\alpha_n}{2}}, \quad (90.19)$$

где z_1 — число заходов червяка.

Значения ϑ нужно задавать в таких пределах, чтобы

$$r_e \gg r \gg r_i,$$

где r — модуль радиуса-вектора в поперечном сечении:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + (z_1^* \sin \lambda)^2}.$$

Е. Червяк, обрабатываемый торoidalным инструментом

Расчет профиля резца-летучки рассмотрим применительно к обеим разновидностям червячной передачи с вогнутым профилем червяка.

1°. Приведем уравнения для расчета профиля резца-летучки для червячной передачи варианта I, предполагая, что резец устанавливается: а) в осевой плоскости червяка, б) перпендикулярно направлению винтовой линии на делительном цилиндре. Преобразуем уравнения (88.12) поверхности витка так, чтобы ось x_1 стала осью симметрии сечения поверхности витка червяка плоскостью $y_1 = 0$. Перенесем для этого начало системы координат S_1 на величину a_0 и учтем, что при $x_1 = r_d$ должно быть (рис. 246)

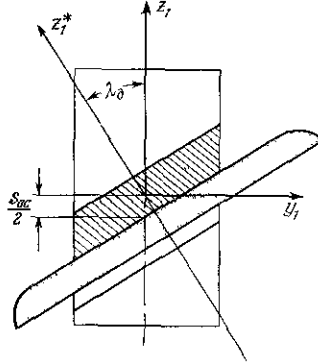


Рис. 246.

$$z_1 = -\frac{s_{oc}}{2},$$

где s_{oc} — осевая толщина витка на расстоянии r_d от оси червяка.

Заметим также, что при $y_1 = 0$ и $x_1 = r_d$ на основании уравнений (88.12)

$$\begin{aligned} x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi &= r_d \sin \psi = \\ &= (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \cos \gamma_n - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n, \end{aligned} \quad (90.20)$$

$$\begin{aligned} x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi &= r_d \cos \psi = \\ &= A_n - (\rho \sin \vartheta + d) \cos v. \end{aligned} \quad (90.21)$$

После преобразований получим следующую систему уравнений для определения a_0 :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos v}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin v}, & (a) \\ \cos \psi &= \frac{A_n - (\rho \sin \vartheta + d) \cos v}{r_d}, & (b) \\ \sin \psi &= \frac{(\rho \sin \vartheta + d) \sin v \cos \gamma_n - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n}{r_d}, & (c) \\ a_0 &= -\frac{s_{oc}}{2} - (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \cos \gamma_n - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p \psi. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (90.22)$$

Уравнения (90.22) позволяют определить величину сдвига начала координат, в результате которого ось x_1 станет осью симметрии сечения витка. Уравнения (90.22a), (90.22b) и (90.22c) служат для определения системы значений параметров v , ϑ и ψ , удовлетворяющих этому условию; эти условия после преобразований можно представить и в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos v}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin v}, & (a) \\ r_d^2 &= [A_n - (\rho \sin \vartheta + d) \cos v]^2 + \\ &\quad + [(\rho \sin \vartheta + d) \sin v \cos \gamma_n - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n]^2, & (b) \\ \cos \psi &= \frac{A_n - (\rho \sin \vartheta + d) \cos v}{r_d}, & (c) \\ a_0 &= -\frac{s_{oc1}}{2} - (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \gamma_n - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p \psi. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (90.23)$$

Расчет по уравнениям (90.23) должен быть выполнен в такой последовательности. Сначала в результате решения по методу последовательных приближений системы уравнений (90.23a) и (90.23b) находится совокупность значений параметров v и ϑ , затем из уравнения (90.23c) находится значение ψ , а из уравнения (90.23d) — значение a_0 .

После определения a_0 можно перейти к расчету профиля резца-летучки, совпадающего с профилем сечения поверхности витка червяка плоскостью $y_1 = 0$. Присоединив к уравнениям (88.12) поверхности витка червяка уравнение $y_1 = 0$, получим следующие формулы для расчета профиля резца-летучки:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos v}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin v}, & (a) \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{(\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n - (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \cos \gamma_n}{(\rho \sin \vartheta + d) \cos v - A_n}, & (b) \\ x_1 &= \frac{A_n - (\rho \sin \vartheta + d) \cos v}{\cos \psi}, & (c) \\ z_1 &= (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \gamma_n + \\ &+ (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p\psi + a_0. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (90.24)$$

Значения v и связанные с ними значения ϑ и ψ нужно задавать в таких пределах, чтобы $r_i \leq x_1 \leq r_e$, где r_i и r_e — радиусы впадин и выступов червяка.

Перейдем теперь к расчету профиля шаблона и резца-летучки, устанавливаемых по нормальному сечению витка. Как и в предыдущем случае, предварительно должно быть определено значение a_0 сдвига начала координат S_1 , в результате которого ось x_1 станет осью симметрии сечения витка. Присоединив затем к уравнениям (88.12) поверхности червяка уравнение секущей плоскости, которое для правого червяка имеет вид (рис. 246)

$$y_1 = -z_1 \operatorname{tg} \lambda_n, \quad (90.25)$$

получим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{A_n - p \operatorname{ctg} \gamma_n - d \cos v}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + p) \sin v}, \\ (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \gamma_n \operatorname{tg} \lambda_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n \operatorname{tg} \lambda_n + a_0 \operatorname{tg} \lambda_n = \\ &= -(\rho \sin \vartheta + d) \cos v \sin \psi - (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \cos \psi \cos \gamma_n + \\ &+ (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n \cos \psi + A_n \sin \psi + p\psi \operatorname{tg} \lambda_n, \\ x_1 &= -(\rho \sin \vartheta + d) \cos v \cos \psi + (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \psi \cos \gamma_n - \\ &- (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n \sin \psi + A_n \cos \psi, \\ z_1^* &= \frac{z_1}{\cos \lambda_n} = \frac{(\rho \sin \vartheta + d) \sin v \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p\psi + a_0}{\cos \lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (90.26)$$

Координата z_1^* измеряется в секущей плоскости (рис. 246) — в плоскости нормального сечения витка.

При шлифовании червяков варианта I угол перекрещивания осей круга и червяка $\gamma_n = \lambda_n$. Подставим $\gamma_n = \lambda_n$ в уравнения (90.26) и учтем, что на основании уравнения (88.5)

$$A_n - r_n = d + \rho \sin a_n.$$

После преобразований, уравнения (90.26) представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{d(1 - \cos v) + \rho \sin a_n}{b \cos v + (A_n \operatorname{ctg} \lambda_d + p) \sin v}, & (a) \\ (\rho \cos \vartheta - b)(\cos \psi - 1) \sin \lambda_d - (\rho \sin \vartheta + d) \times \\ &\times [\sin v (\sin \lambda_d \operatorname{tg} \lambda_d + \cos \psi \cos \lambda_d) + \cos v \sin \psi] + \\ &+ A_n \sin \psi = (a_0 - p\psi) \operatorname{tg} \lambda_d, & (b) \\ x_1 &= (\rho \sin \vartheta + d)(\sin v \sin \psi \cos \lambda_d - \cos v \cos \psi) - \\ &- (\rho \cos \vartheta - b) \sin \lambda_d \sin \psi + A_n \cos \psi, & (c) \\ z_1^* &= (\rho \sin \vartheta + d) \sin v \operatorname{tg} \lambda_d + \rho \cos \vartheta - b - \frac{p\psi - a_0}{\cos \lambda_d}. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (90.27)$$

Последовательность вычислений по уравнениям (90.27) такова. Задаваясь v , из (90.27,а) определяем ϑ . Подставив ψ и ϑ в уравнение (90.27,б) и решив его по методу последовательных приближений, находим значение ψ . Подставив найденную совокупность значений v , ϑ и ψ в уравнения (90.27,с) и (90.27,д), вычисляем координаты x_1 и z_1^* точки профиля.

Значения v и связанные с ними значения ϑ и ψ нужно при вычислениях задавать в таких пределах, чтобы

$$r_i \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq r_e.$$

Так как

$$y_1^2 = z_1^2 \operatorname{tg}^2 \lambda_d = (z_1^*)^2 \sin^2 \lambda_d,$$

то

$$r_i \leq \sqrt{x_1^2 + (z_1^* \sin \lambda_d)^2} \leq r_e.$$

В промежутке значений от r_e до $r_e + 0,25m_{\text{ос}}$ профиль летучки должен быть очерчен дугой окружности, плавно сопрягающейся с рабочей частью профиля.

2°. Вывод уравнений для расчета профиля резца-летучки применительно к червячной передаче варианта II выполняется аналогичным образом. Эти уравнения можно также получить, приняв в зависимости, полученных для червячной передачи варианта I, $v = 0$, $b = 0$, $A_n = a + d$. В результате, для определения сдвига a_0 начала координат системы S_1 получим следующие формулы:

$$\rho^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \gamma_n - 2a\rho \sin \vartheta + a^2 + \rho^2 \sin^2 \gamma_n - r_d^2 = 0, \quad (90.28)$$

$$\cos \psi = \frac{a - \rho \sin \vartheta}{r_d}, \quad (90.29)$$

$$a_0 = -\frac{s_{\text{ос}}}{2} - \rho \cos \gamma_n \cos \vartheta + p\psi. \quad (90.30)$$

Расчет профиля резца-летучки, устанавливаемого по осевому сечению витка, должен быть выполнен по следующим уравнениям:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho \sin \gamma_n \cos \vartheta}{\rho \sin \vartheta - a}. \quad (90.31)$$

$$x_1 = -\frac{\rho \sin \gamma_n \cos \vartheta}{\sin \psi} = \frac{a - \rho \sin \vartheta}{\cos \psi}, \quad (90.32)$$

$$z_1 = \rho \cos \gamma_n \cos \vartheta - p\psi + a_0. \quad (90.33)$$

Последовательность вычислений по приведенным уравнениям такая: из уравнения (90.31), задаваясь ϑ , вычисляем соответствующие значения ψ .

Подставив связанные таким образом ϑ и ψ в уравнения (90.32) и (90.33), определяем искомые координаты x_1 и z_1 . Значения ϑ и ψ нужно задавать в таких пределах, чтобы

$$r_i \leq x_1 \leq r_e.$$

Для определения профиля резца, устанавливаемого перпендикулярно направлению винтовой линии на цилиндре радиуса r_d , нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\sin \vartheta \sin \psi + \cos \vartheta (\cos \gamma_n \operatorname{tg} \lambda_d - \sin \gamma_n \cos \psi) = \frac{a \sin \psi - (a_0 - p\psi) \operatorname{tg} \lambda_d}{\rho}, \quad (90.34)$$

$$x_1 = -\rho (\sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma_n \cos \vartheta \sin \psi) + a \cos \psi, \quad (90.35)$$

$$z_1^* = \frac{z_1}{\cos \lambda_d} = \frac{\rho \cos \gamma_n \cos \vartheta - p\psi + a_0}{\cos \lambda_d}. \quad (90.36)$$

Здесь z_1^* — координата, отсчитываемая в секущей плоскости (рис. 246).

При вычислениях по формуле (90.34) нужно задаваться значением ψ и находить соответствующее значение ϑ по методу последовательных приближений.

Обозначим левую часть уравнения (90.34) через $F(\vartheta, \psi)$, а правую — через $f(\psi)$. Пусть при фиксированном значении $\psi = \psi_1$ и значении $\vartheta = \vartheta_1$ возникает расхождение

$$\Delta c = f(\psi_1) - F(\vartheta_1, \psi_1).$$

Очевидно, что, придав значению ϑ_1 приращение $\Delta \vartheta$, можно добиться, чтобы

$$f(\psi_1) - \left[F(\vartheta_1, \psi_1) + \frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} \Delta \vartheta \right] \approx 0.$$

Отсюда найдем зависимость между расхождением Δc и поправкой $\Delta \vartheta$

$$\Delta \vartheta = -\frac{\Delta c}{\frac{\partial F}{\partial \vartheta_1}}. \quad (90.37)$$

При вычислениях значения ψ нужно задавать в таких пределах, чтобы

$$r_i \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq r_e.$$

Так как

$$y_1^2 = z_1^2 \operatorname{tg}^2 \lambda_d = (z_1^*)^2 \sin^2 \lambda_d,$$

то

$$r_i \leq \sqrt{x_1^2 + (z_1^* \sin \lambda_d)^2} \leq r_e. \quad (90.38)$$

§ 91. Профилирование пальцевых фрез

Обработка винтовых поверхностей постоянного шага пальцевой фрезой (рис. 247, а) получила достаточно широкое распространение. Таким образом обрабатываются шевронные эвольвентные колеса и червяки (архимедовы и эвольвентные).

Известен ряд работ: А. Н. Грубина и др. [50], Н. И. Колчина [121], И. А. Фрайфельда [247, 248], посвященных определению профиля пальцевых и дисковых фрез. Для решения этой задачи лучше всего воспользоваться следующей теоремой: *линия касания боковой поверхности витка изделия и сопряженной ей поверхности инструмента в случае, если последняя является поверхностью вращения, представляет совокупность*

таких точек поверхности, нормали в которых пересекают ось инструмента.

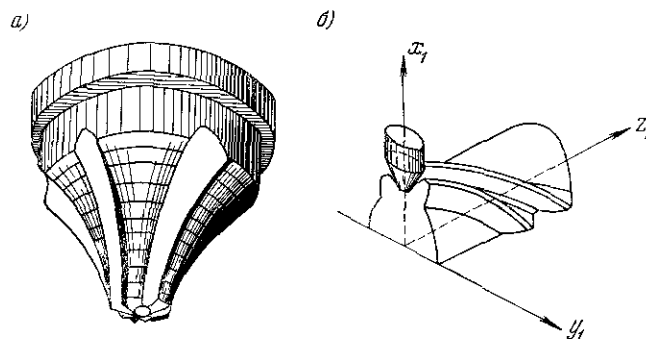


Рис. 247.

Пусть уравнения боковой поверхности витка червяка заданы в двухпараметрической форме:

$$\mathbf{r}_1 = f_1(u, \vartheta) \mathbf{i}_1 + f_2(u, \vartheta) \mathbf{j}_1 + f_3(u, \vartheta) \mathbf{k}_1. \quad (91.1)$$

Предполагается, что ось x_1 является осью симметрии впадины (рис. 247, б).

Представим себе, что во впадину червяка вложена пальцевая фреза, ось вращения которой совпадает с осью x_1 . Пусть фрезе сообщено вращение вокруг оси x_1 , в то время как червяк остается неподвижным. При вращении фрезы линия контакта поверхностей инструмента и червяка, являющаяся пространственной кривой, воспроизведет поверхность пальцевой фрезы.

Нормаль к боковой поверхности витка червяка определяется уравнениями

$$\frac{X_1 - x_1}{n_{x1}} = \frac{Y_1 - y_1}{n_{y1}} = \frac{Z_1 - z_1}{n_{z1}}. \quad (91.2)$$

В этих уравнениях x_1, y_1, z_1 — координаты точки поверхности, X_1, Y_1, Z_1 — координаты текущей точки нормали, n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} — проекции вектора нормали. Выберем в качестве текущей точки нормали точку пересечения ее с осью пальцевой фрезы с координатами $(X_1, 0, 0)$. Напомним, что согласно сформулированной выше теореме общая нормаль к поверхностям червяка и инструмента должна пересекать ось пальцевой фрезы, поскольку поверхность фрезы является поверхностью вращения.

Уравнения (91.2) представим в следующем виде:

$$\frac{X_1 - x_1}{n_{x1}} = -\frac{y_1}{n_{y1}} = -\frac{z_1}{n_{z1}}. \quad (91.3)$$

Используя последние два равенства системы (91.3), получим

$$y_1 = z_1 \frac{n_{y1}}{n_{z1}}. \quad (91.4)$$

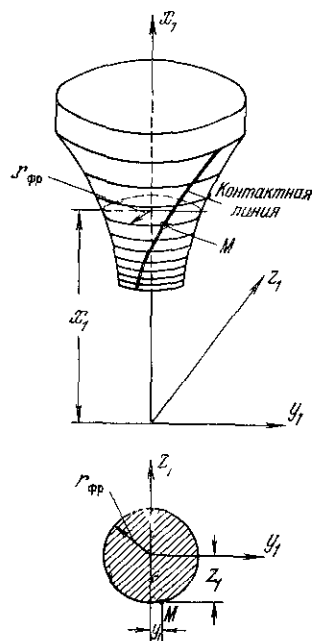


Рис. 248.

После подстановки в уравнение (91.4) выражений для y_1 , z_1 , n_{y1} , n_{z1} получим уравнение связи между параметрами u и ϑ в виде

$$F_1(u, \vartheta) = 0. \quad (91.5)$$

Линия контакта поверхностей червяка и инструмента определится уравнениями:

$$F_1(u, \vartheta) = 0, \quad x_1 = f_1(u, \vartheta), \quad y_1 = f_2(u, \vartheta), \quad z_1 = f_3(u, \vartheta). \quad (91.6)$$

Пусть x_1 , y_1 , z_1 — координаты текущей точки M контактной линии (рис. 248). Проведем через точку M секущую плоскость, перпендикулярную оси x_1 . Это сечение представит окружность радиуса $r_{\text{фр}}$, где

$$r_{\text{фр}} = \sqrt{y_1^2 + z_1^2} = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{n_{z1}}{n_{y1}}\right)^2} = z_1 \sqrt{1 + \left(\frac{n_{y1}}{n_{z1}}\right)^2}.$$

Профиль пальцевой фрезы определится уравнениями:

$$F_1(u, \vartheta) = 0, \quad x_1 = f_1(u, \vartheta), \quad r_{\text{фр}} = z_1 \sqrt{1 + \left(\frac{n_{y1}}{n_{z1}}\right)^2}. \quad (91.7)$$

Проиллюстрируем расчет профиля пальцевой фрезы применительно к случаю обработки эвольвентного червяка.

Эвольвентная винтовая поверхность в § 90 была ранее представлена уравнениями (90.8); при такой форме уравнений в сечении $y_1 = 0$ осью симметрии витка служит отрицательная ось x_1 . Для того чтобы в сечении $y_1 = 0$ осью симметрии уже не витка, а впадины явилась положительная ось x_1 , начало координат необходимо сместить по оси z_1 на величину $p\pi - \frac{t_{\text{ос}}}{2}$. Уравнения эвольвентной винтовой поверхности представим теперь в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \cos \vartheta + u \cos \lambda_0 \sin \vartheta, & y_1 &= r_0 \sin \vartheta - u \cos \lambda_0 \cos \vartheta, \\ z_1 &= p(\vartheta + \text{inv } \alpha_{\text{сд}}) - u \sin \lambda_0 - \frac{w_{\text{ос}}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (91.8)$$

где $w_{\text{ос}} = m\pi - s_{\text{ос}}$.

Орт нормали к эвольвентной винтовой поверхности был ранее представлен уравнением (85.2).

Уравнение (91.5) связи между параметрами u и ϑ в случае эвольвентной винтовой поверхности определится теперь так:

$$u = r_0 \cos \lambda_0 \tan \vartheta - p \sin \lambda_0 (\vartheta + \text{inv } \alpha_{\text{сд}}) - \frac{w_{\text{ос}}}{2} \sin \lambda_0. \quad (91.9)$$

С учетом выражения (91.9) после преобразований получим

$$z_1 = \left[p(\text{inv } \alpha_{\text{сд}} - \text{inv } \vartheta) - \frac{w_{\text{ос}}}{2} \right] \cos^2 \lambda_0,$$

где $\text{inv } \vartheta = \tan \vartheta - \vartheta$,

$$x_1 = \frac{r_0}{\cos \vartheta} + \left[p(\text{inv } \alpha_{\text{сд}} - \text{inv } \vartheta) - \frac{w_{\text{ос}}}{2} \right] \cos \lambda_0 \sin \lambda_0 \sin \vartheta,$$

$$r_{\text{фр}} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \lambda_0 \sin^2 \vartheta} \cos \lambda_0 \left[p(\text{inv } \alpha_{\text{сд}} - \text{inv } \vartheta) - \frac{w_{\text{ос}}}{2} \right].$$

Знак перед радикалом следует выбирать так, чтобы $r_{\text{фр}} > 0$.

Профиль пальцевой фрезы для обработки эвольвентной винтовой поверхности определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sin v &= \sin \lambda_0 \sin \vartheta, & r_{\text{фр}} &= \left[p (\operatorname{inv} \alpha_{\text{сд}} - \operatorname{inv} \vartheta) - \frac{w_{\text{ос}}}{2} \right] \cos \lambda_0 \cos v, \\ x_1 &= \frac{r_0}{\cos \vartheta} + \left[p (\operatorname{inv} \alpha_{\text{сд}} - \operatorname{inv} \vartheta) - \frac{w_{\text{ос}}}{2} \right] \cos \lambda_0 \sin v. \end{aligned} \right\} \quad (91.10)$$

При выборе знака для $\cos v = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \lambda_0 \sin^2 \vartheta}$ необходимо, чтобы $r_{\text{фр}} > 0$. Крайние значения ϑ должны быть в таких пределах, чтобы

$$r_{1e} \geq r_1 \geq r_{1i},$$

где $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ — модуль радиуса-вектора точки профиля червяка в сечении $z_1 = \text{const}$; r_{1e} и r_{1i} — радиусы окружностей выступов и впадин.

Так как $r_1 = \sqrt{r_0^2 + u^2 \cos^2 \lambda_0}$, получим

$$\frac{\sqrt{r_e^2 - r_0^2}}{\cos \lambda_0} \geq u \geq \frac{\sqrt{r_i^2 - r_0^2}}{\cos \lambda_0}. \quad (91.11)$$

Связь между значениями u и ϑ определяется уравнением (91.9).

Расчет профиля пальцевой фрезы для косозубых и шевронных колес также производится по уравнениям (91.10). Обычно для таких колес задается дуговая ширина впадины $w_{\text{сд}}$ на делительном цилиндре, причем

$$w_{\text{сд}} = w_{\text{ос}} \operatorname{tg} \lambda_{\text{д}}.$$

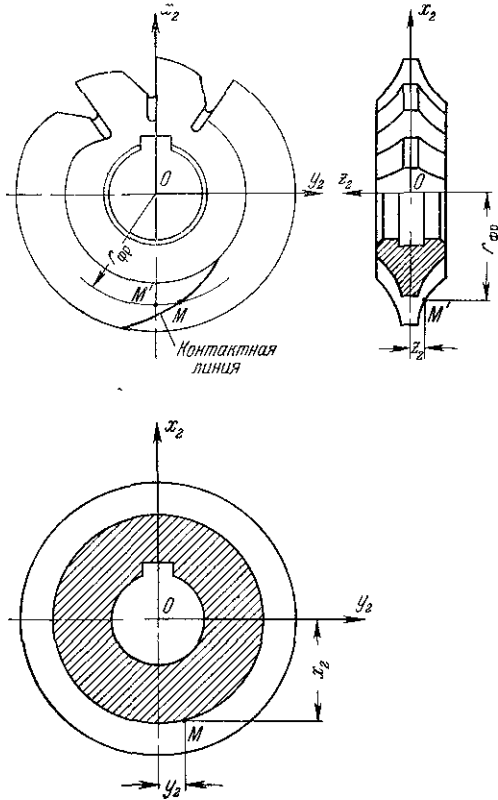


Рис. 249.

§ 92. Расчет профиля дисковых фрез

Для определения профиля дисковой фрезы воспользуемся теоремой § 91, согласно которой нормаль в точке касания поверхностей инструмента и червяка пересечет ось дисковой фрезы, поверхность которой является поверхностью вращения.

Будем считать, как и ранее, что поверхность витка червяка задана уравнениями в двухпараметрической форме и ось x_1 является осью симметрии сечения впадины, образуемого плоскостью $z_1 = 0$.

Положение дисковой фрезы по отношению к обрабатываемому червяку иллюстрируется построениями рис. 245. Кратчайшее расстояние между осями z_2 фрезы и z_1 червяка обозначим через $A_{\text{д}}$; угол $\gamma_{\text{д}}$ перекрещивания этих осей выбирается обычно равным углу подъема $\lambda_{\text{д}}$

винтовой линии на делительном цилиндре червяка. Общий вид дисковой фрезы представлен на рис. 249.

Формулы связи между координатами выражаются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 - A_n, & y_2 &= y_1 \cos \gamma_n + z_1 \sin \gamma_n, \\ z_2 &= -y_1 \sin \gamma_n + z_1 \cos \gamma_n. \end{aligned} \right\} \quad (92.1)$$

Нормаль к поверхности витка червяка определяется уравнениями:

$$\frac{X_1 - x_1}{n_{x1}} = \frac{Y_1 - y_1}{n_{y1}} = \frac{Z_1 - z_1}{n_{z1}}, \quad (92.2)$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты точки поверхности, n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} — проекции вектора нормали, X_1, Y_1, Z_1 — координаты текущей точки нормали.

Нормаль к поверхности витка червяка должна пересечь ось дисковой фрезы. В качестве текущей точки нормали выберем точку пересечения ее с осью дисковой фрезы. Ось дисковой фрезы определяется уравнениями:

$$X_1 = A_n, \quad \frac{Y_1}{Z_1} = -\operatorname{tg} \gamma_n. \quad (92.3)$$

Рассмотрев совместно уравнения (92.2) и (92.3), получим

$$\frac{A_n - x_1}{n_{x1}} = \frac{Y_1 - y_1}{n_{y1}} = -\frac{Y_1 \operatorname{ctg} \gamma_n + z_1}{n_{z1}}. \quad (92.4)$$

Исключив Y_1 из равенств (92.4), получим

$$(A_n - x_1) \frac{\operatorname{tg} \gamma_n n_{z1} + n_{y1}}{n_{x1}} + y_1 + z_1 \operatorname{tg} \gamma_n = 0.$$

Для геликоида справедливо такое соотношение (см. уравнение (27.9)):

$$y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1} = p n_{z1}.$$

После преобразований получим

$$(A_n - x_1 + p \operatorname{ctg} \gamma_n) n_{z1} + A_n \operatorname{ctg} \gamma_n n_{y1} + z_1 n_{x1} = 0. \quad (92.5)$$

Уравнение (92.5) после подстановки выражений x_1, z_1, n_{x1}, n_{y1} и n_{z1} представит уравнение связи между параметрами u и ϑ :

$$F_2(u, \vartheta) = 0. \quad (92.6)$$

В § 31 было доказано существование двух осей зацепления при обработке винтовой поверхности постоянного шага. Одной из этих осей зацепления является ось дискового инструмента, координаты другой оси определяются уравнениями (31.63). При выводе уравнения (92.5) было использовано условие, что нормаль в текущей точке линии контакта поверхностей червяка и инструмента пересекает ось дискового инструмента — первую ось зацепления. Это же уравнение можно получить, погребовав, чтобы нормаль в контактной точке проходила через вторую ось зацепления.

Координаты второй оси зацепления определяются уравнениями (см. (31.63))

$$X^{(II)} = p \operatorname{ctg} \gamma_n, \quad K^{(II)} = \frac{Z^{(II)}}{Y^{(II)}} = -\frac{A_n}{p}.$$

Нормаль, пересекающая вторую ось зацепления, определится уравнениями

$$\frac{p \operatorname{ctg} \gamma_n - x_1}{n_{x1}} = \frac{Y^{(II)} - y_1}{n_{y1}} = -\frac{\frac{A_n}{p} Y^{(II)} - z_1}{n_{z1}}. \quad (92.7)$$

Исключим из равенств (92.7) $Y^{(II)}$ и воспользуемся соотношением (27.9). После преобразований получим уравнение (92.5), найденное ранее из условия прохождения нормали через вторую ось зацепления.

Для определения профиля дискового инструмента, считая при этом заданным уравнение обрабатываемой поверхности, достаточно, как мы видим, использовать условие прохождения нормали через одну, и притом любую, ось зацепления. При решении обратной задачи — определении вида обрабатываемой поверхности, если задан профиль дискового инструмента, — нужно использовать условие прохождения нормали к поверхности инструмента через вторую ось зацепления; само собой разумеется, что, поскольку поверхность инструмента — поверхность вращения, нормаль пройдет и через первую ось зацепления. С задачей такого рода мы уже сталкивались в § 87, где для ее решения был использован кинематический метод.

После определения уравнения связи (92.6) между параметрами u и ϑ нетрудно определить и контактную линию на обрабатываемой поверхности. Для этого уравнение (92.6) нужно присоединить к уравнениям поверхности червяка, после чего получим

$$F_2(u, \vartheta) = 0, \quad x_1 = f_1(u, \vartheta), \quad y_1 = f_2(u, \vartheta), \quad z_1 = f_3(u, \vartheta). \quad (92.8)$$

Рассмотрев совместно уравнения (92.8) и (92.1), контактную линию в системе координат x_2, y_2, z_2 определим так:

$$F_2(u, \vartheta) = 0, \quad x_2 = \varphi_1(u, \vartheta), \quad y_2 = \varphi_2(u, \vartheta), \quad z_2 = \varphi_3(u, \vartheta). \quad (92.9)$$

Профиль дисковой фрезы представляет сечение поверхности фрезы плоскостью $y_2 = 0$. Пусть из уравнений (92.9) найдены координаты точки M контактной линии на боковой поверхности фрезы (рис. 249). Соответствующая точка M' осевого сечения фрезы должна быть задана координатами z_2 и $r_{\text{фр}}$. Проведем через точку M контактной линии секущую плоскость, перпендикулярную оси z_2 фрезы. Радиус окружности $r_{\text{фр}}$, проведенной через точку M , можно найти из уравнения

$$r_{\text{фр}} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \psi(u, \vartheta). \quad (92.10)$$

Профиль дисковой фрезы теперь определится уравнениями:

$$F_2(u, \vartheta) = 0, \quad r_{\text{фр}} = \psi(u, \vartheta), \quad z_2 = \varphi_3(u, \vartheta). \quad (92.11)$$

А. Эвольвентный червяк

Эвольвентная винтовая поверхность витков червяка определяется уравнениями (91.8); проекции орта нормали выражаются уравнениями (85.2). После преобразований уравнение (92.6) связи между параметрами u и ϑ при $\gamma_n = \lambda_d$ представим так:

$$u = \left[A_n \left(\frac{1}{\sin \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\operatorname{tg} \lambda_0}{\operatorname{tg} \lambda_d} \right) + r_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \lambda_0}{\operatorname{tg} \lambda_d \sin \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \right) \right] \cos \lambda_0 + \\ + \left[p(\vartheta + \operatorname{inv} \alpha_{\text{ад}}) - \frac{w_{\text{аэ}}}{2} \right] \sin \lambda_0. \quad (92.12)$$

Для расчета профиля фрезы нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_0 \frac{(1 - \cos 2\lambda_0) \cos \vartheta - \sin 2\lambda_0 \operatorname{ctg} \lambda_d}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[p(\vartheta + \operatorname{inv} \alpha_{sd}) - \frac{w_{oc}}{2} \right] \sin 2\lambda_0 \sin \vartheta + \\ &\quad + A_n (1 - \operatorname{tg} \lambda_0 \operatorname{ctg} \lambda_d \cos \vartheta) \left(\frac{1 + \cos 2\lambda_0}{2} \right), \\ y_1 &= \frac{r_0}{\sin \vartheta} - x_1 \operatorname{ctg} \vartheta, \\ z_1 &= p(\vartheta + \operatorname{inv} \alpha_{sd}) - \frac{x_1 - r_0 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \operatorname{tg} \lambda_0 - \frac{w_{oc}}{2}, \\ x_2 &= x_1 - A_n, \\ y_2 &= y_1 \cos \lambda_d + z_1 \sin \lambda_d, \quad z_2 = -y_1 \sin \lambda_d + z_1 \cos \lambda_d, \\ r_{fp} &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (92.13)$$

Предельные значения ϑ должны быть таковы, чтобы удовлетворялось неравенство

$$r_e \geq r_1 \geq r_i,$$

где

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{r_0^2 + u^2 \cos^2 \lambda_0}.$$

Пределы изменения u определяются неравенством

$$\frac{\sqrt{r_e^2 - r_0^2}}{\cos \lambda_0} \geq u \geq \frac{\sqrt{r_i^2 - r_0^2}}{\cos \lambda_0},$$

где u находится из уравнения (92.12).

В. Архимедов червяк

Архимедова винтовая поверхность витков червяка ранее была определена уравнениями (90.10); осью симметрии сечения *витка* плоскостью $y_1 = 0$ является отрицательная ось x_1 . Для того чтобы положительная ось x_1 служила осью симметрии сечения уже не *витка*, а *впадины*, перенесем начало координат по оси z_1 на величину $p\pi - t_{oc}/2$. После этого архимедова винтовая поверхность определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u \cos \alpha_n \cos \vartheta, \quad y_1 = u \cos \alpha_n \sin \vartheta, \\ z_1 &= p\vartheta - u \sin \alpha_n + r_d \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{w_{oc}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (92.14)$$

где $w_{oc} = t_{oc} - s_{oc}$.

Проекция орта нормали к архимедовой винтовой поверхности определяются уравнениями (84.3).

После преобразований уравнения для расчета профиля дисковой фрезы при $\gamma = \lambda_d$ представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u^2 - u \left[\frac{(A_n + p \operatorname{ctg} \lambda_d) \cos \alpha_n}{\cos \vartheta} + A_n \operatorname{ctg} \lambda_d \sin \alpha_n \operatorname{tg} \vartheta + \right. \\ \left. + \sin \alpha_n \left(p \vartheta + r_d \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{w_{oc}}{2} - p \operatorname{tg} \vartheta \right) \right] - \\ - p \left[\left(p \vartheta + r_d \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{w_{oc}}{2} \right) \operatorname{tg} \vartheta - A_n \operatorname{ctg} \lambda_d \right] = 0, \\ x_1 = u \cos \alpha_n \cos \vartheta, \quad y_1 = u \cos \alpha_n \sin \vartheta, \\ z_1 = p \vartheta - u \sin \alpha_n + r_d \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{w_{oc}}{2}, \quad x_2 = x_1 - A_n, \\ y_2 = y_1 \cos \lambda_d + z_1 \sin \lambda_d, \quad z_2 = -y_1 \sin \lambda_d + z_1 \cos \lambda_d, \\ r_{фр} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (92.15)$$

Предельные значения u должны удовлетворять неравенству

$$\frac{r_e}{\cos \alpha_n} \geq u \geq \frac{r_i}{\cos \alpha_n}.$$

§ 93. Подрезание при обработке червяков дисковыми и пальцевыми фрезами

В зависимости от исходных условий будем различать в последующем: а) прямую задачу, при которой задана винтовая поверхность червяка Σ_1 , ищутся граничные точки на поверхности Σ_1 ; б) обратную задачу, при которой задана поверхность инструмента Σ_n , определяются граничные точки на поверхности Σ_n . Решению этих задач посвящена работа И. П. Бернадского [17], выполненная им под нашим руководством; это решение основывается на методе, изложенном в § 36.

А. Прямая задача

1°. Будем считать, что поверхность червяка как геликоида задана уравнением (27.4), записанным в такой форме:

$$r_1 = r \cos (\theta + \zeta) i_1 - r \sin (\theta + \zeta) j_1 + p \zeta k_1. \quad (93.1)$$

Поверхность червяка обрабатывается дисковым инструментом, по отношению к которому червяк совершает винтовое движение с параметром p (рис. 236). Уравнение зацепления поверхности инструмента и червяка получим, используя условие, что в точках контакта Σ_1 и Σ_n общая нормаль должна пересекать одну из осей зацепления (см. § 34, D) — ось вращения дискового инструмента. Уравнения такой нормали

$$\frac{X_1 - x_1}{n_{x1}} = \frac{Y_1 - y_1}{n_{y1}} = \frac{Z_1 - z_1}{n_{z1}}. \quad (93.2)$$

Здесь x_1, y_1, z_1 — текущие координаты Σ_1 , X_1, Y_1, Z_1 — координаты оси z_n дискового инструмента в системе S_1 .

Вектор нормали n_1 к поверхности червяка был представлен уравнением (27.7), записанным ранее в такой форме:

$$n_1 = \frac{r}{\sin \mu} [p \sin (\theta + \zeta + \mu) i_1 - p \cos (\theta + \zeta + \mu) j_1 + r \cos \mu k_1]. \quad (93.3)$$

Воспользовавшись матрицей (87.3) перехода от S_n к S_1 получим следующие выражения для X_1, Y_1, Z_1 :

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -Z_n \sin \gamma_n \sin \psi + A_n \cos \psi, \\ Y_1 &= -Z_n \sin \gamma_n \cos \psi - A_n \sin \psi, \\ Z_1 &= Z_n \cos \gamma_n - p\psi. \end{aligned} \right\} \quad (93.4)$$

Подставим выражения (93.4) в равенства (93.2), исключим Z_n и учтем при преобразованиях зависимость (93.3). В итоге получим

$$\begin{aligned} n_{x1}(z_1 \cos \psi + p\psi \cos \psi + A_n \operatorname{ctg} \gamma_n \sin \psi) + \\ + n_{y1}(-z_1 \sin \psi - p\psi \sin \psi + A_n \operatorname{ctg} \gamma_n \cos \psi) + \\ + n_{z1}(p \operatorname{ctg} \gamma_n + A_n - x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi) = 0. \end{aligned} \quad (93.5)$$

Подставив выражения (93.4) и (27.7), уравнение зацепления (93.5) можно записать в такой форме:

$$F(\theta, \zeta, \psi) = 0, \quad (93.6)$$

где θ и ζ — параметры поверхности геликоида (93.4), ψ — параметр относительного движения.

Уравнения (93.1) и (93.3), рассмотренные совместно, определяют семейство линий Q на поверхности Σ_1 с параметром ψ . Дискриминантная кривая указанного семейства представляет геометрическое место таких точек линий Q , которые являются (см. § 36): а) особыми точками поверхности Σ_1 , б) обыкновенными точками поверхности Σ_1 , удовлетворяющими условию

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0. \quad (93.7)$$

Выражение (93.7) позволяет найти на поверхности Σ_1 огибающую E_1 семейства линий контакта поверхностей Σ_1 и Σ_n , являющуюся граничной линией семейства Σ_1 . Второй граничной линией поверхности Σ_1 будет служить линия E'_1 , содержащая особые точки этой поверхности.

На основании (93.5) и (93.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \psi} = n_{x1}(-z_1 \sin \psi + p \cos \psi - p\psi \sin \psi + A_n \operatorname{ctg} \gamma_n \cos \psi) + \\ + n_{y1}(-z_1 \cos \psi - p \sin \psi - p\psi \cos \psi - A_n \operatorname{ctg} \gamma_n \sin \psi) + \\ + n_{z1}(x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi) = 0. \end{aligned} \quad (93.8)$$

Зависимость (93.8) после подстановки выражений (93.3) для n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} , (93.4) для x_1, y_1, z_1 можно представить в таком виде:

$$f(\theta, \zeta, \psi) = 0. \quad (93.9)$$

Уравнения (93.6) и (93.9) позволяют после исключения ψ найти параметры θ и ζ граничной линии на поверхности Σ_1 — огибающего отрезка E_1 дискриминантной кривой семейства линий контакта Q . Поверхность Σ_1 оказывается, таким образом, ограниченной: а) отрезком E_1 , содержащим обыкновенные точки поверхности Σ_1 , б) отрезком E'_1 , содержащим все особые точки поверхности Σ_1 . Используя E_1 и E'_1 , можно определить соответствующие граничные линии E_n и E'_n на поверхности Σ_n дискового инструмента. В случае, если поверхность дискового инструмента будет продолжена за E_n и E'_n , поверхность Σ_1 червяка будет подрезана в процессе ее обработки.

Покажем, что граничная линия E_1 представляет винтовую линию. Линии контакта поверхностей Σ_1 и Σ_n образуют, как уже указывалось, на поверхности Σ_1 семейство Q . Семейству Q на поверхности Σ_n дискового инструмента отвечает одна линия, с которой последовательно совпадают все линии семейства Q . При винтовом движении червяка дисковый инструмент мы считаем неподвижным, так как вращение, которое ему сообщается, вызывается технологическими причинами. Граничные точки всех линий отрезка E_1 образуют винтовую линию на поверхности Σ_n , которой на поверхности Σ_n отвечает одна граничная точка линии E_n .

Основываясь на изложенном, можно ограничиться определением на поверхности Σ_1 не всей винтовой линии E_1 , а только одной ее точки. Проще всего это сделать, положив в уравнениях (93.5) и (93.8) $\psi = 0$. Проведем это, получим

$$n_{x1}z_1 + n_{y1}A_n \operatorname{ctg} \gamma_n + n_{z1}(p \operatorname{ctg} \gamma_n + A_n - x_1) = 0, \quad (93.10)$$

$$n_{x1}(p + A_n \operatorname{ctg} \gamma_n) - n_{y1}z_1 + n_{z1}y_1 = 0. \quad (93.11)$$

Эти зависимости позволяют найти значения параметров θ и ζ , определяющих граничное значение радиуса r торцового профиля.

2°. Аналогичным образом можно получить уравнения, определяющие одну из точек граничной линии при обработке геликоида пальцевой фрезой. В этом случае нормаль к поверхностям пальцевого инструмента и червяка должна пересекать ось вращения инструмента с координатами $(X_n, 0, 0)$. В системе S_1 координаты оси фрезы на основании матрицы (87.3) определяются так:

$$X_1 = (X_n + A_n) \cos \psi, \quad Y_1 = -(X_n + A_n) \sin \psi, \quad Z_1 = -p\psi. \quad (93.12)$$

Уравнение зацепления представим в такой форме:

$$(z_1 + p\psi)(n_{x1} \sin \psi + n_{y1} \cos \psi) - n_{z1}(x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi) = 0. \quad (93.13)$$

Уравнение (93.13) совместно с (93.1) определяет на поверхности Σ_1 семейство Q линий контакта поверхностей Σ_n и Σ_1 . Дискриминантная линия на поверхности Σ_1 содержит: а) огибающий отрезок E_1 , точками которого являются обыкновенные точки поверхности Σ_1 ; б) особые точки поверхности Σ_1 (см. § 36). Для определения E_1 нужно воспользоваться условием $\partial F / \partial \psi = 0$, где $F(\theta, \zeta, \psi) = 0$ — уравнение зацепления (93.13).

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \psi} = & p(n_{x1} \sin \psi + n_{y1} \cos \psi) + (z_1 + p\psi)(n_{x1} \cos \psi - n_{y1} \sin \psi) - \\ & - n_{z1}(x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi) = 0. \end{aligned} \quad (93.14)$$

Принимая во внимание, что мы можем ограничиться определением модуля радиуса-вектора r граничной точки торцового профиля, воспользуемся уравнениями (93.13) и (93.14), приняв в них $\psi = 0$. В результате получим

$$n_{y1}z_1 - n_{z1}y_1 = 0, \quad (93.15)$$

$$n_{y1}p + n_{x1}z_1 - n_{z1}x_1 = 0. \quad (93.16)$$

Рассмотрим совместно (93.15), (93.16) и примем во внимание, что для геликоида соблюдается зависимость (27.9). В результате получим, что для существования граничной точки необходимо, чтобы $n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 0$. Из этого следует, что граничной точкой будет такая точка, для которой $\cos \mu = 0$ (см. рис. 53).

В. Обратная задача

Будем считать поверхность инструмента (дискового или пальцевого) заданной уравнением такого вида:

$$r_{\Pi} = r_{\Pi}(u, \vartheta). \quad (93.17)$$

Уравнение зацепления получим, присоединив к (93.17) зависимость

$$n_{\Pi} v_{\Pi}^{(u1)} = 0, \quad (93.18)$$

где n_{Π} — вектор нормали к поверхности инструмента, $v_{\Pi}^{(u1)}$ — вектор скорости относительного движения, определяемый уравнениями (87.10).

Уравнение (93.18) можно представить в таком виде:

$$F(u, \vartheta) = 0. \quad (93.19)$$

Для определения граничной точки на поверхности (93.17) инструмента нужно воспользоваться следующими уравнениями (см. § 36):

$$\left. \begin{aligned} r_{\Pi} = r_{\Pi}(u, \vartheta), \quad F(u, \vartheta) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = 0, \\ \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} + v_{\Pi}^{(u1)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (93.20)$$

Для определения параметров u и ϑ граничной точки достаточно воспользоваться уравнением (93.19) и условием (§ 36), что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial \vartheta} & 0 \\ \frac{\partial x_{\Pi}}{\partial u} & \frac{\partial x_{\Pi}}{\partial \vartheta} & v_{x\Pi}^{(u1)} \\ \frac{\partial y_{\Pi}}{\partial u} & \frac{\partial y_{\Pi}}{\partial \vartheta} & v_{y\Pi}^{(u1)} \end{vmatrix} = 0. \quad (93.21)$$

Глава XIII

Глобоидное червячное зацепление

§ 94. Введение. Поверхность витков червяка

1°. В червячной глобоидной передаче червяку придается глобоидная форма для более полного охвата колеса; эта особенность формы червяка послужила основанием для того, чтобы назвать передачу глобоидной. При глобоидной форме червяка в зацеплении находится несколько витков, что способствует улучшению условий передачи сил. Решающим преимуществом глобоидной червячной передачи является особый характер линий контакта, способствующих созданию масляного клина и повышению КПД (см. § 78).

Теории зацепления и геометрии глобоидных червячных передач посвящены работы Б. А. Гессена и П. С. Зака [40, 41, 89], Н. Н. Крылова [143], Н. И. Колчина [119], В. А. Шишкова [259], Я. И. Дикера [66-68], Л. И. Сагина [68, 230, 231], Б. Ф. Федотова [88] и других исследователей. Я. И. Дикер, П. С. Зак, В. А. Шишков, Л. И. Сагин, А. К. Карцев, И. А. Лебедев и другие способствовали успешной постановке производства глобоидных червячных передач в СССР.

Существует несколько разновидностей глобоидного червячного зацепления. Наибольшее распространение получили глобоидные червячные зацепления, предложенные: а) Коном (фирма Мичиган Тул); б) фирмой Восток-Ренк. Червяк передачи Кона обрабатывается резцом прямолинейного профиля, червяк передачи Восток-Ренк шлифуется дисковым коническим кругом.

В настоящей книге мы ограничимся рассмотрением особенностей зацепления глобоидной передачи Кона.

2°. Поверхность витков червяка передачи Кона является неразвертывающейся линейчатой поверхностью. Нарезание червяка может быть выполнено резцом с прямолинейными профилями (рис. 250), которому сообщается вращение вокруг оси O_2 с угловой скоростью $\omega_2 = d\psi_2/dt$; червяку при нарезании сообщается вращение вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_1 = d\psi_1/dt$. При вращении резца его режущие кромки остаются касательными к окружности радиуса R_0 . Направления вращений со скоростями ω_1 и ω_2 , принятые на рис. 251, соответствуют случаю нарезания правозаходного червяка.

Обозначим через $i_{21} = z_1/z_2$ (z_1 и z_2 — число заходов червяка и зубцов колеса) передаточное отношение самой глобоидной передачи, а через $i_{21}^* = \frac{d\psi_2}{dt} : \frac{d\psi_1}{dt}$ передаточное отношение при нарезании червяка. В обычном случае, для немодифицированной передачи, $i_{21}^* = i_{21}$; при модификации глобоидной передачи (см. § 97) $i_{21}^* \neq i_{21}$.

Будем различать также кратчайшее расстояние A между осями червяка и колеса при зацеплении и A_n — кратчайшее расстояние между осью червяка и осью O_2 (рис. 250) при нарезании. В немодифицированной глобоидной передаче $A_n = A$; в модифицированной глобоидной передаче при одном из способов модификации (§ 97) $A < A_n$.

Введем в рассмотрение три системы координат (рис. 251): $S_2(x_2, y_2, z_2)$, связанную

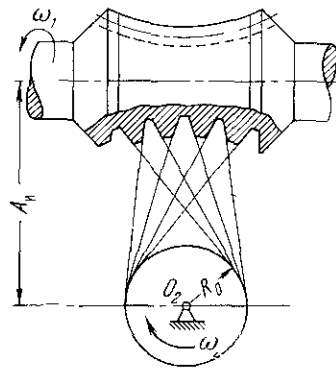


Рис. 250.

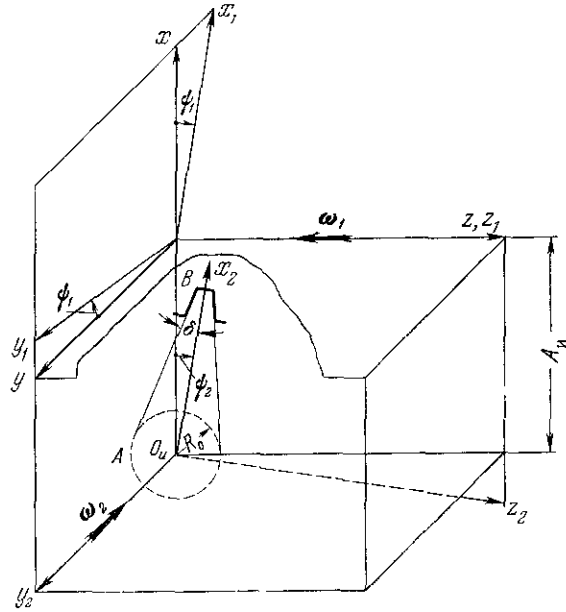


Рис. 251.

с резцом (с червячным колесом); $S_1(x_1, y_1, z_1)$, связанную с червяком; $S(x, y, z)$ — неподвижную систему координат. Углы поворота систем S_1 и S_2 при нарезании червяка обозначим через ψ_1 и ψ_2 ; поворот этих же систем при зацеплении червяка и колеса будем обозначать через φ_1 и φ_2 . Переход от системы координат S_2 к S_1 определяется матричным уравнением

$$r_1 = M_{10} M_{02} r_2. \quad (94.1)$$

Матрицы M_{02} и M_{10} имеют следующий вид:

$$M_{02} = \begin{vmatrix} \cos \psi_2 & 0 & -\sin \psi_2 & -A_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi_2 & 0 & \cos \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 & 0 & 0 \\ \sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Произведение матриц

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \psi_1 \cos \psi_2 & -\sin \psi_1 & -\cos \psi_1 \sin \psi_2 & -A_n \cos \psi_1 \\ \sin \psi_1 \cos \psi_2 & \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 \sin \psi_2 & -A_n \sin \psi_1 \\ \sin \psi_2 & 0 & \cos \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (94.2)$$

Формулы перехода от системы S_2 к системе S_1 определяются так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 - y_2 \sin \psi_1 - z_2 \cos \psi_1 \sin \psi_2 - A_n \cos \psi_1, \\ y_1 &= x_2 \sin \psi_1 \cos \psi_2 + y_2 \cos \psi_1 - z_2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 - A_n \sin \psi_1, \\ z_1 &= x_2 \sin \psi_2 + z_2 \cos \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (94.3)$$

В системе S_2 режущая кромка (прямая AB) определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= u \cos \delta + R_0 \sin \delta, & y_2 &= 0, \\ z_2 &= u \sin \delta - R_0 \cos \delta, \end{aligned} \right\} \quad (94.4)$$

где u — расстояние от точки A до произвольной точки M режущей кромки (рис. 253).

Используя выражения (94.3) и (94.4), поверхность витков червяка определим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \cos \psi_1 [u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n], \\ y_1 &= \sin \psi_1 [u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n], \\ z_1 &= u \sin (\delta + \psi_2) - R_0 \cos (\delta + \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (94.5)$$

Поверхность (94.5) витков червяка является линейчатой неразвертывающейся поверхностью (рис. 252), заданной в двухпараметрической форме. При фиксированном значении ψ_1 (или ψ_2) координатной линией на этой поверхности служит прямая линия; при фиксированном значении параметра u координатной линией на поверхности явится пространственная кривая, получающаяся в результате пересечения

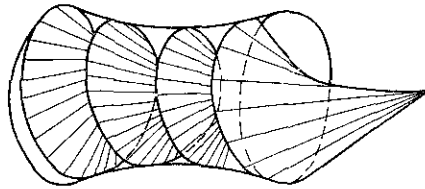


Рис. 252.

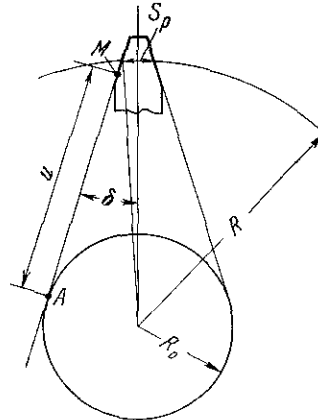


Рис. 253.

поверхности витков тором, у которого радиус образующей (окружности горловины) равен $\sqrt{u^2 + R_0^2}$.

Для определения угла δ , входящего в уравнения (94.5), нужно воспользоваться следующим уравнением (рис. 253):

$$\delta = \arcsin \left(\frac{R_0}{R} \right) - \frac{s_p}{2R}, \quad (94.6)$$

где R — радиус расчетной окружности (окружности, на которой задается толщина s_p резца).

Как показали исследования Л. И. Сагина и Л. И. Блейшмидта, величина угла δ весьма сказывается на характере поля зацепления и, нужно полагать, сказывается также на нагрузочной способности глобoidной передачи.

Вектор нормали к поверхности червяка определяется уравнением

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \psi_1}.$$

Проекции вектора нормали представим следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} n_{x1} &= ui_{21} \sin \psi_1 - \sin (\delta + \psi_2) \cos \psi_1 [u \cos (\delta + \psi_2) + \\ &\quad + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n] = ui_{21} \sin \psi_1 - x_1 \sin (\delta + \psi_2), \\ n_{y1} &= -ui_{21} \cos \psi_1 - \sin (\delta + \psi_2) \sin \psi_1 [u \cos (\delta + \psi_2) + \\ &\quad + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n] = -ui_{21} \cos \psi_1 - y_1 \sin (\delta + \psi_2), \\ n_{z1} &= \cos (\delta + \psi_2) \cdot [u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n]. \end{aligned} \right\} \quad (94.7)$$

§ 95. Линии контакта. Поверхность зацепления

В передаче между перекрещивающимися осями линия контакта поверхностей зубцов в системе координат S_1 , связанной с червяком, была ранее определена уравнениями (30.3). При выводе этих уравнений предполагалось, что звено 1—правозаходный червяк передачи и его вращение противоположно указанному на рис. 254.

При выводе уравнения поверхности витков червяка было принято, что она образуется кромкой AB (рис. 254). Эта поверхность вступит в зацепление, если червяку будет сообщено вращение в направлении, указанном на рис. 254. Для того чтобы иметь право воспользоваться в нашем случае уравнениями (30.3), в них нужно изменить знак перед φ_1 и принять угол перекрещивания осей $\gamma = \pi/2$.

В глобoidном червячном зацеплении линия контакта определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \cos \psi_1 [u \cos (\delta + \psi_2) + \\ &\quad + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n], \\ y_1 &= \sin \psi_1 [u \cos (\delta + \psi_2) + \\ &\quad + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n], \\ z_1 &= u \sin (\delta + \psi_2) - R_0 \cos (\delta + \psi_2), \\ (y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1}) i_{12} + \\ &\quad + z_1 (n_{x1} \cos \varphi_1 + n_{y1} \sin \varphi_1) - \\ &\quad - n_{z1} (x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1 - A) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (95.1)$$

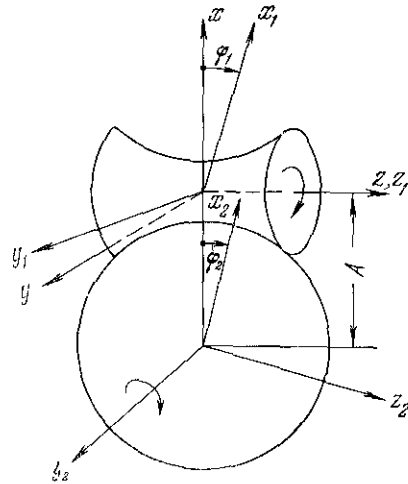


Рис. 254.

Эти уравнения получены на основании уравнений (30.3) и (94.5)

с учетом того, что угол перекрещивания осей $\gamma = 90^\circ$, а параметры поверхности червяка обозначены через u и ψ_1 ; в уравнениях (30.3) параметры поверхности были обозначены через u и ϑ .

Проекции нормали n_{x1} , n_{y1} , n_{z1} к поверхности червяка ранее были определены уравнениями (94.7). Система уравнений (95.1) может быть сведена к одной зависимости между параметрами u , ψ_1 и φ_1 . Для упрощения последующих преобразований заметим:

$$(y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1}) i_{12} = ur_i, \quad (95.2)$$

где

$$r_i = u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A_n, \quad (95.3)$$

$$n_{x1} \cos \varphi_1 + n_{y1} \sin \varphi_1 - ui_{21} \sin \theta - r_i \cos \theta \sin (\delta + \psi_2), \quad (95.4)$$

где $\theta = \psi_1 - \varphi_1$,

$$n_{z1}(x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1 + A) = (r_i \cos \theta + A) r_i \cos (\delta + \psi_2). \quad (95.5)$$

Связь между параметрами u , ψ_1 и φ_1 поверхности червяка определится уравнением

$$ur_i + [u \sin (\delta + \psi_2) - R_0 \cos (\delta + \psi_2)] [ui_{21} \sin \theta - r_i \cos \theta \sin (\delta + \psi_2)] - \\ - r_i^2 (\cos \theta \cos (\delta + \psi_2) - Ar_i \cos (\delta + \psi_2)) = 0. \quad (95.6)$$

Уравнения (95.6) и (95.3), рассмотренные совместно, представляют уравнения зацепления глобоидной червячной передачи. Эти уравнения пригодны и для модифицированной червячной передачи с неполной глобоидностью (при $A_n \neq A$).

Для немодифицированной глобоидной червячной передачи ($A_n = A$) уравнение зацепления на основании (95.6) и (95.3) определится так:

$$u^2 [(1 - \cos \theta) \cos (\delta + \psi_2) + i_{21} \sin \theta \sin (\delta + \psi_2)] + \\ + u \{R_0 [(1 - \cos \theta) \sin (\delta + \psi_2) - i_{21} \sin \theta \cos (\delta + \psi_2)] - \\ - A (1 - \cos \theta) [1 + \cos^2 (\delta + \psi_2)]\} + \\ + A \cos (\delta + \psi_2) (1 - \cos \theta) [A - R_0 \sin (\delta + \psi_2)] = 0. \quad (95.7)$$

Уравнению (95.7) можно придать такую форму:

$$2 \sin \frac{\theta}{2} (u^2 P + uQ + N) = 0, \quad (95.8)$$

где

$$P = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos (\delta + \psi_2) + i_{21} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin (\delta + \psi_2), \\ Q = R_0 \left[\sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin (\delta + \psi_2) - i_{21} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos (\delta + \psi_2) \right] - \\ - A \sin \frac{\theta}{2} [1 + \cos^2 (\delta + \psi_2)], \\ N = A \sin \frac{\theta}{2} \cos (\delta + \psi_2) [A - R_0 \sin (\delta + \psi_2)], \\ \theta = \psi_1 - \varphi_1.$$

Уравнение (95.8) удовлетворяется при следующих условиях:

$$\sin \frac{\theta}{2} = 0, \quad (95.9)$$

$$u^2 P + uQ + N = 0. \quad (95.10)$$

Из зависимостей (95.9) и (95.10) следует, что на боковой поверхности витков глобоидного червяка могут быть две контактные линии. Первая из них определяется условием $\theta = \psi_1 - \varphi_1 = 0$ и представляет прямую линию — образующую линейчатой поверхности глобоидного червяка. Вторая контактная линия определяется при связи между параметрами u , ψ_1 и φ_1 поверхности, удовлетворяющей квадратному уравнению

$$u^2 P + uQ + N = 0.$$

Наличие на поверхности глобоидного червяка мгновенной линии контакта, совпадающей с образующей линией AB (рис. 251), остается справедливым при любой форме этой образующей. В самом деле, нормаль n_1

к поверхности червяка может быть представлена таким выражением:

$$\mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v}^{*(12)}, \quad (95.11)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к образующей линии в ее текущей точке M , $\mathbf{v}^{*(12)}$ — вектор скорости относительного движения при образовании поверхности червяка. Точка M является точкой линии контакта поверхностей червяка и колеса, если для этой точки будет соблюдено уравнение

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{v}^{(12)} = 0, \quad (95.12)$$

где $\mathbf{v}^{(12)}$ — вектор скорости относительного движения при зацеплении червяка и колеса. На основании (95.11) и (95.12) получим

$$[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}^{*(12)}, \mathbf{v}^{(12)}] = 0. \quad (95.13)$$

Уравнение (95.13) соблюдается, поскольку при $\psi = \varphi_1$ $\mathbf{v}^{*(12)} = \mathbf{v}^{(12)}$.

Определим контактные линии в неподвижной системе координат x, y, z . Для перехода от системы S_1 к системе S нужно воспользоваться (рис. 254) матрицей

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Линия контакта в системе S определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= -x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \\ z &= z_1, \\ \sin \frac{\theta}{2} (u^2 P + uQ + N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (95.14)$$

Для определения первой контактной линии нужно использовать условие, что $\theta = 0$ и $\psi_1 = \varphi_1$. Уравнения (95.14) после преобразований приведем к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} x &= u \cos (\delta + \varphi_1 i_{21}) + R_0 \sin (\delta + \varphi_1 i_{21}) - A, \\ y &= 0, \\ z &= u \sin (\delta + \varphi_1 i_{21}) - R_0 \cos (\delta + \varphi_1 i_{21}). \end{aligned} \right\} \quad (95.15)$$

Линия контакта, определяемая уравнениями (95.15), представляет прямую линию, касательную к окружности радиуса R_0 .

Вторая линия контакта определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u^2 P + uQ + N &= 0, \\ \text{где } P &= \sin \frac{\theta}{2} \cos (\delta + \psi_2) + i_{21} \cos \frac{\theta}{2} \sin (\delta + \psi_2); \\ Q &= R_0 \left[\sin \frac{\theta}{2} \sin (\delta + \psi_2) - i_{21} \cos \frac{\theta}{2} \cos (\delta + \psi_2) \right] - \\ &\quad - A \sin \frac{\theta}{2} [1 + \cos^2 (\delta + \psi_2)]; \\ N &= A \sin \frac{\theta}{2} \cos (\delta + \psi_2) [A - R_0 \sin (\delta + \psi_2)]; \\ \theta &= \psi_1 - \varphi_1; \\ x &= \cos (\psi_1 - \varphi_1) [u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A]; \\ y &= \sin (\psi_1 - \varphi_1) [u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A]; \\ z &= u \sin (\delta + \psi_2) - R_0 \cos (\delta + \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (95.16)$$

Для вычисления координат контактных линий необходимо: а) зафиксировать значение угла поворота φ_1 глобоидного червяка; б) задаваясь значением ψ_1 , найти соответствующее значение второго параметра u ,

решив для этого квадратное уравнение; в) используя связанные таким образом значения u и ψ_1 , нужно вычислить, далее, искомые координаты x , y и z контактной линии при фиксированном значении φ_1 .

Контактные линии глобоидного червячного зацепления Кона имеют весьма благоприятную форму (рис. 255), способствующую достижению высокой грузоподъемности и повышенного значения коэффициента полезного действия (см. § 78).

Перейдем теперь к определению поверхности зацепления и ее сечений. Поверхность зацепления представляет геометрическое место линий контакта в неподвижной системе координат. Поверхность зацепления, определяемая линиями контакта (95.15), представляет плоскость $y = 0$. Поверхность зацепления, определяемая линиями контакта (95.16), изучается в различных ее сечениях.

Поперечные линии зацепления находятся в результате пересечения поверхности зацепления (95.16) плоскостями $z = \text{const}$. Для вычисления координат x и y поперечных линий зацепления нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u^2 P + uQ + N &= 0, \\ z &= u \sin(\delta + \psi_2) - R_0 \cos(\delta + \psi_2), \\ x &= \cos \theta [u \cos(\delta + \psi_2) + R_0 \sin(\delta + \psi_2) - A], \\ y &= \sin \theta [u \cos(\delta + \psi_2) + R_0 \sin(\delta + \psi_2) - A] \end{aligned} \right\} \quad (95.17)$$

При вычислениях фиксируем сначала значение z ; затем, задаваясь значениями $(\delta + \psi_2)$, находим u из уравнения

$$u = \frac{z + R_0 \cos(\delta + \psi_2)}{\sin(\delta + \psi_2)}. \quad (95.18)$$

Используя связанные таким образом значения $(\delta + \psi_2)$ и u , вычисляем из первого уравнения системы (95.17) значения θ , а затем находим координаты x и y искомой поперечной линии зацепления при $z = \text{const}$. Ниже будет разъяснено, что в третьем квадранте, где оси z и y имеют положительное направление, зацепление не имеет места вследствие подрезания зубцов червячного колеса.

Для определения продольной линии зацепления, получающейся в результате сечения поверхности зацепления плоскостью $y = \text{const}$, нужно воспользоваться системой уравнений (95.17), положив в них $y = \text{const}$. Решим первое и четвертое уравнения этой системы

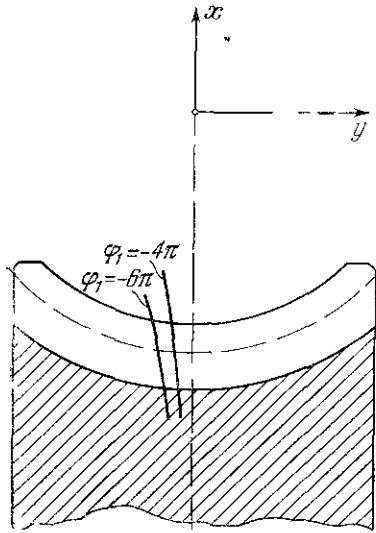


Рис. 255.

относительно u :

$$u = -\frac{Q}{P} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{P^2} - \frac{N}{P}}, \quad (95.19)$$

$$u = \frac{\frac{y}{\sin \theta} - R_0 \sin (\delta + \psi_2) + A}{\cos (\delta + \psi_2)}. \quad (95.20)$$

Напомним, что P , Q и N , входящие в уравнение (95.19), являются функциями от θ и $(\delta + \psi_2)$ (см. уравнение (95.8)). При вычислениях нужно определить такие связанные между собой значения θ и $(\delta + \psi_2)$, при которых окажутся равными левые части уравнений (95.19) и (95.20). Для упрощения вычислений можно воспользоваться графическим способом решения, заключающимся в том, что при фиксированном значении $\theta = \theta_1$ строятся графики функций

$$u = f_1[(\delta + \psi_2), \theta_1], \quad u = f_2[(\delta + \psi_2), \theta_1],$$

а затем для точки их пересечения определяется значение $(\delta + \psi_2)$.

Если уравнения (95.19) и (95.20) рассмотреть совместно, то после исключения u непосредственная связь между $(\delta + \psi_2)$ и θ определится трансцендентным уравнением

$$\left[\frac{\frac{y}{\sin \theta} - R_0 \sin (\delta + \psi_2) + A}{\cos (\delta + \psi_2)} + \frac{Q}{P} \right]^2 = \frac{Q^2}{P^2} - \frac{N}{P}. \quad (95.21)$$

Изложенный способ вычислений позволяет найти при $y = \text{const}$ связанные между собой значения θ , $(\delta + \psi_2)$ и u ; одно из этих трех переменных выбирается произвольно. После этого нетрудно вычислить координаты x и z искомой линии зацепления.

Пример 24. Определим линии контакта глобоидной червячной передачи при следующих данных: $m = 2,5$ мм; $z_1 = 1$; $z_2 = 47$; $\alpha = 20^\circ$; $A = 80$ мм ($A_H = A$). Для вычислений воспользуемся уравнениями (95.16). Результаты вычислений представлены в таблице XI, а сами линии контакта изображены на рис. 255.

Форма контактных линий глобоидной червячной передачи выявляет ее нагрузочную способность, что можно объяснить следующим образом. Представим (см. § 78), что в какой-нибудь точке линии контакта проведена общая касательная плоскость к поверхностям червяка и колеса и в этой плоскости отмечено направление $m - m$, перпендикулярное касательной к линии контакта. В глобоидной червячной передаче проекции окружных скоростей червяка и колеса на направление $m - m$ имеют большие значения, чем в цилиндрической червячной передаче. Это, как уже было отмечено в § 78, способствует созданию лучших условий для образования масляного клина.

Таблица XI

Линии контакта глобоидной червячной передачи

φ_1	ψ_2	θ	u	x	y	z
—4л	—0,2664	0,05	51,748	—27,319	—1,367	—17,518
	—0,2662	0,10	58,797	—20,164	—2,023	—17,105
	—0,2642	0,15	62,227	—16,632	—2,513	—16,857
	—0,2631	0,20	66,360	—14,377	—2,914	—16,686
—6л	—0,3989	0,10	56,421	—25,319	—2,540	—24,717
	—0,3974	0,15	60,144	—21,465	—3,244	—24,963
	—0,3967	0,20	62,316	—18,933	—3,838	—25,739
	—0,3957	0,25	64,205	—17,050	—4,355	—26,156

§ 96. Поверхность зубцов колеса

Семейство поверхностей витков червяка в системе координат S_2 , связанной с колесом, можно определить с помощью матрицы M_{21} , обратной матрице (94.2). Предварительно в матрицах M_{12} и M_{21} параметры ψ_1 и ψ_2 должны быть заменены параметрами φ_1 и φ_2 , выражающими углы поворота червяка и колеса при зацеплении. Прделав это, получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + z_1 \sin \varphi_2 + A \cos \varphi_2, \\ y_2 &= -x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \\ z_2 &= -x_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - y_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + z_1 \cos \varphi_2 - A \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (96.1)$$

Поверхность зубцов червячного колеса представляет геометрическое место линий контакта. Присоединив к уравнениям (96.1) уравнение (95.8) связи между параметрами u , ψ_1 и φ_1 , линии контакта в системе S_2 определим следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + z_1 \sin \varphi_2 + A \cos \varphi_2, \\ y_2 &= -x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \\ z_2 &= -x_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - y_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + z_1 \cos \varphi_2 - A \sin \varphi_2, \\ \sin \frac{\theta}{2} (u^2 P + uQ + N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (96.2)$$

Выражения для P , Q и N были приведены ранее (см. (95.8)).

Используя уравнения (94.5) поверхности витков червяка, после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= u [\cos \theta \cos (\delta + \psi_2) \cos \varphi_2 + \sin (\delta + \psi_2) \sin \varphi_2] + \\ &\quad + R_0 [\cos \theta \sin (\delta + \psi_2) \cos \varphi_2 - \cos (\delta + \psi_2) \sin \varphi_2] - \\ &\quad - A (\cos \theta \cos \varphi_2 - \cos \varphi_2), \\ y_2 &= [u \cos (\delta + \psi_2) + R_0 \sin (\delta + \psi_2) - A] \sin \theta, \\ z_2 &= u [-\cos \theta \cos (\delta + \psi_2) \sin \varphi_2 + \sin (\delta + \psi_2) \cos \varphi_2] - \\ &\quad - R_0 [\cos \theta \sin (\delta + \psi_2) \sin \varphi_2 + \cos (\delta + \psi_2) \cos \varphi_2] + \\ &\quad + A (\cos \theta \sin \varphi_2 - \sin \varphi_2), \\ \sin \frac{\theta}{2} (u^2 P + uQ + N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (96.3)$$

На поверхности витков червяка существуют, как уже упоминалось, два семейства линий контакта. Первое семейство этих линий определяется условием

$$\theta = \psi_1 - \varphi_1 = 0.$$

Очевидно, что при этом $\psi_2 - \varphi_2 = 0$.

Семейство линий контакта (96.3) на поверхности зубцов червячного колеса при этом условии вырождается в прямую линию, определяемую уравнениями:

$$x_2 = u \cos \delta + R_0 \sin \delta, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = u \sin \delta - R_0 \cos \delta. \quad (96.4)$$

Уравнение (96.4) определяет образующую прямую AB (см. (94.4)). Следовательно, в средней плоскости червячного колеса ($y_2 = 0$) имеется прямая линия, с которой в процессе зацепления вступают в касание все образующие поверхности витков червяка.

Второе семейство линий контакта на поверхности зубцов червячного колеса определяется при связи между параметрами u , ψ_1 и φ_1 поверхности, выражаемой уравнением

$$u^2P + uQ + N = 0.$$

Используя это условие, можно определить из (96.3) семейство линий контакта (поверхность зубцов) червячного колеса; эта поверхность является огибающей поверхности витков червяка.

Исследованиями Б. А. Гессена и П. С. Зака [41] было установлено, что в процессе нарезания имеет место подрезание поверхности зубцов червячного колеса входной образующей червячной фрезы. Уравнения этой образующей получим, приняв в уравнениях (94.5) поверхности витков червяка, что $\psi_2 = -\delta$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (u - A) \cos(\delta_1 i_{12}), \\ y_1 &= (u - A) \sin(\delta_1 i_{12}), \\ z_1 &= -R_0. \end{aligned} \right\} \quad (96.5)$$

Образующая (96.5) червяка воспроизводит на поверхности зубцов червячного колеса линейчатую поверхность, уравнения которой можно

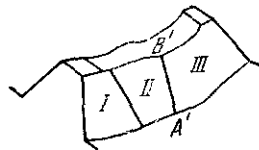


Рис. 256

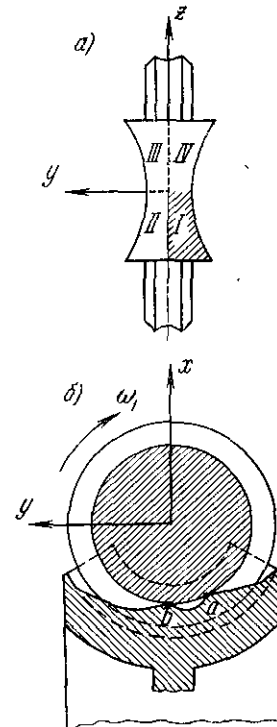


Рис. 257.

получить [при совместном рассмотрении уравнений (96.1) и (96.5)]. После преобразований найдем

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (q \cos \tau + A) \cos \varphi_2 - R_0 \sin \varphi_2, \\ y_2 &= q \sin \tau, \\ z_2 &= -(q \cos \tau + A) \sin \varphi_2 - R_0 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (96.6)$$

В этих уравнениях

$$q = u - A, \quad \tau = i_{12}(\delta - \varphi_2).$$

На поверхности зубца червячного колеса можно выделить три характерные части (рис. 256): на участке II поверхность зубца червячного колеса является огибающей поверхности зубца; на участках I и III поверхность зубца является линейчатой и воспроизводится входной режущей кромкой (96.5). Линия $A'B'$, общая для участков II и III, находится в средней плоскости колеса и определяется уравнением (96.4). Смыкание этих участков происходит с переломом.

Хотя касание поверхностей червяка и колеса по $A'B'$ является своеобразным геометрическим контактом (в точках касания нет общей нормали к сопрягаемым поверхностям), контакт по этой линии, по мнению Н. И. Колчина, П. С. Зака и других исследователей, способствует увеличению грузоподъемности в первом квадранте, где оси z и y отрицательны (рис. 257). Пусть b — точка контакта по линии $A'B'$, a — точка второй контактной линии. При вращении червяка в указанном направлении в пазуху ab нагнетается смазка, что способствует развитию гидродинамического давления в смазочном слое.

§ 97. Модификации глобoidных червячных передач

1°. Целью модификации является создание преднамеренных отклонений боковой поверхности червяка или червячного колеса с тем, чтобы передача была менее чувствительна к погрешностям изготовления и сборки, легче прирабатывалась и имела бы большую нагрузочную способность.

Нечувствительность к изменению по крайней мере одного параметра может быть достигнута, если воспроизвести поверхность зубцов червячного колеса как огибающую поверхности зубцов глобoidного червяка в двухпараметрическом движении. Так, например, для того, чтобы глобoidная червячная передача стала нечувствительной к погрешностям межосевого расстояния, нарезание зубцов червячного колеса нужно было бы производить при двух независимых друг от друга параметрах, которыми являются: а) угол поворота φ_1 червяка (угол поворота φ_2 червячного колеса жестко связан с φ_1 через передаточное отношение); б) межосевое расстояние A_n , изменяемое в процессе нарезания в определенном интервале ($A \pm \Delta A$) независимо от параметра φ_1 . Рассуждая теоретически, такое колесо нужно было бы нарезать за много проходов, придавая каждый раз новое фиксированное значение межосевому расстоянию A_n . Если при сборке выдержать такое значение A , при котором $|A_n - A| \leq \Delta A$, передача вращения глобoidной червячной передачей будет осуществляться с постоянным передаточным отношением (см. § 38). Для целей практики изложенный способ из-за большого числа проходов является неприемлемым, не говоря уже о том, что остается неясным, как будут сказываться на передаче движения погрешности других параметров.

По указанным причинам основным средством для компенсации погрешностей изготовления и сборки является приработка глобoidной червячной передачи в своем же корпусе. Для уменьшения времени приработки поверхность червяка воспроизводится с преднамеренными отклонениями от теоретической формы, как это было предложено В. А. Шипковым [239], Я. И. Дикером [67] и П. С. Заком [87].

Известны следующие способы модификации глобoidного червячного зацепления [88]: а) изменением при нарезании червяка передаточного отношения зубофрезерного станка по сравнению с передаточным отношением глобoidной червячной передачи; б) изменением при нарезании червяка межосевого расстояния A ; в) сдвигом червяка вдоль оси; г) поворотом плоскости режущих кромок инструмента вокруг линии межосевого расстояния и т. д.

Обычно под модификацией подразумевается удаление некоторых участков поверхности червяка в целях локализации контакта. Здесь это понятие расширено и охватывает также случаи полного изменения поверхностей червяка и колеса по сравнению с поверхностями «классической» передачи Кона.

2°. В настоящем параграфе рассматривается влияние на условия зацепления неполной глобоидности. При нарезании червяка на зубофрезерном станке задается значение $A_n > A$, где A — межосевое расстояние самой передачи. При нарезании на зубофрезерном станке червячного колеса на станке задается межосевое расстояние A , принятое для самой передачи; глобоидная червячная фреза идентична глобоидному червяку.

Влияние погрешностей ΔA в червячной передаче с неполной глобоидностью должно явиться предметом специального исследования. Можно надеяться, что эта передача будет менее чувствительна к погрешностям изготовления и сборки, чем немодифицированная глобоидная передача.

В настоящей книге мы ограничимся лишь определением уравнения зацепления и формы контактных линий в передаче с неполной глобоидностью.

Для вывода уравнения зацепления воспользуемся зависимостью (95.5), в которую подставим выражение (95.3) для r_i . После преобразований уравнение зацепления представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^2 [(1 - \cos \theta) \cos (\delta + \psi_2) + i_{21} \sin \theta \sin (\delta + \psi_2)] + \\ + u \{ R_0 [(1 - \cos \theta) \sin (\delta + \psi_2) - i_{21} \sin \theta \cos (\delta + \psi_2)] - \\ - A_n (1 - \cos \theta) [1 + \cos^2 (\delta + \psi_2) - (A - A_n) \cos^2 (\delta + \psi_2)] \} + \\ + \cos (\delta + \psi_2) (A - A_n \cos \theta) [A_n - R_0 \sin (\delta + \psi_2)] = 0. \end{aligned} \quad (97.1)$$

Для определения линий контакта на поверхности зубцов червяка и колеса нужно рассмотреть совместно уравнение (97.1) и (95.15).

Поверхность зубцов червячного колеса определяется совместно рассматриваемыми уравнениями (97.1), (96.1) и (94.3).

Пример 25. Определим линии контакта глобоидной червячной передачи со следующими параметрами: $m = 2,5$ мм, $z_1 = 1$; $z_2 = 47$; $\alpha = 20^\circ$; $A = 80$ мм. При нарезании червяка кратчайшее межосевое расстояние выбирается равным: а) $A_n = 85$ мм; б) $A_n = 95$ мм. Для того, чтобы получить значение угла подъема червяка на горловой части такое же, как при $A_n = A$, передаточное отношение при нарезании было выбрано равным: а) $i_{21}^* = 0,0196$; б) $i_{21}^* = 0,0182$. Расчет координат контактных линий выполнен по уравнениям (97.1) и (95.15). Результаты вычислений сведены в таблицы XII и XIII, а сами контактные линии изображены на рис. 258 и 259.

Таблица XII

Линии контакта глобоидной червячной передачи
с неполной глобоидностью при $A_n - A = 5$ мм

φ_1	ψ_2	θ	u	x	y	z
-2π	-0,1271	-0,20	49,315	-27,278	5,530	-11,129
	-0,1252	-0,10	55,691	-21,443	2,151	-9,810
	-0,1232	0	57,820	-19,442	0	-9,278
	-0,1212	+0,10	57,140	-19,991	-2,006	-9,281
	-0,1193	+0,20	52,210	-24,411	-4,948	-10,116
	-0,3735	-0,20	48,953	-31,985	6,484	-24,716
-6π	-0,3715	-0,10	55,880	-25,543	2,563	-25,000
	-0,3696	0	58,904	-22,603	0	-25,047
	-0,3676	+0,10	59,402	-21,947	-2,202	-24,951
	-0,3657	+0,20	55,501	-25,388	-5,116	-24,632

Таблица XIII

Линии контакта глобoidной червячной передачи
с неполной глобoidностью при $A_n - A = 10$ мм

φ_1	φ_2	θ	u	x	y	z
-6π	-0,3482	-0,30	47,539	-32,232	9,971	-25,044
	-0,3454	-0,15	56,406	-24,826	3,752	-25,143
	-0,3427	0	59,219	-21,928	0	-25,050
	-0,3400	0,15	59,008	-21,823	-3,298	-24,859
	-0,3373	0,30	52,686	-27,059	-8,370	-24,537
-2π	-0,1197	-0,30	47,494	-28,253	8,740	-11,656
	-0,1170	-0,15	55,546	-21,405	3,235	-9,902
	-0,1142	0	57,854	-19,360	0	-9,254
	-0,1115	0,15	56,684	-20,252	-3,061	-9,298
	-0,1088	0,30	49,785	-25,992	-8,040	-10,526

Анализируя полученные линии контакта, можно установить, что при увеличении $\Delta A = A_n - A$ их форма приближается к форме линии контакта червячной

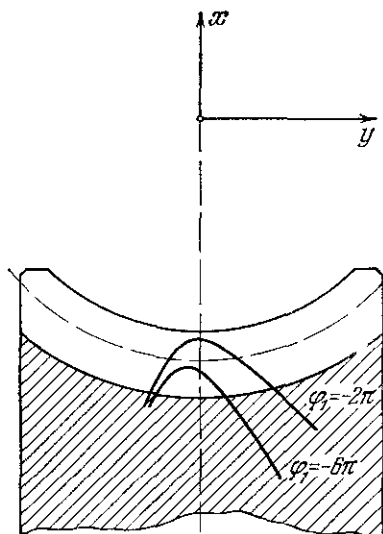


Рис. 258.

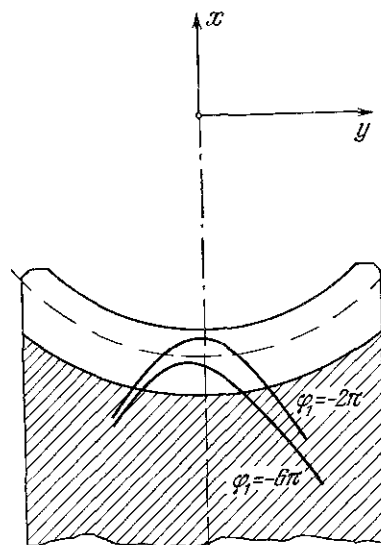


Рис. 259.

передачи с вогнутым профилем червяка. Значительное увеличение разности $\Delta A = A_n - A$ может, видимо, привести к понижению нагрузочной способности глобoidной передачи.

Глава XIV

Ортогональная цилиндро-гипоидная передача

§ 98. Введение

На рис. 260 и 261 изображены соответственно: а) ортогональная цилиндро-коническая передача, б) ортогональная цилиндро-гипоидная, в) цилиндро-коническая передача с углом скрещивания осей, отличающимся от 90° .

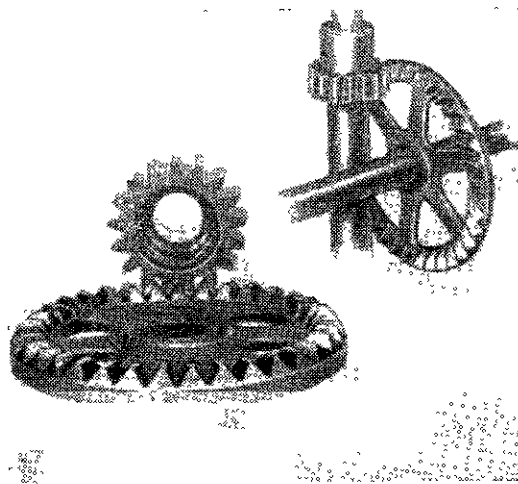


Рис. 260.

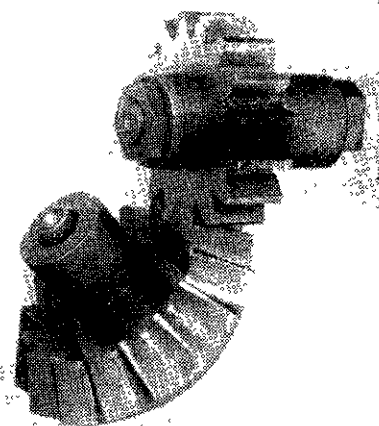


Рис. 261.

На рис. 262 изображен дифференциал, у которого сателлиты и центральные колеса образуют ортогональные цилиндро-конические передачи. У каждой из представленных передач имеется колесо, зубцы которого располагаются на торцовой или конической поверхности. Нарезание зубцов на таком колесе может быть выполнено посредством приспособления к зубодолбежному станку (рис. 263); при нарезании зубцов оси колеса и долбяка могут скрещиваться или пересекаться.

Цилиндро-конические передачи находят наибольшее применение в приборостроении и в легком машиностроении, так как погрешности изготовления и сборки таких передач ниже, чем для передач, составленных из обычных конических колес. Важным преимуществом указанных передач является возможность регулирования бокового зазора без нарушения правильности зацепления. К недостаткам цилиндрико-конических

передач нужно отнести: а) необходимость в большом комплекте долбяков; б) ограниченность длины зубцов колеса вследствие подрезания и заострения зубцов, что лимитирует нагрузочную способность передачи.

Теория зацепления цилиндро-конических передач и их геометрический расчет были впервые в нашей отечественной литературе разработаны Я. С. Давыдовым и изложены в его глубокой по содержанию монографии [55]. Эти исследования были затем продолжены К. А. Боголюбским, Л. Я. Либуриным [156-159] и др. За границей цилиндри-



Рис. 262.

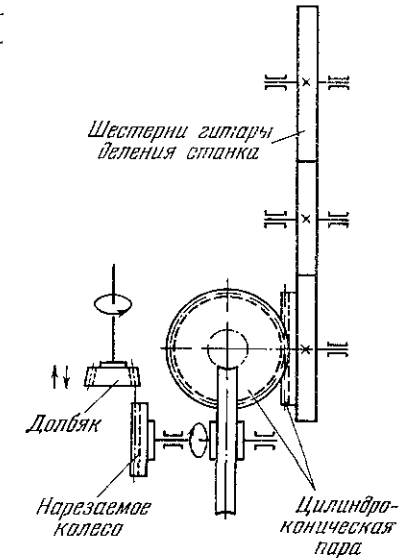


Рис. 263.

коническим передачам были посвящены работы Э. Бакингема [272], Френсиса и Сильваджи [280], Дорнига и Массы [276] и др.

Материалы настоящей главы и двух последующих основываются на исследовании, выполненном автором книги, и на работах Л. Я. Либурина [156-159], выполненных им под нашим руководством.

§ 99. Уравнение зацепления, линии контакта и поверхность зацепления цилиндрико-гипоидной передачи

1°. Колесо 2 нарезается прямозубым эвольвентным долбяком при угле скрещивания осей 90° . Приняты системы координат S_1 и S_2 , связанные с долбяком и колесом 2, неподвижная система координат S (рис. 264). Расположение этих систем такое же, как на рис. 45, но угол $\gamma = 90^\circ$, а для системы координат S_1 индекс 1 заменен на «и».

Будем различать правую и левую поверхности зубцов долбяка с торцовыми профилями $\beta - \beta$ и $\gamma - \gamma$ (рис. 265). Уравнения этих поверхностей и ортов нормалей к ним таковы:

$$r_{и} = \pm r_{0и} [\sin(\vartheta_0 + \vartheta_k) - \vartheta_k \cos(\vartheta_0 + \vartheta_k)] i_{и} - r_{0и} [\cos(\vartheta_0 + \vartheta_k) + \vartheta_k \sin(\vartheta_0 + \vartheta_k)] j_1 + u k_{и}, \quad (99.1)$$

$$e_{и} = \mp \cos(\vartheta_0 + \vartheta_k) i_1 - \sin(\vartheta_0 + \vartheta_k) j_{и}. \quad (99.2)$$

В приведенных уравнениях нижний индекс $k = \gamma, \beta$ относится соответственно к профилям $\gamma - \gamma$ и $\beta - \beta$; $2\vartheta_0$ — угловая ширина впадины

на основной окружности радиуса $r_{0н}$; в местах применения двойных знаков верхний относится к поверхности с профилем $\gamma - \gamma$.

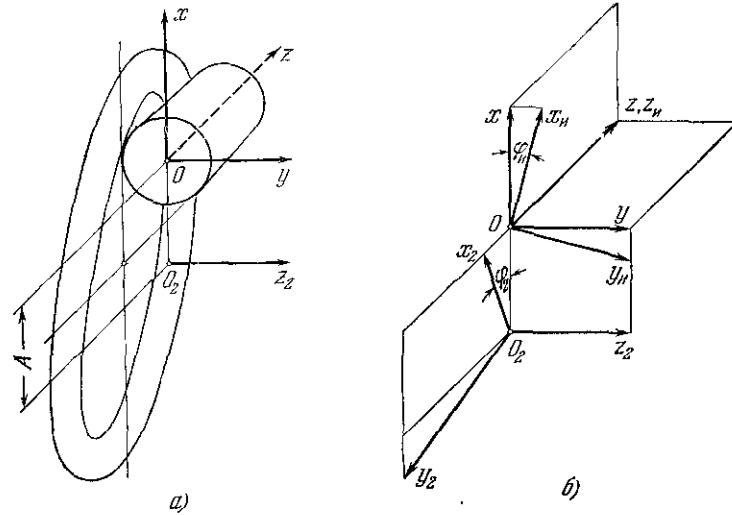


Рис. 264.

Для долбяка средней изношенности ($\xi_{и} = 0$)

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2z_d} - \text{inv } \alpha_d,$$

где z_d — число зубцов долбяка.

2°. Уравнение зацепления долбяка и колеса 2 найдем, используя условие $e_{и} v_{и}^{(и2)} = 0$; $v_{и}^{(и2)}$ определяется уравнениями (23.11), в которых нужно принять $\gamma = 90^\circ$, индекс 1 заменить на индекс «и». После преобразований получим

$$u = \frac{r_{0и}}{i_{2и} \cos \theta_k}. \quad (99.3)$$

Здесь $\theta_k = \varphi_{и} \pm (\vartheta_0 + \vartheta_k)$, $k = \gamma, \beta$, $i_{2и} = \frac{z_d}{z_2}$, где z_d и z_2 — числа зубцов долбяка и колеса 2.

3°. Линии контакта на поверхности долбяка определяются при совместном рассмотрении уравнений (99.1) и (99.3). Важно отметить, что форма линий контакта не зависит от величины кратчайшего расстояния между осями A .

Контактные линии целесообразно рассматривать в системе координат $r_{и}, z_{и}$, где

$$r_{и} = \sqrt{x_{и}^2 + y_{и}^2} = r_{0и} \sqrt{1 + \vartheta_k^2}, \quad z_{и} = \frac{r_{0и}}{i_{2и} \cos \theta_k}. \quad (99.4)$$

На рис. 266 изображены линии контакта для поверхности с профилем $\beta - \beta$, вычисленные при следующих данных: $i_{2и} = 25/44$; $z_d = 25$;

30*

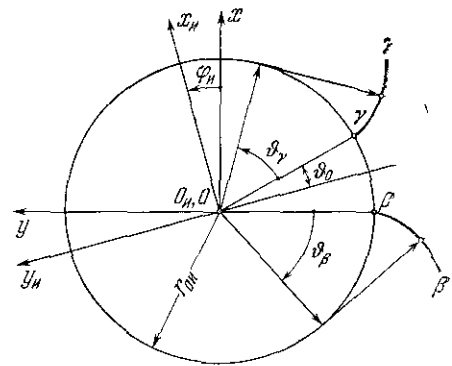


Рис. 265.

угол профиля исходного контура $\alpha_d = 20^\circ$. Для удобства вычислений принято $\vartheta_0 = 0$, что равносильно изменению начала отсчета для ϑ_k .

4°. Поверхность зацепления долбяка с колесом 2 определится уравнениями:

$$r^{(u)} = M_{0u} r_u, \quad u = \frac{r_0}{i_{2u} \cos \theta_k}. \quad (99.5)$$

Матрицу M_{0u} получим, используя выражение (22.2), в котором индекс 1 должен быть заменен на индекс «и».

После преобразований получим следующее уравнение для поверхности зацепления:

$$r^{(u)} = r_{0u} \left[(\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) i - (\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k) j + \frac{1}{i_{21} \cos \theta_k} k \right]. \quad (99.6)$$

Поверхность зацепления (99.6) является линейчатой поверхностью. Это совпадает с ранее полученным результатом (см. § 86), согласно которому поверхность зацепления — линейчатая поверхность, если одно из звеньев передачи — эвольвентный геликоид. Все образующие этой поверхности параллельны плоскости $z = 0$ и касаются основ-

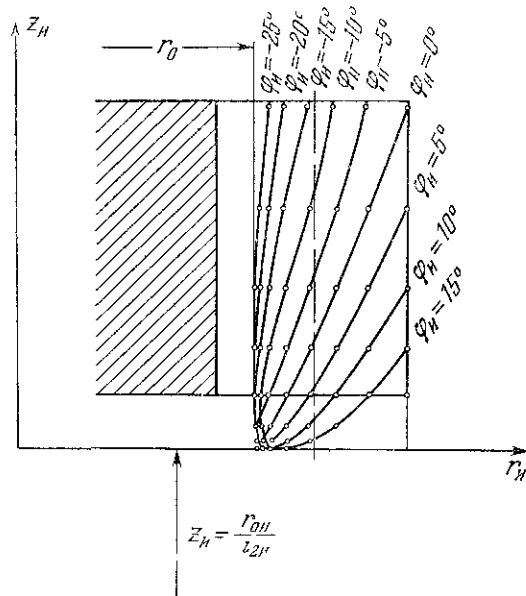


Рис. 266.

ного цилиндра долбяка. Одна из этих образующих

$$\theta_k = 0, \quad x = \mp r_{0u} \vartheta_k, \quad y = -r_{0u}, \quad z = \frac{r_{0u}}{i_{2u}} \quad (99.7)$$

параллельна оси x и из всех образующих является ближайшей к плоскости xOy . Само собой разумеется, что все образующие проходят через ось зацепления [см. (31.52) и (31.53), $p = \infty$]

$$\operatorname{tg} \theta_k = \pm \vartheta_k, \quad x = 0, \quad y = -\frac{r_{0u}}{\cos \theta_k}, \quad z = \frac{r_{0u}}{i_{2u} \cos \theta_k}, \quad (99.8)$$

которая принадлежит поверхности зацепления и одновременно плоскости $x = 0$.

§ 100. Уравнения поверхности зубцов колеса.

Определение условий отсутствия подрезания и заострения

1°. Поверхность зубцов колеса 2 определится уравнениями:

$$r_2 = M_{2u} r_u, \quad u = \frac{r_{0u}}{i_{2u} \cos \theta_k}. \quad (100.1)$$

Матрицу M_{2u} получим из (22.6), в которых нужно принять $\gamma = 90^\circ$,

а индекс 1 заменить на «и». После преобразований найдем

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_{0и} \left[\cos \varphi_2 (\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) - \frac{\sin \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} + \frac{A}{r_{0и}} \cos \varphi_2 \right], \\ y_2 &= -r_{0и} \left[\sin \varphi_2 (\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) + \frac{\cos \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} + \frac{A}{r_{0и}} \sin \varphi_2 \right], \\ z_2 &= -r_{0и} (\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k). \end{aligned} \right\} \quad (100.2)$$

Орт нормали к поверхности (100.2) определим, воспользовавшись матричным равенством

$$e_2 = L_{2и} e_{и}. \quad (100.3)$$

Матрица третьего порядка $L_{2и}$ находится по матрице $M_{2и}$, для чего в последней нужно зачеркнуть последнюю строку и последний столбец. После преобразований найдем

$$e_2 = \mp \cos \varphi_2 \cos \theta_k i_2 \pm \sin \varphi_2 \cos \theta_k j_2 \mp \sin \theta_k k_2. \quad (100.4)$$

В приведенных уравнениях $\varphi_2 = \varphi_{и} i_{2и}$.

2°. Для определения условий отсутствия подрезания зубцов колеса 2 воспользуемся методом, изложенным в § 36. Граничные точки на поверхности зубцов долбяка получим, используя выражение, аналогичное (36.41):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_{и}} \\ \frac{\partial x_{и}}{\partial u} & \frac{\partial x_{и}}{\partial \vartheta_k} & v_{xi}^{(и2)} \\ \frac{\partial z_{и}}{\partial u} & \frac{\partial z_{и}}{\partial \vartheta_k} & v_{zi}^{(и2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (100.5)$$

Последняя строка в определителе (100.5) в отличие от (36.41) составлена из элементов $\partial z_{и}/\partial u$, $\partial z_{и}/\partial \vartheta_k$ и $v_{zi}^{(и2)}$ вместо элементов $\partial y_{и}/\partial u$, $\partial y_{и}/\partial \vartheta_k$ и $v_{yi}^{(и2)}$. В § 36 мы уже отметили, что при составлении системы линейных уравнений (36.38) и (36.40) можно воспользоваться двумя любыми равенствами из трех равенств (д) системы (36.37). При записи элементов последнего столбца принято, что $d\varphi_{и}/dt = 1 \text{ рад/сек}$.

Частные производные $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial \vartheta_k$ и $\partial f/\partial \varphi_{и}$ определим, представив уравнение зацепления (99.3) в таком виде:

$$f(u, \vartheta_k, \varphi_{и}) = u - \frac{r_{0и}}{i_{2и} \cos [\varphi_{и} \pm (\vartheta_0 + \vartheta_k)]} = 0. \quad (100.6)$$

Для определения $v_{xi}^{(и2)}$ и $v_{zi}^{(и2)}$ воспользуемся выражениями (23.11), приняв в них угол перекрещивания осей $\gamma = 90^\circ$. Частные производные $\partial x_{и}/\partial u$, $\partial x_{и}/\partial \vartheta_k$, $\partial z_{и}/\partial u$ и $\partial z_{и}/\partial \vartheta_k$ определим, используя уравнение (99.1).

В результате, после преобразований, получим следующее уравнение связи между параметрами u , ϑ_k и $\varphi_{и}$:

$$\sin^2 \theta_k \pm i_{2и}^2 \vartheta_k \left(\frac{A}{r_{0и}} + \sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k \right) \cos^3 \theta_k = 0, \quad (100.7)$$

где

$$\theta_k = \varphi_{и} \pm (\vartheta_0 + \vartheta_k).$$

Ограничимся определением точки пересечения граничной линии L с цилиндром выступов долбяка. Исследования подтверждают, что именно эта точка граничной линии определяет наименьшее значение радиуса R_1 колеса 2, допустимое из условий отсутствия подрезания зубцов. В подтверждение этого сошлемся на рис. 270, на котором изображена граничная линия L для ортогональной цилиндрико-конической передачи (см. § 103).

Согласно уравнению (99.1)

$$r_{eи} = \sqrt{x_{1e}^2 + y_{1e}^2} = r_{0и} \sqrt{1 + \vartheta_{eи}^2} = r_{0и} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{eи}}, \quad (100.8)$$

где $r_{eи}$ — радиус цилиндра выступов долбяка, $\alpha_{eи}$ — угол давления в точке пересечения эвольвентного профиля с окружностью выступов.

Для определения значения радиуса R_1 колеса 2, допустимого из условий отсутствия подрезания зубцов, нужно воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\sin^2 \theta_k \pm i_{2и}^2 \vartheta_{ke} \left(\frac{A}{r_{0и}} + \sin \theta_k \mp \vartheta_{ke} \cos \theta_k \right) \cos^3 \theta_k = 0, \quad (100.9)$$

$$R_1 = r_{0и} \sqrt{\left[(\sin \theta_k \mp \vartheta_{ke} \cos \theta_k) + \frac{A}{r_{0и}} \right]^2 + \left(\frac{1}{i_{2и} \cos \theta_k} \right)^2}. \quad (100.10)$$

Уравнение (100.10) получено следующим образом. На основании матрицы (22.5) для преобразования координат

$$R_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x+A)^2 + z^2}. \quad (100.11)$$

Подставив в (100.11) выражения (99.6) для x и z , получим уравнение (100.10).

Условия отсутствия подрезания на поверхностях обеих сторон зубца неодинаковы. При $A > 0$ (ось долбяка находится над осью колеса 2, см. рис. 264) большее подрезание вызывается поверхностью зубца долбяка с профилем $\beta - \beta$, и в формулах (100.9) и (100.10) в местах с двойным знаком нужно выбрать нижний знак. Наоборот, при $A < 0$ (ось долбяка ниже оси колеса 2) наибольшее подрезание вызывается поверхностью зубца долбяка с профилем $\gamma - \gamma$, и в формулах (100.9) и (100.10) нужно выбрать верхний знак.

3°. Радиус R_1 , вычисленный по формуле (100.10), является наименьшим (внутренним) радиусом зубчатого венца колеса 2. Наибольший (внешний) радиус венца должен быть определен из условий отсутствия заострения зубцов колеса 2.

Рассечем поверхности обеих сторон зубца колеса 2 плоскостью, проведенной через выступы зубца. Такая плоскость является касательной к цилиндру радиуса $r_{ми} = r_{ди} - m$, ось которого совпадает с осью долбяка. При числе зубцов долбяка $z_{и} < 33$ и $\alpha_{д} = 20^\circ$ ($r_{ди} - m < r_{0и}$). В этом случае нужно принять $r_{ми} = r_{0и}$, так как плоскость, касательная к основному цилиндру долбяка, определяет граничные размеры поверхностей зубца колеса 2. Сечения поверхностей обеих сторон зубца колеса 2 получим, приняв в уравнениях (100.2) $z_2 = -r_{ми}$.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_k &= \pm \left(\frac{r_{ми}}{r_{0и} \sin \theta_k} - \operatorname{ctg} \theta_k \right), \quad \varphi_k = \theta_k \mp (\vartheta_0 + \vartheta_k), \quad \varphi_2 = \varphi_{и} i_{2и}, \\ x_2 &= r_{0и} \left[\cos \varphi_2 (\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) - \frac{\sin \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} + \frac{A}{r_{0и}} \cos \varphi_2 \right], \\ y_2 &= -r_{0и} \left[\sin \varphi_2 (\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) + \frac{\cos \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} + \frac{A}{r_{0и}} \sin \varphi_2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (100.12)$$

По уравнениям (100.12) координаты x_2 и y_2 вычисляются дважды: один раз при верхнем, другой раз при нижнем знаках в формулах (100.12). Точка пересечения двух вычисленных таким образом кривых и определяет наибольший внешний радиус зубчатого венца колеса 2, допустимый из условий отсутствия заострения зубцов.

§ 101. Локализация контакта

Если в цилиндрико-гипоидной передаче число зубцов колеса 1 выбрать равным числу зубцов долбяка z_d , контакт поверхностей зубцов колес 1 и 2 в передаче будет линейным. Так как при наличии погрешностей изготовления и сборки возникает опасность кромочного контакта, целесообразно контакт поверхностей локализовать, назначив число зубцов колеса 1 $z_1 < z_d$.

Представим, что поверхность зубцов долбяка F одновременно нарекает поверхность зубцов Σ_2 колеса 2 и поверхность Σ_1 зубцов колеса 1.

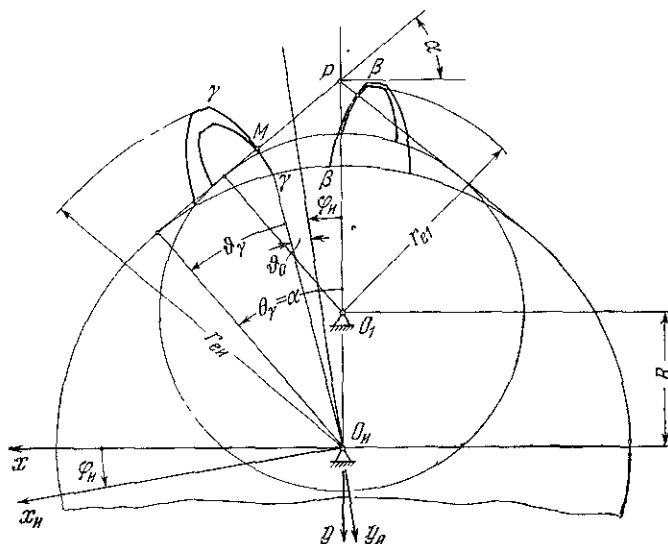


Рис. 267.

Поверхности F и Σ_1 находятся во внутреннем касании (рис. 267). Как станет яснее из последующего рассмотрения, линии контакта F и Σ_2 ($D^{(F2)}$), F и Σ_1 ($D^{(F1)}$) не совпадают друг с другом, но имеют общую точку. Поверхности Σ_1 и Σ_2 будут находиться в точечном касании, передавая вращение с постоянным передаточным отношением (см. § 38).

Полюс зацепления P долбяка и колеса 1 является точкой пересечения общей касательной к основным окружностям r_{01} и r_{02} с линией центров O_1 и O_2 (рис. 267). В неподвижной системе координат S линия контакта $D^{(F1)}$ проходит через точку M эвольвентного профиля долбяка $\gamma - \gamma$ с углом развернутости ϑ_γ (рис. 267). Из построений рисунка очевидно, что

$$\theta_\gamma = \vartheta_0 + \vartheta_\gamma + \varphi_H = \alpha = \text{const}, \quad (101.1)$$

где α — угол зацепления долбяка и колеса 1.

Аналогичные результаты получим, рассмотрев зацепление профиля $\beta - \beta$ долбяка с соответствующим профилем зуба колеса 1. На этом основании

$$\theta_k = \alpha = \arccos \left(\frac{r_{01} - r_{02}}{B} \right), \quad (101.2)$$

где $\theta_k = \varphi_H \pm (\vartheta_0 + \vartheta_k)$ ($k = \gamma, \beta$).

Линия зацепления поверхностей Σ_1 и Σ_2 найдется как линия пересечения двух поверхностей: поверхности зацепления долбяка с колесом 2 и поверхности зацепления долбяка с колесом 1. Для определения указанной линии зацепления достаточно рассмотреть совместно уравнения (101.2) и (99.6). Очевидно, что линия зацепления является касательной к основным окружностям r_{01} и r_{02} и принадлежит плоскости

$$z = \frac{r_{02}}{i_{21} \cos \alpha}. \quad (101.3)$$

Значение z зависит от величины угла зацепления α долбяка и колеса 1. Корректируя колесо 1, можно добиться такого значения угла зацепления α , при котором линия зацепления колес 1 и 2 расположится в плоскости, проходящей через середину длины зубцов колеса 1. При $\xi_1 < 0$ угол зацепления $\alpha > \alpha_d$ (колесо 1 и долбяк находятся во внутреннем зацеплении), значение z возрастает по сравнению со случаем, когда $\alpha = \alpha_d$. Формулы для определения величины коэффициента ξ_1 (см. § 102) получены на основании зависимостей гл. IV.

Разность $z_d - z_1$ числа зубцов долбяка и колеса 1 сказывается на величине мгновенной площадки контакта поверхностей зубцов колес 1 и 2.

Для определения величины мгновенной площадки контакта нужно воспользоваться материалами § 37.

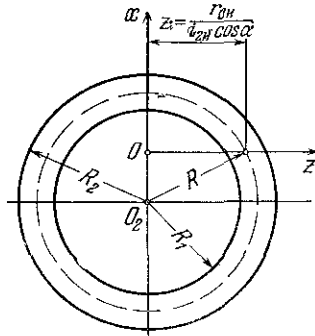


Рис. 268.

§ 102. Геометрический расчет

Будем считать заданными: а) параметры долбяка ($z_d, m, \xi_d, f_0, c_0, \alpha_d$); б) передаточное отношение передачи $i_{21} = \frac{z_1}{z_2}$ ($z_d - z_1 = 1 \div 5$); величину гипоидного смещения A (рекомендуется, чтобы $|A| < \frac{mz_2}{4}$).

1°. Внутренний радиус зубчатого венца колеса определяется из условий отсутствия подрезания зубцов по следующим формулам:

$$\sin^2 \theta_k \pm i_{21}^2 \operatorname{tg} \alpha_{en} \left[\frac{A}{r_{02}} + \sin \theta_k \mp \operatorname{tg} \alpha_{en} \cos \theta_k \right] \cos^3 \theta_k = 0, \quad (102.1)$$

$$R_1 = r_{02} \sqrt{\left(\frac{A}{r_{02}} + \sin \theta_k \mp \operatorname{tg} \alpha_{en} \cos \theta_k \right)^2 + \frac{1}{i_{21}^2 \cos^2 \theta_k}}. \quad (102.2)$$

Уравнение (102.1) решается по методу последовательных приближений. Верхний и нижний знаки относятся соответственно к случаям, когда $A > 0$ (ось колеса 1 находится над осью колеса 2, см. рис. 264) и когда $A < 0$ (ось колеса 1 находится ниже оси колеса 2).

2°. Наружный радиус R_2 зубчатого венца колеса 2 определяется с помощью формул (100.12).

3°. Угол зацепления α колеса 1 и долбяка находится из следующих формул (рис. 268):

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}, \quad z = \sqrt{R^2 - A^2} = \frac{r_{02}}{i_{21} \cos \theta_k} = \frac{r_{02}}{i_{21} \cos \alpha}.$$

Здесь R — средний радиус зубчатого венца колеса 2, z — размер, определяющий положение плоскости, в которой находится линия зацепления колес 1 и 2.

Для непосредственного определения угла зацепления α нужно воспользоваться формулой

$$\cos \alpha = \frac{r_{0н}}{z_{2н} \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 - A^2}}. \quad (102.3)$$

4°. Коэффициент смещения исходного контура при нарезании колеса 1 определяется из формулы [см. (49.2)]

$$\xi_1 = \frac{(z_d - z_1) (\operatorname{inv} \alpha_d - \operatorname{inv} \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha_d}. \quad (102.4)$$

Предполагается, что колесо 1 находится в зацеплении с долбяком средней изношенности и $\xi_d = 0$.

5°. Расстояние от оси колеса 1 до средней плоскости колеса 2 (рис. 269)

$$c = \frac{m}{2} \left[z_d - (z_d - z_1) \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha} \right]. \quad (102.5)$$

6°. Предполагая, что долбяк имеет среднюю изношенность ($\xi_d = 0$), радиус окружности выступов колеса 1 найдем из выражения

$r_{e1} = r_{en} - c_0 m - B = r_{дн} + m f_0 - B$.
Здесь $f_0 = 1$ — коэффициент высоты головки исходного контура, c_0 — коэффициент высоты скругленной части зуба исходного контура,
 $B = m \frac{z_d - z_1 \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha}$ — расстояние между осями долбяка и колеса 1 (рис. 267).

Отсюда следует

$$r_{e1} = m \left[\frac{z_d}{2} - \frac{(z_d - z_1) \cos \alpha_d}{2 \cos \alpha} + f_0 \right]. \quad (102.6)$$

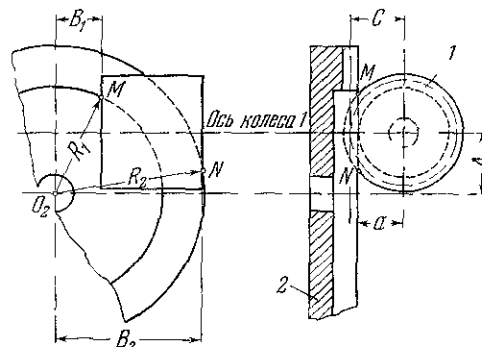


Рис. 269.

7°. Монтажные размеры B_1 и B_2 , определяющие положения торцовых плоскостей колеса 1 от оси колеса 2, находятся из следующих приближенных формул (рис. 269):

$$B_1 = \sqrt{R_1^2 - (|A| + \sqrt{r_{en}^2 - a^2})^2}$$

$$B_2 = \sqrt{R_2^2 - (|A| - \sqrt{r_{en}^2 - a^2})^2},$$

где a — расстояние плоскости выступов колеса 2 от оси долбяка.

Приняв, что $r_{en} = r_{дн} + 1,25 m$, $a = r_{дн} - m$, после преобразования получим

$$B_1 \approx \sqrt{R_1^2 - (|A| + 1,5 m \sqrt{z_n})^2}, \quad (102.7)$$

$$B_2 \approx \sqrt{R_2^2 - (|A| - 1,5 m \sqrt{z_n})^2}. \quad (102.8)$$

Глава XV

Ортогональная цилиндро-коническая передача

§ 103. Основные расчетные зависимости

Для перехода от ортогональной цилиндро-гипоидной передачи к ортогональной цилиндро-конической передаче в зависимостях гл. XIV нужно принять $A = 0$.

1°. Линии контакта на поверхности долбяка определяются по-прежнему уравнениями (99.1) и (99.3). Поверхность зацепления долбяка и колеса 2 выражается уравнением (99.6).

2°. Поверхность зубцов колеса 2 определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_{0и} \left[\cos \varphi_2 (\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) - \frac{\sin \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} \right], \\ y_2 &= -r_{0и} \left[\sin \varphi_2 (\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) + \frac{\cos \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} \right], \\ z_2 &= -r_{0и} (\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k). \end{aligned} \right\} \quad (103.1)$$

Здесь $\theta_k = \varphi_{и} \pm (\vartheta_0 + \vartheta_k)$; индекс $k = \gamma, \beta$ отмечает профили $\gamma - \gamma$ и $\beta - \beta$ (рис. 265); верхний знак относится к профилю $\gamma - \gamma$.

Уравнение (100.4) орта нормали остается без изменений.

3°. В ортогональной цилиндро-конической передаче условия подрезания одинаковы для поверхностей обеих сторон зубца колеса 2. Для определения внутреннего радиуса R_1 зубчатого венца нужно воспользоваться уравнениями (100.9) и (100.10), приняв в них $A = 0$. Преобразуем уравнение (100.9), представив его в таком виде:

$$\operatorname{tg}^2 \theta (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) - i_{2и}^2 \vartheta_e^2 + i_{2и}^2 \vartheta_e \operatorname{tg} \theta = 0 \quad (103.2)$$

Здесь

$$\theta = \vartheta_0 + \vartheta_e + \varphi_{и}; \quad \vartheta_e = \operatorname{tg} \alpha_{еи},$$

где $\alpha_{еи}$ — угол давления на окружности выступов долбяка. Так как условия подрезания для поверхностей обеих сторон зубца одинаковы, индекс $k = \gamma, \beta$ в формуле (103.2) опущен, вместо двойного знака принят знак, соответствующий поверхности с индексом γ . В пределах поворота на один зубец значение θ достаточно мало, и величиной $\operatorname{tg}^4 \theta$ в уравнении (103.2) можно пренебречь.

Из уравнения (103.2) получим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{i_{2и} \operatorname{tg} \alpha_{еи}}{2} (\sqrt{i_{2и}^2 + 4} - i_{2и}). \quad (103.3)$$

для определения R_2 :

$$\theta_v - \vartheta_0 - \frac{r_{mн}}{r_{0н}} \sin \theta_v = 0, \quad (103.10)$$

$$\vartheta_v = \frac{\frac{r_{mн}}{r_{0н}} - \cos \theta_v}{\sin \theta_v}, \quad (103.11)$$

$$\varphi_2 = i_{2н} (\theta_v - \vartheta_v - \vartheta_0), \quad (103.12)$$

$$R_2 = -y_2 = \frac{r_{0н}}{i_{2н} \cos \theta_v \cos \varphi_2}. \quad (103.13)$$

Уравнение (103.10) решается по методу последовательных приближений. Если пойти на еще большие упрощения и принять $\cos \varphi_2 \approx 1$, значение R_2 , минуя вычисления параметров ϑ_v и φ_2 , можно определить из уравнения

$$R_2 = \frac{r_{0н}}{i_{2н} \cos \theta_v}. \quad (103.14)$$

5°. Для локализации контакта поверхностей зубцов колес 1 и 2 необходимо, чтобы число зубцов колеса $z_1 < z_d$. Угол зацепления α колеса 1 и долбяка, находящихся как бы во внутреннем зацеплении, определяется из формулы (102.3), в которой нужно принять $A = 0$. Для того чтобы линия зацепления колес 1 и 2 оказалась в плоскости, проходящей через середину длины зубцов колеса 1, необходимо, чтобы угол зацепления $\alpha > \alpha_d$. Это требует коррекции колеса 1 со смещением исходного контура $\xi_1 < 0$. Величина ξ_1 определяется из формулы (102.4).

§ 104. Геометрический расчет ортогональной цилиндрико-конической передачи

Исходные данные: а) параметры долбяка: $z_d, m, \xi_d, f_0, c_0, \alpha_d$; б) передаточное отношение $i_{21} = z_1/z_2$. Разность $z_d - z_1 = 1 \div 5$ и выбирается, исходя из ожидаемых размеров пятна контакта (см. § 37).

1°. Внутренний радиус R_1 зубчатого венца определяется из условий отсутствия подрезания зубцов по формулам (103.3) и (103.4).

2°. Внешний радиус R_2 зубчатого венца определяется из условий отсутствия заострения зубцов по формулам (103.10)–(103.13).

3°. Расчет значений α, ξ_1, c и r_{e1} производится по формулам, приведенным в § 102.

Глава XVI

Неортогональная цилиндро-коническая передача

§ 105. Уравнение зацепления, линии контакта и поверхность зацепления

1°. Нарезание колеса 2 производится эвольвентным долбяком. Оси z_k и z_2 долбяка и колеса 2 пересекаются, образуя угол $\gamma = 180^\circ - \delta_2$, где δ_2 — угол делительного конуса колеса 2 (рис. 271). Используем при исследовании системы координат S_k и S_2 , жестко связанные с долбяком и колесом 2, неподвижную систему координат S . Матрицы перехода

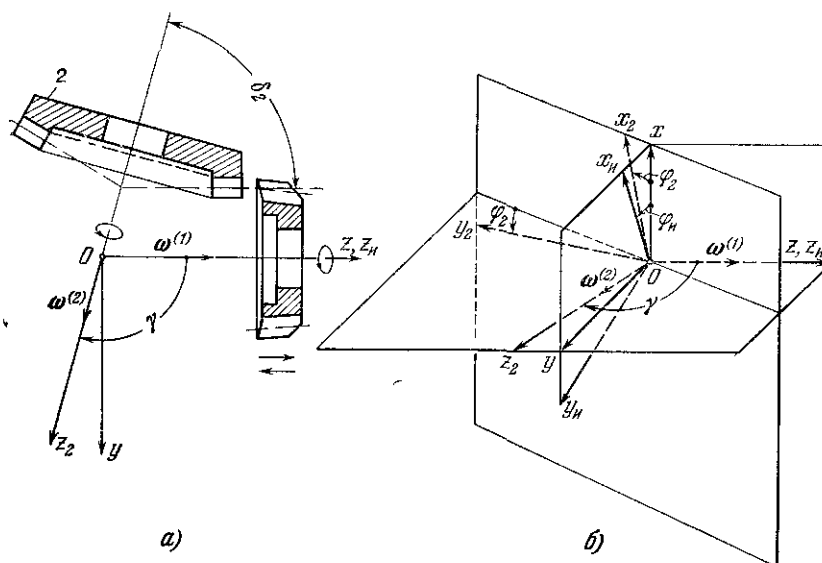


Рис 271.

M_{10} , M_{12} , M_{02} совпадают с матрицами M_{10} , M_{12} , M_{02} , приведенными в § 22, с учетом следующих отличий: а) $A = 0$; б) индекс 1 заменен на индекс «и».

2°. Поверхности обеих сторон зубца долбяка и орты нормалей к ним определяются в системе S_k уравнениями (99.1) и (99.2). Для определения уравнения зацепления воспользуемся условием

$$e_{ii} v_i^{(n2)} = 0.$$

Вектор скорости относительного движения определяется уравнениями (23.11), в которых применительно к рассматриваемому случаю нужно заменить индекс 1 на «и», принять $A = 0$.

После преобразований получим

$$f(u, \vartheta_k, \varphi_k) = r_{0и} (1 - i_{2и} \cos \gamma) - u i_{2и} \sin \gamma \cos \theta_k = 0. \quad (105.1)$$

Здесь $\theta_k = \varphi_k \pm (\vartheta_0 + \vartheta_k)$, $k = \gamma, \beta$. Верхний знак относится к поверхности долбяка с профилем $\gamma - \gamma$.

Линии контакта на поверхности зубца долбяка определяются совместно рассмотренными уравнениями (99.1) и (105.1).

3°. Поверхность зацепления долбяка и колеса 2 определится в системе S в результате совместного рассмотрения уравнения зацепления (105.1) и матричного равенства

$$r^{(и)} = M_{0и} r_{и}. \quad (105.2)$$

После преобразований, аналогично уравнению (99.6), получим

$$r^{(и)} = r_{0и} \left[(\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) i - (\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k) j + \frac{1 - i_{2и} \cos \gamma}{i_{2и} \sin \gamma \cos \theta_k} k \right]. \quad (105.3)$$

§ 106. Поверхность зубцов конического колеса.

Определение условий отсутствия подрезания и заострения

1°. Поверхность зубцов колеса 2 определится в результате совместного рассмотрения уравнения (105.3) и матричного равенства

$$r_2 = M_{20} r^{(и)}. \quad (106.1)$$

Матрица M_{20} определится на основании выражения (22.5), в котором нужно принять $A = 0$. Прделаав это, получим

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_{0и} \left[(\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) \cos \varphi_2 - \right. \\ &\quad \left. - (\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k) \cos \gamma \sin \varphi_2 - \frac{(1 - i_{2и} \cos \gamma) \sin \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} \right], \\ y_2 &= -r_{0и} \left[(\sin \theta_k \mp \vartheta_k \cos \theta_k) \sin \varphi_2 + \right. \\ &\quad \left. + (\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k) \cos \gamma \cos \varphi_2 + \frac{(1 - i_{2и} \cos \gamma) \cos \varphi_2}{i_{2и} \cos \theta_k} \right], \\ z_2 &= -r_{0и} \left[(\cos \theta_k \pm \vartheta_k \sin \theta_k) \sin \gamma - \frac{(1 - i_{2и} \cos \gamma) \operatorname{ctg} \gamma}{i_{2и} \cos \theta_k} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (106.2)$$

2°. Определение условий отсутствия подрезания конического колеса выполним так же, как и в случае цилиндрико-гипоидной передачи.

Для определения параметров u и ϑ_k граничной линии на поверхности зубца долбяка воспользуемся уравнением зацепления (105.1) и выражением (100.5). После преобразований получим

$$\begin{aligned} \vartheta_k^2 \pm \vartheta_k \left[\frac{i_{2и} \cos 2\gamma - \cos \gamma + \cos \gamma (i_{2и} \cos \gamma - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_k}{i_{2и} \sin^2 \gamma} \right] \operatorname{tg} \theta_k - \\ - \frac{(1 - i_{2и} \cos \gamma)^2}{i_{2и}^2 \sin^2 \gamma} \operatorname{tg}^2 \theta_k (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_k) = 0. \end{aligned} \quad (106.3)$$

Уравнения (106.3) и (105.1), рассматриваемые совместно, позволяют найти параметры ϑ_k и u точек граничной кривой на поверхности зубцов

долбяка. При фиксированном значении θ_k из уравнения (106.3) определяем ϑ_k , а из (105.1) значение u .

Поверхности обеих сторон зубца колеса 2 расположены симметрично, и условия их подрезания одинаковы. Поэтому при вычислениях по уравнениям (105.1) и (106.3) можно исходить из параметров поверхности любой стороны зубца долбяка ($k = \gamma, \beta$). Внутренняя граница зоны подрезания определяется точкой пересечения граничной линии с цилиндром выступов долбяка. Этой точке соответствует значение $\vartheta_k = \vartheta_{ke} = \text{tg } \alpha_{en}$, где α_{en} — угол давления эвольвентного профиля в точке пересечения его с окружностью выступов долбяка. Так как значение $\text{tg } \theta_k$, соответствующее ϑ_{ke} , достаточно мало, членами, содержащими $\text{tg}^3 \theta_k$ и $\text{tg}^4 \theta_k$, можно пренебречь. С учетом этого уравнению (106.3) можно придать следующую форму:

$$\text{tg}^2 \theta_k \mp \text{tg } \theta_k \left[\frac{i_{2n} (i_{2n} \cos 2\gamma - \cos \gamma)}{(1 - i_{2n} \cos \gamma)^2} \text{tg } \alpha_{en} \right] - \frac{i_{2n}^2 \sin^2 \gamma}{(1 - i_{2n} \cos \gamma)^2} \text{tg}^2 \alpha_{en} = 0. \quad (106.4)$$

Определив из формулы (106.4) θ_k , находим затем из уравнения (105.3) поверхности зацепления координату $z^{(n)}$ граничной точки в неподвижной системе координат S . Из построений рис. 272 следует

$$L_1 = z^{(n)} + r_{\text{ди}} \text{ctg } \gamma, \quad (106.5)$$

где

$$z^{(n)} = \frac{r_{0n} (1 - i_{2n} \cos \gamma)}{i_{2n} \sin \gamma \cos \theta}.$$

3°. Для определения условий отсутствия заострения зубцов колеса 2 рассечем поверхности его зубцов конусом с углом между осью и образующей $\delta_2 = 180^\circ - \gamma$ (рис. 272); вершина конуса проходит через точку O' . Такой конус будет касаться цилиндра радиуса $r_{mн}$, соосного долбяку. При числе зубцов долбяка $z_d < 33$ и $\alpha_d = 20^\circ$ нужно принять $r_{mн} = r_{0n}$ (см. § 103); при $z_d > 33$ $r_{mн} = r_{\text{ди}} - m$.

Так как ось долбяка является осью симметрии его впадины, плоскость yOz окажется плоскостью симметрии зубца колеса 2.

Точка M заострения зубца колеса 2 принадлежит этой плоскости, и для этой точки (рис. 272):

$$x_2 = 0, \quad y_2 = - \left(z_2 + \frac{r_{mн}}{\sin \gamma} \right) \text{tg } \gamma. \quad (106.6)$$

При дальнейших выводах, учитывая симметричное расположение поверхностей обеих сторон зубца колеса 2, ограничимся определением условий отсутствия заострения на стороне с профилем $\gamma - \gamma$. Из (106.2) при $x_2 = 0$ получим

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{\sin \theta_\gamma - \vartheta_\gamma \cos \theta_\gamma}{\frac{1 - i_{2n} \cos \gamma}{i_{2n} \cos \theta_\gamma} + (\cos \theta_\gamma + \vartheta_\gamma \sin \theta_\gamma) \cos \gamma}. \quad (106.7)$$

Из выражений (106.2) следует также, что

$$x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2 = r_{0n} (\sin \theta_\gamma - \vartheta_\gamma \cos \theta_\gamma). \quad (106.8)$$

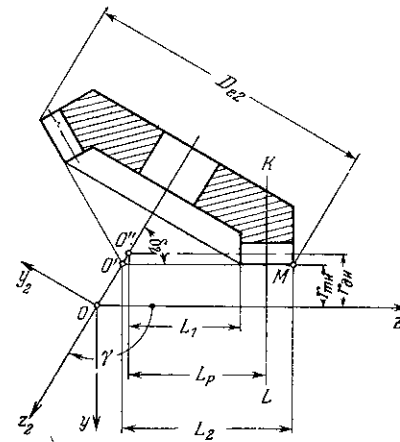


Рис. 272.

Для точки заострения M $x_2 = 0$, и согласно (106.8)

$$y_2 = - \frac{r_{0и} (\sin \theta_\gamma - \vartheta_\gamma \cos \theta_\gamma)}{\sin \varphi_2}. \quad (106.9)$$

На основании (106.6), (106.9) и (106.2) получим

$$\begin{aligned} \frac{r_{0и} (\sin \theta_\gamma - \vartheta_\gamma \cos \theta_\gamma)}{\sin \varphi_2} = z_2 \operatorname{tg} \gamma + \frac{r_{ми}}{\cos \gamma} = -r_{0и} [(\cos \theta_\gamma + \vartheta_\gamma \sin \theta_\gamma) \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma] + \\ + \frac{r_{0и} (1 - i_{2и} \cos \gamma)}{i_{2и} \cos \theta_\gamma} + \frac{r_{ми}}{\cos \gamma} \end{aligned} \quad (106.10)$$

Рассмотрим совместно (106.10) и (106.7) и примем, что в силу малости φ_2 $\operatorname{tg} \varphi_2 \approx \sin \varphi_2$. В результате получим

$$\cos \theta_\gamma + \vartheta_\gamma \sin \theta_\gamma = \frac{r_{ми}}{r_{0и}}$$

и

$$\vartheta_\gamma = \frac{r_{ми}}{r_{0и} \sin \theta_\gamma} - \operatorname{ctg} \theta_\gamma. \quad (106.11)$$

Подставим выражение (106.11) в (106.7), после чего получим

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1 - \frac{r_{ми}}{r_{0и}} \cos \theta_\gamma}{\frac{1 - i_{2и} \cos \gamma}{i_{2и}} \operatorname{tg} \theta_\gamma + \frac{r_{ми}}{r_{0и}} \sin \theta_\gamma \cos \gamma} \quad (106.12)$$

Так как

$$\varphi_{и} = \theta_\gamma - (\vartheta_\gamma + \vartheta_0) = \theta_\gamma - \vartheta_0 - \frac{r_{ми}}{r_{0и} \sin \theta_\gamma} + \operatorname{ctg} \theta_\gamma$$

то

$$\varphi_2 = i_{2и} \left(\theta_\gamma - \vartheta_0 - \frac{r_{ми}}{r_{0и} \sin \theta_\gamma} + \operatorname{ctg} \theta_\gamma \right) \quad (106.13)$$

Примем в силу малости φ_2 $\operatorname{tg} \varphi_2 \approx \varphi_2$. На основании (106.12), (106.11) и (106.13) получим

$$\begin{aligned} \theta_\gamma - \vartheta_0 - \frac{r_{ми}}{r_{0и}} \sin \theta_\gamma - i_{2и} \cos \gamma \left(1 - \frac{r_{ми}}{r_{0и}} \cos \theta_\gamma \right) \times \\ \times \left(\theta_\gamma - \vartheta_0 - \frac{r_{ми}}{r_{0и} \sin \theta_\gamma} + \operatorname{ctg} \theta_\gamma \right) = 0. \end{aligned} \quad (106.14)$$

Напомним, что

$$\theta_\gamma = \varphi_{и} + \vartheta_0 + \vartheta_\gamma.$$

Для определения θ_γ это уравнение нужно решить по методу последовательных приближений.

После этого находим L_2 (рис. 272) из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} L_2 = \frac{z_2}{\cos \gamma} + \frac{2r_{ми}}{\sin 2\gamma} = \\ = -r_{0и} \left[(\cos \theta_\gamma + \vartheta_\gamma \sin \theta_\gamma) \operatorname{tg} \gamma - \frac{(1 - i_{2и} \cos \gamma)}{i_{2и} \cos \theta_\gamma \sin \gamma} \right] + \frac{2r_{ми}}{\sin 2\gamma}. \end{aligned} \quad (106.15)$$

Входящее в уравнение (106.15) значение ϑ_γ вычисляется из формулы (106.11).

§ 107. Локализация контакта в неортогональной цилиндрико-конической передаче

Цели локализации контакта в цилиндрико-конических передачах были изложены в § 101. Локализация контакта достигается применением долбяка с числом зубцов $z_d > z_1$, где z_1 — число зубцов цилиндрического колеса 1, зацепляющегося с коническим колесом 2; разность числа зубцов $z_d - z_1 = 1 \div 5$. Зацепление колес 1 и 2 является точечным, передача вращения осуществляется с постоянным передаточным отношением $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$. Линия зацепления колес 1 и 2 является общей линией двух поверхностей зацепления: а) долбяка и колеса 1, б) долбяка и колеса 2. Первая из поверхностей зацепления представляет плоскость, касательную к основным цилиндрам долбяка и колеса 1. Вторая из поверхностей зацепления определяется уравнением (105.3). Линия зацепления колес 1 и 2 принадлежит плоскости

$$z = \frac{r_{0n}(1 - i_{2n} \cos \gamma)}{i_{2n} \sin \gamma \cos \alpha}, \quad (107.1)$$

где α — угол зацепления долбяка и колеса 1.

Основываясь на построениях рис. 272, получим

$$L_p = z + r_{дн} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (107.2)$$

После преобразований формулу для определения угла зацепления представим в следующем виде:

$$\cos \alpha = \frac{m(z_2 - z_d \cos \gamma)}{2 \sin \gamma \left(L_p - \frac{m z_d}{2} \operatorname{ctg} \gamma \right)} \cos \alpha_d, \quad (107.3)$$

где L_p — размер, определяющий положение плоскости KL , в которой лежит линия зацепления колес 1 и 2.

Задав значение L_p и определив из (107.3) угол зацепления α , из формулы (102.4) определяем коэффициент смещения ξ_1 для колеса 1. Колесо 1 необходимо корректировать, так как при выбранном значении L_p оказывается, что $\alpha \neq \alpha_d$.

§ 108. Геометрический расчет передачи

Исходные данные: а) параметры долбяка $z_d, m, \xi_d, f_0, c_0, \alpha_d$; б) передаточное отношение $i_{21} = z_1/z_2$; в) угол δ между осями колес. Разность чисел зубцов долбяка и колеса 1 $z_d - z_1 = 1 \div 5$ и выбирается, исходя из ожидаемых размеров пятна контакта (см. § 37).

1°. Размер L_1 , определяющий внутренний размер зубчатого венца (рис. 272), вычисляется по формулам (106.4) и (106.5). Эти формулы получены из условия отсутствия подрезания зубцов колеса 2.

2°. Размер L_2 , определяющий условия отсутствия заострения зубцов колеса 2, находится из формул (106.14) — (106.15). Диаметр $D_{e2} = 2L_2 \sin \gamma$.

3°. Угол зацепления α для колеса 1 и долбяка, рассматриваемых во внутреннем зацеплении, определяется по формуле (107.3). Значения ξ_1, c и r_{1e} вычисляются по формулам § 102.

Глава XVII

Прямозубые конические колеса

§ 109. Аксоиды и параметры зацепления

1°. Пусть требуется передать вращение от оси Oa к оси Ob (рис. 273, *a*), образующих между собой угол δ , при отношении угловых скоростей

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Для определения положения мгновенной оси вращения звеньев 1 и 2 в относительном движении необходимо отыскать вектор относительной угловой скорости $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$ или $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$. Линия действия вектора ω_{12} (или ω_{21}) определяет мгновенную ось вращения OP .

Построив план угловых скоростей (рис. 273, *б*), найдем

$$\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12}. \quad (109.1)$$

Так как угол между осями колес $\delta = \delta_1 + \delta_2$, получим

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{i_{12} + \cos \delta}{\sin \delta}, \quad (109.2)$$

$$\operatorname{ctg} \delta_2 = \frac{i_{21} + \cos \delta}{\sin \delta}, \quad (109.3)$$

где

$$i_{21} = \frac{1}{i_{12}}.$$

Относительное движение звеньев 1 и 2 представляет вращение вокруг мгновенной оси OP с угловой скоростью $|\omega_{12}| = |\omega_{21}|$. Положение мгновенной оси OP определяется углами δ_1 и δ_2 , образуемыми ею с осями колес Oa и Ob ; для определения этих углов нужно воспользоваться уравнениями (109.2) и (109.3). Аксоид конического колеса представляет геометрическое место мгновенных осей вращения в системе, связанной с этим колесом. При наших обозначениях аксоидами колес являются круговые конусы ($i_{12} = \text{const}$) с углом δ_k между образующей и осью колеса ($k = 1, 2$). Аксоиды конических колес в технической литературе называются начальными конусами.

2°. Модуль зубцов задается (рис. 273, *в*) на окружности d_k ($k = 1, 2$); индексы 1, 2 относятся к колесам 1 и 2. Окружности с диаметрами d_k , так как они принадлежат начальным конусам, перекатываются друг по другу без скольжения, и шаги зубцов на этих окружностях должны быть равны.

Длина окружности

$$\pi d_k = z_k t.$$

Следовательно,

$$d_k = z_k \frac{t}{\pi} = z_k m, \quad (109.4)$$

где m — модуль зубцов. Так как

$$\frac{d_1}{2 \sin \delta_1} = \frac{d_2}{2 \sin \delta_2} = L,$$

то передаточное отношение i_{12} колес при использовании уравнения (109.4)

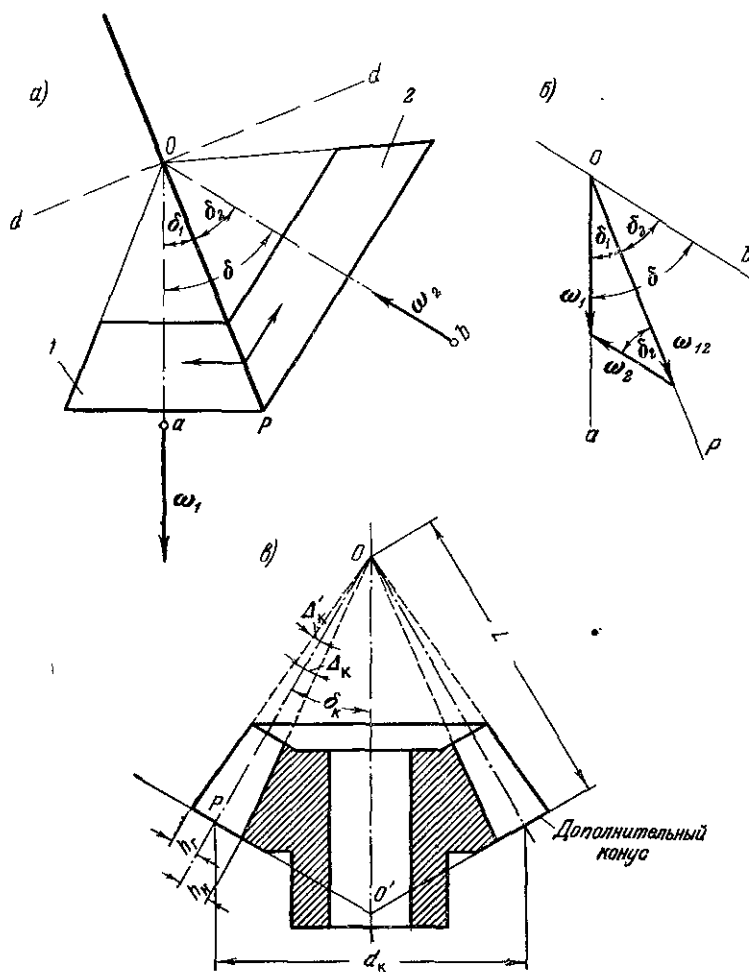


Рис. 273.

можно выразить таким уравнением:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (109.5)$$

Высоты головок и ножек зубцов задаются на образующей $O'P$ так называемого дополнительного конуса; образующая $O'P$ дополнительного

конуса перпендикулярна образующей OP начального конуса. Углы головок и ножек зубцов, обозначенные нами через Δ'_k и Δ_k , определяются уравнениями:

$$\operatorname{tg} \Delta'_k = \frac{h_r}{L} = \frac{2h_r \sin \delta_k}{m z_k}, \quad (109.6)$$

$$\operatorname{tg} \Delta_k = \frac{h_n}{L} = \frac{2h_n \sin \delta_k}{m z_k}. \quad (109.7)$$

В некорригированном зацеплении $h_r = m$, $h_n = (1,2 \div 1,3) m$ и

$$\operatorname{tg} \Delta'_k = \frac{2 \sin \delta_k}{z_k}, \quad (109.8)$$

$$\operatorname{tg} \Delta_k = \frac{(2,4 \div 2,6) \sin \delta_k}{z_k}, \quad (109.9)$$

где $k = 1, 2$.

3°. Схемы нарезания зубцов конического колеса в ряде случаев основываются на обкатке его по так называемому плоскому производящему колесу (рис. 274). Аксоидом производящего колеса является плоскость, в которую переходит коническая поверхность при $\delta_k = \pi/2$.

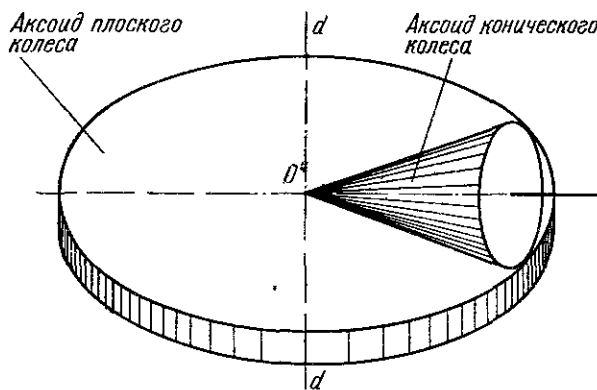


Рис. 274.

На рис. 273, а проекцией этой плоскости является OP , а осью вращения плоского производящего колеса служит d .

Обкатка конического колеса с углом δ_k по плоскому производящему колесу может быть осуществлена при отношении угловых скоростей

$$\begin{aligned} i_{(kn)} &= \frac{\omega^{(k)}}{\omega^{(n)}} = \frac{\sin \delta_n}{\sin \delta_k} = \\ &= \frac{1}{\sin \delta_k}. \quad (109.10) \end{aligned}$$

Поверхность зубцов плоского производящего колеса в теории зацепления выполняет роль вспомогательной поверхности, находящейся в одновременном зацеплении с поверхностями зубцов конических колес передачи.

На современных станках, используемых для нарезания прямозубых конических колес, схема нарезания зубцов с плоским производящим колесом может быть воспроизведена при постоянной высоте ножки зубцов. При понижающей высоте ножки аксоидом производящего колеса является не плоскость, а конус (см. § 110).

Передача вращения нарезанными таким образом колесами происходит с переменным отношением угловых скоростей.

4°. При расчете настройки станков используется понятие о числе зубцов $z_{пр}$ плоского производящего колеса. На окружности радиуса $OP = L$ плоского колеса его окружная скорость равна скорости на

окружности диаметра d_k (рис. 273, *е*). В силу равенства шагов зубцов

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{2\pi L}{z_{\text{пр}}} = \frac{\pi d_k}{z_k}, \\ z_{\text{пр}} &= \frac{2L}{m} = \frac{z_k}{\sin \delta_k}, \end{aligned} \right\} \quad (109.11)$$

где $k=1, 2$.

В ортогональной конической передаче ($\delta = \pi/2$)

$$2L = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad z_{\text{пр}} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}. \quad (109.12)$$

5°. В зависимости от направлений зубцов принято различать конические колеса с прямыми и вепрямыми зубцами. В основу такой классификации положено направление зубцов плоского производящего колеса, за которое принято направление линий, получающихся в результате пересечения поверхности зубцов плоскостью, перпендикулярной оси $d-d$ (рис. 273, *а*). Напомним, что такая плоскость является аксоидом плоского производящего колеса при обкатке конического колеса.

У прямозубых конических колес направление зубцов является радиальным (рис. 275, *а*); при косых зубцах (рис. 275, *б*) направление зубцов плоского производящего колеса совпадает с направлением касательной к окружности радиуса ρ ; при дуговых зубцах (зацепление Глисона) они очерчены по дуге окружности радиуса r_n (рис. 275, *в*); при зацеплении Клингельнберга профили зубцов на плоском производящем колесе приближенно очерчены по эвольвенте окружности радиуса ρ (рис. 275, *г*).

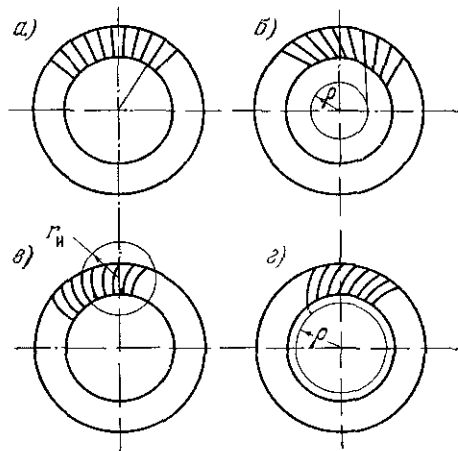


Рис. 275.

§ 110. Схемы нарезания прямозубых колес

На станке Бильграм-Рейнекер нарезание прямозубых конических колес осуществляется по схеме, изображенной на рис. 276, *а*. При нарезании воспроизводится обкатывание заготовки *а* начальным конусом с углом δ_k по плоскости воображаемого производящего колеса. Производящее колесо при нарезании зубцов является неподвижным, а резец *h*, совершающий возвратно-поступательное движение, как бы воспроизводит при этом на производящем колесе поверхности зубцов.

Для того чтобы воспроизвести необходимое обкаточное движение, на одной оси с заготовкой *а* устанавливается конус *е* с углом δ_k , равным углу начального конуса изделия. При нарезании зубцов конус *е* обкатывается по плоскости *і* — аксоиду плоского производящего колеса. Во избежание проскальзывания конус *е* и плоскость *і* охвачены перекрестными натяжными лентами *ф*.

Абсолютное движение изделия и конуса *е* сводится к вращению вокруг мгновенной оси, за которую, если пренебречь толщиной натяжных

лент, можно принять линию касания поверхностей конуса e и плоскости i . Составными частями этого движения являются: а) переносное вращение вокруг оси $A - A$, б) относительное вращение вокруг оси $B - B$. Вращение вокруг оси $A - A$ заготовке a и конусу e сообщается от червячного колеса d , приводимого в движение от червяка g .

На станке Бильграм-Рейнекер осуществляются: а) черновая прорезка впадин резцом, ширина которого соответствует наименьшей ширине впадины; б) чистовая обработка отдельно правой и левой сторон впадины.

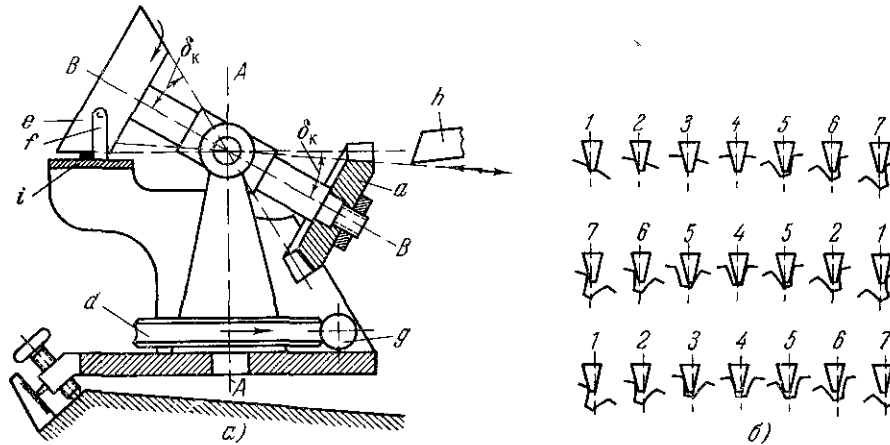


Рис. 276.

При каждом возвратном ходе резца изделию a посредством специального механизма деления сообщается поворот относительно обкаточного конуса на угловой шаг. Одновременно с этим изделие вместе с конусом e участвует в обкаточном движении, и поэтому при подводе к резцу h очередной впадины угловое положение этой впадины относительно резца оказывается несколько отличным по отношению к предыдущей. Это можно уяснить из рис. 276, б, на котором изображены последовательные положения впадин 1, . . . , 7 по отношению к резцу.

При обкатывании конуса e используется лишь небольшая часть его поверхности, соответствующая повороту изделия примерно на величину углового шага. Поворот на угол обката совершается в зависимости от величины модуля за один или несколько полных циклов деления изделия, соответствующих одному или нескольким оборотам изделия a относительно конуса e .

Более высокая производительность изготовления достигается при нарезании прямозубых конических колес на зубострогальных станках отечественного производства моделей 523 и 526 и на станках Гарбек и Глисон. Отличительной особенностью схемы нарезания, принятой на этих станках, является то, что движение обкатки осуществляется за счет определенного соотношения между угловыми скоростями вращения $\omega^{(u)}$ и $\omega^{(h)}$ производящего колеса и нарезаемого колеса (рис. 277); при этом конструкцией станка предусматривается, что ось вращения люльки перпендикулярна образующей конуса впадин изделия. Для нарезания используются два резца, каждый из которых обрабатывает одну сторону зубца колеса; резцы совершают возвратно-поступательное движение к вершине O ,

перемещаясь по образующей конуса впадин изделия. При таком движении резцов их режущими кромками как бы воспроизводятся боковые поверхности впадины производящего колеса в виде двух граней, сходящихся к вершине O .

При настройке станка, задав определенное соотношение между угловыми скоростями вращения $\omega^{(u)}$ и $\omega^{(k)}$ производящего и нарезаемого колес, можно добиться, чтобы аксоидом колеса при нарезании и при зацеплении с другим колесом передачи были бы один и тот же конус с углом δ_k . Обратимся к построению рис. 278, а.

Вектор $\omega^{(uk)}$ будет направлен по мгновенной оси вращения OP , если

$$i_{uk} = \frac{\omega^{(u)}}{\omega^{(k)}} = \frac{\sin \delta_k}{\cos \Delta_k} \quad (k = 1, 2). \quad (110.1)$$

Хотя колеса 1 и 2 передачи нарезаются одной производящей по-

верхностью, зацепление колес 1 и 2 является приближенным (вращение колес осуществляется с переменным передаточным отношением). Это объясняется тем, что при нарезании зубцов колес 1 и 2 производящая поверхность

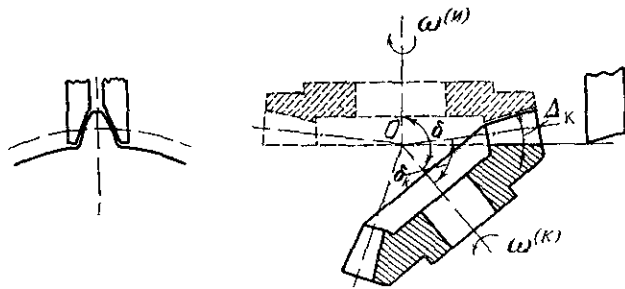


Рис. 277.

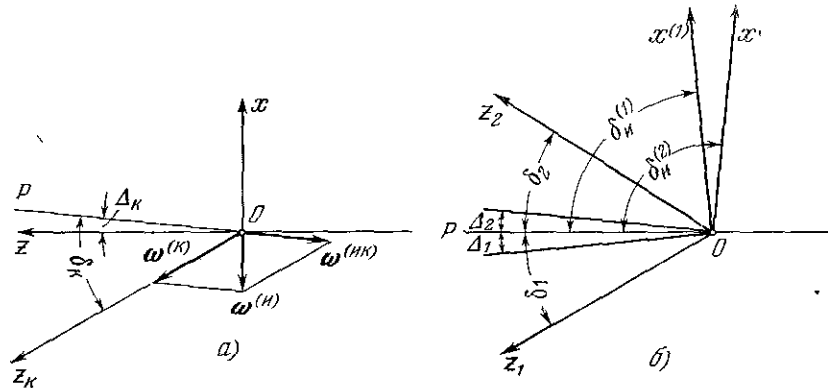


Рис. 278.

имеет различные относительные движения. При нарезании колеса 1 осью вращения производящего колеса является $x^{(1)}$, аксоид производящего колеса — конус с углом $\delta_k^{(1)} = 90^\circ - \Delta_1$ (рис. 278, б). Соответственно при нарезании колеса 2 производящее колесо вращается вокруг оси $x^{(2)}$, аксоидом производящего колеса является конус с углом $\delta_k^{(2)} = 90^\circ + \Delta_2$ (через Δ_1 и Δ_2 обозначены углы ножек зубцов колес 1 и 2). Согласно материалам § 38 производящей поверхностью будут образованы сопряженные зацепления, если ось вращения будет перпендикулярна образующей OP начальных конусов колес, а аксоиды $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$ совпадут друг с другом, перейдя в плоскость, касающуюся начальных конусов с углами

δ_1 и δ_2 . При этом, однако, на колесах 1 и 2 будут образованы зубцы с постоянной высотой ножки.

Конические колеса с постоянной высотой ножки получили ограниченное применение из-за большей склонности к подрезанию, меньшей изгибной прочности зубцов.

§ 111. Производящая поверхность и уравнение зацепления

При исследовании зацепления нарезаемого и производящего колес введем в рассмотрение системы координат S_H , S и S_a , связанные соответственно с производящим колесом, со стойкой и с нарезаемым колесом. Ось x_H вращения производящего колеса перпендикулярна образующей конуса впадин нарезаемого колеса (рис. 279, а), ψ — угол поворота

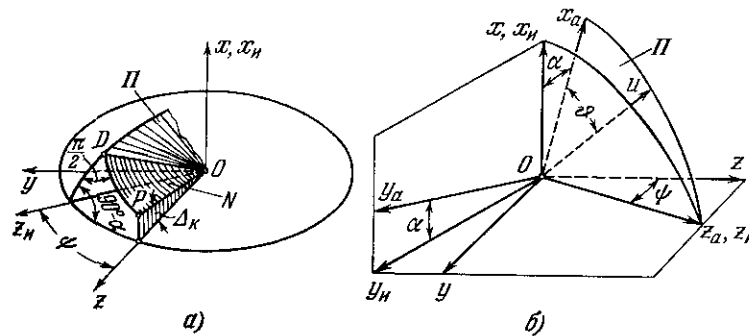


Рис. 279.

производящего колеса. Будем считать, что аксоидом изделия при нарезании зубцов служит тот же конус, который является аксоидом в передаче. Аксоидом производящего колеса является конус с углом $90^\circ - \Delta_k$, где Δ_k — угол ножки зубцов. Мгновенной осью вращения в относительном движении является линия OP .

Введем в рассмотрение вспомогательную систему координат S_a , жестко связанную с системой S_H (рис. 279, б). Производящая поверхность — плоскость Π , описываемая режущей кромкой резца, — в системе S_a определяется уравнением

$$r_a = u (\cos \vartheta i_a + \sin \vartheta k_a). \quad (111.1)$$

Матрицы перехода от S_a к S_H и от S_H к S имеют следующие выражения:

$$L_{Ha} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (111.2)$$

$$L_{0H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}, \quad (111.3)$$

$$L_{0a} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \psi & \cos \alpha \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \alpha \sin \psi & -\cos \alpha \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}. \quad (111.4)$$

Семейство производящих поверхностей в системе S на основании (111.4) и (111.4) определится уравнением

$$\mathbf{r} = u [\cos \alpha \cos \vartheta \mathbf{i} + (-\sin \alpha \cos \vartheta \cos \psi + \sin \vartheta \sin \psi) \mathbf{j} + (\sin \alpha \cos \vartheta \sin \psi + \sin \vartheta \cos \psi) \mathbf{k}]. \quad (111.5)$$

В системе S_a орт нормали к производящей поверхности направлен по оси y_a . В системе S орт нормали определяется уравнением

$$\mathbf{e} = \sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \cos \psi \mathbf{j} - \cos \alpha \sin \psi \mathbf{k}. \quad (111.6)$$

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес получим, используя условие, что нормаль в точках контакта этих поверхностей должна пересекать ось зацепления OP . Уравнения нормали к указанным поверхностям запишем так:

$$\frac{X-x}{e_x} = \frac{Y-y}{e_y} = \frac{Z-z}{e_z}. \quad (111.7)$$

Здесь X, Y, Z — координаты точки пересечения нормали с осью зацепления, причем $X = L \sin \Delta_k$, $Y = 0$, $Z = L \cos \Delta_k$, где $L = OP$ — длина образующей начального конуса; x, y, z — координаты точки контакта, определяемые уравнением (111.5); e_x, e_y, e_z — проекции орта нормали (111.6).

На основании уравнений (111.5), (111.6) и (111.7) уравнение зацепления представим в следующем виде:

$$F(\vartheta, \psi) = \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{\sin \alpha \sin \psi + \operatorname{tg} \Delta_k \cos \alpha}{\cos \psi} = 0. \quad (111.8)$$

Линией контакта производящей и нарезаемой поверхностей является прямая линия, совпадающая с вектором $\mathbf{u}$ (рис. 279, б).

Используя равенства (111.7), получим следующее выражение для определения параметра и точки контакта:

$$u = \frac{L \cos \Delta_k \cos \psi}{\sin \vartheta} \mathbf{e}. \quad (111.9)$$

§ 112. Поверхность зацепления

1°. Поверхность зацепления определяется совместно рассматриваемыми уравнениями (111.5) и (111.8). Так как поверхность зацепления является семейством линий контакта OD (рис. 279, а) — прямых линий, проходящих через начало координат O , поверхность зацепления можно задать уравнениями такого вида:

$$\frac{x}{m_x} = \frac{y}{m_y} = \frac{z}{m_z}, \quad (112.1)$$

где $\mathbf{m}$ — орт вектора, направленного по линии контакта.

В системе S_a $\mathbf{m}_a$ — орт вектора $\mathbf{u}$ (рис. 279, б) — определится уравнением

$$\mathbf{m}_a = \cos \vartheta \mathbf{j}_a + \sin \vartheta \mathbf{k}_a. \quad (112.2)$$

На основании (111.8)

$$\mathbf{m}_a = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \psi + (\sin \alpha \sin \psi + \operatorname{tg} \Delta_k \cos \alpha)^2}} \times (\sin \alpha \sin \psi + \operatorname{tg} \Delta_k \cos \alpha) \mathbf{i}_a + \cos \psi \mathbf{k}_a. \quad (112.3)$$

В системе S столбцевая матрица вектора m определяется из уравнения

$$m = L_{0a} m_a. \quad (112.4)$$

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{\sin \psi \sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \Delta_k}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \Delta_k + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \psi + 2 \sin \psi \operatorname{tg} \Delta_k \operatorname{tg} \alpha}}, \\ m_y &= \frac{\sin \psi \cos \psi \cos \alpha - \cos \psi \operatorname{tg} \Delta_k \sin \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \Delta_k + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \psi + 2 \sin \psi \operatorname{tg} \Delta_k \operatorname{tg} \alpha}}, \\ m_z &= \frac{\cos^2 \psi \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + \sin \psi \operatorname{tg} \Delta_k \sin \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \Delta_k + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \psi + 2 \sin \psi \operatorname{tg} \Delta_k \operatorname{tg} \alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (112.5)$$

Разделив m_x , m_y и m_z на общий множитель, уравнение (112.1) поверхности зацепления представим в таком виде:

$$\frac{x}{\sin \psi + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \Delta_k} = \frac{y}{\cos \psi (\sin \psi \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \Delta_k)} = \frac{z}{\cos^2 \psi \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \sin \psi \operatorname{tg} \Delta_k}. \quad (112.6)$$

2°. Найдем сечение поверхности зацепления плоскостью, перпендикулярной оси зацепления OP ; для упрощения уравнения перейдем к вспомогательной системе координат x' , y' , z' (рис. 280). Матрица перехода от x , y , z к x' , y' , z' имеет такой вид:

$$\begin{vmatrix} \cos \Delta_k & 0 & -\sin \Delta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Delta_k & 0 & \cos \Delta_k \end{vmatrix}. \quad (112.7)$$

Линия контакта в системе x' , y' , z' выражается уравнениями:

$$\frac{x'}{m'_x} = \frac{y'}{m'_y} = \frac{z'}{m'_z}. \quad (112.8)$$

На основании (112.7) имеем

$$m'_x = m_x \cos \Delta_k - m_z \sin \Delta_k,$$

$$m'_y = m_y,$$

$$m'_z = m_x \sin \Delta_k + m_z \cos \Delta_k.$$

Сечение поверхности зацепления плоскостью $z' = L$ выразим уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{m'_x}{m'_z} L = \frac{(\cos \Delta_k + \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha \sin \Delta_k) (\cos \Delta_k \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha - \sin \Delta_k)}{(\cos \Delta_k + \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha \sin \Delta_k)^2 + \cos^2 \psi \operatorname{ctg}^2 \alpha} L, \\ y' &= \frac{m'_y}{m'_z} L = \frac{\cos \psi \operatorname{ctg} \alpha (\cos \Delta_k \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha - \sin \Delta_k)}{(\cos \Delta_k + \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha \sin \Delta_k)^2 + \cos^2 \psi \operatorname{ctg}^2 \alpha} L. \end{aligned} \right\} \quad (112.9)$$

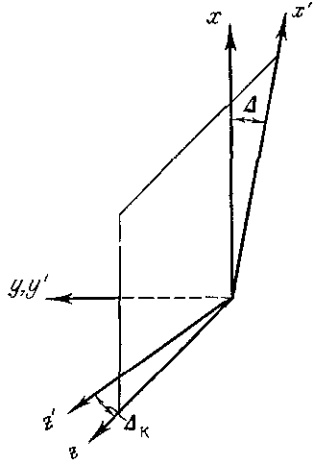


Рис. 280.

На рис. 281 представлено сечение поверхности зацепления плоскостью $z' = L$, вычисленное по уравнениям (112.9) при следующих значениях параметров: $z_h = 20$, $\delta_h = 45^\circ$, $\alpha = 20^\circ$. Основываясь на том,

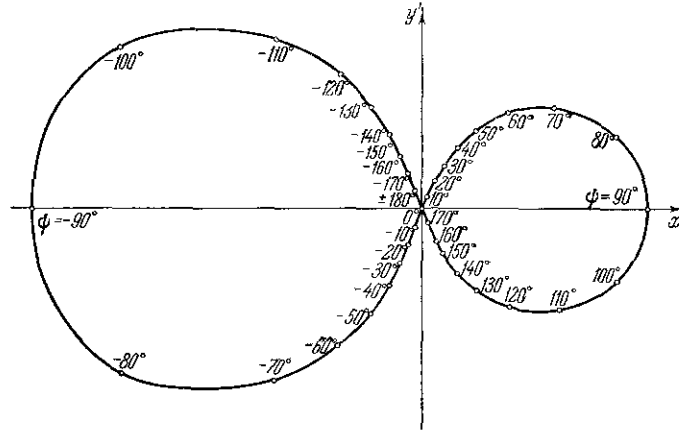


Рис. 281.

что линия зацепления (112.9) имеет вид восьмерки, зацепление прямо-зубых конических колес, нарезаемых по описанным схемам, было названо октоидальным.

§ 113. Поверхность зубцов нарезаемого колеса

В системе координат S_1 , связанной с нарезаемым колесом, линия контакта производящей и нарезаемой поверхностей выражается уравнениями:

$$\frac{x_1}{m_{x1}} = \frac{y_1}{m_{y1}} = \frac{z_1}{m_{z1}}. \quad (113.1)$$

Столбцовые матрицы векторов $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}$ связаны матричным уравнением

$$\mathbf{m}_1 = L_{1h} L_{h0} \mathbf{m}. \quad (113.2)$$

Матрицы L_{h0} и L_{1h} выражают соответственно переход от системы координат S к S_h и от S_h к S_1 (рис. 282). При этом

$$L_{h0} = \begin{vmatrix} \cos(\delta_h - \Delta_h) & 0 & \sin(\delta_h - \Delta_h) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta_h - \Delta_h) & 0 & \cos(\delta_h - \Delta_h) \end{vmatrix}, \quad (113.3)$$

$$L_{1h} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (113.4)$$

$$L_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \cos(\delta_h - \Delta_h) & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \sin(\delta_h - \Delta_h) \\ -\sin \varphi_1 \cos(\delta_h - \Delta_h) & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \sin(\delta_h - \Delta_h) \\ -\sin(\delta_h - \Delta_h) & 0 & \cos(\delta_h - \Delta_h) \end{vmatrix}. \quad (113.5)$$

Связь между проекциями векторов $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}$ выражается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} m_{x1} &= m_x \cos \varphi_1 \cos(\delta_h - \Delta_h) + m_y \sin \varphi_1 + m_z \cos \varphi_1 \sin(\delta_h - \Delta_h), \\ m_{y1} &= -m_x \sin \varphi_1 \cos(\delta_h - \Delta_h) + m_y \cos \varphi_1 - m_z \sin \varphi_1 \sin(\delta_h - \Delta_h), \\ m_{z1} &= -m_x \sin(\delta_h - \Delta_h) + m_z \cos(\delta_h - \Delta_h), \end{aligned} \right\} \quad (113.6)$$

где m_x , m_y и m_z выражены зависимостями (112.5).

Вместо m_x , m_y и m_z можно использовать пропорциональные им величины, входящие в уравнение (112.6).

Поверхность зубцов колеса представляет геометрическое семейство линий контакта (113.1). Эта поверхность может быть изучена в различных

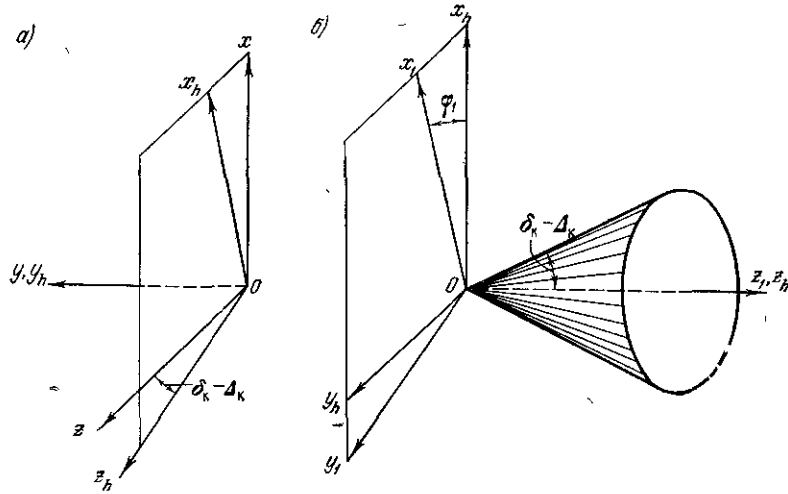


Рис. 282.

сечениях. В частности, может быть рассмотрено сечение поверхности зубцов так называемым дополнительным конусом (рис. 283), образующая

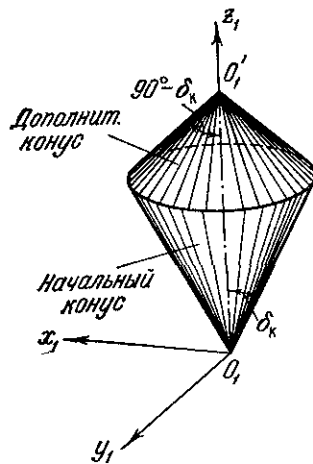


Рис. 283.

которого перпендикулярна образующей начального конуса колеса (с углом конуса δ_k). Развернув поверхность дополнительного конуса на плоскость, можно найти на такой плоскости профили зубцов нарезанного колеса. Аналитическое решение этой задачи приведено в нашей книге первого издания.

§ 114. Кривизна поверхности зубцов

Для определения кривизны поверхности зубцов нарезаемого колеса Σ_k воспользуемся методом, изложенным в § 34.

Найдем главные кривизны поверхности Σ_k в точке контакта, принадлежащей мгновенной оси вращения OP (рис. 279, а). Для определения параметра движения ψ , при котором линия контакта поверхности Σ_k и производящей поверхности Σ_n совпадет с мгновенной осью вращения OP , воспользуемся условием коллинеарности векторов m и $\overline{OP}$:

$$m = \lambda \overline{OP} = \lambda (\sin \Delta_k i + \cos \Delta_k k). \quad (114.1)$$

Используя выражения (112.5) для проекций вектора m , получим

$$\sin \psi = \operatorname{tg} \Delta_k \operatorname{tg} \alpha. \quad (114.2)$$

Из уравнения зацепления (111.8) следует, что этому значению ψ соответствует значение ϑ , определяемое уравнением

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \Delta_k}{\cos \alpha \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \Delta_k \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (114.3)$$

На основании (114.2), (114.3) и (111.9) получим, что $u = L$.

Главная кривизна на поверхности Σ_k определяется согласно (34.8) формулой

$$\kappa_{I, II}^{(k)} v_r^{(k)} = -\dot{e}_r^{(k)}. \quad (114.4)$$

В точке контакта, принадлежащей мгновенной оси, $v^{(nk)} = 0$ и $v_r^{(k)} = v_r^{(u)}$. Так как производящая поверхность — плоскость, $\dot{e}_r^{(u)} = 0$ и $\dot{e}_r^{(k)} = \omega^{(nk)} \times e^{(u)}$, где $\omega^{(nk)} = \omega^{(u)} - \omega^{(k)}$ — вектор угловой скорости в относительном движении производящего колеса по отношению к нарезаемому. С учетом изложенного уравнение (114.4) можно теперь представить в такой форме:

$$\kappa_{I, II}^{(k)} v_r^{(u)} = -(\omega^{(nk)} \times e^{(u)}). \quad (114.5)$$

Скорость $v_r^{(u)}$ движения точки контакта по производящей поверхности Σ_u найдем, используя выражение

$$v_r^{(u)} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (114.6)$$

где $r = r(u, \vartheta)$ определяется уравнением (111.5).

Поверхность зубца Σ_k является линейчатой поверхностью с образующей прямой u . Одно из главных направлений (с индексом I) совпадает с u и ему соответствует значение производной $d\vartheta/dt = 0$. Другому главному направлению (с индексом II) соответствует значение производной $du/dt = 0$.

Вектор $e^{(u)}$ определяется уравнением (111.6). Вектор относительной угловой скорости (рис. 278, а) определяется уравнением

$$\omega^{(nk)} = -\omega^{(u)} \frac{\cos(\delta_k - \Delta_k)}{\sin \delta_k} (\sin \Delta_k i + \cos \Delta_k k), \quad (114.7)$$

где $\omega^{(u)} = d\psi/dt$.

Связь между производными $d\vartheta/dt$ и $d\psi/dt$ найдем, продифференцировав уравнение зацепления (111.8). В результате получим

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \Delta_k \cos \alpha \sin \psi}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (114.8)$$

При указанных выше значениях ϑ и ψ найдем, что

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\sin \alpha \frac{d\psi}{dt}. \quad (114.9)$$

После преобразований, используя (114.5), найдем, что главная кривизна

$$\kappa_{II}^{(k)} = -\frac{\cos \Delta_k \cos(\delta_k - \Delta_k)}{L \sin \delta_k \sin \alpha}. \quad (114.10)$$

§ 115. Подрезание зубцов

При решении этой задачи использован метод, изложенный в § 36. Для определения граничной линии на производящей поверхности воспользуемся выражением (36.41), согласно которому

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial \vartheta} & \frac{\partial F}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & v_x^{(u)} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & v_z^{(u)} \end{vmatrix} = 0. \quad (115.1)$$

Здесь $F(\vartheta, \psi) = 0$ — уравнение зацепления (111.8). Частные производные $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial \vartheta$, $\partial z/\partial u$ и $\partial z/\partial \vartheta$ найдем, используя (111.5). Вектор скорости относительного движения

$$\mathbf{v}^{(u)} = \boldsymbol{\omega}^{(u)} \times \mathbf{r}, \quad (115.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}^{(u)}$ определяется уравнением (114.7).

При составлении элементов определителя (115.1) было принято, что $\omega^{(u)} = d\psi/dt = 1$ рад/сек. С учетом этого

$$\mathbf{v}^{(u)} = \frac{\cos(\delta_k - \Delta_k)}{\sin \delta_k} [y \cos \Delta_k \mathbf{i} + (-x \cos \Delta_k + z \sin \Delta_k) \mathbf{j} - y \sin \Delta_k \mathbf{k}]. \quad (115.3)$$

Исходя из (115.1), после преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin \alpha + \operatorname{tg} \Delta_k \cos \alpha \sin \psi) \cos \alpha}{\sin \psi} + \frac{\cos(\delta_k - \Delta_k)}{\sin \delta_k} (\sin \psi - \sin \alpha \operatorname{ctg} \vartheta \cos \psi) \times \\ & \times [(\sin \alpha \operatorname{ctg} \vartheta \sin \psi + \cos \psi) \cos \Delta_k + \cos \alpha \operatorname{ctg} \vartheta \sin \Delta_k] = 0. \end{aligned} \quad (115.4)$$

Подставим в формулу (115.4) выражение (111.8) для $\operatorname{ctg} \vartheta$, после чего получим

$$\begin{aligned} & \sin \alpha + \operatorname{tg} \Delta_k \cos \alpha \sin \psi + \\ & + \frac{\cos(\delta_k - \Delta_k)}{\sin \delta_k} (\sin \psi \cos \alpha - \operatorname{tg} \Delta_k \sin \alpha) [(1 - \sin^2 \psi \cos^2 \alpha) \cos \Delta_k + \\ & + \sin \Delta_k \sin 2\alpha \sin \psi + \operatorname{tg} \Delta_k \sin \Delta_k \cos^2 \alpha] = 0. \end{aligned} \quad (115.5)$$

Уравнение (115.5) связывает величину угла ножки Δ_k с параметром движения ψ производящего колеса для точек граничной линии производящей поверхности. Покажем, как воспользоваться этим уравнением для определения числа зубцов нарезаемого колеса, допустимого из условий отсутствия подрезания зубцов.

Рассмотрим сначала случай, когда производящей поверхностью нарезается колесо с постоянной высотой ножки. Приняв в уравнении (115.5) $\Delta_k = 0$, получим

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \delta_k \sin \psi (1 - \sin^2 \psi \cos \alpha) = 0. \quad (115.6)$$

Приближенно

$$\sin \psi = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta_k. \quad (115.7)$$

Линия контакта производящей и нарезаемой поверхностей в системе S была представлена ранее уравнениями (112.4) и (112.5), согласно которым при $\Delta_k = 0$

$$\frac{x}{m_x} = \frac{y}{m_y} = \frac{z}{m_z} = l, \quad (115.8)$$

где l — длина линии контакта,

$$m_x = \frac{\sin \psi \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \psi}} = - \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \delta_k}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \delta_k}}. \quad (115.9)$$

При постоянной высоте ножки подрезание возникает на той части поверхности зубца, которая ближе всего расположена к вершине конуса. Обозначим через h высоту ножки зубца, а через l длину образующей конуса впадин до меньшего основания конуса (рис. 284). Очевидно, что

$$\frac{h}{l} = |m_x| = \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \delta_k}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \delta_k}}. \quad (115.10)$$

На основании построений рис. 284

$$\frac{h}{l} = \sin \Delta_{гр},$$

где $\Delta_{гр}$ — граничное значение угла ножки, допустимое из условия отсутствия подрезания, h — высота ножки зубца. Согласно формуле (109.9) угол ножки Δ_k определяется так:

$$\operatorname{tg} \Delta_k = \frac{(2,4 \div 2,6) \sin \delta_k}{z_k}. \quad (115.11)$$

Очевидно, что $\Delta_k \leq \Delta_{гр}$.

Принимая в силу малости $\Delta_k \sin \Delta_k \approx \operatorname{tg} \Delta_k$, на основании (115.10) и (115.11) получим, что число зубцов, допустимое из условия отсутствия подрезания, должно удовлетворять следующему неравенству:

$$z_k \geq \frac{(2,4 \div 2,6) \cos \delta_k \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \delta_k}}{\sin^2 \alpha}. \quad (115.12)$$

Индекс $k = 1, 2$ относится к обоим колесам.

В теории механизмов приводится обычно приближенная формула для числа зубцов конического колеса, допустимого из условий отсутствия подрезания зубцов:

$$z_k \geq \frac{(2,4 \div 2,6) \cos \delta_k}{\sin^2 \alpha}, \quad (115.13)$$

где $(1,2 \div 1,3)$ m — высота ножки зубца.

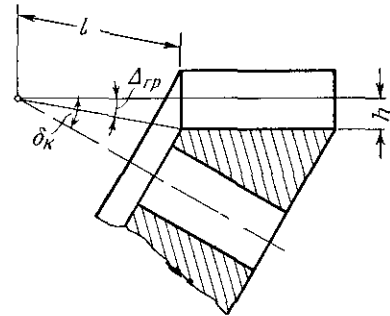


Рис. 284.

При выводе формулы (115.13) рассматриваются профили зубцов конического колеса, полученные пересечением его поверхности дополнительным конусом (рис. 283). Развернув поверхность дополнительного конуса на плоскость, профили зубцов на развертке рассмотрим затем как профили зубцов воображаемого цилиндрического колеса с числом зубцов $z'_k = \frac{z_k}{\cos \delta_k}$. Во избежание подрезания число зубцов

$$z'_k \geq \frac{2,4 \div 2,6}{\sin^2 \alpha}. \quad (115.14)$$

Формула (115.13) с достаточной степенью точности пригодна и для конических колес с понижающейся высотой ножки. Для более точных расчетов нужно поступить так: а) задаться сначала значением угла ножки

по формуле (115.11); б) определить из формулы (115.5) значение ψ ; в) воспользоваться выражениями (112.5) и определить проекции единичного вектора $\mathbf{m}$ линии контакта; г) определить затем угол, образуемый вектором $\mathbf{m}$ с осью колеса z_k по формуле

$$\cos \delta_{i \text{ гр}} = \mathbf{m} \mathbf{a}. \quad (115.15)$$

Единичный вектор $\mathbf{a}$ оси колеса определяется уравнением (рис. 278, а)

$$\mathbf{a} = -\sin(\delta_k - \Delta_k) \mathbf{i} + \cos(\delta_k - \Delta_k) \mathbf{k}. \quad (115.16)$$

Во избежание подрезания необходимо, чтобы

$$\delta_{i \text{ гр}} \geq \delta_k - \Delta_k. \quad (115.17)$$

Формулу (115.5) можно заменить более простой формулой, если учесть, что $\Delta_k \ll |\psi|$, и пренебречь членами, содержащими $\sin^3 \psi$, $\sin^2 \psi \operatorname{tg} \Delta_k$, $\sin \psi \operatorname{tg} \Delta_k$, $\operatorname{tg} \Delta_k$, $\sin \Delta_k$. В результате получим

$$\sin \psi = - \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \delta_k}{\cos(\delta_k - \Delta_k) \cos \Delta_k} - \operatorname{tg} \Delta_k \operatorname{tg} \alpha \right]. \quad (115.18)$$

Обкатные конические колеса с круговыми зубцами*)

§ 116. Исходные сведения

Конические и, особенно, гипоидные колеса с круговыми зубцами являются бесспорным достижением инженеров и ученых, разработавших такие передачи. Высокая нагрузочная способность, большая плавность зацепления, малая чувствительность к погрешностям монтажа и значительное снижение шума выгодно отличают такие передачи от передач с коническими прямозубыми колесами. Пятно контакта конических колес с круговыми зубцами локализовано по высоте и по длине. Теоретически поверхности зубцов колес находятся в точечном касании. С учетом того, что зубцы упругие, контакт поверхностей происходит в каждое мгновение по некоторой площадке.

Схема нарезания колеса с круговыми зубцами представлена на рис. 285. В качестве инструмента применяется резцовая головка, на торце которой по кругу размещается большое количество резцов (рис. 285, а). При нарезании зубцов изделия резцовая головка участвует в двух движениях: а) в переносном вращательном движении вокруг оси O (по стрелке S_1); б) в относительном вращательном движении вокруг своей оси O_n (рис. 285, б) в направлении S_2 . Одновременно сообщается вращательное движение нарезаемому колесу вокруг своей оси в направлении S_3 .

Ось O является осью вращения воображаемого производящего колеса. Вращение резцовой головки вокруг O_n является движением резания и с кинематикой обкаточного движения не связано.

Угловые скорости вращения производящего колеса вокруг оси O и нарезаемого колеса вокруг своей оси связаны между собой через передаточное отношение цепи обкатки

$$i_{nk} = \frac{\omega^{(n)}}{\omega^{(k)}} \quad (k = 1, 2).$$

Расчет величины передаточного отношения i_{nk} будет изложен ниже.

В процессе обкатки производящее колесо совершает вокруг оси неполный поворот. По окончании обработки одной впадины направления вращения изделия и производящего колеса меняются на ускоренные обратные, а затем заготовке сообщается дополнительно поворот вокруг своей оси на угловой шаг. После этого начинается новый цикл движений, пока не будут обработаны все впадины изделия. Конические колеса, нарезаемые таким способом, получили название круговых по виду очертания профилей зубцов производящего колеса в плоскости, перпендикулярной оси производящего колеса.

*) Обозначения приведены в конце главы.

Известны многие разновидности способов нарезания зубцов конических колес с круговыми зубцами: а) обкатный способ; б) полуобкатный способ; в) геликсформ и т. д. При обкатном способе поверхности зубцов как шестерни 1, так и колеса 2 воспроизводятся как огибающие поверхности зубцов производящих колес, используемых при их нарезании. При

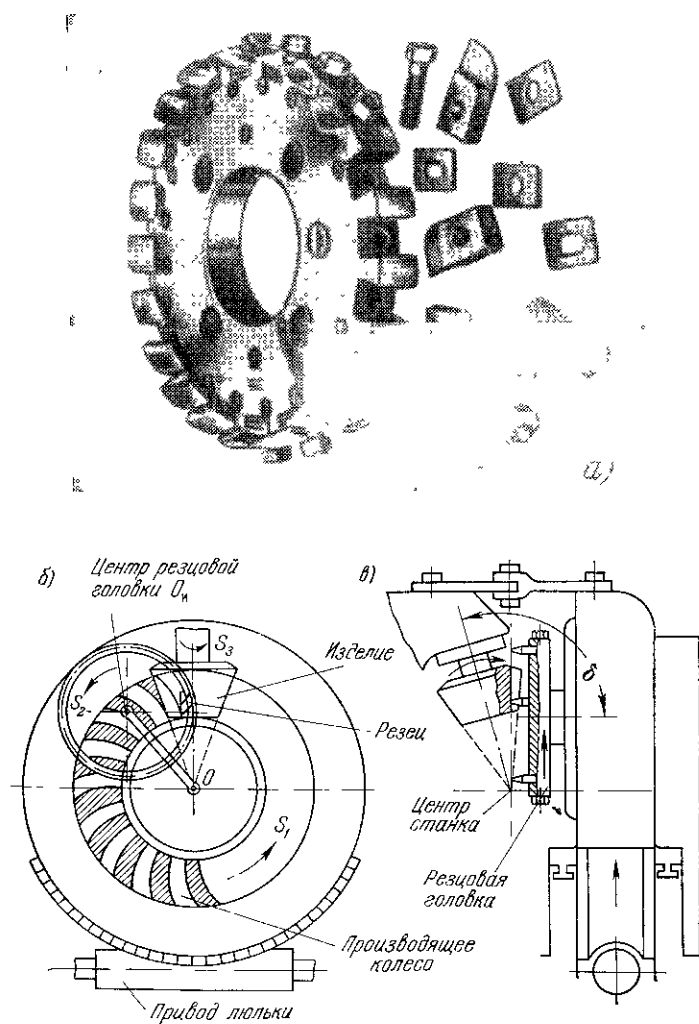


Рис. 285.

полуобкатном способе поверхность зубцов колеса 2 нарезается без обкатки; на этом колесе копируется производящая поверхность. Сущность способа геликсформ будет описана ниже, в гл. XX.

Нарезание обеих сторон поверхностей зубцов колес производится: а) односторонним, б) простым двусторонним, в) двойным двусторонним способами.

При одностороннем способе нарезания каждая сторона зуба колеса обрабатывается отдельно. Нарезание зубцов производится или двумя

односторонними головками, из которых одна снабжена наружными, а другая — внутренними резцами, либо одной двусторонней, снабженной чередующимися наружными и внутренними резцами. При использовании двусторонней головки после окончания обработки одной стороны зубца производится переналадка станка, и головка подводится для обработки другой стороны зубца.

Простой двусторонний способ имеет следующие отличия: большее колесо нарезается двусторонней резцовой головкой, одновременно обрабатывающей обе стороны зубца; у меньшего колеса обе стороны зубца обрабатываются раздельно посредством двух односторонних резцовых головок, либо одной двусторонней резцовой головкой с чередующимися резцами.

При двойном двустороннем способе у каждого колеса обе стороны зубца обрабатываются сразу, при помощи двусторонней головки.

Схемы нарезания конических колес с круговыми зубцами отличаются значительными технологическими преимуществами — высокой производительностью, возможностью достижения высокой точности за счет жесткости станка и инструмента, широкими возможностями управления формой и размерами пятна контакта. Последняя особенность позволяет уже при нарезании ввести такие корректуры, которые позволяют компенсировать последующие деформации из-за консольного расположения опор шестерни, деформации, вызываемые термообработкой. Вместе с тем при понижающейся высоте ножики схемы нарезания колес с круговыми зубцами не обеспечивают строгой сопряженности: вращение колес происходит с переменным передаточным отношением, пятно контакта, если не принять специальных мер, имеет диагональный характер (см. рис. 69, б). Эти дефекты можно устранить, как будет показано ниже, корректурой параметров настройки станка и инструмента.

Появление конических и гипоидных колес явилось толчком к разработке методов синтеза приближенных зацеплений, позволяющих свести к минимуму погрешности, вызываемые применяющимися схемами нарезания, сохранив при этом технологические преимущества таких схем. Решению задач такого рода были посвящены усилия многих исследователей. Из зарубежных исследователей в первую очередь нужно отметить Э. Вильдгабера [30]. К сожалению, опубликованные работы Э. Вильдгабера написаны без достаточной полноты и даже, может быть, без желания вооружить читателя полным знанием разработанных им методов расчета. В нашей стране разработке методов синтеза приближенных конических и гипоидных зацеплений были посвящены работы: К. М. Писманника [110, 219], В. Н. Кедринского [110], Н. Ф. Кабатова [97–104], М. Г. Сегалю [233–237], Г. И. Шевелевой [256], автора книги [186, 179] и его последователей [184, 187, 189].

В настоящей главе довольно подробно излагается синтез обкатных конических колес с круговыми зубцами, основывающийся на методе, разработанном автором книги (см. § 39). При написании настоящей главы использована работа, выполненная автором совместно с А. А. Заостровским [187]. Изложение методов расчета при синтезе приближенных конических и гипоидных зацеплений представляет в литературном отношении довольно неблагоприятную задачу. Доведение до инженерной практики таких методов расчета требует громоздких выкладок и приводит к сложным формулам. Применение быстродействующих электронно-вычислительных машин позволяет свести трудности вычисления к минимуму при условии программирования расчетов. Создание библиотеки таких программ

для всех видов конических и гипоидных зацеплений с круговыми зубцами является задачей первой очереди. Автор книги надеется, что материалы настоящей главы позволят распространить излагаемый метод расчета на все виды приближенных конических и гипоидных зацеплений и создать необходимую библиотеку программ.

§ 117. Производящая поверхность при круговых профилях зубцов

Введем в рассмотрение следующие системы координат: S_s и S_n , жестко связанные с производящим колесом, неподвижную систему S_d , в которой

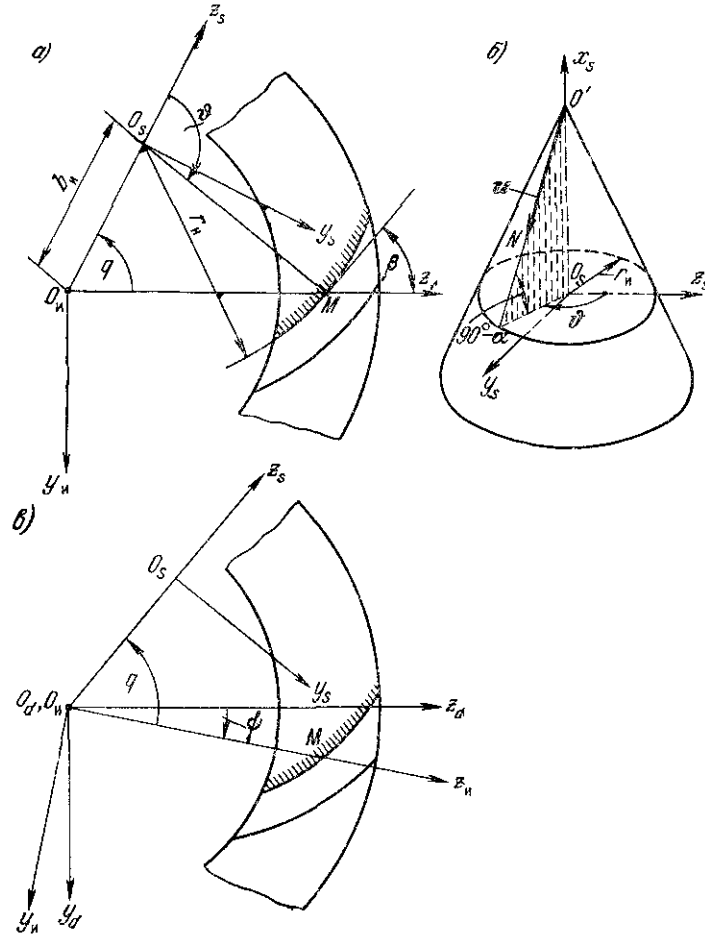


Рис. 286.

будем задавать вращение производящего колеса (рис. 286, в). При вращении резцовой головки в системе S_s (рис. 286, б) образуется коническая поверхность, определяемая уравнением

$$r_s = (r_n \operatorname{ctg} \alpha - u \cos \alpha) i_s + u \sin \alpha (\sin \vartheta j_s + \cos \vartheta k_s), \quad (117.1)$$

где r_n — расчетный радиус резцовой головки, u и ϑ — параметры, определяющие текущую точку N конической поверхности.

Установка резцовой головки относительно оси O_n производящего колеса определяется координатами q , $O_n O_s = b_n$ (рис. 286, а). В системе S_n производящая поверхность определится следующим уравнением:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= r_n \operatorname{ctg} \alpha - u \cos \alpha, \\ y_n &= u \sin \alpha \sin (\vartheta - q) - b_n \sin q, \\ z_n &= u \sin \alpha \cos (\vartheta - q) + b_n \cos q. \end{aligned} \right\} \quad (117.2)$$

В неподвижной системе S_d уравнения производящей поверхности будут таковы (рис. 286, в):

$$\left. \begin{aligned} x_d &= r_n \operatorname{ctg} \alpha - u \cos \alpha, \\ y_d &= u \sin \alpha \sin (\vartheta - q + \psi) - b_n \sin (q - \psi), \\ z_d &= u \sin \alpha \cos (\vartheta - q + \psi) + b_n \cos (q - \psi), \end{aligned} \right\} \quad (117.3)$$

где ψ — угол поворота производящего колеса.

Орт нормали к производящей поверхности в системе S_d определится уравнением

$$e_d = \sin \alpha i_d + \cos \alpha [\sin (\vartheta - q + \psi) j_d + \cos (\vartheta - q + \psi) k_d]. \quad (117.4)$$

§ 118. Схемы нарезания зубцов

1°. Нарезание зубцов шестерни 1 и колеса 2 производится двумя не совпадающими друг с другом производящими поверхностями F и P .

Предполагается, что колесо 2 нарезается двусторонним, а шестерня 1 односторонним способами. Ножки зубцов являются понижающимися, оси вращения производящего и нарезаемого колес образуют острый угол, равный $90^\circ - \delta_k + \Delta_k$ ($k = 1, 2$), где δ_k — угол начального конуса нарезаемого колеса, Δ_k — угол ножки. Поверхности зубцов нарезанных колес являются несопряженными. Для улучшения условий зацепления колес вводятся корректуры настройки станка при нарезании шестерни 1.

Введем в рассмотрение неподвижные системы координат S_m и S_n , в которых зададим уравнения производящих поверхностей (рис. 287 и рис. 288). Основываясь на уравнениях (117.3) и (117.4), в которых нижний индекс d заменен на m , получим

$$\left. \begin{aligned} x_m^{(F)} &= r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F, \\ y_m^{(F)} &= u_F \sin \alpha_F \sin (\vartheta_F - q_F + \psi_F) - b_F \sin (q_F - \psi_F), \\ z_m^{(F)} &= u_F \sin \alpha_F \cos (\vartheta_F - q_F + \psi_F) + b_F \cos (q_F - \psi_F), \end{aligned} \right\} \quad (118.1)$$

$$e_m^{(F)} = \sin \alpha_F i_m + \cos \alpha_F [\sin (\vartheta_F - q_F + \psi_F) j_m + \cos (\vartheta_F - q_F + \psi_F) k_m]. \quad (118.2)$$

Эти уравнения получены в предположении, что резцовой головкой обрабатывается вогнутая сторона зуба шестерни (рис. 286, 287) и $\alpha_F = \alpha_n$, где α_n — угол профиля резцов. Если же резцовой головкой обрабатывается выпуклая сторона зуба, в уравнениях (118.1) и (118.2) нужно принять $\alpha_F = 180^\circ - \alpha_n$.

Производящая поверхность P и орт ее нормали определяются в системе S_n уравнениями, которые можно получить из (118.1) и (118.2) после замены индексов m и F на n и P .

2°. Найдем уравнения зацепления при нарезании колес 1 и 2. При нарезании шестерни 1 производящее колесо F и сама шестерня вращаются вокруг осей x_m и z_a (рис. 287) с угловыми скоростями $\Omega^{(F)}$ и $\Omega^{(1)}$. Оси x_m и z_a скрещиваются, положение вершины O_1 начального конуса в системе S_m определяется вектором

$$\overline{O_m O_1} = L \sin \Delta_1 \mathbf{i}_m - \Delta E_1 \mathbf{j}_m - \Delta L_1 \mathbf{k}_m, \quad (118.3)$$

где ΔE_1 и ΔL_1 — корректуры настройки станка («гипоидное» и «осевое»

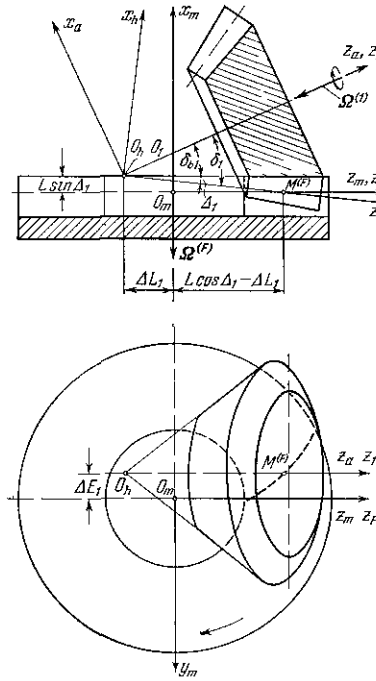


Рис. 287

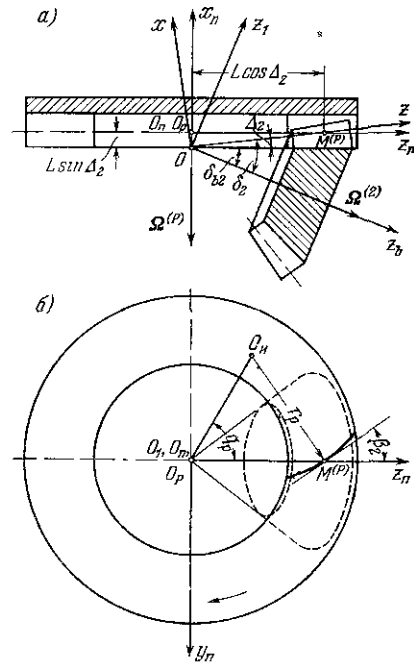


Рис. 288.

смещения), L — длина образующей начального конуса. Вектор скорости относительного движения

$$\mathbf{v}_m^{(F1)} = (\Omega^{(F)} - \Omega^{(1)}) \times \mathbf{r}_m^{(1)} - \mathbf{R}_m^{(1)} \times \Omega^{(1)}. \quad (118.4)$$

Здесь $\mathbf{r}_m^{(1)}$ — радиус-вектор точки контакта; $\mathbf{R}_m^{(1)}$ — радиус-вектор, проведенный в произвольную точку линии действия вектора $\Omega_m^{(1)}$, $|\Omega_m^{(1)}| = \frac{d\psi_F}{dt}$, $\Omega^{(F)} = -\Omega^{(F)} \mathbf{i}_m$, $\Omega^{(1)} = -\Omega^{(1)} (\sin \delta_{b1} \mathbf{i}_m + \cos \delta_{b1} \mathbf{k}_m)$.

В проекциях на оси координат вектор $\mathbf{v}_m^{(F1)}$ представим так:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_m}^{(F1)} &= -\Omega^{(1)} (y_m + \Delta E_1) \cos \delta_{b1}, \\ v_{y_m}^{(F1)} &= \Omega^{(F)} z_m + \Omega^{(1)} [(x_m - L \sin \Delta_1) \cos \delta_{b1} - (z_m + \Delta L_1) \sin \delta_{b1}], \\ v_{z_m}^{(F1)} &= -\Omega^{(F)} y_m + \Omega^{(1)} (y_m + \Delta E_1) \sin \delta_{b1}, \end{aligned} \right\} \quad (118.5)$$

где $\delta_{b1} = \delta_1 - \Delta_1$.

Используя выражение

$$e_m^{(F)} u_m^{(F1)} = 0,$$

уравнение зацепления производящей поверхности F с шестерней 1 представим в такой форме:

$$\begin{aligned} & [-u_F + (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1 - \Delta L_1 \operatorname{tg} \delta_{b1}) \cos \alpha_F] \sin (\vartheta_F - q_F + \psi_F) + \\ & + b_F \sin \alpha_F \sin (q_F - \psi_F) + b_F \cos \alpha_F \sin \vartheta_F \frac{i_{F1} - \sin \delta_{b1}}{\cos \delta_{b1}} - \\ & - \Delta E_1 [\sin \alpha_F - \cos \alpha_F \operatorname{tg} \delta_{b1} \cos (\vartheta_F - q_F + \psi_F)] = 0. \end{aligned} \quad (118.6)$$

Здесь $i_{F1} = \Omega^{(F)}/\Omega^{(1)}$ — передаточное отношение цепи обкатки.

Аналогичным образом получим уравнение зацепления производящей поверхности P и колеса 2:

$$\begin{aligned} & [u_P - (r_P \operatorname{ctg} \alpha_P - L \sin \Delta_2) \cos \alpha_P] \sin (\vartheta_P - q_P + \psi_P) - \\ & - b_P \sin \alpha_P \sin (q_P - \psi_P) + b_P \cos \alpha_P \sin \vartheta_P \frac{i_{P2} - \sin \delta_{b2}}{\cos \delta_{b2}} = 0. \end{aligned} \quad (118.7)$$

Здесь $i_{P2} = \Omega^{(P)}/\Omega^{(2)}$ — передаточное отношение цепи обкатки.

§ 119. Обеспечение контакта поверхностей зубцов колес 1 и 2 в заданной точке

1°. При синтезе приближенных конических зацеплений выдвигаются следующие требования:

а) Поверхности зубцов колес 1 и 2 должны вступить в касание друг с другом в заданной расчетной точке, а мгновенное передаточное отношение должно равняться заданному.

б) Производная передаточного отношения колес по углу поворота должна равняться нулю в заданной расчетной точке, т. е. $\frac{d}{d\varphi_1} (i_{12}) = 0$. Одновременно анализируется направление касательной к рабочей линии в расчетной точке, определяющей направление пятна контакта поверхностей зубцов.

в) Соотношение кривизн поверхностей зубцов должно исключить возможность интерференции в точке контакта и обеспечивать достаточные размеры пятна контакта.

В настоящем параграфе будет рассмотрено решение первого этапа задачи. Условие касания поверхностей зубцов Σ_1 и Σ_2 в расчетной точке можно представить следующими уравнениями:

$$r^{(1)} = r^{(2)}, \quad (119.1)$$

$$e^{(1)} = e^{(2)}. \quad (119.2)$$

Здесь $r^{(k)}$ и $e^{(k)}$ ($k = 1, 2$) — радиус-вектор и орт нормали поверхности в неподвижной системе S_0 (рис. 288); плоскость $y = 0$ содержит оси z_1 и z_2 колес.

2°. Рассмотрим сначала расчет наладок при нарезании колеса 2.

Столбцовые матрицы радиуса-вектора $r^{(P)}$ и орта $e^{(P)}$ нормали производящей поверхности P в системе S определяются следующими уравнениями:

$$r^{(P)} = M_{0n} r_n^{(P)}, \quad (119.3)$$

$$e^{(P)} = L_{0n} e_n^{(P)}. \quad (119.4)$$

Матрица M_{0n} определяется следующим уравнением:

$$M_{0n} = \begin{vmatrix} \cos \Delta_2 & 0 & -\sin \Delta_2 & L \sin \Delta_2 \cos \Delta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Delta_2 & 0 & \cos \Delta_2 & L \sin^2 \Delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (119.5)$$

Матрица L_{0n} определяется из (119.5), для чего в матрице M_{0n} нужно зачеркнуть последний столбец и последнюю строку.

Аналогично выражениям (118.1) и (118.2)

$$r_n = \begin{vmatrix} r_P \operatorname{ctg} \alpha_P - u_P \cos \alpha_P \\ u_P \sin \alpha_P \sin \tau_P - b_P \sin (q_P - \psi_P) \\ u_P \sin \alpha_P \cos \tau_P + b_P \cos (q_P - \psi_P) \end{vmatrix}, \quad e_n = \begin{vmatrix} \sin \alpha_P \\ \cos \alpha_P \sin \tau_P \\ \cos \alpha_P \cos \tau_P \end{vmatrix},$$

После преобразований получим следующие выражения для $r^{(P)}$ и $e^{(P)}$:

$$\left. \begin{aligned} x^{(P)} &= (r_P \operatorname{ctg} \alpha_P - u_P \cos \alpha_P) \cos \Delta_2 - \\ &\quad - [u_P \sin \alpha_P \cos \tau_P + b_P \cos (q_P - \psi_P)] \sin \Delta_2 + L \sin \Delta_2 \cos \Delta_2, \\ y^{(P)} &= u_P \sin \alpha_P \sin \tau_P - b_P \sin (q_P - \psi_P), \\ z^{(P)} &= (r_P \operatorname{ctg} \alpha_P - u_P \cos \alpha_P) \sin \Delta_2 + \\ &\quad + [u_P \sin \alpha_P \cos \tau_P + b_P \cos (q_P - \psi_P)] \cos \Delta_2 + L \sin^2 \Delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (119.6)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x^{(P)} &= \sin \alpha_P \cos \Delta_2 - \cos \alpha_P \cos \tau_P \sin \Delta_2, \\ e_y^{(P)} &= \cos \alpha_P \sin \tau_P, \\ e_z^{(P)} &= \sin \alpha_P \sin \Delta_2 + \cos \alpha_P \cos \tau_P \cos \Delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (119.7)$$

В этих уравнениях $\tau_P = \vartheta_P - q_P + \psi_P$; Δ_2 — угол ножки зубцов. В уравнениях (119.6) и (119.7) нужно принять $\alpha_P = \alpha_n$, где α_n — угол профиля резцов при обработке выпуклой стороны зубца колеса; при обработке вогнутой стороны зубца колеса $\alpha_P = 180^\circ - \alpha_n$.

Отметим в системе S точку $M^{(P)} (O; O; L)$. Точка $M^{(P)}$ принадлежит оси z , являющейся мгновенной осью вращения производящего колеса P и колеса 2 при передаточном отношении

$$i_{P2} = \frac{\Omega^{(P)}}{\Omega^{(2)}} = \frac{\sin \delta_2}{\cos \Delta_2}.$$

В силу этого, $M^{(P)}$ является точкой контакта поверхностей P и Σ_2 . В точке $M^{(P)}$ $\psi_P = 0$ и $\tau_P = 90^\circ - \beta_2$ (рис. 286, 289, б).

Колесо 2 нарезается двусторонним способом, т. е. вогнутая и выпуклая стороны зубца нарезаются одновременно. Будем считать, что вначале заданы параметры, определяющие точку $M_0^{(P)}$ средней линии впадины производящего колеса (рис. 289, а). В косоугольном треугольнике $O_n O_n M_0^{(P)} O_n M_0^{(P)} = L \cos \Delta_2$, $O_n M_0^{(P)} = r_{P(0)}$; $\angle O_n M_0^{(P)} O_n = 90^\circ - \beta_{2(0)}$; $\angle O_n O_n M_0^{(P)} = q_{P(0)}$.

На рис. 289, а изображено сечение впадины производящего колеса плоскостью $x_n = 0$, проведенной через точку $M^{(P)}$ пересечения осей z_n и z (рис. 288); ось z — ось мгновенного вращения при нарезании колеса 2. Отметим точки K и K' , принадлежащие дуге окружности радиуса $O_n M_0^{(P)} = L \cos \Delta_2$. Точка K станет точкой контакта производящей поверхности и поверхности вогнутой стороны зубца колеса 2 после того, как она совме-

стится с точкой $M^{(P)}$ (рис. 289, б). Для этого треугольник $O_n K O_n$ нужно повернуть вокруг O_n на угол $M^{(P)} O_n K$. Аналогично, для того чтобы точка K' стала точкой контакта производящей поверхности и поверхности выпуклой стороны зубца колеса 2, треугольник $O_n K' O_n$ нужно повернуть на угол $M^{(P)} O_n K'$ до совмещения точки K' с $M^{(P)}$.

Параметры q_P и β_2 точки K найдем из соотношения сторон косоугольного треугольника $O_n O_n M^{(P)}$ (рис. 288, б); параметры u_P и ϑ_P найдем из выражений (119.6), приняв в них, что $x^{(P)} = y^{(P)} = 0$; $z^{(P)} = L$; $\psi_P = 0$; $\tau_P = 90^\circ - \beta_2 = \vartheta_P - q_P$. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \cos q_P &= \frac{(L \cos \Delta_2)^2 + b_{P(0)}^2 - r_P^2}{2b_{P(0)} L \cos \Delta_2}, \\ \cos \beta_2 &= \frac{b_{P(0)} \sin q_P}{r_P}, \\ \vartheta_P &= 90^\circ - \beta_2 + q_P, \quad u_P = \frac{r_P}{\sin \alpha_P}. \end{aligned} \right\} \quad (119.8)$$

Значение r_P определяется из зависимости $r_P = O_n K = O_n N = r_{P(0)} + \frac{w}{2} + L \cos \Delta_2 \operatorname{tg} \alpha_P$, где w — развод резцов.

Зависимости (119.8) остаются справедливыми и для определения параметров точки K' ; при этом нужно принять, что $r_P = O_n K' = O_n T = r_{P(0)} - \frac{w}{2} - L \cos \Delta_2 \operatorname{tg} \alpha_P$.

Передаточное отношение цепи обкатки найдем, приняв во внимание, что аксоидами нарезаемого и производящего колес являются конусы с углами δ_2 и $90^\circ - \Delta_2$ (рис. 288). Поэтому

$$i_{P2} = \frac{\Omega^{(P)}}{\Omega^{(2)}} = \frac{\sin \delta_2}{\cos \Delta_2}. \quad (119.9)$$

3°. Найдем теперь выражения для расчета параметров производящей поверхности F и ее установки при нарезании шестерни 1. Напомним, что шестерня нарезается односторонним способом, т. е. каждая сторона зубца нарезается отдельно. Вывод необходимых уравнений основывается на том, что поверхности зубцов Σ_1 и Σ_2 шестерни и колеса касаются друг друга в точке $M^{(P)}$.

Введем в рассмотрение системы координат S_h и S_a , жестко связанные с системой S_m (рис. 290). Начало O_h систем S_h и S_a совпадает с вершиной начального конуса с углом δ_1 шестерни 1. Ось z_a совпадает с осью шестерни 1. Так как при нарезании шестерни 1 вводятся корректуры настройки станка, то начало координат O_h смещено на ΔL_1 и ΔE_1 по отношению к началу O_m .

Матрица перехода

$$M_{hm} = \begin{vmatrix} \cos \Delta_1 & 0 \sin \Delta_1 & -(L \cos \Delta_1 - \Delta L_1) \sin \Delta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Delta_1 & 0 \cos \Delta_1 & L \sin^2 \Delta_1 + \Delta L_1 \cos \Delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (119.10)$$

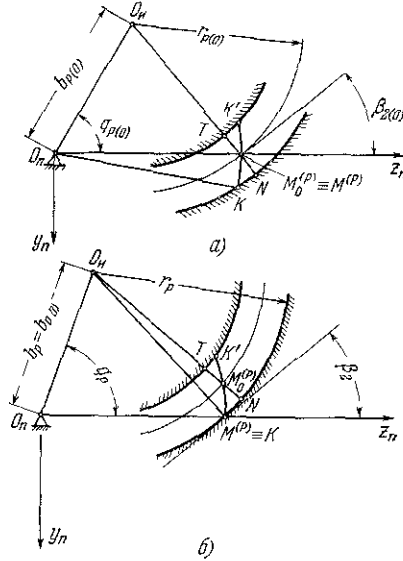


Рис. 289.

Производящая поверхность F и орт нормали к ней определяются в системе S_h следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_h^{(F)} &= (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F) \cos \Delta_1 + [u_F \sin \alpha_F \cos \tau_F + \\ &\quad + b_F \cos (q_F - \psi_F)] \sin \Delta_1 - (L \cos \Delta_1 - \Delta L_1) \sin \Delta_1, \\ y_h^{(F)} &= u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F - b_F \sin (q_F - \psi_F) + \Delta E_1, \\ z_h^{(F)} &= -(r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F) \sin \Delta_1 + \\ &\quad + [u_F \sin \alpha_F \cos \tau_F + b_F \cos (q_F - \psi_F)] \cos \Delta_1 + \\ &\quad + L \sin^2 \Delta_1 - \Delta L_1 \cos \Delta_1, \end{aligned} \right\} \quad (119.11)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{xh}^{(F)} &= \sin \alpha_F \cos \Delta_1 + \cos \alpha_F \cos \tau_F \sin \Delta_1, \\ e_{yh}^{(F)} &= \cos \alpha_F \sin \tau_F, \\ e_{zh}^{(F)} &= -\sin \alpha_F \sin \Delta_1 + \cos \alpha_F \cos \tau_F \cos \Delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (119.12)$$

Здесь $\tau_F = \vartheta_F - q_F + \psi_F$.

В системе S_h отмечена точка $M^{(F)}$, которая совпадает с точкой $M^{(P)}$ при совмещении друг с другом систем координат S_h и S_0 .

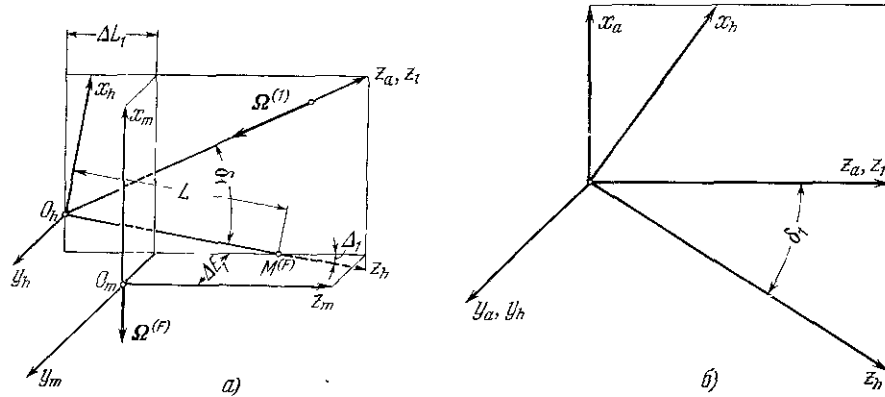


Рис. 290.

Так как оси z_m и z_a — оси вращения производящей поверхности F и шестерни 1 — перекрещиваются, может оказаться, что поверхность зацепления F и Σ_1 не пройдет через точку $M^{(F)}$. Пусть при некотором значении параметра ψ_F поверхности F и Σ_1 касаются друг друга в точке M_1 , отличающейся от $M^{(F)}$.

Представим теперь, что системы S_h и S установлены друг по отношению к другу так, что у них совпали точки $M^{(P)}$ системы S и M_1 системы S_h .

В точке M_1 , как уже было сказано выше, касаются друг друга поверхности F и Σ_1 ; точка же $M^{(P)}$ является точкой касания поверхностей P и Σ_2 . При совпадении $M^{(P)}$ с M_1 поверхности P , Σ_2 , F и Σ_1 будут касаться друг друга в общей точке $M_1 = M^{(P)}$. При этом будут справедливы следующие уравнения:

$$r_h^{(F)} = M_{h0} r^{(M^{(P)})}, \quad (119.13)$$

$$e_h^{(F)} = L_{h0} e^{(P)}. \quad (119.14)$$

Либо

$$r^{(M(P))} = M_{0h} r_h^{(F)}, \quad (119.15)$$

$$e^{(P)} = L_{0h} e_h^{(F)}. \quad (119.16)$$

Матрицы M_{0h} и M_{h0} , L_{0h} и L_{h0} являются обратными друг по отношению к другу. Использование выражений (119.13) и (119.14) является более предпочтительным, так как позволяет сократить выкладки.

Для того чтобы найти матрицу M_{h0} , введем предварительно систему S_c , жестко связанную с S (рис. 291). Совместим сначала системы S_h и S ;

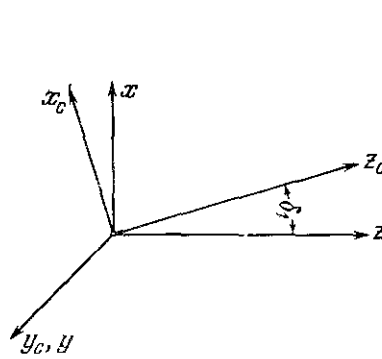


Рис. 291.

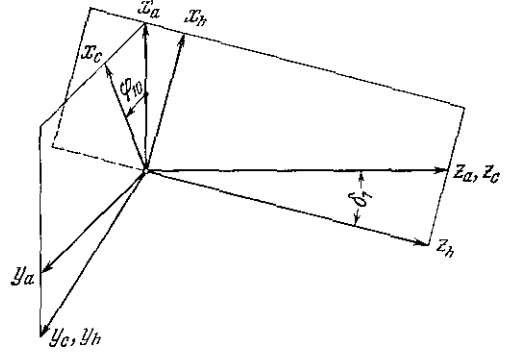


Рис. 292.

тогда система S_c совместится с S_a . Затем системам S и S_c , жестко связанным между собой, сообщим поворот на угол φ_{10} вокруг z_a . Тогда система S_c займет по отношению к S_a положение, изображенное на рис. 292 (система S на этом рисунке не изображена).

Матрица

$$M_{h0} = M_{ha} M_{ac} M_{c0}, \quad (119.17)$$

$$M_{c0} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & 0 & -\sin \delta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \delta_1 & 0 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (119.18)$$

$$M_{ac} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (119.19)$$

$$M_{ha} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & 0 & \sin \delta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \delta_1 & 0 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (119.20)$$

$$M_{h0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} \cos^2 \delta_1 + \sin^2 \delta_1 & -\sin \varphi_{10} \cos \delta_1 & \cos \delta_1 \sin \delta_1 (1 - \cos \varphi_{10}) & 0 \\ \sin \varphi_{10} \cos \delta_1 & \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} \sin \delta_1 & 0 \\ \cos \delta_1 \sin \delta_1 (1 - \cos \varphi_{10}) & \sin \varphi_{10} \sin \delta_1 & \cos \varphi_{10} \sin^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (119.21)$$

Для того чтобы получить матрицу L_{h0} из (119.20), в матрице M_{h0} нужно зачеркнуть последнюю строку и последний столбец. Матрица

$$r^{(M^{(P)})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (119.22)$$

Подставив выражения (119.22), (119.24) и (119.11) в (119.13), получим

$$(r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F - L \sin \Delta_1) \cos \Delta_1 + u_F \sin \alpha_F \sin \Delta_1 \cos \tau_F +$$

$$+ b_F \sin \Delta_1 \cos (q_F - \psi_F) + \Delta L_1 \sin \Delta_1 = L \sin \delta_1 \cos \delta_1 (1 - \cos \varphi_{10}), \quad (119.23)$$

$$u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F - b_F \sin (q_F - \psi_F) + \Delta E_1 = -L \sin \varphi_{10} \sin \delta_1, \quad (119.24)$$

$$- (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F - L \sin \Delta_1) \sin \Delta_1 + u_F \sin \alpha_F \cos \Delta_1 \cos \tau_F +$$

$$+ b_F \cos \Delta_1 \cos (q_F - \psi_F) + \Delta L_1 \cos \Delta_1 = L (\cos \varphi_{10} \sin^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_1). \quad (119.25)$$

На основании зависимостей (119.14), (119.12) и (119.7) можно получить еще три уравнения связи между параметрами производящих поверхностей; независимыми из трех таких уравнений являются только два, так как $|e_h^{(F)}| = |e^P| = 1$. Учтем также, что в точке $M^{(P)}$ $\tau_P = 90^\circ - \beta_2$. В результате получим

$$\sin \alpha_F \cos \Delta_1 + \cos \alpha_F \cos \tau_F \sin \Delta_1 = \cos \delta_1 \cos \varphi_{10} [\sin \alpha_P \cos (\delta_1 + \Delta_2) -$$

$$- \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin (\delta_1 + \Delta_2)] - \sin \varphi_{10} \cos \delta_1 \cos \alpha_P \cos \beta_2 +$$

$$+ \sin \delta_1 [\sin \alpha_P \sin (\delta_1 + \Delta_2) + \cos \alpha_P \sin \beta_2 \cos (\delta_1 + \Delta_2)], \quad (119.26)$$

$$\cos \alpha_F \sin \tau_F = \sin \varphi_{10} [\sin \alpha_P \cos (\delta_1 + \Delta_2) - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin (\delta_1 + \Delta_2)] +$$

$$+ \cos \varphi_{10} \cos \alpha_P \cos \beta_2, \quad (119.27)$$

$$- \sin \alpha_F \sin \Delta_1 + \cos \alpha_F \cos \tau_F \cos \Delta_1 =$$

$$= - \cos \varphi_{10} \sin \delta_1 [\sin \alpha_P \cos (\delta_1 + \Delta_2) - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin (\delta_1 + \Delta_2)] +$$

$$+ \sin \varphi_{10} \sin \delta_1 \cos \alpha_P \cos \beta_2 +$$

$$+ \cos \delta_1 [\sin \alpha_P \sin (\delta_1 + \Delta_2) + \cos \alpha_P \sin \beta_2 \cos (\delta_1 + \Delta_2)]. \quad (119.28)$$

Три уравнения (119.23) — (119.25) и два уравнения из системы (119.26) — (119.28) позволяют вычислить пять неизвестных параметров, содержащихся в уравнениях производящей поверхности F и уравнениях, определяющих ее установку при нарезании шестерни 1. Два таких параметра — τ_F и φ_{10} — найдем, используя (119.26) — (119.28). Для этого исключим сначала из выражений (119.26) и (119.28) параметр φ_{10} , умножив первое из них на $\sin \delta_1$, а второе — на $\cos \delta_1$. После преобразований получим

$$\cos \tau_F = \frac{\sin \alpha_P \sin (\delta_1 + \Delta_2) + \cos \alpha_P \sin \beta_2 \cos (\delta_1 + \Delta_2) - \sin \alpha_F \sin \delta_{b1}}{\cos \alpha_F \cos \delta_{b1}}, \quad (119.29)$$

где $\delta_{b1} = \delta_1 - \Delta_1$ — угол конуса впадин.

После определения τ_F из зависимости (119.29) можно найти φ_{10} , используя трансцендентную относительно φ_{10} зависимость (119.27).

Зависимость для определения u_F получим, умножив выражение (119.23) на $\cos \Delta_1$, (119.25) на $\sin \Delta_1$ и рассмотрев их затем совместно. В результате найдем

$$u_F = \frac{r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} (1 - \cos \varphi_{10})}{\cos \alpha_F}. \quad (119.30)$$

Для определения параметра $(q_F - \psi_F)$ поступим так. Умножим выражения (119.23) и (119.25) соответственно на $\sin \Delta_1$ и на $\cos \Delta_1$, а затем рассмотрим их совместно. В результате получим

$$b_F \cos (q_F - \varphi_F) = L_1 (\cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + \cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \sin \delta_{b1}) - u_F \sin \alpha_F \cos \tau_F - \Delta L_1. \quad (119.31)$$

На основании уравнений (119.24) и (119.31) получим

$$\operatorname{tg} (q_F - \psi_F) = \frac{Q}{G}, \quad (119.32)$$

где

$$Q = u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F + \Delta E_1 + L \sin \varphi_{10} \sin \delta_1,$$

$$G = L (\cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + \cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \sin \delta_{b1}) - u_F \sin \alpha_F \cos \tau_F - \Delta L_1.$$

Параметр b_F определим из уравнения (119.24), согласно которому

$$b_F = \frac{u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F + \Delta E_1 + L \sin \varphi_{10} \sin \delta_1}{\sin (q_F - \psi_F)}. \quad (119.33)$$

Параметр ϑ_F найдем из выражения

$$\vartheta_F = (\vartheta_F - q_F + \psi_F) + (q_F - \psi_F) = \tau_F + (q_F - \psi_F). \quad (119.34)$$

Для определения передаточного отношения i_{F1} воспользуемся уравнением зацепления (118.6), в которое подставим полученные для точки контакта выражения для u_F , $(q_F - \psi_F)$, b_F и ϑ_F . В результате найдем, что

$$i_{F1} = \frac{T}{E}, \quad (119.35)$$

$$T = L \sin \delta_1 [\cos \varphi_{10} \sin \tau_F - \sin \varphi_{10} (\cos \delta_{b1} \operatorname{tg} \alpha_F - \sin \delta_{b1} \cos \tau_F)],$$

$$E = L \sin \delta_1 (\operatorname{ctg} \delta_1 \cos \delta_{b1} \sin \tau_F + \cos \varphi_{10} \sin \delta_{b1} \sin \tau_F + \sin \varphi_{10} \cos \tau_F) - \Delta L_1 \sin \tau_F + \Delta E_1 \cos \tau_F.$$

Параметр ψ_F определяется следующим уравнением:

$$\psi_F = \varphi_{10} i_{F1}. \quad (119.36)$$

При выводе выражения (119.36) мы исходили из следующих соображений. Начало отсчета углов поворота ψ_F производящего колеса F и углов поворота φ_1 нарезаемой шестерни 1 можно выбрать так, чтобы при $\psi_F = 0$ оказалось и $\varphi_1 = 0$. Точка M_1 принадлежит поверхности конуса с углом δ_1 , описанного вокруг оси шестерни 1. Для совпадения точки M_1 с $M^{(F)}$ поверхностям производящего колеса F и шестерни 1, жестко связанным между собой, должен быть сообщен поворот на угол $\varphi_{10} = \varphi_1$ вокруг оси шестерни 1: направления отсчета φ_{10} и φ_1 противоположны. Исходя из равенства значений φ_{10} и φ_1 , учитывая, что передаточное отношение

$$i_{F1} = \frac{d\psi_F}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt},$$

получим приведенное выше уравнение (119.36).

Подводя предварительно итоги, мы можем констатировать, что выражения (119.29) — (119.36) и (119.27) позволяют определить следующие параметры производящей поверхности и ее установки: ϑ_F , φ_{10} , τ_F ,

($q_F - \psi_F$), ψ_F , u_F , b_F и i_{F1} . Содержащиеся в приведенных уравнениях корректуры установки ΔE_1 и ΔL_1 должны быть определены из зависимостей, которые будут получены в § 120. Углы профиля резцов α_P и α_F считаются заданными. Радиусы r_P и r_F резцовых головок также считаются в этом

параграфе заданными. Нужно иметь в виду, что величины радиусов резцовых головок r_P и r_F должны быть связаны между собой так, чтобы исключить интерференцию нарезанных поверхностей Σ_1 и Σ_2 в точке контакта и обеспечить благоприятные размеры пятна контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 (см. § 121).

Полезно отметить геометрический смысл угла τ_F .

Проведем через точку контакта M_1 производящей поверхности F и нарезаемой поверхности Σ_1 плоскость, перпендикулярную оси x_m — оси вращения производящей поверхности. Сечение F такой плоскостью представляет дугу окружности. В точке M_1 касательная к этой окружности и линия $O_m M_1$ образуют угол $\beta_1 = 90^\circ - \tau_F$.

4°. В § 120 будет показано, что из условия равенства нулю первой производной передаточного отношения можно определить только один из двух параметров корректур установки — ΔE_1 и ΔL_1 . Если при синтезе по условиям зацепления в окрестности точки контакта ограничиться лишь

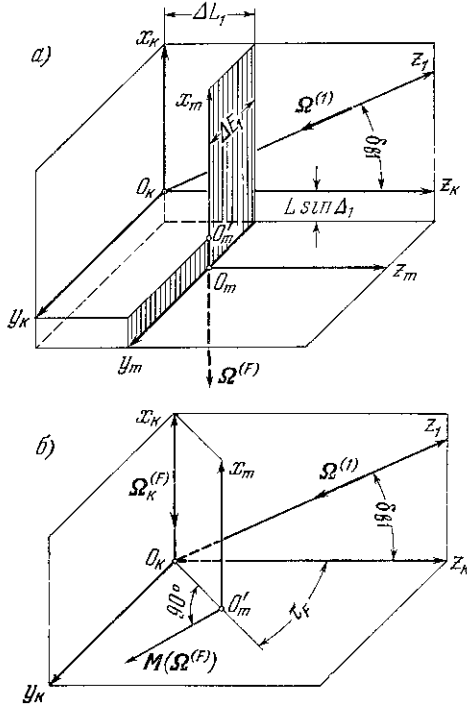


Рис. 293.

требованием, что $\frac{d}{d\varphi_1} [i_{12}(\varphi_1)] = 0$, один из параметров корректур установки ΔE_1 и ΔL_1 должен быть выбран заранее, либо на значения ΔE_1 и ΔL_1 должна быть наложена дополнительная связь.

Анализируя выражение (119.35) для i_{F1} , можно установить, что при

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta L_1} = \operatorname{tg} \tau_F \quad (119.37)$$

передаточное отношение i_{F1} оказывается независимым от корректур ΔE_1 и ΔL_1 .

При этом передаточное отношение определится уравнением

$$i_{F1} = \frac{T'}{E'}, \quad (119.38)$$

где

$$T' = \cos \varphi_{10} \sin \tau_F - \sin \varphi_{10} (\cos \delta_{b1} \operatorname{tg} \alpha_P - \sin \delta_{b1} \cos \tau_F),$$

$$E' = \sin \tau_F (\operatorname{ctg} \delta_1 \cos \delta_{b1} + \cos \varphi_{10} \sin \delta_{b1}) + \sin \varphi_{10} \cos \tau_F.$$

Такой результат в целях лучшего понимания его кинематического смысла можно обосновать следующим образом.

Представим себе, что мы введем систему координат S_k (рис. 293), оси которой параллельны S_m , а начало O_k совпадает с O_h (см. рис. 290. а).

Приведем вектор угловой скорости $\Omega^{(F)}$ к точке O_k , в результате чего получим вектор $\Omega_k^{(F)}$, приложенный в точке O_k , и вектор-момент

$$M_k(\Omega_k^{(F)}) = \overline{O_k O_m} \times \Omega_k^{(F)} = (\Delta E_1 j_k + \Delta L_1 k_k) \times (-\Omega^{(F)} i_k). \quad (119.39)$$

Вектор скорости относительного движения производящей и нарезаемой поверхностей определится уравнением

$$v_k^{(F1)} = M_k(\Omega_k^{(F)}) + (\Omega_k^{(F)} - \Omega_k^{(1)}) \times r_k. \quad (119.40)$$

В точке M_1 контакта производящей поверхности F и нарезаемой поверхности Σ_1 должно соблюдаться уравнение

$$e_k^{(F)} v_k^{(F1)} = e_k^{(F)} [M_k(\Omega_k^{(F)}) + (\Omega_k^{(F)} - \Omega_k^{(1)}) \times r_k] = 0. \quad (119.41)$$

Орт нормали $e_k^{(F)}$ определяется уравнением, аналогичным (118.2):

$$e_k^{(F)} = \sin \alpha_F i_k + \cos \alpha_F (\sin \tau_F j_k + \cos \tau_F k_k). \quad (119.42)$$

Легко установить, что при $\Delta E_1 = \Delta L_1 \operatorname{tg} \tau_F$ скалярное произведение

$$e_k^{(F)} [M_k(\Omega_k^{(F)})] = 0.$$

Следовательно, точка M_1 будет точкой контакта производящей и нарезаемой поверхностей, если будет соблюдено уравнение

$$[e_k^{(F)}, (\Omega_k^{(F)} - \Omega_k^{(1)}), r_k] = 0. \quad (119.43)$$

После совмещения систем S и S_k точки $M^{(P)}$ и M_1 должны совпасть друг с другом. Поэтому столбцовая матрица радиуса-вектора r_k может быть определена из матричного уравнения

$$r_k = M_{k0} r^{(M^{(P)})} = M_{kh} M_{h0} r^{(M^{(P)})}. \quad (119.44)$$

Матрица M_{h0} была ранее представлена выражением (119.21). На основании построений рис. 293

$$M_{kh} = \begin{vmatrix} \cos \Delta_1 & 0 & -\sin \Delta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Delta_1 & 0 & \cos \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (119.45)$$

Вектор

$$\Omega_k^{(F)} = -\Omega^{(F)} i_k, \quad (119.46)$$

$$\Omega_k^{(1)} = -\Omega^{(1)} (\sin \delta_{b1} i_k + \cos \delta_{b1} k_k). \quad (119.47)$$

Подставив полученные выражения в (119.43), придем после преобразований к следующему выражению:

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha_F & \cos \alpha_F \sin \tau_F & \cos \alpha_F \cos \tau_F \\ -\Omega^{(F)} + \Omega^{(1)} \sin \delta_{b1} & 0 & \Omega^{(1)} \cos \delta_{b1} \\ \cos \delta_1 \sin \delta_{b1} - & -\sin \varphi_{10} \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + \\ -\cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} & & \cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \sin \delta_{b1} \end{vmatrix} = 0. \quad (119.48)$$

Из зависимости (119.48) можно определить выражение для передаточного отношения $i_{F1} = \Omega^{(F)}/\Omega^{(1)}$, которое совпадет с зависимостью (119.38).

Из всего изложенного следует, что если корректуры установки ΔE_1 и ΔL_1 связать зависимостью (119.37), передаточное отношение i_{F1} не будет зависеть от величины корректур. Это вытекает из того, что вектор скорости относительного движения $v^{(F1)}$ [см. (119.40)] можно представить как

геометрическую сумму двух векторов: а) вектора $\mathbf{M}_k(\Omega_k^{(F)})$; б) вектора $(\Omega_k^{(F)} - \Omega^{(1)}) \times \mathbf{r}_k$. Первый из этих векторов, содержащий ΔF_1 и ΔL_1 , при соблюдении зависимости (119.37) всегда перпендикулярен орту нормали $\mathbf{e}_k^{(F)}$ производящей поверхности. Второй вектор корректуры установки не содержит, и его перпендикулярность орту нормали $\mathbf{e}_k^{(F)}$ достигается при определенном соотношении между угловыми скоростями $\Omega^{(F)}$ и $\Omega^{(1)}$. Напомним, что требование перпендикулярности векторов $\mathbf{v}_k^{(F1)}$ и $\mathbf{e}_k^{(F)}$ вытекает из того, что точка M_1 должна быть точкой контакта производящей и нарезаемой поверхностей.

5°. Уравнения для расчета параметров ϑ_F , $\tau_F = 90^\circ - \beta_1$, $(q_F - \psi_F)$, u_F , b_F , i_{F1} упрощаются при $\varphi_{10} = 0$.

Для того чтобы получить такое значение φ_{10} , необходимо применить производящие поверхности (резцовые головки) P и F , у которых углы профилей резцов α_P и α_F будут связаны следующей зависимостью:

$$\sin \alpha_F = \sin \alpha_P \cos (\Delta_1 + \Delta_2) - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin (\Delta_1 + \Delta_2). \quad (119.49)$$

Зависимость (119.49) получена на основании выражений (119.26) и (119.28).

Известно, что при нарезании конических колес используются головки с резцами, различающимися по номерам. Номер резца $N = \Delta\alpha/10$ ($\Delta\alpha$ и коэффициент 10 задаются в минутах). Под $\Delta\alpha$ понимается отклонение угла профиля резца от номинального значения α_0 (обычно $\alpha_0 = 20^\circ$). В целях уменьшения комплекта резцов значения $\Delta\alpha$ задаются не чаще, чем через 5 минут. Для выбора номера резцов значение $\Delta\alpha$ можно определить следующим образом.

Представим себе, что при нарезании колеса 2 ось x_n вращения производящей поверхности перпендикулярна образующей не конуса впадин колеса 2, как это изображено на рис. 288, а образующей начального конуса; тогда угол между осями z_n и z будет равен нулю. Обозначим через α_0 угол профиля резцов, используемых для нарезания колеса 2 в отмеченном случае. Выражения для проекций вектора нормали к производящей поверхности при $\alpha_P = \alpha_0$ получим на основании формул (119.7), в которых нужно положить $\Delta_2 = 0$, $\tau_P = 90^\circ - \beta_2$.

Тогда окажется, что

$$\mathbf{e}^{(P)} = \sin \alpha_0 \mathbf{i} + \cos \alpha_0 \cos \beta_2 \mathbf{j} + \cos \alpha_0 \sin \beta_2 \mathbf{k}, \quad (119.50)$$

где $\mathbf{e}^{(P)}$ — орт нормали к производящей поверхности P в точке $M^{(P)}$, если бы ось вращения P была перпендикулярна образующей начального конуса. Если же ось вращения производящей поверхности P перпендикулярна образующей конуса впадин, то для равенства проекций ортов нормали, выражаемых уравнениями (119.7) и (119.50), нужно применить резцы с углом профиля α_P , определяемым из условия, что $\mathbf{e}^{(P)} = \mathbf{e}^{(F)}$. Обозначим $\alpha_P = \alpha_0 + \Delta\alpha_P$. На основании уравнений (119.50) и (119.7), если принять в силу малости Δ_2 и $\Delta\alpha_P$, что $\cos \Delta_2 \approx 1$, $\sin \Delta_2 \approx \Delta_2$, $\cos \Delta\alpha_P \approx 1$, $\sin (\Delta\alpha_P) \approx \Delta\alpha_P$, и пренебречь произведением $\sin \alpha_0 \sin \Delta\alpha$, получим

$$\Delta\alpha_P = \Delta_2 \sin \beta_2. \quad (119.51)$$

Для определения $\Delta\alpha_P$ воспользуемся условием, что $\mathbf{e}_k^{(F)} = \mathbf{e}_k^{(F)}$. Орт нормали $\mathbf{e}_k$ был ранее представлен уравнениями (119.12). Выражения для $\mathbf{e}_k^{(F)}$ получим, приняв в зависимостях (119.12), что $\alpha_F = \alpha_0$,

$\tau_F = 90^\circ - \beta_1$. Проделав аналогичные выводы, получим, что

$$\Delta\alpha_F = -\Delta_1 \sin \beta_1. \quad (119.52)$$

Формулы (119.51) и (119.52) используются для определения номеров резцов (так называемых номерных поправок). В целях еще большего упрощения принимают $\beta_1 = \beta_2 = \beta_{2(0)}$, где $\beta_{2(0)}$ — угол наклона средней линии впадины производящего колеса (рис. 289, а).

Нужно подчеркнуть, что формулы (119.51) и (119.52) нужно рассматривать только как приближенные, и их использование не обеспечивает сопряженности поверхностей зубцов.

Если принять, что $\alpha_F = \alpha_0 + \Delta\alpha_F$, $\alpha_P = \alpha_0 + \Delta\alpha_P$, производящие поверхности P и F не будут все же касаться друг друга в расчетной точке при $\varphi_{10} = 0$.

Касание производящих поверхностей P и F в расчетной точке будет достигнуто, если вычислив $\Delta\alpha_P$ по формуле (119.51), принять, что $\alpha_P = \alpha_0 + \Delta\alpha_P$, а угол α_F вычислить из формулы (119.49). Если все же принять, что $\alpha_F = \alpha_0 + \Delta\alpha_F$, вычислив предварительно $\Delta\alpha_F$ из формулы (119.52), производящая поверхность F коснется поверхности P в расчетной точке $M^{(P)}$ только после поворота F на угол φ_{10} вокруг оси шестерни 1.

В целях сокращения комплекта зуборезного инструмента при нарезании колеса и шестерни часто применяют резцы одного номера. В этом случае также можно добиться касания нарезанных поверхностей — зубцов в расчетной точке, если при расчете параметров производящей поверхности F и ее установки воспользоваться приведенными выше уравнениями (119.27), (119.29), (119.30), (119.31), (119.32), (119.34) и (119.38).

§ 120. Обеспечение равенства нулю первой производной передаточного отношения колес в расчетной точке контакта

Исходные уравнения. Для определения условий зацепления колес в окрестности точки контакта нужно воспользоваться следующими уравнениями (см. § 39):

$$\mathbf{v}_r^{(2)} - \mathbf{v}_r^{(1)} = \mathbf{v}^{(12)}, \quad (120.1)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)} - \dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{e}^{(1)}. \quad (120.2)$$

Поскольку точка контакта $M^{(P)}$ колес лежит на мгновенной оси вращения колес, то скорость относительного движения

$$\mathbf{v}^{(12)} = 0$$

и

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)}. \quad (120.3)$$

Скорости $\mathbf{v}_r^{(i)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) движения точки контакта и конца орта нормали целесообразно представить через аналогичные скорости движения точки контакта по производящим поверхностям P и F , используя следующие выражения:

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(P)} + \mathbf{v}^{(P2)}, \quad (120.4)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(2)} = \dot{\mathbf{e}}_r^{(P)} + \boldsymbol{\Omega}^{(P2)} \times \mathbf{e}^{(P)}, \quad (120.5)$$

$$\mathbf{v}_r^{(1)} = \mathbf{v}_r^{(F)} + \mathbf{v}^{(F1)}, \quad (120.6)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(1)} = \dot{\mathbf{e}}_r^{(F)} + \boldsymbol{\Omega}^{(F1)} \times \mathbf{e}^{(F)}. \quad (120.7)$$

При дальнейших преобразованиях примем во внимание, что в точке контакта $M^{(P)}$ скорость относительного движения $\mathbf{v}^{(P2)} = 0$, $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(P)} = \mathbf{e}^{(F)}$. Примем также, что $\omega^{(1)} = 1 \frac{pa\delta}{сек}$, а $\omega^{(2)} = i_{21} \frac{pa\delta}{сек} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} \frac{pa\delta}{сек}$.

В результате получим

$$\mathbf{v}_r^{(P)} = \mathbf{v}_r^{(F)} + \mathbf{v}^{(F1)}, \quad (120.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r^{(P)} + \Omega^{(P2)} \times \mathbf{e}^{(P)} - \omega^{(12)} \times \mathbf{e}^{(P)} = \dot{\mathbf{e}}_r^{(F)} + \Omega^{(F1)} \times \mathbf{e}^{(F)}. \quad (120.9)$$

Проектируя векторы уравнений (120.8) и (120.9) на оси координат, можно получить шесть скалярных уравнений, из которых, однако, независимыми являются только четыре, так как $\mathbf{v}_r^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} = 0$, $\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2$). Векторы $\mathbf{v}_r^{(i)}$ и $\dot{\mathbf{e}}_r^{(i)}$ принадлежат плоскости, касательной к поверхностям зубцов Σ_1 и Σ_2 в точке касания.

В четырех независимых скалярных уравнениях, которые можно получить на основании векторных уравнений (120.8) и (120.9), содержится семь неизвестных: du_P/dt , $d\vartheta_P/dt$, $d\psi_P/dt$, du_F/dt , $d\vartheta_F/dt$, $d\psi_F/dt$ и ΔE_1 . Напомним, что u_P и ϑ_P , u_F и ϑ_F — криволинейные координаты производящих поверхностей P и F , ψ_P и ψ_F — параметры движения этих поверхностей, ΔE_1 — кратчайшее расстояние между осями вращения шестерни 1 и производящей поверхности F . Три недостающих скалярных уравнения для определения семи неизвестных du_P/dt , ..., ΔE_1 получим, продифференцировав три уравнения зацепления: а) производящей поверхности P и нарезаемой поверхности Σ_2 ; б) производящей поверхности F и нарезаемой поверхности Σ_1 ; в) поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Для указанных трех случаев уравнения зацепления определяются так: а) $\mathbf{e}^{(P)} \mathbf{v}^{(P2)} = 0$; б) $\mathbf{e}^{(F)} \mathbf{v}^{(F1)} = 0$; в) $\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{v}^{(12)} = 0$.

Продифференцируем приведенные уравнения, приняв во внимание, что в точке касания $M^{(P)}$ поверхностей P и Σ_2 , Σ_1 и Σ_2 $\mathbf{v}^{(P2)} = \mathbf{v}^{(12)} = 0$, так как эта точка принадлежит мгновенной оси вращения в относительном движении. В точке касания поверхностей $\mathbf{e}^{(P)} = \mathbf{e}^{(F)} = \mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)}$. В результате получим

$$[\mathbf{e}^{(P)}, \Omega^{(P2)}, \dot{\mathbf{r}}^{(P)}] = [\mathbf{e}^{(P)}, \Omega^{(P2)}, \dot{\mathbf{r}}^{(2)}] = 0, \quad (120.10)$$

$$\mathbf{e}^{(F)} \mathbf{v}^{(F1)} + [\mathbf{e}^{(P)}, \Omega^{(F1)}, \dot{\mathbf{r}}^{(F)}] = \dot{\mathbf{e}}^{(F)} \mathbf{v}^{(F1)} + [\mathbf{e}^{(P)}, \Omega^{(F1)}, \dot{\mathbf{r}}^{(1)}] = 0, \quad (120.11)$$

$$[\mathbf{e}^{(P)}, \omega^{(12)}, \dot{\mathbf{r}}^{(1)}] = [\mathbf{e}^{(P)}, \omega^{(12)}, \dot{\mathbf{r}}^{(2)}] = 0. \quad (120.12)$$

Через $\dot{\mathbf{r}}^{(P)} = \dot{\mathbf{r}}^{(2)}$ обозначена скорость движения точки по поверхности зацепления $Q^{(P2)}$ при нарезании колеса 2. Через $\dot{\mathbf{r}}^{(F)} = \dot{\mathbf{r}}^{(1)}$ обозначена скорость движения точки по поверхности зацепления $Q^{(F1)}$ при нарезании колеса 1. Поверхности зацепления $Q^{(P2)}$ и $Q^{(F1)}$ друг с другом не совпадают. Через $\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{r}}^{(2)}$ обозначена скорость движения точки контакта по линии зацепления колес 1 и 2, поверхности Σ_1 и Σ_2 зубцов которых находятся в точечном касании.

При дифференцировании уравнения (120.12) было принято, что в точке контакта $\omega^{(1)} = \text{const}$ и $\omega^{(2)} = \text{const}$. Поэтому $\dot{\omega}^{(1)} = \dot{\omega}^{(2)} = 0$. и первая производная передаточного отношения колес в точке контакта $\frac{d}{dt} [i_{12}(\varphi_1)] = 0$. Для соблюдения этого условия необходимо, как будет

Вектор $\mathbf{v}_r^{(P)} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(P)}}{\partial u_P} \frac{du_P}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(P)}}{\partial \vartheta_P} \frac{d\vartheta_P}{dt}$ получим, продифференцировав уравнения (119.6), учтя при этом, что $\tau_P = 90^\circ - \beta_2$:

$$v_{xr}^{(P)} = -(\cos \alpha_P \cos \Delta_2 + \sin \alpha_P \sin \beta_2 \sin \Delta_2) \frac{du_P}{dt} + r_P \cos \beta_2 \sin \Delta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt}, \quad (120.16)$$

$$v_{yr}^{(P)} = \sin \alpha_P \cos \beta_2 \frac{du_P}{dt} + r_P \sin \beta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt}, \quad (120.17)$$

$$v_{zr}^{(P)} = -(\cos \alpha_P \sin \Delta_2 - \sin \alpha_P \sin \beta_2 \cos \Delta_2) \frac{du_P}{dt} - r_P \cos \beta_2 \cos \Delta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt}. \quad (120.18)$$

Вектор $\dot{\mathbf{e}}_r^{(P)} = \frac{d}{dt} [\mathbf{e}^{(P)}]_{\psi=\text{const.}}$

Продифференцировав выражения (119.7), получим

$$\dot{\mathbf{e}}_{xr}^{(P)} = \cos \alpha_P \cos \beta_2 \sin \Delta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt}, \quad (120.19)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{yr}^{(P)} = \cos \alpha_P \sin \beta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt}, \quad (120.20)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{zr}^{(P)} = -\cos \alpha_P \cos \beta_2 \cos \Delta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt}. \quad (120.21)$$

Перейдем теперь к определению $\mathbf{b} = (\boldsymbol{\Omega}^{(P2)} - \boldsymbol{\omega}^{(12)}) \times \mathbf{e}^{(P)}$.

На основании построений рис. 288 вектор

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^{(P2)} &= \boldsymbol{\Omega}^{(P)} - \boldsymbol{\Omega}^{(2)} = -\Omega^{(P)} (\cos \Delta_2 \mathbf{i} + \sin \Delta_2 \mathbf{k}) - \Omega^{(2)} (-\sin \delta_2 \mathbf{i} + \cos \delta_2 \mathbf{k}) = \\ &= -\Omega^{(P)} [(\cos \Delta_2 - i_{2P} \sin \delta_2) \mathbf{i} + (\sin \Delta_2 + i_{2P} \cos \delta_2) \mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Используя выражение (119.9) для i_{P2} , получим

$$\boldsymbol{\Omega}^{(P2)} = -\Omega^{(P)} \frac{\cos \delta_{b2}}{\sin \delta_2} \mathbf{k} = -\frac{d\psi_P}{dt} \frac{\cos \delta_{b2}}{\sin \delta_2} \mathbf{k}, \quad (120.22)$$

где $\delta_{b2} = \delta_2 - \Delta_2$.

Вектор

$$\boldsymbol{\omega}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} = -\omega^{(1)} (\sin \delta_1 \mathbf{i} + \cos \delta_1 \mathbf{k}) - \omega^{(2)} (-\sin \delta_2 \mathbf{i} + \cos \delta_2 \mathbf{k}).$$

Так как $\omega^{(1)} = 1 \frac{pa\partial}{ce\kappa}$, $\omega^{(2)} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} \frac{pa\partial}{ce\kappa}$, то

$$\boldsymbol{\omega}^{(12)} = -\frac{\sin \delta}{\sin \delta_2} \mathbf{k}, \quad (120.23)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ — угол между осями колес 1 и 2.

На основании (120.22), (120.23) и (119.7) вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (\boldsymbol{\Omega}^{(P2)} - \boldsymbol{\omega}^{(12)}) \times \mathbf{e}^{(P)} = \left(\frac{d\psi_P}{dt} \cos \delta_{b2} - \sin \delta \right) \times \\ &\times \frac{1}{\sin \delta_2} [\cos \alpha_P \cos \beta_2 \mathbf{i} - (\sin \alpha_P \cos \Delta_2 - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin \Delta_2) \mathbf{j}]. \end{aligned} \quad (120.24)$$

Вектор $\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}^{(F1)} \times \mathbf{e}^{(F)}$ найдем, используя матричное равенство

$$\mathbf{a} = L_{0h} \mathbf{a}_h, \quad (120.25)$$

где $\mathbf{a}_h = \boldsymbol{\Omega}_h^{(F1)} \times \mathbf{e}_h^{(F)}$. На основании построений рис. 290

$$\boldsymbol{\Omega}_h^{(F1)} = (\Omega^{(1)} \sin \delta_1 - \Omega^{(F)} \cos \Delta_1) \mathbf{i}_h + (\Omega^{(1)} \cos \delta_1 + \Omega^{(F)} \sin \Delta_1) \mathbf{k}_h. \quad (120.26)$$

Вектор нормали $e_h^{(F)}$ был ранее представлен уравнениями (119.2). После преобразований получим

$$\begin{aligned} a_h = & -(\Omega^{(F)} \sin \Delta_1 + \Omega^{(1)} \cos \delta_1) \cos \alpha_F \sin \tau_F i_h + \\ & + [\Omega^{(F)} \cos \alpha_F \cos \tau_F + \Omega^{(1)} (\sin \alpha_F \cos \delta_{b1} - \cos \alpha_F \cos \tau_F \sin \delta_{b1})] j_h + \\ & + (-\Omega^{(F)} \cos \Delta_1 + \Omega^{(1)} \sin \delta_1) \cos \alpha_F \sin \tau_F k_h. \end{aligned} \quad (120.27)$$

При дальнейших преобразованиях надо учесть, что

$$\Omega^{(F)} = \frac{d\psi_F}{dt}, \quad \text{а} \quad \Omega^{(1)} = \frac{\Omega^{(F)}}{i_{F1}} = i_{1F} \frac{d\psi_F}{dt},$$

где i_{F1} было представлено выражением (119.38).

На основании (119.21) матрица

$$L_{0h} = \left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi_{10} \cos^2 \delta_1 + \sin^2 \delta_1 & \sin \varphi_{10} \cos \delta_1 & \cos \delta_1 \sin \delta_1 (1 - \cos \varphi_{10}) \\ -\sin \varphi_{10} \cos \delta_1 & \cos \varphi_{10} & \sin \varphi_{10} \sin \delta_1 \\ \cos \delta_1 \sin \delta_1 (1 - \cos \varphi_{10}) & -\sin \varphi_{10} \sin \delta_1 & \cos \varphi_{10} \sin^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_1 \end{array} \right\|. \quad (120.28)$$

Используя выражения (120.25), (120.27) и (120.28), получим

$$\begin{aligned} a_x = & \{ \cos \alpha_F \sin \tau_F [\cos \varphi_{10} \cos \delta_1 (\sin \delta_{b1} - i_{1F}) - \sin \delta_1 \cos \delta_{b1}] + \\ & + \sin \varphi_{10} \cos \delta_1 [\cos \alpha_F \cos \tau_F (1 - i_{1F} \sin \delta_{b1}) - i_{1F} \sin \alpha_F \cos \delta_{b1}] \} \frac{d\psi_F}{dt}, \end{aligned} \quad (120.29)$$

$$\begin{aligned} a_y = & [-\cos \alpha_F \sin \tau_F \sin \varphi_{10} (\sin \delta_{b1} - i_{1F}) + \\ & + \cos \alpha_F \cos \tau_F \cos \varphi_{10} (1 - i_{1F} \sin \delta_{b1}) + i_{1F} \sin \alpha_F \cos \varphi_{10} \cos \delta_{b1}] \frac{d\psi_F}{dt}, \end{aligned} \quad (120.30)$$

$$\begin{aligned} a_z = & \{ -\cos \alpha_F \sin \tau_F [\cos \varphi_{10} \sin \delta_1 (\sin \delta_{b1} - i_{1F}) + \cos \delta_1 \cos \delta_{b1}] - \\ & - \sin \varphi_{10} \sin \delta_1 [\cos \alpha_F \cos \tau_F (1 - i_{1F} \sin \delta_{b1}) + i_{1F} \sin \alpha_F \cos \delta_{b1}] \} \frac{d\psi_F}{dt}. \end{aligned} \quad (120.31)$$

Подставим сюда выражение (119.38) для $i_{F1} = 1/i_{1F}$. После преобразований получим

$$a_x = - \frac{\cos \alpha_F \sin \tau_F \cos \delta_{b1}}{\sin \delta_1} \frac{d\psi_F}{dt}, \quad (120.32)$$

$$a_y = \frac{\cos \alpha_F \sin \tau_F \cos \delta_{b1}}{\sin \delta_1} \frac{(\sin \alpha_P \cos \Delta_2 - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin \Delta_2)}{\cos \alpha_P \cos \beta_2} \frac{d\psi_F}{dt}, \quad (120.33)$$

$$a_z = 0. \quad (120.34)$$

При выводе выражения (120.33) была использована зависимость между проекциями ортов нормали $e^{(P)}$ и $e_h^{(F)}$, определяемая матричным равенством

$$e^{(P)} = L_{0h} e_h^{(F)}. \quad (120.35)$$

Перейдем теперь к определению $\mathbf{v}_{rm}^{(F)} = \frac{\partial \mathbf{r}_m^{(F)}}{\partial u_F} \frac{du_F}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_m^{(F)}}{\partial \vartheta_F} \frac{d\vartheta_F}{dt}$ и $\dot{\mathbf{e}}_{rm}^{(F)} = \frac{\partial \mathbf{e}_m^{(F)}}{\partial \vartheta_F} \frac{d\vartheta_F}{dt}$. Продифференцировав уравнения (118.1) и (118.2), получим

$$v_{xmr}^{(F)} = -\cos \alpha_F \frac{du_F}{dt}, \quad (120.36)$$

$$v_{ymr}^{(F)} = \sin \alpha_F \sin \tau_F \frac{du_F}{dt} + u_F \sin \alpha_F \cos \tau_F \frac{d\vartheta_F}{dt}, \quad (120.37)$$

$$v_{zmr}^{(F)} = \sin \alpha_F \cos \tau_F \frac{du_F}{dt} - u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F \frac{d\vartheta_F}{dt}, \quad (120.38)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{mr}^{(F)} = \cos \alpha_F (\cos \tau_F \mathbf{j}_m - \sin \tau_F \mathbf{k}_m) \frac{d\vartheta_F}{dt}. \quad (120.39)$$

Вектор $\mathbf{v}_m^{(F1)}$ был ранее представлен выражениями (118.5). Координаты x_m , y_m , z_m точки контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 получим, используя матричное равенство:

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{M}_{mh} \mathbf{M}_{h0} \mathbf{r}^{(M(P))}. \quad (120.40)$$

Матрица $\mathbf{M}_{h0}$ была ранее представлена выражением (119.21), а $\mathbf{r}^{(M(P))}$ — выражением (119.22). Матрица $\mathbf{M}_{mh}$ обратна по отношению к матрице (119.10).

После преобразований координаты точки контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 в системе S_m представим следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x_m &= L (\cos \delta_1 \sin \delta_{b1} - \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} \cos \varphi_{10} + \sin \Delta_1), \\ y_m &= -L \sin \delta_1 \sin \varphi_{10} - \Delta E_1, \\ z_m &= L (\cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + \sin \delta_1 \sin \delta_{b1} \cos \varphi_{10}) - \Delta L_1. \end{aligned} \right\} \quad (120.41)$$

Подставим выражения (120.41) в (118.5), после чего получим

$$v_{xm}^{(F1)} = L i_{1F} \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} \sin \varphi_{10} \frac{d\varphi_F}{dt}, \quad (120.42)$$

$$v_{ym}^{(F1)} = \{L [\cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + \sin \delta_1 \cos \varphi_{10} (\sin \delta_{b1} - i_{1F})] - \Delta E_1 \operatorname{ctg} \tau_F\} \frac{d\varphi_F}{dt}, \quad (120.43)$$

$$v_{zm}^{(F1)} = [L \sin \delta_1 \sin \varphi_{10} (1 - i_{1F} \sin \delta_{b1}) + \Delta E_1] \frac{d\varphi_F}{dt}. \quad (120.44)$$

При выводе этого уравнения было принято во внимание, что $\Delta L_1 = \Delta E_1 \operatorname{ctg} \tau_F$.

Определение ΔE_1 . Выше было указано, что система уравнений (120.15) удовлетворяется при двух значениях ΔE_1 . При таких значениях ΔE_1 производная передаточного отношения $\frac{d}{dt} [i_{12}(\varphi_1)] = 0$ в точке $M^{(P)}$ контакта поверхностей Σ_1 и Σ_2 .

1°. Докажем, что одному из искомых значений ΔE_1 отвечают значения

$$\frac{d\vartheta_F}{dt} = \frac{d\vartheta_F}{dt} = 0. \quad (120.45)$$

Так как при соблюдении выражения (120.45) $\dot{e}_r^{(P)} = \dot{e}_r^{(F)} = 0$, уравнение (120.9) примет такой вид:

$$(\Omega^{(P2)} - \omega^{(12)}) \times e^{(P)} = \Omega^{(F1)} \times e^{(F)}. \quad (120.46)$$

Векторное уравнение (120.46), так же как и (120.9), позволяет получить не более чем два независимых скалярных уравнения. Однако на векторы уравнения (120.46) накладывается дополнительная связь. Действительно, если учесть, что $e^{(P)} = e^{(F)}$, а векторы $\omega^{(12)}$ и $\Omega^{(P2)}$ коллинеарны, то

$$[\Omega^{(P2)}, \Omega^{(F1)}, e^{(P)}] = 0. \quad (120.47)$$

Поэтому из двух скалярных уравнений, которые можно получить из векторного уравнения (120.46), независимым будет только одно; второе скалярное уравнение явится следствием первого.

Используя ранее приведенные выражения (120.32), (120.33), (120.24) и (120.46), получим

$$\frac{d\psi_F}{dt} = (\sin \delta - i_{21} i_{P2} \cos \delta_{b2}) i_{21} \frac{\cos \alpha_P \cos \beta_2}{\cos \alpha_F \sin \tau_F \cos \delta_{b1}}. \quad (120.48)$$

Для определения трех других неизвестных, при которых должна удовлетворяться система (120.15), целесообразно для упрощения выкладок воспользоваться следующими уравнениями: (120.11), (120.10) и одним из двух независимых скалярных уравнений, которое можно получить из векторного уравнения (120.8).

Обратимся сначала к уравнению (120.14), которому можно придать такую форму:

$$[\Omega^{(F)}, e^{(F)}, v^{(F1)}] + [e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, \tilde{v}_e^{(1)} + v_r^{(P)}] = 0. \quad (120.49)$$

При записи этого уравнения было принято во внимание следующее:

- а) при $\frac{d\vartheta_P}{dt} = 0$ $\dot{e}^{(F)} = \dot{e}_e^{(F)} = \Omega^{(F)} \times e^{(F)}$;
 б) $\tilde{v}^{(1)} = \tilde{v}_e^{(1)} + v_r^{(1)} = \tilde{v}_e^{(1)} + v_r^{(P)}$,

где $\tilde{v}_e^{(1)}$ — скорость в переносном движении точки M колеса 1.1

Для выполнения дальнейших преобразований отметим, что в силу инвариантности относительно применяемых систем $\tilde{x}$ координат смешанное скалярно-векторное произведение

$$[\Omega^{(F)}, e^{(F)}, v^{(F1)}] = [\Omega_m^{(F)}, e_m^{(F)}, v_m^{(F1)}]. \quad (120.50)$$

Нижний индекс m указывает, что используются проекции векторов в системе S_m . Затем

$$\begin{aligned} [e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, (\tilde{v}_e^{(1)} + v_r^{(P)})] &= [e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, (\tilde{v}_e^{(1)} + v_r^{(P)} + v_e^{(P)} - v_e^{(P)})] = \\ &= [e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, (\tilde{v}_e^{(1)} - v_e^{(P)})] + [e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, v^{(P)}] = \\ &= -[(\Omega^{(P2)} - \omega^{(12)}) \times e^{(P)}] (\tilde{v}_e^{(1)} - v_e^{(P)}). \end{aligned} \quad (120.51)$$

При выводе выражения (120.51) была учтена зависимость (120.46), а также то, что согласно уравнениям (120.10) и (120.12)

$$[e^{(F)}, (\Omega^{(P2)} - \omega^{(12)}), v^{(P)}] = [e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, v^{(P)}] = 0.$$

Основываясь на изложенном, зависимости (120.49) придадим теперь такую форму:

$$[\Omega_m^{(F)}, e_m^{(F)}, v_m^{(F1)}] - [(\Omega^{(P2)} - \omega^{(12)}) \times e^{(P)}] (v_e^{(1)} - v_e^{(P)}) = 0. \quad (120.51bis)$$

После преобразований на основании уравнения (120.51bis) получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_1}{L} = & \frac{\sin \varphi_{10} \sin^* \tau_F \cos \delta_{b1}}{T''} [-\cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \times \\ & \times (\sin \delta_{b1} \operatorname{tg} \alpha_F \cos \tau_F + \cos \delta_{b1}) + \cos \delta_1 (\sin \delta_{b1} - \cos \tau_F \operatorname{tg} \alpha_F \cos \delta_{b1}) + \\ & + \sin \delta_1 \sin \varphi_{10} \sin \tau_F \operatorname{tg} \alpha_F] + \frac{\sin \tau_F}{\sin \delta_2 \cos \alpha_F \frac{d\psi_F}{dt}} \times \\ & \times \left[i_{1F} \sin \delta_1 - \left(\frac{d\psi_P}{dt} / \frac{d\psi_F}{dt} \right) \cos \Delta_2 \right] \left(\frac{d\psi_P}{dt} \cos \delta_{b2} - \sin \delta \right) \times \\ & \times (\sin \alpha_P \cos \Delta_2 - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin \Delta_2). \quad (120.52) \end{aligned}$$

При вычислении $\Delta E_1/L$ значения $d\psi_P/dt$ и $d\psi_F/dt$ должны быть определены предварительно из формул (120.14) и (120.48). Выражение для T'' было приведено ранее [см. (119.38)].

При выводе зависимости (120.52) были использованы уравнения (120.8), (120.10) и (120.12). Поэтому при значении $\Delta E_1/L$, определенном из зависимости (120.52), все уравнения системы (120.8) — (120.12) будут соблюдены.

Формула для определения ΔE_1 принимает более простой вид для случая, когда $\varphi_{10} = 0$. Как уже указывалось выше, это требует применения производящих поверхностей (резцовых головок) P и F , у которых углы профилей резцов α_P и α_F должны быть связаны зависимостью (119.49).

Для определения направления касательной к рабочей линии (см. § 121) нам понадобятся производные $du_P/dt = \xi_2$ и $du_F/dt = \xi_4$. Производную du_P/dt найдем из уравнения (120.10), согласно которому при $d\vartheta_P/dt = 0$

$$\frac{du_P}{dt} = -\frac{L}{\cos \beta_2} (\sin \alpha_P \cos \Delta_2 - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin \Delta_2) \frac{d\psi_P}{dt}. \quad (120.53)$$

Для определения du_F/dt воспользуемся уравнением (120.8), которое запишем в такой форме:

$$v_{rm}^{(P)} = v_{rm}^{(F)} + v_m^{(F1)}. \quad (120.54)$$

Столбцевая матрица $v_{rm}^{(P)}$ определяется из матричного равенства

$$v_{rm}^{(P)} = L_{m0} v_r^{(P)}. \quad (120.55)$$

Вектор $v_r^{(P)}$ был ранее представлен выражениями (120.16) — (120.18). Матрица

$$L_{m0} = L_{mh} L_{h0}.$$

Матрица L_{h0} была ранее представлена выражением (119.21); матрицу L_{mh} получим на основании (119.10). В результате матрица L_{m0} определится так:

$$L_{m0} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{10} \cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + & -\sin \varphi_{10} \cos \delta_{b1} & -\cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} + \\ + \sin \delta_1 \sin \delta_{b1} & & + \cos \delta_1 \sin \delta_{b1} \\ \sin \varphi_{10} \cos \delta_1 & \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} \sin \delta_1 \\ -\cos \varphi_{10} \cos \delta_1 \sin \delta_{b1} + & \sin \varphi_{10} \sin \delta_{b1} & \cos \varphi_{10} \sin \delta_1 \sin \delta_{b1} + \\ + \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} & & + \cos \delta_1 \cos \delta_{b1} \end{vmatrix}. \quad (120.56)$$

Спроектировав векторы уравнения (120.54) на ось x_m , после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{du_F}{dt} = \frac{1}{\cos \alpha_F} \left\{ [(\cos \varphi_{10} \cos \alpha_P \cos \delta_{b1} - \sin \alpha_P \sin \beta_2 \sin \delta_{b1}) \times \right. \\ \times \cos(\delta_1 + \Delta_2) + (\cos \alpha_P \sin \delta_{b1} + \cos \varphi_{10} \sin \alpha_P \sin \beta_2 \cos \delta_{b1}) \times \\ \times \sin(\delta_1 + \Delta_2) + \sin \varphi_{10} \sin \alpha_P \cos \beta_2 \cos \delta_{b1}] \frac{du_P}{dt} + \\ \left. + Li_{1F} \sin \varphi_{10} \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} \frac{d\psi_F}{dt} \right\}. \quad (120.57) \end{aligned}$$

Докажем теперь, что второму значению ΔE_1 , при котором производная передаточного отношения в точке контакта $\frac{d}{dt} [i_{12}(\varphi_1)] = 0$, отвечают следующие соотношения:

$$\frac{d\vartheta_P}{dt} + \frac{d\psi_P}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta_F}{dt} + \frac{d\psi_F}{dt} = 0. \quad (120.58)$$

Для этого нужно подставить выражение (120.58) в систему (120.8) — (120.12) и найти значение ΔE_1 , при котором эта система уравнений удовлетворяется.

Используя ранее приведенные выражения для $\dot{e}_r^{(P)}$, $\Omega^{(P)}$ и $e^{(P)}$, можно доказать, что при соблюдении зависимостей (120.58), соблюдается уравнение

$$\dot{e}_r^{(P)} + (\Omega^{(P)} \times e^{(P)}) = 0. \quad (120.59)$$

Аналогично

168

$$\dot{e}_r^{(F)} + (\Omega^{(F)} \times e^{(F)}) = \dot{e}_h^{(F)} + (\Omega_h^{(F)} \times e_h^{(F)}) = 0. \quad (120.60)$$

Система S_h в выражении (120.60) выбрана для сокращения выкладок. Приведенное ранее доказательство, что $\Omega^{(2)} = \omega^{(2)}$, справедливо для обоих значений ΔE_1 . С учетом изложенного и так как $e^{(P)} = e^{(F)}$, получим, что уравнение (120.9) может соблюдаться только при $\Omega^{(1)} = \omega^{(1)}$. Следовательно, второму значению ΔE_1 отвечает значение $d\psi_F/dt$, определяемое уравнением

$$\frac{d\psi_F}{dt} = \Omega^{(1)} i_{F1} = \omega^{(1)} i_{F1} = i_{F1}. \quad (120.61)$$

Итак, мы удостоверились, что векторное уравнение (120.9) удовлетворяется при выражении (120.58), если $\Omega^{(1)} = \omega^{(1)}$. Теперь в нашем распоряжении остаются уравнения (120.8), (120.11) и (120.12), из которых можно получить четыре скалярных уравнения. Так как нам нужно определить три неизвестных (du_P/dt , du_F/dt и ΔE_1) и число уравнений превышает число неизвестных, нужно удостовериться, что система уравнений совместная.

Отметим, что при $\Omega^{(1)} = \omega^{(1)}$ $\dot{r}^{(F)} = \dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(1)}$; при $\Omega^{(2)} = \omega^{(2)}$ $\dot{r}^{(P)} = \dot{r}^{(2)} = \dot{r}^{(2)}$.

Учитывая, что $\dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(2)}$, получим, что $\dot{r}^{(1)} = \dot{r}^{(P)}$.

Далее, при $\frac{d\vartheta_F}{dt} + \frac{d\psi_F}{dt} = 0$ $\dot{e}^{(F)} = 0$, и уравнение (120.11) примет такой вид:

$$[e^{(F)}, \Omega^{(F1)}, \dot{r}^{(F)}] = 0. \quad (120.62)$$

Напомним также, что на основании выражений (120.24), (120.32), (120.33) и (120.34) векторы $\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}^{(F1)} \times \mathbf{e}^{(F)}$ и $\mathbf{b} = (\boldsymbol{\Omega}^{(P2)} - \boldsymbol{\omega}^{(12)}) \times \mathbf{e}^{(P)}$ коллинеарны; коллинеарны также векторы $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ и $\boldsymbol{\Omega}^{(P2)}$, так как они направлены по мгновенной оси вращения z (рис. 288).

Теперь легко убедиться, что в силу равенства $\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{r}}^{(P)}$ и коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ уравнения (120.10), (120.11) и (120.12) соблюдаются, если соблюдается хотя бы одно из них.

В силу равенства векторов $\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{r}}^{(P)} = \dot{\mathbf{r}}^{(2)}$ будет соблюдено также векторное уравнение (120.8).

Из всего этого следует, что для определения du_P/dt , du_F/dt и ΔE_1 можно воспользоваться любыми тремя скалярными уравнениями, которые можно получить из (120.8), (120.10), (120.11) и (120.12). Для уменьшения выкладок целесообразно воспользоваться уравнением (120.10), одним скалярным уравнением, которое составим на основании векторного уравнения (120.8), и уравнением (120.11).

Производная du_P/dt на основании уравнения (120.10) при $d\vartheta_P/dt = -d\psi_P/dt$ определится так:

$$\begin{aligned} \frac{du_P}{dt} = & -[L(\sin \alpha_P \cos \Delta_2 - \cos \alpha_P \sin \beta_2 \sin \Delta_2) + \\ & + r_P(\cos \alpha_P \operatorname{tg} \Delta_2 - \sin \alpha_P \sin \beta_2)] \frac{1}{\cos \beta_2} \frac{d\psi_P}{dt}. \end{aligned} \quad (120.63)$$

Для определения du_F/dt воспользуемся уравнением (120.8), согласно которому

$$\mathbf{v}_{xmr}^{(P)} = \mathbf{v}_{xmr}^{(F)} + \mathbf{v}_{xm}^{(F1)}. \quad (120.64)$$

Столбцевая матрица вектора $\mathbf{v}_{mr}^{(P)}$ определяется, как указывалось, из матричного равенства (120.55).

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{du_F}{dt} = & \left\{ L \sin \varphi_{10} \sin \delta_1 \cos \delta_{b1} + \right. \\ & + [\cos \alpha_P \cos (\delta_1 + \Delta_2) + \sin \alpha_P \sin \beta_2 \sin (\delta_1 + \Delta_2)] \cos \varphi_{10} \cos \delta_{b1} \frac{du_P}{dt} + \\ & + [\cos \alpha_P \sin (\delta_1 + \Delta_2) - \sin \alpha_P \sin \beta_2 \cos (\delta_1 + \Delta_2)] \sin \delta_{b1} \frac{du_P}{dt} + \\ & + \sin \varphi_{10} \sin \alpha_P \cos \beta_2 \cos \delta_{b1} \frac{du_P}{dt} + \\ & + r_P \cos \beta_2 [\cos \varphi_{10} \cos \delta_{b1} \sin (\delta_1 + \Delta_2) - \cos (\delta_1 + \Delta_2) \sin \delta_{b1}] \frac{d\psi_P}{dt} - \\ & \left. - r_P \sin \varphi_{10} \sin \beta_2 \cos \delta_{b1} \frac{d\psi_P}{dt} \right\} \frac{1}{\cos \alpha_F}. \end{aligned} \quad (120.65)$$

Для определения ΔE_1 воспользуемся уравнением (120.62), полученным из (120.11). В силу инвариантности скалярно-векторного произведения

$$[\mathbf{e}^{(F)}, \boldsymbol{\Omega}^{(F1)}, \dot{\mathbf{r}}^{(F)}] = [\mathbf{e}_m^{(F)}, \boldsymbol{\Omega}_m^{(F1)}, \dot{\mathbf{r}}_m^{(F)}] = 0, \quad (120.66)$$

где

$$\dot{\mathbf{r}}_m^{(F)} = \mathbf{v}_{em}^{(F)} + \mathbf{v}_{rm}^{(F)}.$$

Система S_m выбрана для упрощений выкладок. После преобразований получим такую зависимость:

$$\Delta E_1 = -u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F - \frac{\sin \tau_F}{\cos \alpha_F (\sin \delta_{b1} - i_{F1}) - \sin \alpha_F \cos \delta_{b1} \cos \tau_F} \times \\ \times \left\{ \sin \tau_F \cos \delta_{b1} i_{F1} \frac{du_F}{dt} - L [\cos \alpha_F \cos \tau_F (\sin \delta_{b1} - i_{F1}) - \right. \\ \left. - \sin \alpha_F \cos \delta_{b1}] (\cos \delta_1 \cos \delta_{b1} + \sin \delta_1 \sin \delta_{b1} \cos \varphi_{10}) - \right. \\ \left. - L \sin \delta_1 \sin \varphi_{10} \cos \alpha_F \sin \tau_F (\sin \delta_{b1} - i_{F1}) \right\}. \quad (120.67)$$

Нужно отметить, что из двух решений для ΔE_1 наиболее предпочтительным является первое, так как касательная к рабочей линии в точке

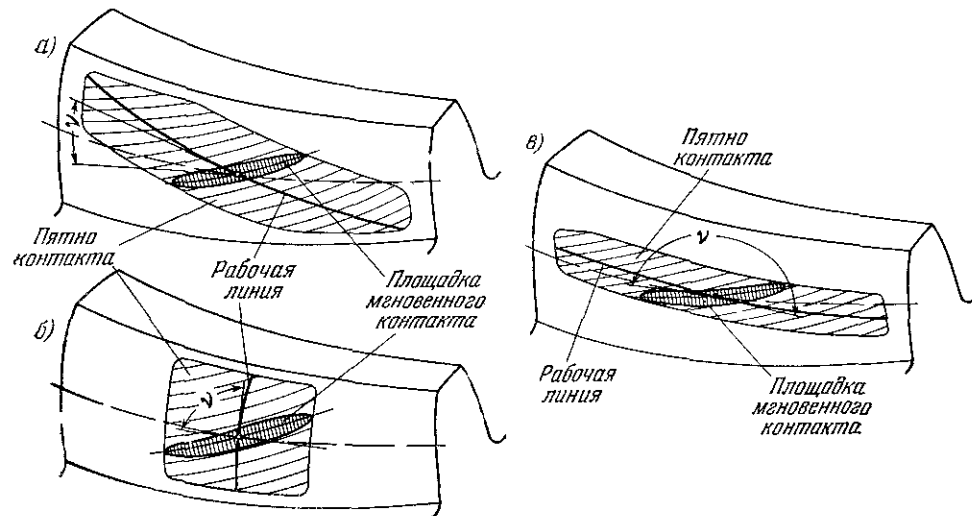


Рис. 294.

контакта направлена в этом случае примерно перпендикулярно касательной к средней линии зубца (рис. 294, б). Такое направление пятна контакта является наиболее благоприятным.

§ 121. Направление пятна контакта

Пятно контакта образуется как совокупность в точках рабочей линии мгновенных площадок контакта сопрягающихся поверхностей. Напомним, что рабочая линия представляет совокупность точек контакта на боковой поверхности зубца — линию зацепления на этой поверхности.

Оценку направления пятна контакта в расчетной точке целесообразно производить по величине угла ν , образуемого направлениями касательных к рабочей линии и к средней линии зубца.

При угле ν , значительно отличающемся от 90° , контакт поверхностей зубцов является диагональным (рис. 294, а), при значении $\nu \approx 0$ или 180° пятно контакта будет направлено вдоль средней линии зубца.

Касательная к рабочей линии на поверхности Σ_i определяется вектором $v_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) перемещения точки контакта по этой поверхности; единичный вектор касательной к рабочей линии обозначим через t . Средняя линия зубца может быть найдена как линия пересечения боковой поверхности зубца начальным конусом. Касательная к этой линии должна принадлежать касательной плоскости Π_1 к поверхности зубца и, кроме того, принадлежать плоскости Π_2 , касательной к поверхности начального конуса. В расчетной точке контакта M плоскость Π_2 совпадает с плоскостью $x = 0$ (рис. 288). На основании изложенного вектор t может быть определен из следующих уравнений:

$$e^{(P)}t = 0, \quad (121.1)$$

$$ti = 0. \quad (121.2)$$

В результате получим

$$t_x = 0, \quad t_y = -\frac{e_z^{(P)}}{\sqrt{1 - (e_x^{(P)})^2}}, \quad t_z = \frac{e_y^{(P)}}{\sqrt{1 - (e_x^{(P)})^2}}. \quad (121.3)$$

Орт нормали $e^{(P)}$ в системе S определяется уравнениями (119.7).

Угол ν между векторами t и $v_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) найдем из следующего выражения:

$$\cos \nu = \frac{v_r^{(i)} t}{|v_r^{(i)}|}. \quad (121.4)$$

В расчетной точке контакта, принадлежащей мгновенной оси вращения колес, $v_r^{(1)} = v_r^{(2)}$. Наиболее простые выражения имеет вектор $v_r^{(2)} = v_r^{(P)}$, определяемый формулами (120.16) — (120.18).

При первом способе расчета установок производящей поверхности F в выражениях (120.16) — (120.18) нужно положить $d\vartheta_P/dt = 0$; при втором способе нужно принять $\frac{d\vartheta_P}{dt} = -\frac{d\psi_P}{dt} = -i_{P2}i_{21} = -\frac{\sin \delta_1}{\cos \Delta_2}$. На рис. 294 изображены касательные к рабочим линиям при трех способах расчета установок производящей поверхности F : а) корректуры отсутствуют, ν значительно отклоняется от 90° , пятно контакта направлено диагонально; б) применен первый способ расчета корректур, ν близко к 90° , пятно контакта направлено почти перпендикулярно средней линии зубца; в) применен второй способ расчета корректур, ν близко к 180° , пятно контакта направлено почти вдоль средней линии зубца.

§ 122. Главные кривизны поверхностей зубцов Σ_1 и Σ_2

Главные кривизны поверхностей зубцов шестерни и колеса используются для отыскания разности радиусов резцовых головок, определяющей величину пятна контакта (см. § 37).

Главное направление на поверхности зубца находится из условия коллинеарности векторов $v_r^{(i)}$ и $\dot{e}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$). При определении главного направления на поверхности Σ_1 зубца шестерни воспользуемся системой S_m . Главные направления определяются из уравнения

$$v_{rm}^{(1)} = \lambda e_{rm}^{(1)}$$

или

$$v_{rm}^{(F)} + v_m^{(F1)} = \lambda (\dot{e}_{rm}^{(F)} + \Omega_m^{(F1)} \times e_m^{(F)}). \quad (122.1)$$

Используя выражения (120.36) — (120.38), (120.42) — (120.44), (120.39) и (118.2), получим

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\cos \alpha_F}{\cos \delta_{b1}} \frac{du_F}{dt} + Li_{1F} \sin \delta_1 \sin \varphi_{10} \frac{d\psi_F}{dt} \right] \left[\frac{d\vartheta_F}{dt} + (1 - i_{1F} \sin \delta_{b1}) \frac{d\psi_F}{dt} \right] = \\ & = i_{1F} \left\{ \sin \alpha_F \cos \tau_F \frac{du_F}{dt} \frac{d\psi_F}{dt} - u_F \sin \alpha_F \sin \tau_F \frac{d\vartheta_F}{dt} \frac{d\psi_F}{dt} + \right. \\ & \quad \left. + [L \sin \delta_1 \sin \varphi_{10} (1 - i_{1F} \sin \delta_{b1}) + \Delta E_1] \left(\frac{d\psi_F}{dt} \right)^2 \right\}. \quad (122.2) \end{aligned}$$

Другое уравнение связи между производными du_1/dt , $d\vartheta_1/dt$ и $d\psi_F/dt$ получим, продифференцировав уравнение зацепления (118.6). Напомним, что составляющие ΔE_1 и ΔL_1 корректур связаны зависимостью $\Delta L_1 = \Delta E_1 \operatorname{ctg} \tau_F$. В результате получим

$$\begin{aligned} & -\frac{du_F}{dt} \sin \tau_F + \left\{ [-u_F + (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \cos \alpha_F] \cos \tau_F - \right. \\ & \quad \left. - \Delta E_1 \frac{\operatorname{tg} \delta_{b1} \cos \alpha_F}{\sin \tau_F} \right\} \left(\frac{d\vartheta_F}{dt} + \frac{d\psi_F}{dt} \right) - \\ & - b_F \sin \alpha_F \cos (q_F - \psi_F) \frac{d\psi_F}{dt} + b_F \cos \alpha_F \frac{i_{\Gamma 1} - \sin \delta_{b1}}{\cos \delta_{b1}} \cos \vartheta_F \frac{d\vartheta_F}{dt} = 0. \quad (122.3) \end{aligned}$$

Главное направление определяется отношением производных $\frac{du_F}{dt} : \frac{d\vartheta_F}{dt}$. Величина этого отношения от параметра движения $d\psi_F/dt$ не зависит; поэтому $d\psi_F/dt$ можно придать любое значение, в частности значение $d\psi_F/dt = 1 \text{ рад/сек}$. Зависимости (122.2) и (122.3) позволяют составить квадратное уравнение относительно du_F/dt (или $d\vartheta_F/dt$), решив которое можно найти два значения du_F/dt , соответствующие двум главным направлениям. Значения второй производной ($d\vartheta_F/dt$) найдем из уравнения (122.2) или (122.3). После этого можно определить главные кривизны поверхности Σ_1 , используя уравнение

$$\kappa_{I, II}^{(1)} (\mathbf{v}_{rm}^{(\Gamma)} + \mathbf{v}_m^{(F1)}) = -(\dot{\mathbf{e}}_{rm}^{(F)} + \boldsymbol{\Omega}_m^{(F1)} \times \mathbf{e}_m^{(\Gamma)}). \quad (122.4)$$

Аналогичным образом найдем главные поверхности и главные кривизны поверхности Σ_2 . При этом, так как в точке контакта $\mathbf{v}^{(P2)} = 0$, уравнения, аналогичные (122.1), запишем так:

$$\mathbf{v}_{rn}^{(P)} = \lambda (\dot{\mathbf{e}}_{rn}^{(P)} + \boldsymbol{\Omega}_n^{(P2)} \times \mathbf{e}_n^{(P)}). \quad (122.5)$$

Система S_n выбрана для упрощения выкладок. Выражения для $\mathbf{v}_{rn}^{(P)}$, $\dot{\mathbf{e}}_{rn}^{(P)}$, $\boldsymbol{\Omega}_n^{(P2)}$ и $\mathbf{e}_n^{(P)}$ аналогичны приведенным ранее для $\mathbf{v}_{im}^{(I)}$, $\dot{\mathbf{e}}_{rm}^{(F1)}$, $\boldsymbol{\Omega}_m^{(I1)}$ и $\mathbf{e}_m^{(I)}$. Основываясь на уравнении (122.5), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos \alpha_P}{\cos \delta_{b2}} \frac{du_P}{dt} \left[\frac{d\vartheta_P}{dt} + (1 - i_{2P} \sin \delta_{b2}) \frac{d\psi_P}{dt} \right] = \\ & = \sin \alpha_P \sin \beta_2 \frac{du_P}{dt} \frac{d\psi_P}{dt} - r_P \cos \beta_2 \frac{d\vartheta_P}{dt} \frac{d\psi_P}{dt}. \quad (122.6) \end{aligned}$$

Еще одно уравнение связи между производными du_P/dt , $d\vartheta_P/dt$ и $d\psi_P/dt$ получим, продифференцировав уравнение зацепления (118.7).

В результате

$$\begin{aligned} \frac{du_P}{dt} \cos \beta_2 + (r_P \sin \alpha_P - L \sin \Delta_2 \cos \alpha_P) \sin \beta_2 \left(\frac{d\vartheta_P}{dt} + \frac{d\psi_P}{dt} \right) + \\ + b_P \sin \alpha_P \sin q_P \frac{d\psi_P}{dt} + b_P \cos \alpha_P \cos \vartheta_P \frac{i_{P2} - \sin \delta_{b2}}{\cos \delta_{b2}} \frac{d\vartheta_P}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (122.7)$$

При выводе этих уравнений было принято во внимание, что в точке контакта M $u_P \sin \alpha_P = r_P$, $\tau_P = 90^\circ - \beta_2$, $\psi_P = 0$. Уравнения (122.6) и (122.7) позволяют найти по два значения производных du_P/dt и $d\vartheta_P/dt$, определяющих оба главных направления. Для удобства вычислений целесообразно принять $d\psi_P/dt = 1 \text{ рад/сек}$. Для определения главных кривизн нужно воспользоваться таким уравнением:

$$\kappa_{I, II}^{(2)} \mathbf{v}_{rn}^{(P)} = -(\dot{\mathbf{e}}_{rn}^{(P)} + \boldsymbol{\Omega}_n^{(P2)} \times \mathbf{e}^{(P)}). \quad (122.8)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\kappa_{I, II}^{(2)} = - \frac{\frac{du_P}{dt}}{i_{P2} \cos \beta_2 \cos \delta_{b2} \frac{d\psi_P}{dt}}. \quad (122.9)$$

Для определения размеров мгновенной площадки контакта необходимо найти не только главные кривизны $\kappa_{I, II}^{(1)}$ и $\kappa_{I, II}^{(e)}$, но и угол σ между направлениями, определяющими $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_I^{(2)}$ (см. § 37). Для этого можно воспользоваться уравнением

$$\cos \sigma = \frac{\mathbf{v}_{rm}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{rm}^{(2)}}{|\mathbf{v}_{rm}^{(1)}| |\mathbf{v}_{rm}^{(2)}|}. \quad (122.10)$$

Для определения столбцовой матрицы вектора $\mathbf{v}_{rm}^{(2)}$ целесообразно воспользоваться матричным равенством

$$\mathbf{v}_{rm}^{(2)} = L_{mn} \mathbf{v}_{rn}^{(2)} = L_{m0} L_{0n} \mathbf{v}_{rn}^{(P)}. \quad (122.11)$$

Матрица L_{m0} была представлена ранее выражением (120.56); матрицу L_{0n} можно получить из выражения (119.5).

Радиусы r_P и r_F резцовых головок входят в выражения главных кривизн $\kappa_{I, II}^{(1)}$ и $\kappa_{I, II}^{(2)}$. Задавшись отводом δ поверхностей Σ_1 и Σ_2 , можно с помощью формул § 37 определить разность радиусов r_P и r_F , при которой достигается желательная величина большой полуоси эллипса — коптура мгновенной площадки контакта. Так как это связано с громоздкими расчетами, такие вычисления нужно запрограммировать и выполнять их на быстродействующих электронно-вычислительных машинах.

§ 123. Подрезание зубцов

Для определения условий отсутствия подрезания зубцов воспользуемся методом, изложенным в § 36. Необходимые уравнения определим в системе S_m , в которой рассматривается зацепление шестерни 1 с производящей поверхностью F . Так как у колеса 2 число зубцов $z_2 > z_1$, исключение подрезания шестерни 1 гарантирует отсутствие подрезания и колеса 2.

Исходные уравнения для определения условий отсутствия подрезания зубцов шестерни 1 имеют следующий вид:

$$e_m^{(F)} v_m^{(F1)} = 0, \quad (123.1)$$

$$v_{rm}^{(F1)} + v_m^{(F1)} = 0, \quad (123.2)$$

$$\frac{d}{dt} [e_m^{(F)} v_m^{(F1)}] = 0. \quad (123.3)$$

Уравнение (123.1) является уравнением зацепления, и ранее оно было представлено выражением (118.6).

Учитывая, что при расчете корректур соблюдается соотношение $\Delta L_1 = \Delta E_1 \operatorname{ctg} \tau_F$ [см. уравнение (119.37)], уравнение зацепления представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [-u_F + (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \cos \alpha_F] \sin \tau_F + \\ & + b_F \left[\sin \alpha_F \sin (q_F - \psi_F) + \cos \alpha_F \sin \vartheta_F \frac{i_{F1} - \sin \delta_{b1}}{\cos \delta_{b1}} \right] - \Delta E_1 \sin \alpha_F = 0. \end{aligned} \quad (123.4)$$

В общем виде уравнению зацепления можно придать следующий вид:

$$f_1(u_F, \vartheta_F, \psi_F) = 0. \quad (123.5)$$

Уравнения (123.2) и (123.3), рассмотренные совместно, приводят к требованию равенства нулю определителя (36.44). При обозначениях, принятых в настоящем параграфе, получим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_F} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_F} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi_F} \\ \frac{\partial x_m^{(F)}}{\partial u_F} & \frac{\partial x_m^{(F)}}{\partial \vartheta_F} & v_{xm}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_m}{\partial u_F} & \frac{\partial z_m}{\partial \vartheta_F} & v_{zm}^{(F1)} \end{vmatrix} = 0. \quad (123.6)$$

Раскрыв определитель (123.6), после преобразований получим зависимость между u_F , ϑ_F и ψ_F такого вида:

$$\begin{aligned} & u_F^2 \sin^2 \alpha_F \sin \tau_F \cos \delta_{b1} (\operatorname{ctg} \alpha_F \cos \tau_F \sin \delta_{b1} - \cos \delta_{b1}) - \\ & - b_F^2 \cos^2 \alpha_F \cos \vartheta_F \sin (q_F - \psi_F) (i_{F1} - \sin \delta_{b1}) [(i_{F1} - \sin \delta_{b1}) + \\ & + \operatorname{tg} \alpha_F \cos \tau_F \cos \delta_{b1}] + u_F b_F \sin \alpha_F \{ \sin \alpha_F \cos \alpha_F \sin \tau_F \cos \vartheta_F (i_{F1} - \sin \delta_{b1}) \times \\ & \times [\operatorname{ctg} \alpha_F (i_{F1} - \sin \delta_{b1}) + \cos \tau_F \cos \delta_{b1}] + \\ & + \sin (q_F - \psi_F) \cos \delta_{b1} [\operatorname{ctg} \alpha_F \cos \tau_F (i_{F1} - \sin \delta_{b1}) + \cos \delta_{b1}] + \\ & + \sin \alpha_F \cos \alpha_F \sin \tau_F \cos (q_F - \psi_F) \cos \delta_{b1} i_{F1} \} + \\ & + u_F (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \cos \alpha_F \sin^2 \alpha_F \sin \tau_F \cos \tau_F \cos \delta_{b1} \times \\ & \times (\cos \tau_F \cos \delta_{b1} - \operatorname{ctg} \alpha_F \sin \delta_{b1}) - b_F (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \times \\ & \times \sin \alpha_F \cos \alpha_F \cos \tau_F \sin (q_F - \psi_F) \cos \delta_{b1} [\cos \tau_F \cos \delta_{b1} + \operatorname{ctg} \alpha_F (i_{F1} - \sin \delta_{b1})] + \\ & + \Delta E_1 [u_F (\cos \alpha_F \sin \delta_{b1} \cos \delta_{b1} \cos \tau_F - \sin \alpha_F \cos^2 \delta_{b1}) + \\ & + (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \sin \alpha_F \cos \alpha_F \cos \tau_F \cos \delta_{b1} (\cos \tau_F \cos \delta_{b1} - \operatorname{ctg} \alpha_F \sin \delta_{b1}) + \\ & + b_F \sin \alpha_F \cos \alpha_F \cos \vartheta_F (i_{F1} - \sin \delta_{b1}) (\cos \tau_F \cos \delta_{b1} - \operatorname{ctg} \alpha_F \sin \delta_{b1})] = 0. \end{aligned} \quad (123.7)$$

Зависимость (123.7) в общем виде может быть представлена так:

$$f_2(u_F, \vartheta_F, \psi_F) = 0. \quad (123.8)$$

Рассмотрев совместно выражения (123.4) и (123.7), можно найти параметры u_F и ϑ_F , определяющие на производящей поверхности F совокупность точек инструмента, которые подрезают поверхность Σ_1 шестерни 1. Совокупность этих точек на поверхности инструмента представляет линию, которой эта поверхность должна быть ограничена во избежание подрезания поверхности Σ_1 . Для нахождения такой граничной линии необходимо рассмотреть совместно уравнения (118.1), (123.4) и (123.7).

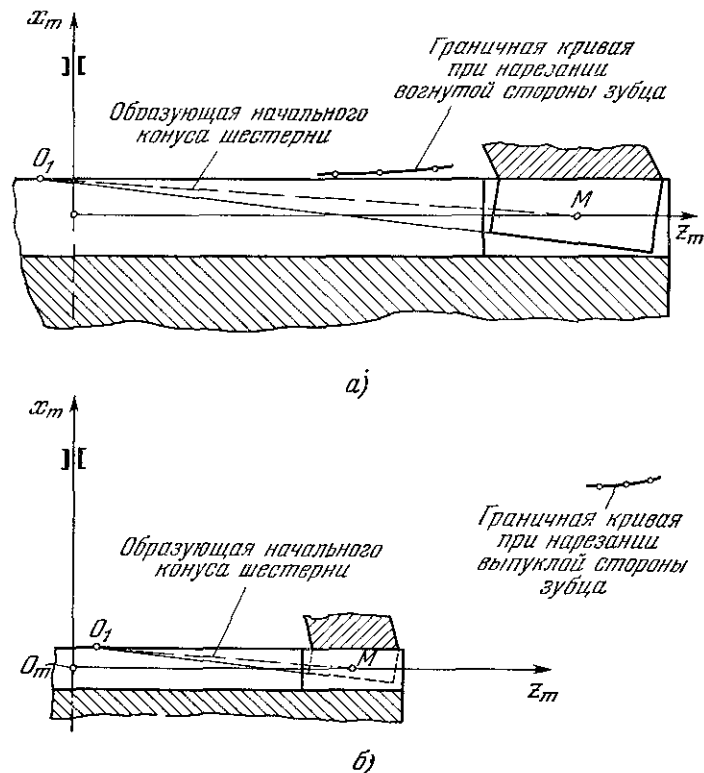


Рис. 295.

Анализ показывает, что большее подрезание возникает на вогнутой стороне зубца. На рис. 295, а изображена проекция граничной линии на производящей поверхности F , нарезающей вогнутую сторону зубца шестерни 1.

Определение параметров u_F и ϑ_F для точек граничной линии требует решения системы уравнений (123.4) и (123.7).

Для этого при фиксированном значении ψ_F нужно определить значения параметров ϑ_F и u_F , при которых будут удовлетворяться уравнения (123.4) и (123.7). Схема вычислений может быть представлена в таком виде. Пусть параметр ψ_F имеет фиксированное значение. Выбираем некоторое значение $\vartheta_F^{(0)}$ и из уравнения (123.4) определяем $u_F^{(0)}$. Подставляем найденные значения $\vartheta_F^{(0)}$ и $u_F^{(0)}$ в уравнение (123.7) и определяем невязку — разность правой и левой частей этого уравнения. Используя

метод Ньютона решения нелинейных уравнений, по невязке находим поправку $\Delta\vartheta_F$, задаемся новым значением $\vartheta_F^{(1)} = \vartheta_F^{(0)} + \Delta\vartheta_F$ и повторяем процедуру вычислений, пока невязка в уравнении (123.7) не станет пренебрежимо малой. После этого выбираем новое значение ψ_F и снова ищем значения ϑ_F и u_F , при которых будут удовлетворяться уравнения (123.4) и (123.7).

Вычислив параметры u_F и ϑ_F граничной кривой, легко выяснить, будет ли иметь место подрезание зубцов шестерни 1. Если для всех точек граничной кривой окажется, что $x_m > L \sin \Delta_1$, это будет означать, что граничная кривая окажется над поверхностью выступов производящего колеса. Напомним, что значение $x_m = L \sin \Delta_1$ определяет поверхность выступов производящего колеса (рис. 287).

На основании выражения (118.1) для x_m условие отсутствия подрезания зубцов шестерни можно представить следующим неравенством:

$$r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F > L \sin \Delta_1.$$

Отсюда следует, что

$$u_F < \frac{r_F}{\sin \alpha_F} - \frac{L \sin \Delta_1}{\cos \alpha_F}. \quad (123.9)$$

Для сокращения вычислений можно ограничиться определением одной лишь точки граничной кривой. Выберем значение

$$u_F = \frac{r_F}{\sin \alpha_F} - \frac{L \sin \Delta_1}{\cos \alpha_F} - \frac{r_F}{\sin \alpha_F} - \frac{1,2m_{\text{ср}}}{\cos \alpha_F}. \quad (123.10)$$

Здесь $m_{\text{ср}}$ — торцовый модуль в сечении, которому отвечает значение L — средней длины образующей начального конуса. Подрезание зубцов шестерни будет отсутствовать, если окажется, что при значении u_F , определяемом выражением (123.10), уравнения (118.6) и (123.6) не имеют решения, т. е. нельзя найти значения ψ_F и ϑ_F , которые удовлетворяли бы обоим этим уравнениям.

Решение задачи о подрезании зубцов шестерни 1, как правило, предшествует расчету параметров установки шестерни 1 при ее нарезании, и значение ΔE_1 является неизвестным. Поэтому в уравнениях (123.4) и (123.7) сначала можно принять $\Delta E_1 = 0$. Предполагая, что параметры α_F и α_P будут связаны зависимостью (119.49), можно считать также $\varphi_{10} = 0$. Тогда согласно зависимости (119.36)

$$i_{F1} = \frac{\sin \delta_1}{\cos \Delta_1}. \quad (123.11)$$

Зависимости (123.4) и (123.7) при указанных предположениях примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & [-u_F + (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \cos \alpha_F] \sin \tau_F + \\ & + b_F [\sin \alpha_P \sin (q_F - \psi_F) + \cos \alpha_F \sin \vartheta_F \operatorname{tg} \Delta_1] = 0, \quad (123.12) \\ & u_F^2 \sin \alpha_P \cos \alpha_F \sin \tau_F \cos \Delta_1 (\cos \tau_F \sin \delta_{b1} - \operatorname{tg} \alpha_F \cos \delta_{b1}) + \\ & + u_F b_F \{ \sin^2 \alpha_F \cos \alpha_F \sin \tau_F [\sin \delta_1 \cos (q_F - \psi_F) + \cos \vartheta_F \cos \delta_{b1} \sin \Delta_1 \cos \tau_F] + \\ & + \sin \alpha_F \cos \delta_{b1} \cos \Delta_1 [\sin (q_F - \psi_F) + \cos^2 \alpha_F \sin \tau_F \cos \vartheta_F \operatorname{tg}^2 \Delta_1] + \\ & + \cos \alpha_F \cos \tau_F \sin (q_F - \psi_F) \cos \delta_{b1} \sin \Delta_1 \} + \\ & + u_F (r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \sin \alpha_F \cos^2 \alpha_F \sin \tau_F \cos \tau_F \cos \Delta_1 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\cos \delta_{b1} \operatorname{tg} \alpha_F \cos \tau_F - \sin \delta_{b1}) - \\
& - b_F \cos^2 \alpha_F \cos \delta_{b1} \sin (q_F - \psi_F) (\sin \Delta_1 + \cos \Delta_1 \operatorname{tg} \alpha_F \cos \tau_F) \times \\
& \times [(r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - L \sin \Delta_1) \cos \tau_F + b_F \cos \vartheta_F \operatorname{tg} \Delta_1] = 0. \quad (123.13)
\end{aligned}$$

Решение этих уравнений для определения параметров ϑ_F и u_F точек граничной линии выполняется так же, как это было описано выше.

§ 124. Равновысокие зубцы

При нарезании конических колес с равновысокими зубцами ось вращения производящей поверхности — x_m для F (рис. 287), x_n для P (рис. 288) — перпендикулярна образующей начального конуса. Углы профиля резцов α_P и α_F равны. В целях локализации пятна контакта назначают радиусы резцовых головок $r_P \neq r_F$. Обе производящие поверхности касаются друг друга по общей образующей конусов с углами α_P и α_F , воспроизводимых резцами головок при их вращении. Поверхности зубцов Σ_1 и Σ_2 являются сопряженными (передача вращения осуществляется с постоянным передаточным отношением), так как такие поверхности образуются двумя жестко связанными производящими поверхностями (см. § 38). При нарезании колеса и шестерни корректуры установок ΔE_1 и ΔL_1 для уменьшения колебания передаточного отношения вводить не требуется. Возможно, что введение таких корректур является желательным для локализации пятна контакта по высоте зубца, для уменьшения влияния погрешностей изготовления и сборки колес. Однако это требует специального исследования.

Все зависимости, полученные ранее в настоящей главе, распространяются и на колеса с равновысокими зубцами, если принять в этих зависимостях $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ (см. рис. 287, 288), $\alpha_P = \alpha_F$. Приведем некоторые важнейшие следствия из этих зависимостей.

Из формулы (119.29) следует, что $\tau_F = 90^\circ - \beta_2$, т. е. $\beta_1 = \beta_2$. Из формул (119.26) — (119.28) следует, что $\varphi_{10} = 0$. Из формулы (119.30) вытекает, что $u_F = \frac{r_F}{\sin \alpha_F}$. Согласно формуле (119.38) передаточное отношение цепи обкатки при нарезании шестерни $i_{F1} = \sin \delta_1$. Выражения для кривизны поверхностей зубцов были приведены ранее, в примере расчета 15 (§ 34).

Уравнение зацепления (123.4) при равновысоких зубцах принимает следующий вид:

$$(-u_F + r_F \operatorname{ctg} \alpha_F \cos \alpha_F) \sin \tau_F + b_F \sin \alpha_F \sin (q_F - \psi_F) = 0. \quad (124.1)$$

Линии контакта на производящей поверхности F в системе $S_m = S_0$ определяются уравнениями (118.1) и (124.1). Графики контактных линий, построенных в полярной системе координат, изображены на рис. 296.

У колес с равновысокими зубцами рабочая линия имеет направление, близкое к ортогональному по отношению к средней линии зубца. Поэтому при равновысоких зубцах исключается диагональность контакта. Рабочая линия на каждой из производящих поверхностей совпадает с общей образующей конуса, по которой эти поверхности касаются друг друга.

При равновысоких зубцах увеличивается опасность подрезания зубцов. Уравнение (123.7) при равновысоких зубцах, принимает

следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & u_F^2 \sin^2 \alpha_F \sin \tau_F (\operatorname{ctg} \alpha_F \cos \tau_F \operatorname{tg} \delta_1 - 1) + \\
 & + u_F b_F \sin \alpha_F \sin (q_F - \psi_F) [\sin \alpha_F \cos \alpha_F \sin \tau_F \operatorname{ctg} (q_F - \psi_F) \operatorname{tg} \delta_1 + 1] + \\
 & + u_F r_F \sin \alpha_F \cos^2 \alpha_F \sin \tau_F \cos \tau_F (\cos \tau_F - \operatorname{ctg} \alpha_F \operatorname{tg} \delta_1) - \\
 & - b_F r_F \cos^2 \alpha_F \cos^2 \tau_F \sin (q_F - \psi_F) = 0. \quad (124.2)
 \end{aligned}$$

Уравнения (124.1) и (124.2), рассмотренные совместно, определяют граничную линию на производящей поверхности (118.1). Подрезание

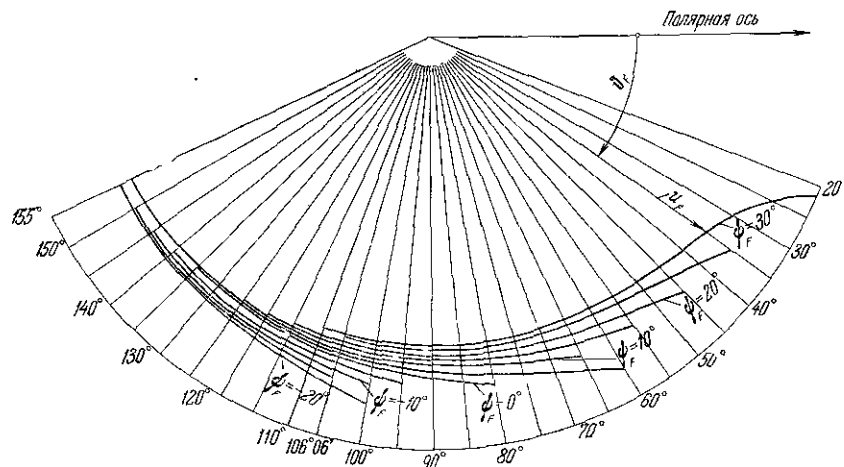


Рис. 296.

зубцов шестерни 1 будет исключено, если в рабочей части производящей поверхности окажется, что для всех точек граничной линии $x_m > h_n$.

Здесь $x_m = r_F \operatorname{ctg} \alpha_F - u_F \cos \alpha_F$ — абсцисса текущей точки граничной линии, h_n — высота ножки.

Принятые обозначения и определения

- α_0 — угол зацепления;
- α_P — угол профиля резцов производящей поверхности P ;
- α_F — угол профиля резцов производящей поверхности F ;
- β_1 — угол, образуемый радиусом-вектором продольного профиля производящей поверхности F с касательной к этому профилю в расчетной точке контакта;
- $\beta_2 = 90^\circ - (\vartheta_P - q_P)$ — угол, образуемый радиусом-вектором продольного профиля производящей поверхности P с касательной к этому профилю в расчетной точке контакта (рис. 288, рис. 286);
- δ_1 и δ_2 — углы начальных конусов шестерни 1 и колеса 2;
- Δ_1 и Δ_2 — углы ножек зубцов шестерни 1 и колеса 2;
- δ_{b1} и δ_{b2} — углы конусов впадин шестерни 1 и колеса 2;
- $\delta_{b1} = \delta_1 - \Delta_1$, $\delta_{b2} = \delta_2 - \Delta_2$;
- δ — угол между осями колес 1 и 2;
- $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ — угловые скорости шестерни 1 и колеса 2 при их нарезании;
- $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ — мгновенные угловые скорости шестерни 1 и колеса 2 при их зацеплении друг с другом;
- $\Omega^{(P)}$ — угловая скорость вращения производящей поверхности P ; $\Omega^{(P)} = d\psi_P/dt$;
- $\Omega^{(F)}$ — угловая скорость вращения производящей поверхности F ; $\Omega^{(F)} = d\psi_F/dt$;
- $\Omega^{(P2)} = \Omega^{(P)} - \Omega^{(2)}$ — угловая скорость относительного движения при зацеплении производящей поверхности P с колесом 2;

$\Omega^{(F1)} = \Omega^{(F)} - \Omega^{(1)}$ — угловая скорость относительного движения при зацеплении производящей поверхности F с шестерней 1;
 $\omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}$ — угловая скорость относительного движения при зацеплении шестерни 1 и колеса 2;
 P — производящая поверхность, образующая поверхность Σ_2 зубца колеса 2;
 F — производящая поверхность, образующая поверхность Σ_1 зубца шестерни 1;
 u_P и ϑ_P — криволинейные координаты производящей поверхности P ;
 u_F и ϑ_F — криволинейные координаты производящей поверхности F ;
 q_P и b_P — параметры установки резцовой головки производящей поверхности P (см. рис. 288, рис. 289);
 q_F и b_F — параметры установки резцовой головки производящей поверхности F ;
 ψ_P и ψ_F — углы поворота производящих поверхностей P и F ;
 r_P — радиус резцовой головки в плоскости $x_m = 0$ (см. рис. 288);
 r_F — радиус резцовой головки в плоскости $x_n = 0$;
 $\tau_P = \vartheta_P - q_P + \psi_P$; в расчетной точке контакта $\vartheta_P - q_P = 90^\circ - \beta_2$;
 $\tau_F = \vartheta_F - q_F + \psi_F$; в расчетной точке контакта $\tau_F = 90^\circ - \beta_1$;
 ΔE_1 и ΔL_1 — смещения вершины O_h шестерни 1 при нарезании (рис. 287);
 φ_{10} — расчетный угол поворота шестерни 1 и производящей поверхности F вокруг оси шестерни 1, в результате которого производящая поверхность F и поверхность Σ_1 вступят в касание с поверхностями P и Σ_2 в расчетной точке контакта;
 $\underline{v}_e^{(k)}$ ($k=1, 2$) — скорость расчетной точки контакта M в переносном движении при нарезании;
 $v_e^{(k)}$ ($k=1, 2$) — скорость расчетной точки контакта M в переносном движении при зацеплении;
 $\dot{e}^{(h)}$ ($k=1, 2, P, F$) — скорость конца орта нормали в абсолютном движении;
 $\dot{e}_r^{(h)}$ ($k=1, 2, P, F$) — скорость конца орта нормали в относительном движении, при движении по поверхности Σ_k .

Глава XIX

Полуобкатные конические колеса с геликоидальной поверхностью зубцов колеса (helixform)

§ 125. Схемы нарезания*) и применяемые системы координат

1°. Способ helixform, появившийся в последние годы, позволяет получить сопряженные поверхности зубцов как для конической, так и для гипоидной передачи. Поверхность зубцов колеса является в этом случае эвольвентной винтовой поверхностью и воспроизводится на колесе без огибания, копированием производящей поверхности. Поверхность зубцов шестерни воспроизводится, как обычно, в виде огибающей в относительном движении конической производящей поверхности.

Образование сопряженных поверхностей рассматриваемых колес основывается на использовании для нарезания двух жестко связанных между собой производящих поверхностей (см. § 38), находящихся в линейчатом касании. Шестерня нарезается односторонним способом по методу обкатки коническим производящим колесом на станке с наклоняющимся инструментальным шпинделем, что позволяет применять резцы с углом профиля, отличающимся от расчетного. Колесо нарезается двусторонним способом на станке, у которого ось вращения резцовой головки и ось инструментальной бабки параллельны. Изменение установки резцовой головки при нарезании также позволяет применять резцы с углом профиля, отличающимся от расчетного.

Передачам рассматриваемого вида посвящены работы: М. Г. Сегалия [237], Б. Д. Зильбермана и автора [194], Spear, King и Baxter [294].

2°. Зацепление нарезанных колес рассматривается в неподвижной системе координат $S_0 (x_0, y_0, z_0)$ (рис. 297). Ось z_0 является мгновенной осью вращения конических колес — общей образующей их аксоидов с углами δ_1 и δ_2 . Две другие неподвижные системы S_m и S_n являются вспомогательными. Начало системы S_m помещено в точку M с координатами $(0, 0, L)$ в системе S_0 . Через точку M , как будет показано ниже, проходит линия касания двух жестко связанных между собой производящих поверхностей. Одновременно точка M является заданной точкой контакта нарезанных поверхностей.

Для нарезания шестерни 1 используется обычная резцовая головка Глисон (рис. 298). Режущие кромки резцов при своем вращении образуют коническую поверхность. Скорость вращения резцов вокруг оси x_R определяется скоростью резания и на характере нарезаемой поверхности не сказывается. На рис. 298 изображены две резцовые головки, каждая из которых обрабатывает соответствующую сторону впадины.

*) Рассматривается только чистовое нарезание.

При нарезании зубцов шестерни 1 резцовую головку устанавливают определенным образом по отношению к системе S_F , жестко связанной с производящим колесом. Ось x_F — ось люльки станка — является осью

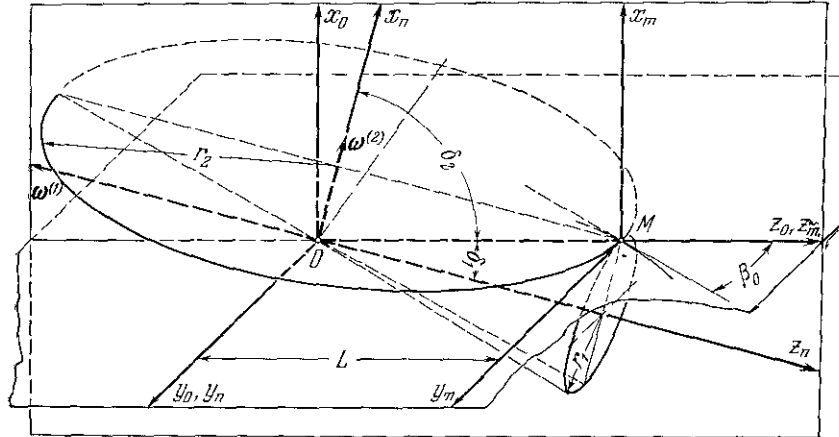


Рис. 297.

вращения производящего колеса при нарезании. Для получения уравнений поверхности резцовой головки в системе S_F используются вспомогательная система координат S_h , жестко связанная с S_F (рис. 299, а).

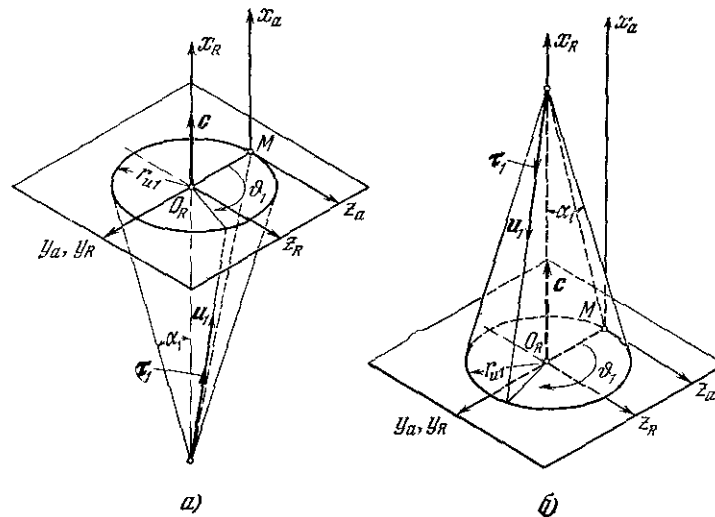


Рис 298

Установки системы S_a , жестко связанной с резцовой головкой (рис. 298), по отношению к системе S_h (рис. 299, б) задаются углами $\Delta\alpha_1$, β_1 и Δ_1 , где Δ_1 — угол ножки зуба шестерни 1. Системы S_b и S_c являются вспомогательными системами, используемыми для перехода от S_a к S_h . При нарезании шестерни 1 ось x_F производящего колеса совмещается с осью x_n неподвижной системы координат S_n (рис. 300). Производящее колесо

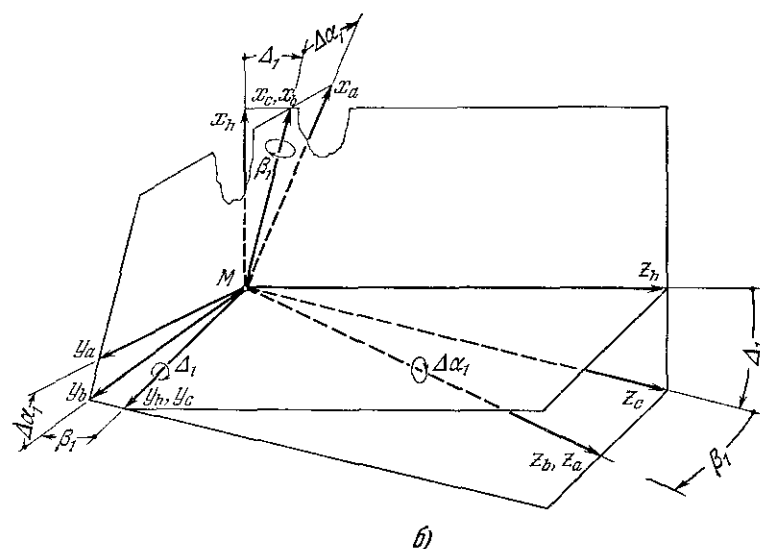
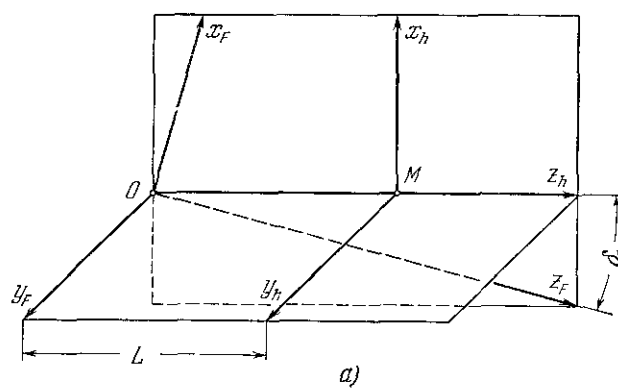


Рис. 299.

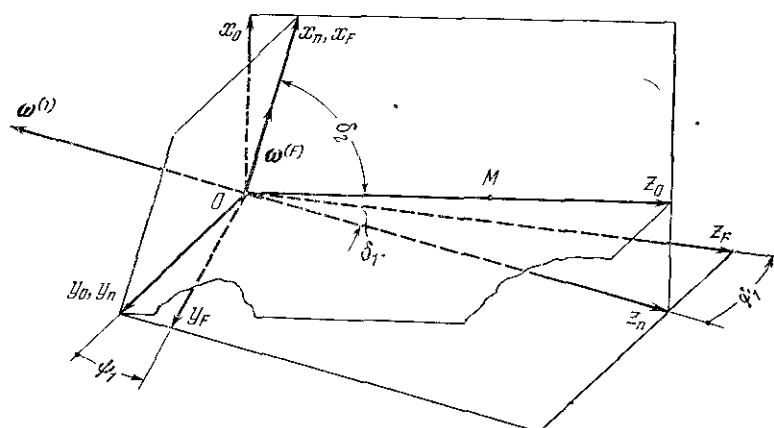


Рис. 300.

и нарезаемая шестерня 1 вращаются с угловыми скоростями $\omega^{(F)} = d\psi_1/dt$ и $\omega^{(1)} = d\varphi_1/dt$ вокруг осей x_n и z_n . При $\psi_1 = 0$ системы S_F и S_h совпадают соответственно с системами S_n и S_m (рис. 297, 299 и 300).

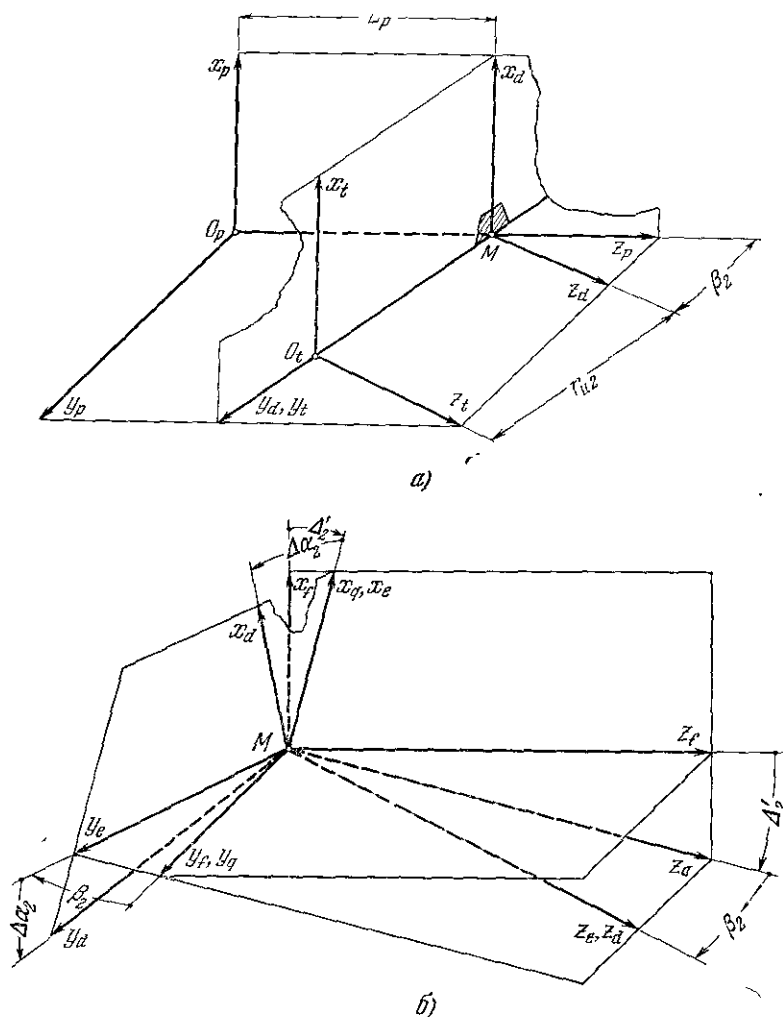


Рис. 301.

Колесо 2 парезается производящей поверхностью P , с которой жестко связаны системы S_P , S_d и S_t , изображенные на рис. 301, а. Оси x_p и x_t являются соответственно осями инструментальной бабки станка и резцовой головки.

Для определения установки резцовой головки при нарезании колеса 2 используются вспомогательные системы координат S_g , S_e и S_f (рис. 301, б). Установка резцовой головки определяется соответственно углами $\Delta\alpha_2$, β_2 и Δ'_2 , где Δ'_2 — угол головки зуба колеса 2. Система S_f жестко связана с системой S_g (рис. 302, а), причем $OM = L$. Положение системы S_g по отношению к неподвижным системам S_m , S_n , S_o (рис. 297, 302, б) определяется следующим образом: сначала система S_g совмещается с S_n ,

при этом система S_f совмещается с S_m ; затем поворотом вокруг оси x_n на некоторый угол $\Delta\varphi_2$ производящая поверхность, используемая для нарезания колеса, устанавливается таким образом, чтобы она прошла

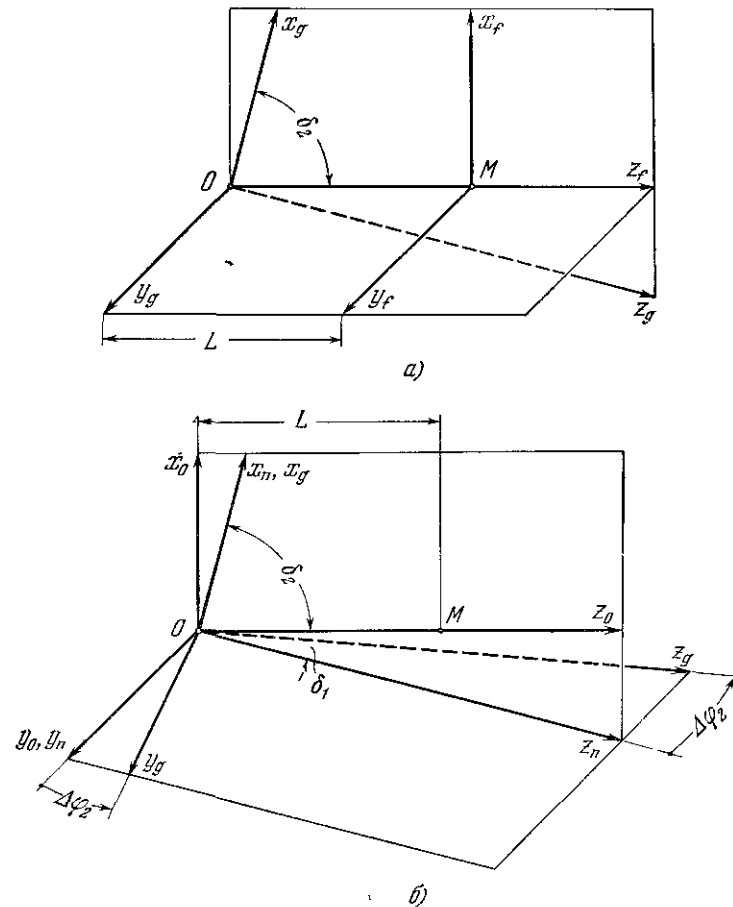


Рис. 302.

через расчетную точку M (рис. 302, б). Такой поворот необходим, поскольку при двустороннем методе нарезания производящая поверхность первоначально смещена по отношению к точке M (рис. 301, а). При $\Delta\varphi_2 = 0$ системы S_f и S_g совпадают соответственно с системами S_m и S_n .

В результате описанных установок резцовых головок можно добиться того, как будет показано ниже, что производящие поверхности, нарезающие поверхности зубьев шестерни 1 и колеса 2, вступят в касание друг с другом по линии, проходящей через расчетную точку M .

§ 126. Уравнения производящих поверхностей и ортов нормалей к ним

Поверхность резцовой головки для нарезания шестерни 1 определяется в системе S_R (рис. 298) уравнениями:

$$\mathbf{r}_R = \pm (u_1 \cos \alpha_1 - r_{u1} \operatorname{ctg} \alpha_1) \mathbf{i}_R - u_1 \sin \alpha_1 \cos \vartheta_1 \mathbf{j}_R + u_1 \sin \alpha_1 \sin \vartheta_1 \mathbf{k}_R. \quad (126.1)$$

В уравнении (126.4) и ниже в местах применения двойных знаков верхний и нижний относятся соответственно к вогнутой и выпуклой сторонам впадины. Через u_1 и ϑ_1 обозначены параметры поверхности; r_{u1} — радиус резцовой головки в точке M ; α_1 — угол профиля резцов; i_R, j_R, k_R — орты координатных осей системы S_R .

Орты нормали e_R и образующей τ_R определяются уравнениями:

$$e_R = k \left(\frac{\partial r_R}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_R}{\partial \vartheta_1} \right) = \sin \alpha_1 i_R \pm \cos \alpha_1 \cos \vartheta_1 j_R \mp \cos \alpha_1 \sin \vartheta_1 k_R, \quad (126.2)$$

$$\tau_R = \pm \cos \alpha_1 i_R - \sin \alpha_1 \cos \vartheta_1 j_R + \sin \alpha_1 \sin \vartheta_1 k_R. \quad (126.3)$$

Коническая производящая поверхность, орт нормали к ней и орт образующей определяются в системе S_0 следующими матричными уравнениями:

$$r^{(1)} = M_{0R} r_R, \quad (126.4)$$

$$e^{(1)} = L_{0R} e_R, \quad (126.5)$$

$$\tau^{(1)} = L_{0R} \tau_R. \quad (126.6)$$

В уравнениях (126.4), (126.5) и (126.6) $r^{(1)}$ и r_R , $e^{(1)}$ и e_R , $\tau^{(1)}$ и τ_R — столбцовые матрицы радиуса-вектора текущей точки поверхности, орта нормали и орта образующей в системах S_0 и S_R соответственно.

Матрица M_{0R} (рис. 297, 298 и 299)

$$M_{0R} = M_{0m} \cdot M_{mc} \cdot M_{cb} \cdot M_{ba} \cdot M_{aR}. \quad (126.7)$$

При этом принимается, что $M_{mc} = M_{hc}$. Матрица

$$M_{0R} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (126.8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \Delta \alpha_1 \cos \Delta_1 - \sin \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \Delta_1, \\ \alpha_{12} &= \sin \Delta \alpha_1 \cos \Delta_1 + \cos \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \Delta_1, \\ \alpha_{13} &= -\cos \beta_1 \sin \Delta_1, \\ \alpha_{14} &= r_{u1} (\sin \Delta \alpha_1 \cos \Delta_1 + \cos \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \Delta_1), \\ \alpha_{21} &= -\sin \Delta \alpha_1 \cos \beta_1, \\ \alpha_{22} &= \cos \Delta \alpha_1 \cos \beta_1, \\ \alpha_{23} &= \sin \beta_1, \\ \alpha_{24} &= r_{u1} \cos \Delta \alpha_1 \cos \beta_1, \\ \alpha_{31} &= \cos \Delta \alpha_1 \sin \Delta_1 + \sin \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \Delta_1, \\ \alpha_{32} &= \sin \Delta \alpha_1 \sin \Delta_1 - \cos \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \Delta_1, \\ \alpha_{33} &= \cos \beta_1 \cos \Delta_1, \\ \alpha_{34} &= r_{u1} (\sin \Delta \alpha_1 \sin \Delta_1 - \cos \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \Delta_1) + L. \end{aligned}$$

Матрица L_{0R} служит для преобразования проекций вектора и получается из матрицы M_{0R} вычеркиванием последней строки и последнего столбца.

Перейдем теперь к определению производящей поверхности, используемой для нарезания колеса 2. Резцы головки в рассматриваемом случае

совершают винтовое движение. Боковые режущие кромки обеих сторон резца представляют прямые линии и при винтовом движении вокруг оси x_t образуют эвольвентные винтовые поверхности.

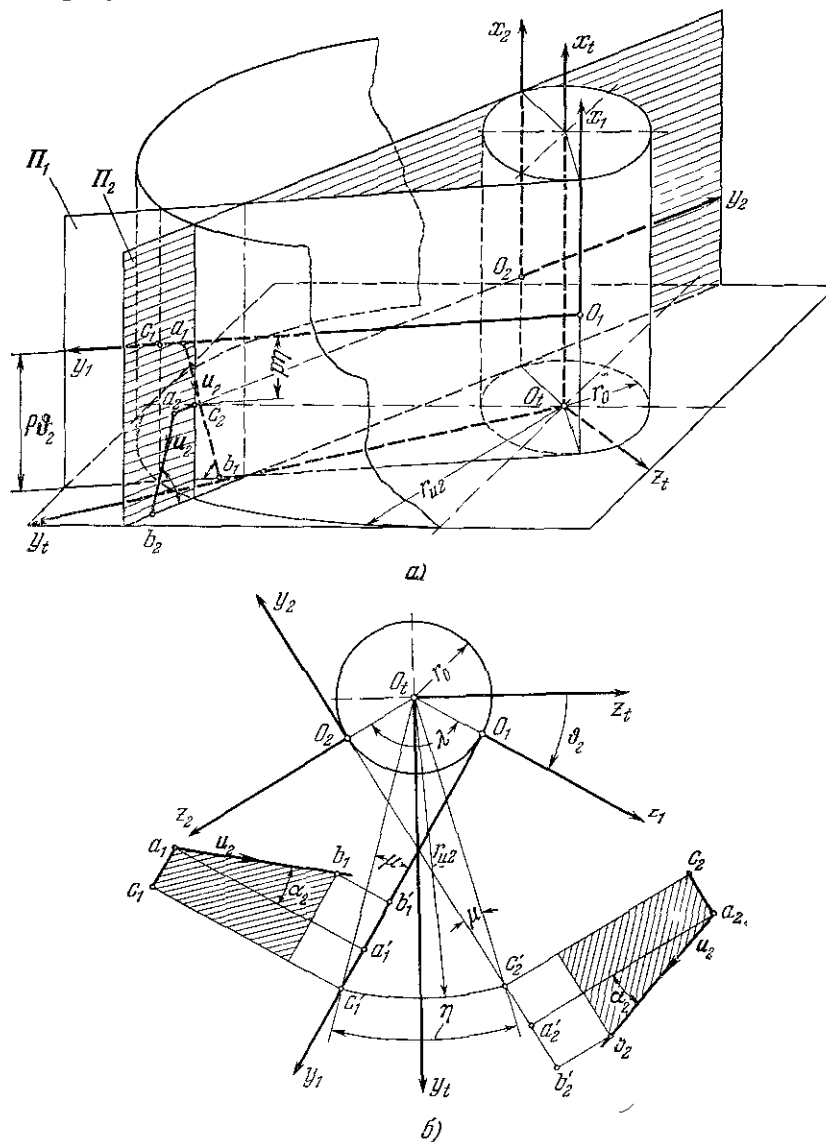


Рис. 303.

На рис. 303, а изображены две жестко связанные между собой плоскости Π_1 и Π_2 , касательные к цилиндру радиуса r_0 , называемому основным. С этими плоскостями жестко связаны системы S_1 и S_2 , в которых заданы режущие кромки — прямые линии a_1b_1 и a_2b_2 .

На рис. 303, б изображена резцовая головка со стороны положительного направления оси x_t . Здесь обозначены: η — угол, определяющий расстановку резцов; λ — угол между координатными плоскостями

$y_1 = 0$ и $y_2 = 0$; μ — угол, образуемый плоскостью Π_i с осевой плоскостью основного цилиндра, проведенной через точку c_i ($i = 1, 2$); $r_{u2} = c'_2 O_t = c'_1 O_t$ — номинальный радиус резцовой головки. Приведенные вспомогательные параметры связаны следующими зависимостями (рис. 303, б):

$$\mu = \arcsin \frac{r_0}{r_{u2}}, \quad (126.9)$$

$$\lambda = \pi - 2\mu - \eta, \quad (126.10)$$

$$d_1 = O_1 a_1 = \sqrt{\left(r_{u2} - \frac{w_k}{2}\right)^2 - r_0^2}, \quad (126.11)$$

$$d_2 = O_1 a_2 = \sqrt{\left(r_{u2} + \frac{w_k}{2}\right)^2 - r_0^2}. \quad (126.12)$$

В выражениях (126.11), (126.12) через w_k обозначен развод резцов, причем (рис. 303, б)

$$\frac{w_k}{2} = O_t c'_1 - O_t a'_1 = O_t a'_2 - O_t c'_2. \quad (126.13)$$

В приведенных выражениях a'_1 , c'_1 , a'_2 и c'_2 — проекции на плоскость $x_t = 0$ точек a_1 , c_1 , a_2 и c_2 режущих кромок резцов.

Винтовой параметр

$$p = r_0 \operatorname{ctg} \alpha_2 = r_{u2} \operatorname{tg} \delta, \quad (126.14)$$

где δ — угол подъема винтовой линии на цилиндре радиуса r_{u2} .

Эвольвентные винтовые поверхности, образуемые режущими кромками $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$, определяются соответственно уравнениями (рис. 303):

$$\left. \begin{aligned} x_t &= -u_2 \cos \alpha_2 + p \vartheta_2, \\ y_t &= (d_1 - u_2 \sin \alpha_2) \cos \vartheta_2 + r_0 \sin \vartheta_2, \\ z_t &= -(d_1 - u_2 \sin \alpha_2) \sin \vartheta_2 + r_0 \cos \vartheta_2, \end{aligned} \right\} \quad (126.15)$$

$$\left. \begin{aligned} x_t &= -u_2 \cos \alpha_2 + p (\vartheta_2 - \eta), \\ y_t &= -(d_2 + u_2 \sin \alpha_2) \cos (\vartheta_2 + \lambda) + r_0 \sin (\vartheta_2 + \lambda), \\ z_t &= (d_2 + u_2 \sin \alpha_2) \sin (\vartheta_2 + \lambda) + r_0 \cos (\vartheta_2 + \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (126.16)$$

Орты нормалей к поверхностям (126.15) и (126.16) определяются уравнением

$$e_t = k \left(\frac{\partial r_t}{\partial u_2} \times \frac{\partial r_t}{\partial \vartheta_2} \right). \quad (126.17)$$

После преобразований орты нормалей к поверхностям, образуемым режущими кромками $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$, представим следующими уравнениями:

$$e_t = \sin \alpha_2 i_t - \cos \alpha_2 \cos \vartheta_2 j_t + \cos \alpha_2 \sin \vartheta_2 k_t, \quad (126.18)$$

$$e_t = \sin \alpha_2 i_t - \cos \alpha_2 \cos (\vartheta_2 + \lambda) j_t + \cos \alpha_2 \sin (\vartheta_2 + \lambda) k_t. \quad (126.19)$$

Столбцовые матрицы радиуса-вектора текущей точки эвольвентной винтовой производящей поверхности и орта нормали к ней определяются в системе S_0 следующими матричными уравнениями:

$$r^{(2)} = M_{0t} r_t, \quad (126.20)$$

$$e^{(2)} = L_{0t} e_t. \quad (126.21)$$

Матрица M_{0t} может быть представлена в виде произведения матриц (рис. 301, 302):

$$M_{0t} = M_{0n} \cdot M_{ng} \cdot M_{gf} \cdot M_{fq} \cdot M_{qd} \cdot M_{dt} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (126.22)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \cos \Delta \alpha_2 (\sin \delta_2 \sin \delta_{H2} + \cos \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 \cos \delta_{H2}) - \\ &\quad - \sin \Delta \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 - \\ &\quad - \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 (\sin \delta_2 \cos \delta_{H2} - \cos \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{12} &= -\sin \Delta \alpha_2 (\sin \delta_2 \sin \delta_{H2} + \cos \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 \cos \delta_{H2}) - \\ &\quad - \cos \Delta \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 - \\ &\quad - \cos \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 (\sin \delta_2 \cos \delta_{H2} - \cos \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{13} &= -\sin \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 + \cos \beta_2 (\sin \delta_2 \cos \delta_{H2} - \cos \Delta \varphi_2 \cos \delta_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{14} &= L \sin \delta_2 \cos \delta_2 (1 - \cos \Delta \varphi_2) + r_{u2} \beta_{12}, \\ \beta_{21} &= \cos \Delta \alpha_2 \sin \Delta \varphi_2 \cos \delta_{H2} + \sin \Delta \alpha_2 (\cos \beta_2 \cos \Delta \varphi_2 + \sin \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{22} &= -\sin \Delta \alpha_2 \sin \Delta \varphi_2 \cos \delta_{H2} + \cos \Delta \alpha_2 (\cos \beta_2 \cos \Delta \varphi_2 + \sin \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{23} &= \sin \beta_2 \cos \Delta \varphi_2 - \cos \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_{H2}, \\ \beta_{24} &= -L \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 + r_{u2} \beta_{22}, \\ \beta_{31} &= \cos \Delta \alpha_2 (\cos \delta_2 \sin \delta_{H2} - \cos \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 \cos \delta_{H2}) + \\ &\quad + \sin \Delta \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 - \\ &\quad - \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 (\cos \delta_2 \cos \delta_{H2} + \cos \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{32} &= -\sin \Delta \alpha_2 (\cos \delta_2 \sin \delta_{H2} - \cos \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 \cos \delta_{H2}) - \\ &\quad + \cos \Delta \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 - \\ &\quad - \cos \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 (\cos \delta_2 \cos \delta_{H2} + \cos \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{33} &= \sin \beta_2 \sin \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 + \cos \beta_2 (\cos \delta_2 \cos \delta_{H2} + \cos \Delta \varphi_2 \sin \delta_2 \sin \delta_{H2}), \\ \beta_{34} &= L (\cos^2 \delta_2 + \cos \Delta \varphi_2 \sin^2 \delta_2) + r_{u2} \beta_{32}. \end{aligned}$$

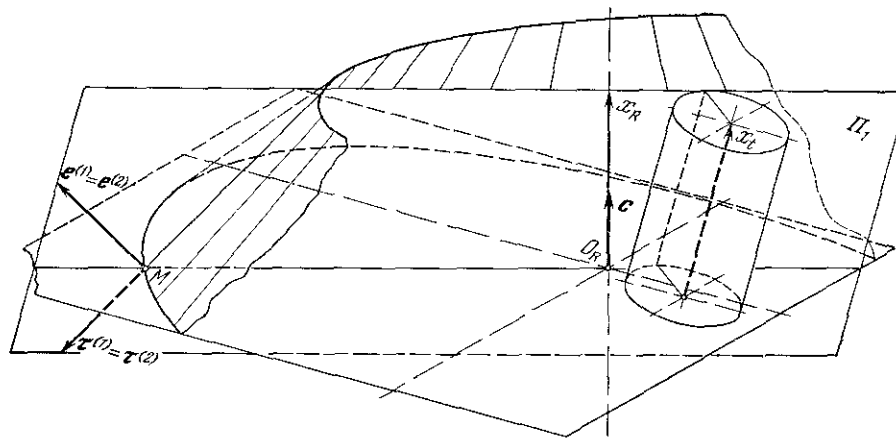
В элементах β_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4$) δ_{H2} — угол конуса выступов колеса 2, причем $\delta_{H2} = \delta_2 + \Delta'_2$.

§ 127. Обеспечение линейчатого касания производящих поверхностей

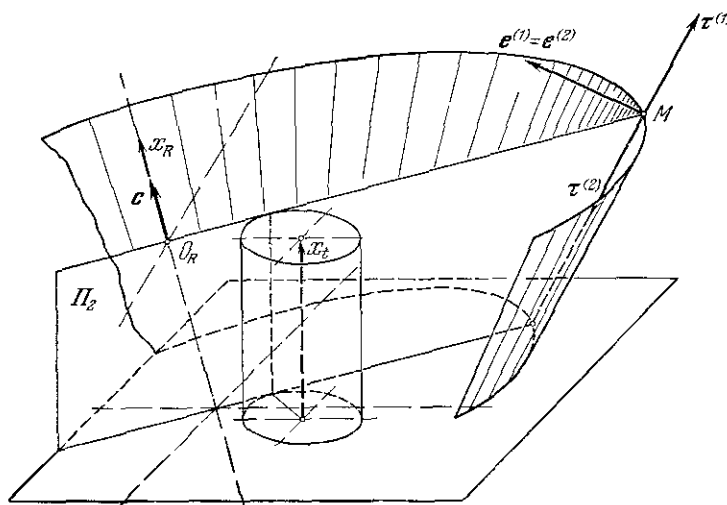
Производящие поверхности, используемые для нарезания шестерни 1 и колеса 2, являются линейчатыми поверхностями, представляющими собой соответственно коническую и эвольвентную винтовую поверхности. Они должны касаться друг друга по общей образующей (рис. 304), проходящей через заданную точку M с координатами $(0, 0, L)$ в системе S_0 (рис. 297), при соблюдении следующих условий:

1) заданная точка M является общей для обеих указанных поверхностей, и обе поверхности имеют в этой точке общую нормаль;

2) ось конической производящей поверхности, ее образующая и нормаль к эвольвентной винтовой поверхности в точке M компланарны



a)



б)

Рис. 304.

На этом основании

$$r^{(1)} = r^{(2)} = r^{(M)}, \quad \text{где } r^{(M)} = Lk, \quad (127.1)$$

$$e^{(1)} = e^{(2)}, \quad (127.2)$$

$$[c, r^{(1)}, e^{(2)}] = 0. \quad (127.3)$$

Здесь c — орт оси конической производящей поверхности (рис. 298), выражаемый в системе S_0 следующим образом:

$$c = \alpha_{11}i + \alpha_{21}j + \alpha_{31}k,$$

где i, j, k — орты осей системы S_0 , α_{11} , α_{21} и α_{31} — элементы матрицы (126.8).

При соблюдении уравнений (127.1)–(127.3) производящие поверхности будут касаться по общей образующей, проходящей через точку M и лежащей в плоскости Π_i ($i = 1, 2$), как показано на рис. 304. В плоскости Π_i лежат орты e оси и $\tau^{(1)}$ образующей конической производящей поверхности, а также орты $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ нормалей к обеим производящим поверхностям в точке их касания M .

Используя (126.4), (126.8) и (127.1), легко удостовериться, что векторное уравнение $r^{(1)} = r^{(M)}$ соблюдается при параметрах конической поверхности $u_1 = \frac{r_{u1}}{\sin \alpha_1}$, $\vartheta_1 = 0$. Это объясняется тем, что точка конической поверхности с такими параметрами (рис. 297) была совмещена в системе S_0 с точкой $(0, 0, L)$, а все повороты резцовой головки осуществлялись вокруг осей, проходящих через точку M (рис. 299). Поэтому в дальнейшем вместо двух уравнений (127.1) достаточно использовать одно векторное уравнение

$$r^{(2)} = r^{(M)}. \quad (127.4)$$

Из уравнений (127.2), (127.3) и (127.4) можно получить две системы из семи скалярных уравнений, описывающих касание производящих поверхностей для каждой стороны впадины. Независимых уравнений в каждой из таких систем будет только пять, так как из уравнения (127.3) следует, что векторы $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ должны лежать в одной плоскости Π_i , а $|e^{(1)}| = |e^{(2)}|$. Поэтому из трех скалярных уравнений, к которым приводится (127.2), независимым является только одно.

Уравнения (127.2), (127.3) и (127.4) должны быть составлены для касания производящих поверхностей обеих сторон впадины. В нашем распоряжении окажется десять уравнений, в которые войдут 12 неизвестных: u_2 , ϑ_2 , $\Delta\varphi_2$, $\Delta\alpha_1$, β_1 (по два значения для каждой стороны впадины), $\Delta\alpha_2$, β_2 (по одному значению, так как обе стороны впадины колеса 2 нарезаются одновременно). Поскольку число неизвестных превышает число уравнений, двумя из них следует задаться. Предпочтительнее задаться значениями $\Delta\alpha_2$ и β_2 , что позволит систему из десяти уравнений разбить на две подсистемы, состоящие из пяти уравнений. Значения $\Delta\alpha_2$ и β_2 целесообразно задать, исходя из следующих уравнений:

$$\Delta\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_2, \quad (127.5)$$

$$\beta_2 = \beta_0, \quad (127.6)$$

где α_0 и β_0 — номинальные значения угла зацепления и угла наклона продольной линии зубьев (угла спирали).

Для случая сопряжения в точке M вогнутой стороны зуба шестерни 1 с выпуклой стороной зуба колеса 2 нужно воспользоваться такими уравнениями:

$$-u_2 \cos \alpha_2 + p\vartheta_2 = L\beta_{31} + a_1, \quad (127.7)$$

$$(d_1 - u_2 \sin \alpha_2) \cos \vartheta_2 + r_0 \sin \vartheta_2 = L\beta_{32} + a_2, \quad (127.8)$$

$$-(d_1 - u_2 \sin \alpha_2) \sin \vartheta_2 + r_0 \cos \vartheta_2 = L\beta_{33} + a_3, \quad (127.9)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \cos \beta_1 [& -(\sin \alpha_2 \beta_{11} - \cos \alpha_2 \cos \vartheta_2 \beta_{12} + \cos \alpha_2 \sin \vartheta_2 \beta_{13}) \sin \Delta_1 + \\ & + (\sin \alpha_2 \beta_{11} - \cos \alpha_2 \cos \vartheta_2 \beta_{32} + \cos \alpha_2 \sin \vartheta_2 \beta_{33}) \cos \Delta_1] + \\ & + (\sin \alpha_2 \beta_{21} - \cos \alpha_2 \cos \vartheta_2 \beta_{22} + \cos \alpha_2 \sin \vartheta_2 \beta_{23}) \sin \beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (127.10)$$

$$\cos \beta_1 \cos (\alpha_1 + \Delta\alpha_1) = \sin \alpha_2 \beta_{21} - \cos \alpha_2 \cos \vartheta_2 \beta_{22} + \cos \alpha_2 \sin \vartheta_2 \beta_{23}. \quad (127.11)$$

Величины a_i ($i = 1, 2, 3$), входящие в уравнения (127.7), (127.8), (127.9), определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= L (\sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Delta'_2 - \cos \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2), \\ a_2 &= L (\sin \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 + \cos \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Delta'_2) - r_{a2}, \\ a_3 &= -L \cos \beta_2 \cos \Delta'_2. \end{aligned} \right\} \quad (127.12)$$

Из подсистемы, состоящей из трех уравнений (127.7), (127.8) и (127.9), определяются значения параметров u_2 , ϑ_2 , $\Delta \varphi_2$, а далее из подсистемы, состоящей из двух уравнений (127.10) и (127.11), определяются параметры $\Delta \alpha_1$ и β_1 .

Следует отметить, что уравнения (127.7)–(127.8) являются трансцендентными, и для их решения нужно использовать метод последовательных приближений. Рекомендуется следующий порядок решения уравнений (127.7)–(127.9):

1) рассматривая уравнения (127.8) и (127.9) совместно, получим

$$(L\beta_{32} + a_2) \sin \vartheta_2 + (L\beta_{33} + a_3) \cos \vartheta_2 - r_0 = 0. \quad (127.13)$$

2) задаваясь значением $\Delta \varphi_2$, из (127.13) находим значение ϑ_2 ;

3) используя (127.8) или (127.9), находим значение u_2 ;

4) подставив связанные таким образом значения $\Delta \varphi_2$, u_2 и ϑ_2 в уравнение (127.7), находим невязку и повторяем процесс вычислений, пока невязка не станет пренебрежимо малой.

Для случая сопряжения в точке M выпуклой стороны зуба шестерни 1 с вогнутой стороной зуба колеса 2 используются следующие уравнения:

$$-u_2 \cos \alpha_2 + p(\vartheta_2 - \eta) = L\beta_{31} + a_1, \quad (127.14)$$

$$-(d_2 + u_2 \sin \alpha_2) \cos (\vartheta_2 + \lambda) + r_0 \sin (\vartheta_2 + \lambda) = L\beta_{32} + a_2, \quad (127.15)$$

$$(d_2 + u_2 \sin \alpha_2) \sin (\vartheta_2 + \lambda) + r_0 \cos (\vartheta_2 + \lambda) = L\beta_{33} + a_3, \quad (127.16)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \{ & [\sin \alpha_2 \beta_{11} - \cos \alpha_2 \cos (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{12} + \cos \alpha_2 \sin (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{13}] \sin \Delta_1 + \\ & + [\sin \alpha_2 \beta_{31} - \cos \alpha_2 \cos (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{32} + \cos \alpha_2 \sin (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{33}] \cos \Delta_1 \} + \\ & + [\sin \alpha_2 \beta_{21} - \cos \alpha_2 \cos (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{22} + \cos \alpha_2 \sin (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{23}] \sin \beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (127.17)$$

$$\begin{aligned} -\cos \beta_1 \cos (\alpha_1 - \Delta \alpha_1) = & \sin \alpha_2 \beta_{21} - \cos \alpha_2 \cos (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{22} + \\ & + \cos \alpha_2 \sin (\vartheta_2 + \lambda) \beta_{23}. \end{aligned} \quad (127.18)$$

Порядок решения уравнений (127.14)–(127.18) аналогичен приведенному выше для уравнений (127.7)–(127.12).

Следует отметить, что в точке M будут касаться друг друга не только обе производящие поверхности, но и нарезанные поверхности зубьев шестерни 1 и колеса 2. Это следует из того, что коническая производящая поверхность, используемая для нарезания шестерни 1, и боковая поверхность зуба шестерни 1 вступят в касание в заданной точке M , поскольку они имеют общую нормаль в этой точке и мгновенная ось вращения при нарезании шестерни 1 совпадает с мгновенной осью вращения колес в относительном движении. Передаточное отношение i_{F1} цепи обкатки при нарезании шестерни 1 определяется уравнением

$$i_{F1} = \frac{\omega^{(F)}}{\omega^{(1)}} = \operatorname{tg} \delta_1 = i_{21}.$$

В заключение настоящего параграфа приведем приближенное решение системы уравнений (127.7)–(127.11) при значении параметра $\Delta\varphi_2 = 0$.

При $\Delta\varphi_2 = 0$ элементы β_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) матрицы M_{0t} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \cos \Delta\alpha_2 \cos \Delta'_2 + \sin \Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \sin \Delta'_2, \\ \beta_{12} &= -\sin \Delta\alpha_2 \cos \Delta'_2 + \cos \Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \sin \Delta'_2, \\ \beta_{13} &= -\cos \beta_2 \sin \Delta'_2, \\ \beta_{21} &= \sin \Delta\alpha_2 \cos \beta_2, \\ \beta_{22} &= \cos \Delta\alpha_2 \cos \beta_2, \\ \beta_{23} &= \sin \beta_2, \\ \beta_{31} &= \cos \Delta\alpha_2 \sin \Delta'_2 - \sin \Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Delta'_2, \\ \beta_{32} &= -\sin \Delta\alpha_2 \sin \Delta'_2 - \cos \Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Delta'_2, \\ \beta_{33} &= \cos \beta_2 \cos \Delta'_2.\end{aligned}$$

В этом случае порядок решения системы уравнений (127.7)–(127.11) таков:

1) рассматривая совместно уравнения (127.8) и (127.9), находим значение параметра ϑ_2 :

$$\vartheta_2 = \arcsin \left(-\frac{r_0}{r_{u2}} \right); \quad (127.19)$$

2) из уравнения (127.7) находим значение параметра u_2 :

$$u_2 = \frac{p\vartheta_2}{\cos \alpha_2}; \quad (127.20)$$

3) из уравнения (127.10) находим значение параметра β_1 ;

4) из уравнения (127.11) находим значение параметра $\Delta\alpha_1$.

В аналогичном порядке решается система уравнений (127.14)–(127.18).

§ 128. Определение значений вспомогательных параметров

Для решения уравнений, определяющих условия линейчатого касания производящих поверхностей, необходимо вычислить предварительно значения некоторых вспомогательных параметров.

Винтовой параметр p , входящий в уравнения (126.15) эвольвентных винтовых поверхностей, определяется на основании следующих соображений (рис. 305):

1) винтовые линии, являющиеся траекториями точек c_i ($i = 1, 2$) резцов, расположенные на цилиндре радиуса r_{u2} и удовлетворяющие уравнению (126.14), должны иметь общую касательную с конусом впадин колеса 2;

2) проекция скорости v винтового движения точек c_i на осевую плоскость колеса 2 должна составлять с осью z_q системы S_q угол $\Delta'_2 + \Delta_2$, где Δ_2 — угол ножки зуба колеса 2 (рис. 305).

Проектируя орт скорости винтового движения v точки c_i на оси координат системы S_q при соблюдении перечисленных условий и используя уравнение (126.14), получим

$$p = \frac{r_{u2} \cos \beta_2 \operatorname{tg} (\Delta'_2 + \Delta_2)}{\cos \Delta\alpha_2 + \sin \Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \operatorname{tg} (\Delta'_2 + \Delta_2)}. \quad (128.1)$$

На основании уравнений (128.1) и (126.14) радиус основного цилиндра определится так:

$$r_0 = \frac{p}{\operatorname{ctg} \alpha_2} = \frac{r_{u2} \cos \beta_2 \operatorname{tg} (\Delta'_2 + \Delta_2)}{[\cos \Delta \alpha_2 + \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \operatorname{tg} (\Delta'_2 + \Delta_2)] \operatorname{ctg} \alpha_2}. \quad (128.2)$$

Для определения величины развода резцов w_h при нарезании колеса 2 нужно воспользоваться тем, что дуговая толщина зуба шестерни 1

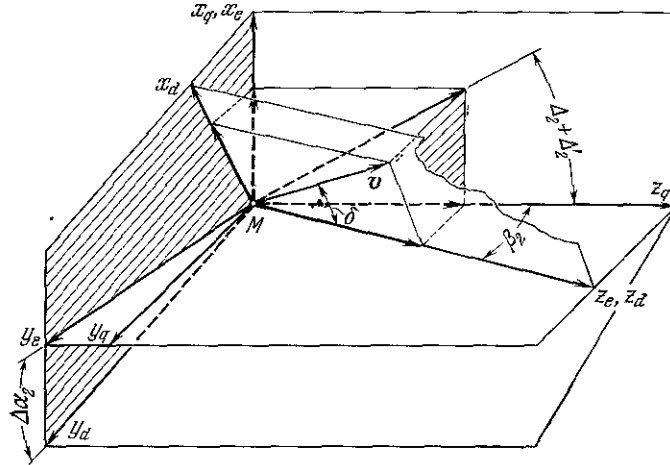


Рис. 305.

и ширина впадины колеса 2 по начальным окружностям, проходящим через точку M , должны быть равны. Опуская преобразования, § приведем приближенную формулу:

$$w_h = s_{\text{ш}} \cos \beta_2 - \frac{2h_{n2} \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \gamma_2}{\cos (\Delta_2 + \Delta'_2)}, \quad (128.3)$$

где $s_{\text{ш}}$ — дуговая толщина зуба шестерни 1 по окружности начального конуса, проходящей через точку M .

§ 129. Установки нарезаемых колес на станке

Для установки колес на станке при нарезании нужно задать:

1) координаты, определяющие положения вершин конусов впадин (в общем случае вершины конусов впадин и начальных конусов не совпадают) в системах S_F и S_P соответственно;

2) проекции осей шестерни 1 и колеса 2 соответственно в системах S_F и S_P .

Координаты вершины A конуса впадин шестерни 1 и проекции орта a ее оси в системе S_F определяются на основании построений рис. 306, a (при $\psi_1 = 0$) следующими выражениями:

$$r_F^{(A)} = -l_1 k_F, \quad (129.1)$$

$$a_F = k_F. \quad (129.2)$$

Здесь l_1 — расстояние от вершины A конуса впадин до вершины O начального конуса, измеряемое по оси шестерни 1, — вычисляется так

(рис. 306, а):

$$l_1 = \frac{L \sin \Delta_1 - h_{H1} \cos \Delta_1}{\sin (\delta_1 - \Delta_1)}, \quad (129.3)$$

где h_{H1} — высота ножки зуба шестерни 1.

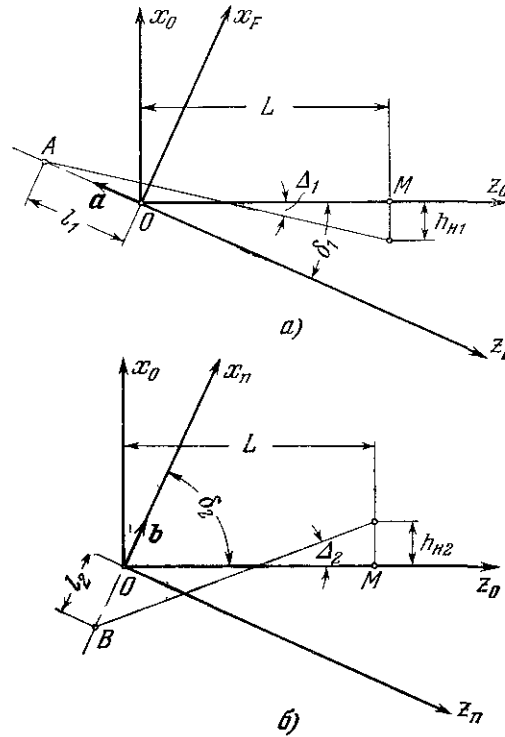


Рис. 306.

Координаты вершины B конуса впадин колеса 2 и проекции орта b его оси в системе S_F (рис. 306, б) определяются следующими матричными уравнениями:

$$r_p^{(B)} = M_{p0} r^{(B)}, \quad (129.4)$$

$$b_p = L_{p0} b. \quad (129.5)$$

Матрица M_{p0} может быть представлена в виде произведения матриц

$$M_{p0} = M_{pd} \cdot M_{dc} \cdot M_{eq} \cdot M_{qt} \cdot M_{fn} \cdot M_{n0} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (129.6)$$

где

$$\delta_{11} = \cos \Delta \alpha_2 \cos \Delta'_2 + \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \Delta'_2,$$

$$\delta_{12} = \sin \Delta \alpha_2 \cos \beta_2,$$

$$\delta_{13} = \cos \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 - \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Delta'_2,$$

$$\delta_{14} = L (-\cos \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 + \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Delta'_2),$$

$$\begin{aligned}
\delta_{21} &= \cos \beta_2 [-\sin \Delta \alpha_2 \cos \Delta'_2 - (1 - \cos \Delta \alpha_2) \sin \beta_2 \sin \Delta'_2], \\
\delta_{22} &= \sin^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_2 \cos \Delta \alpha_2, \\
\delta_{23} &= \cos \beta_2 [\sin \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 + (1 - \cos \Delta \alpha_2) \sin \beta_2 \cos \Delta'_2], \\
\delta_{24} &= L \cos \beta_2 [\sin \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 - \sin \beta_2 \cos \Delta'_2 (1 - \cos \Delta \alpha_2)], \\
\delta_{31} &= \sin \beta_2 [\sin \Delta \alpha_2 \cos \Delta'_2 + (1 - \cos \Delta \alpha_2) \sin \beta_2 \sin \Delta'_2] - \sin \Delta'_2, \\
\delta_{32} &= \sin \beta_2 \cos \beta_2 (1 - \cos \Delta \alpha_2), \\
\delta_{33} &= \cos \Delta'_2 + \sin \beta_2 [-\sin \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 - (1 - \cos \Delta \alpha_2) \sin \beta_2 \cos \Delta'_2], \\
\delta_{34} &= L \{-\cos \Delta'_2 + \sin \beta_2 [-\sin \Delta \alpha_2 \sin \Delta'_2 + \sin \beta_2 \cos \Delta'_2 (1 - \cos \Delta \alpha_2)]\} + L_P.
\end{aligned}$$

Матрица L_{P0} получается из матрицы M_{P0} вычерчиванием последней строки и последнего столбца.

L_P — длина образующей производящего колеса P , равная отрезку $O_P M$ (рис. 301, а), для удобства расчета станочных наладок задается в следующем виде:

$$L_P = \frac{L \sin \delta_2}{\sin \delta_{H2}} - \frac{h_{H2} \cos \Delta_2 \operatorname{ctg} \delta_{H2}}{\cos (\Delta_2 + \Delta'_2)}. \quad (129.7)$$

На основании построений рис. 306, б имеем

$$r^{(B)} = -l_2 \sin \delta_2 i - l_2 \cos \delta_2 k, \quad (129.8)$$

$$b = \sin \delta_2 i - \cos \delta_2 k. \quad (129.9)$$

Величина l_2 — расстояние от вершины B конуса впадин до вершины O начального конуса, измеряемое по оси колеса 2, равно (рис. 306, б)

$$l_2 = \frac{L \sin \Delta_2 - h_{H2} \cos \Delta_2}{\sin \delta_{b2}}, \quad (129.10)$$

где δ_{b2} — угол конуса впадин колеса 2.

Используя выражения (129.9), (129.10), получим

$$x_P^{(B)} = -l_2 (\sin \delta_2 \delta_{11} + \cos \delta_2 \delta_{13}) + \delta_{14}, \quad (129.11)$$

$$y_P^{(B)} = -l_2 (\sin \delta_2 \delta_{21} + \cos \delta_2 \delta_{23}) + \delta_{24}, \quad (129.12)$$

$$z_P^{(B)} = -l_2 (\sin \delta_2 \delta_{31} + \cos \delta_2 \delta_{33}) + \delta_{34}, \quad (129.13)$$

$$b_{xP} = \cos \Delta \alpha_2 \sin \delta_{H2} - \sin \Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \delta_{H2}, \quad (129.14)$$

$$b_{yP} = \cos \beta_2 [-\sin \Delta \alpha_2 \sin \delta_{H2} + (1 - \cos \Delta \alpha_2) \sin \beta_2 \cos \delta_{H2}], \quad (129.15)$$

$$b_{zP} = \cos \delta_{H2} - \sin \beta_2 [-\sin \Delta \alpha_2 \sin \delta_{H2} + (1 - \cos \Delta \alpha_2) \sin \beta_2 \cos \delta_{H2}]. \quad (129.16)$$

§ 130. Установка резцовых головок

В предыдущих параграфах при определении условий равенства ортов нормалей производящих поверхностей предполагалось, что резцовым головкам сообщаются соответствующие повороты вокруг осей, проходящих через расчетную точку M . Орг оси резцовой головки в результате таких поворотов должен занять определенное положение в системе производящего колеса. В действительности установка резцовой головки для нарезания шестерни 1 на станке с наклоняющимся шпинделем достигается в результате следующих поворотов (рис. 307, а):

1) вместе с осью a — a вокруг оси x_P , совпадающей с осью люльки станка;

2) поворотом вокруг оси a — a .

Точка C пересечения осей резцовой головки и $a-a$ в системе S_a определяется так (рис. 307, б):

$$r_a^{(c)} = (u_0 - h_{н1}) i_a + r_{u1} j_a, \quad (130.1)$$

где u_0 — постоянный размер, определяемый конструкцией применяемого станка.

Для расчета установок резцовой головки на станке необходимо определить:

- 1) координаты точки C в системе S_F производящего колеса;
- 2) проекции орта c_F оси резцовой головки в системе S_F .

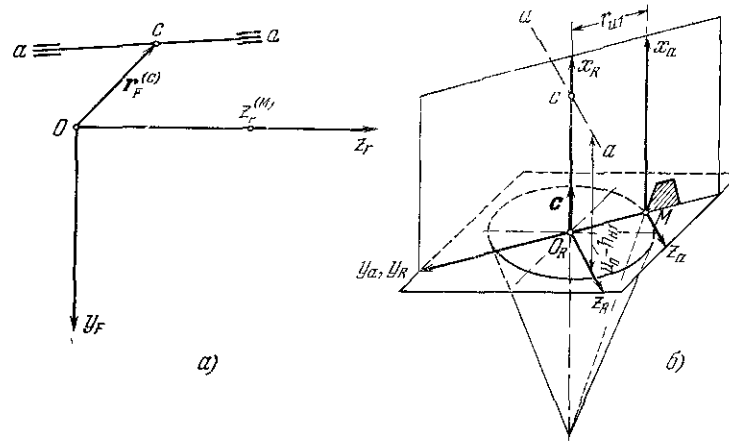


Рис 307.

Радиус-вектор точки C и орт c_F оси резцовой головки в системе S_F определяются следующими матричными уравнениями:

$$r_F^{(c)} = M_{Fa} r_a^{(c)}, \quad (130.2)$$

$$c_F = L_{Fa} c_a. \quad (130.3)$$

Здесь c_a — орт оси резцовой головки в системе S_a , причем $c_a = i_a$.

Матрицу M_{Fa} можно представить в виде произведения матриц

$$M_{Fa} = M_{Fc} \cdot M_{cb} \cdot M_{ba} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & L \sin \delta_1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & L \cos \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (130.4)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \sin \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \delta_{b1} + \cos \Delta \alpha_1 \cos \delta_{b1}, \\ \lambda_{12} &= \sin \Delta \alpha_1 \cos \delta_{b1} - \cos \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \delta_{b1}, \\ \lambda_{13} &= \cos \beta_1 \sin \delta_{b1}, \\ \lambda_{21} &= -\sin \Delta \alpha_1 \cos \beta_1, \\ \lambda_{22} &= \cos \Delta \alpha_1 \cos \beta_1, \\ \lambda_{23} &= \sin \beta_1, \\ \lambda_{31} &= \sin \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \delta_{b1} - \cos \Delta \alpha_1 \sin \delta_{b1}, \\ \lambda_{32} &= -\sin \Delta \alpha_1 \sin \delta_{b1} - \cos \Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \delta_{b1}, \\ \lambda_{33} &= \cos \beta_1 \cos \delta_{b1}. \end{aligned}$$

Используя выражения (130.1) — (130.4), имеем

$$x_F^{(c)} = (u_0 - h_{n1}) \lambda_{11} + r_{u1} \lambda_{12} + \lambda_{14}, \quad (130.5)$$

$$y_F^{(c)} = (u_0 - h_{n1}) \lambda_{21} + r_{u1} \lambda_{22} + \lambda_{24}, \quad (130.6)$$

$$z_F^{(c)} = (u_0 - h_{n1}) \lambda_{31} + r_{u1} \lambda_{32} + \lambda_{34}, \quad (130.7)$$

$$e_F = \lambda_{11} i_F + \lambda_{21} j_F + \lambda_{31} k_F, \quad (130.8)$$

где i_F , j_F и k_F — орты осей координат системы S_F .

Колесо 2 нарезается на станке с наклоняющимся шпинделем. Для установки резцовой головки при нарезании колеса 2 нужно найти проекции точки O_t пересечения оси x_t резцовой головки с координатной плоскостью $x_p = 0$. На основании построений рис. 301, а имеем

$$r_d^{(O_t)} = r_{u2} j_d, \quad (130.9)$$

где j_d — орт оси y_d системы S_d .

Координаты точки O_t в системе S_p определяются следующим матричным уравнением:

$$r_d^{(O_t)} = M_{pd} r_d^{(O_t)}. \quad (130.10)$$

Матрица M_{pd} имеет следующий вид:

$$M_{pd} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ 0 & -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & L_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (130.11)$$

Используя выражения (130.9) и (130.10), получим

$$r_p^{(O_t)} = r_{u2} \cos \beta_2 j_p + (L_p - r_{u2} \sin \beta_2) k_p, \quad (130.12)$$

где j_p и k_p — орты осей y_p и z_p системы S_p .

Пример 26. Рассматривается случай нарезания ортогональной конической передачи с числами зубцов $z_1 = 6$, $z_2 = 40$; торцовый модуль $m_s = 8,025$ мм; ширина венца $B = 42$ мм; номинальный радиус резцовой головки для нарезания колеса 2 $r_{u2} = 152,4$ мм; угловой шаг расположения резцов $\eta = 36^\circ$; угол профиля резцов для нарезания вогнутой стороны зубцов шестерни 1 $\alpha_1 = 14^\circ$, для нарезания выпуклой стороны $\alpha_1 = 28^\circ$; угол профиля резцов для нарезания колеса 2 $\alpha_2 = 20^\circ$; номинальный угол зацепления $\alpha_0 = 20^\circ$; номинальный угол спирали $\beta_0 = 35^\circ$.

Используя геометрический расчет системы ЭНИМС [111], получим следующие значения параметров зацепления колес ($i = 1, 2$):

Угол начального конуса δ_i , град	8° 32'	81° 28'
Радиус начальной окружности r_{ni} , мм	24,075	160,5
Длина образующей L , мм	141,3	
Высота головки зуба h_{r1} , мм	10,27	1,76
Высота ножки зуба h_{n1} , мм	3,05	11,56
Угол ножки Δ_i , град	1° 04'	4° 04'
Угол конуса выступов δ_{ni} , град	12° 36'	82° 32'
Угол конуса впадин δ_{vi} , град	7° 28'	77° 24'
Угол головки зуба Δ_i , град	4° 04'	1° 04'

При определении основных параметров колес получены результаты, приведенные в таблице XIV.

Т а б л и ц а XIV

Параметр	Шестерня 1		Колесо 2	
	вогнутая сторона зуба	выпуклая сторона зуба	выпуклая сторона зуба	вогнутая сторона зуба
u_1 , мм	$\frac{r_1}{\sin \alpha_1}$	$\frac{r_1}{\sin \alpha_1}$	19,263	19,435
ϑ_1 , град	0	0	180°50'43"	216°51'8"
$\Delta \alpha_i$, град	5°50'36"	8°9'36"	0	0
β_i , град	34°6'26"	33°55'21"	35°	35°
$\Delta \varphi_2$, град	—	—	1°28'31"	—1°27'33"
p , мм	—	—	11,516	11,516
w_h , мм	—	—	6	6

Глава XX

Конические колеса с циклоидальным продольным профилем зубца производящего колеса

§ 131. Схема нарезания

1°. Рассматриваемые колеса нарезаются по методу непрерывного деления. Нарезаемое колесо находится в непрерывном зацеплении с производящей поверхностью при обработке всех впадин. При нарезании же конических колес на станках типа Глисон для перехода к очередной впадине нужно расцепить нарезаемое и производящее колеса и повернуть нарезаемое колесо относительно производящего на угловой шаг. Преимущества метода непрерывного деления особенно сказываются: а) при нарезании конических колес больших габаритов, так как реверс нарезаемого колеса на станке Глисон сопровождается появлением динамических нагрузок в цепи деления; б) при нарезании колес малого модуля (< 1 мм), для которых затрудняется управление положением и формой пятна контакта. Преимуществом колес рассматриваемого зацепления являются также непрерывность процесса резания, кинематический способ деления для перехода к очередной впадине.

Коническим колесам, рассматриваемым в настоящей главе, были посвящены: работа автора книги и Н. Б. Фируна [174], работы К. И. Гуляева [52-54], выполненные им под руководством автора книги. Группой лиц в составе автора книги, В. Н. Кедринского, Н. Б. Фируна и К. И. Гуляева [196] был разработан и осуществлен в металле проект реконструкции зубофрезерного станка 5310 для нарезания на нем конических колес по методу непрерывного деления.

Ряд иностранных фирм: Эрликон (Швейцария), Фиат (Италия), Крэвен (Англия) и Клингелнберг (ФРГ) — выпускает станки для нарезания конических колес рассматриваемого вида.

2°. Нарезание колес производится на базе плоского производящего колеса торцовыми резцовыми головками. Аксоидом производящего колеса при зацеплении с нарезаемым является плоскость; аксоид колеса при нарезании совпадает с аксоидом (начальным конусом) при зацеплении. Зубцы колес получаются равновысокими. Резцовая головка имеет одну или несколько (n) групп резцов. Группа состоит из одного или нескольких черновых резцов и двух чистовых резцов с прямолинейными режущими кромками. Каждый из чистовых резцов профилирует либо выпуклую, либо вогнутую стороны зубца.

Резцовая головка участвует в двух вращениях (рис. 308): а) в переносном вокруг оси O воображаемого производящего колеса, б) в относительно вращательном движении вокруг своей оси O_s . Нарезаемое колесо вращается, как обычно, вокруг своей оси.

Угловые скорости резцовой головки, производящего колеса и заготовки должны подчиняться следующим условиям:

$$\frac{\omega_s}{\omega_{пр}} = \frac{z_{пр}}{n}, \quad \frac{\omega_{пр}}{\omega_k} = \frac{z_k}{z_{пр}}, \quad \frac{\omega_s}{\omega_k} = \frac{z_k}{n}, \quad (131.1)$$

где z_k ($k = 1, 2$) число зубцов нарезаемого колеса, $z_{пр}$ — число зубцов производящего колеса (см. § 109), ω_s — угловая скорость резцовой головки, ω_k — угловая скорость нарезаемого колеса, $\omega_{пр}$ — угловая скорость производящего колеса, n — число групп резцов на резцовой головке.

Продольный профиль зуба производящего колеса определяется траекторией движения точки режущей кромки резца в относительном движении резцовой головки и производящего колеса. Оси вращения резцовой головки и производящего колеса параллельны, и центроидами в относительном движении являются окружности с радиусами R_s и $R_{пр}$, находящиеся во внешнем или во внутреннем касании

$$\frac{R_s}{R_{пр}} = \frac{\omega_{пр}}{\omega_s} = \frac{n}{z_{пр}}. \quad (131.2)$$

Характер касания центроид определяет направление вращения резцовой головки и производящего колеса (см. рис. 308)

При различном направлении вращения производящего колеса и резцовой головки центроиды находятся во внешнем касании, и точки режущей кромки резца опишут в системе производящего колеса удлиненную эпициклоиду — эпитрохоиду. При одинаковом направлении вращения производящего колеса и резцовой головки продольный профиль зуба представляет удлиненную гипоциклоиду — гипотрохоиду.

Такой характер очертания продольного профиля зуба производящего колеса и явился основанием для того, чтобы назвать этот профиль циклоидальным.

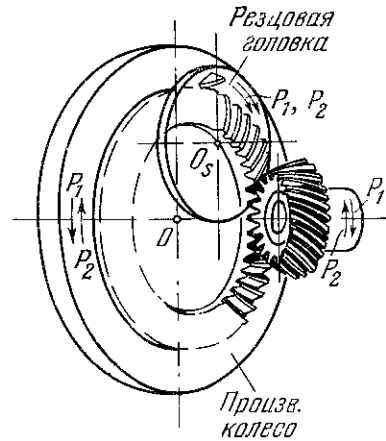


Рис. 308.

§ 132. Уравнения производящих поверхностей. Обеспечение сопряженности зацепления

1°. Для определения условий сопряженности зацепления целесообразно использовать производящие (инструментальные) поверхности и производящие колеса. Каждое из производящих колес имеет две производящие поверхности, которыми воспроизводятся соответственно боковые поверхности обеих сторон зуба. Обозначим через Σ_1 и Σ_2 соответственно боковые поверхности одной стороны зуба шестерни и колеса, вступающие в зацепление друг с другом; через Σ_F и Σ_P обозначим производящие поверхности, которыми образуются Σ_1 и Σ_2 . Ниже будет показано, что поверхности Σ_F и Σ_P не тождественны, но при наложении касаются друг друга по линии. Использование различных производящих поверхностей позволяет локализовать контакт поверхностей Σ_1 и Σ_2 зубцов колес 1 и 2.

Если ввести в рассмотрение боковые поверхности Σ_1 и Σ_2 другой стороны зубца шестерни 1 и колеса 2, этим поверхностям будут соответствовать производящие поверхности Σ_F и Σ_P производящих колес 1 и 2.

Схематически это можно представить так:

$$\Sigma_F \rightarrow \Sigma_1, \quad \Sigma_P \rightarrow \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2, \quad \Sigma_F \rightarrow \Sigma_1, \quad \Sigma_P \rightarrow \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2.$$

Знак $\rightarrow$ указывает, что соответствующие поверхности находятся в зацеплении друг с другом.

2°. Для вывода уравнений производящей поверхности Σ_F введем в рассмотрение системы координат S_l и S_s , жестко связанные с резцовой головкой; систему S_F , жестко связанную с производящей поверхностью,

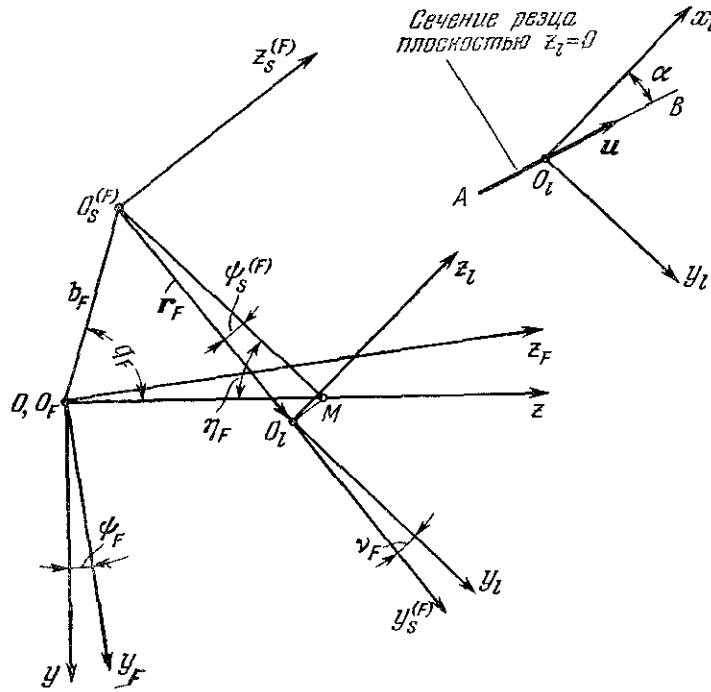


Рис. 309.

и неподвижную систему координат S , в которой задаются вращения производящей поверхности и резцовой головки (рис. 309); в системе S будет рассматриваться также зацепление нарезанных колес.

В системе S_l режущая кромка AB резца определится уравнениями:

$$x_l = u \cos \alpha, \quad y_l = u \sin \alpha, \quad z_l = 0. \quad (132.1)$$

Матрица перехода от S_l к S_s определится так:

$$M_{sl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu_F & -\sin \nu_F & r_F \\ 0 & \sin \nu_F & \cos \nu_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (132.2)$$

где ν_F — постоянный параметр, определяющий установку резцов (см. рис. 314).

Резцовая головка вращается вокруг оси O_s с угловой скоростью $d\psi_s^{(F)}/dt$; производящее колесо вращается вокруг оси O_F с угловой скоростью $d\psi_F/dt$ (рис. 309). Предполагается, что вращения резцовой головки и производящего колеса совершаются в различных направлениях. Матрицы перехода от S_s к S и от S к S_F определяются так:

$$M_{0s} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\eta_F + \psi_s^{(F)}) & -\cos(\eta_F + \psi_s^{(F)}) & -b_F \sin q_F \\ 0 & \cos(\eta_F + \psi_s^{(F)}) & \sin(\eta_F + \psi_s^{(F)}) & b_F \cos q_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (132.3)$$

где η_F — параметр, определяющий начальную установку резцовой головки (см. рис. 311),

$$M_{F0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_F & \sin \psi_F & 0 \\ 0 & -\sin \psi_F & \cos \psi_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (132.4)$$

Уравнения производящей поверхности Σ_F получим, используя матричное равенство

$$r_F = M_{F0} r_l = M_{F0} M_{0s} M_{sl} r_l. \quad (132.5)$$

После преобразований найдем

$$\left. \begin{aligned} x_F &= u \cos \alpha, \\ y_F &= u \sin \alpha \sin(\eta_F + \psi_s^{(F)} + \psi_F - \nu_F) + \\ &\quad + r_F \sin(\eta_F + \psi_s^{(F)} + \psi_F) - b_F \sin(q_F - \psi_F), \\ z_F &= u \sin \alpha \cos(\eta_F + \psi_s^{(F)} + \psi_F - \nu_F) + \\ &\quad + r_F \cos(\eta_F + \psi_s^{(F)} + \psi_F) + b_F \cos(q_F - \psi_F). \end{aligned} \right\} \quad (132.6)$$

При параметрах $u = 0$, $\psi_F - \psi_s^{(F)} = 0$ точка M производящей поверхности принадлежит оси z (рис. 309); при этом $OM = L = r_F \cos \eta_F + b_F \cos q_F$. Нужно иметь в виду, что так как $\frac{\omega_F}{\omega_s^{(F)}} = \frac{n}{z_{np}} = i_{Fs}$, то $\psi_s^{(F)} = \psi_F i_{Fs}$.

Чистовой резец, образующий производящую поверхность P , имеет тот же угол профиля α ; параметр u по-прежнему отсчитывается от точки O_l (рис. 309). Проведем аналогичные выводы, уравнения производящей поверхности P в системе S_P определим следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= u \cos \alpha, \\ y_P &= u \sin \alpha \sin(\eta_P + \psi_s^{(P)} + \psi_P - \nu_P) + \\ &\quad + r_P \sin(\eta_P + \psi_s^{(P)} + \psi_P) - b_P \sin(q_P - \psi_P), \\ z_P &= u \sin \alpha \cos(\eta_P + \psi_s^{(P)} + \psi_P - \nu_P) + \\ &\quad + r_P \cos(\eta_P + \psi_s^{(P)} + \psi_P) + b_P \cos(q_P - \psi_P). \end{aligned} \right\} \quad (132.7)$$

Предполагается, что начало O_P системы S_P совпадает с O . При $\psi_P = \psi_s = 0$ система S_P совпадает с S_F .

3°. Поверхности зубцов Σ_1 и Σ_2 , образуемые производящими поверхностями F и P , будут сопряженными при соблюдении следующих

условий (см. § 38): а) поверхности Σ_F и Σ_P при образовании Σ_1 и Σ_2 , будучи как бы жестко связанными между собой, совершают одно и то же относительное движение по отношению к нарезаемым колесам; б) поверхности Σ_F и Σ_P касаются друг друга по линии, через которую проходят линии контакта $D^{(F1)}$ и $D^{(P2)}$ поверхностей Σ_F и Σ_1 , Σ_P и Σ_2 .

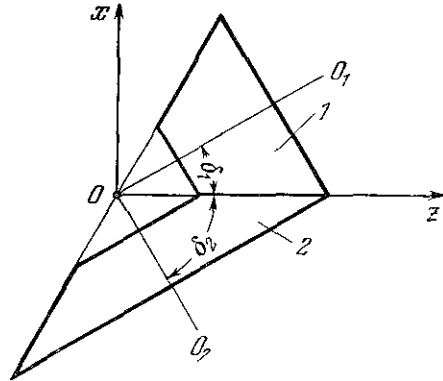


Рис. 310.

Первое условие легко соблюсти, если при нарезании колес 1 и 2 поверхности Σ_F и Σ_P будут иметь одну и ту же мгновенную ось вращения. Примем, что $\psi_F = \psi_P$; тогда поверхности F и P , будучи жестко связанными между собой, смогут совершать вращение вокруг оси $x_F = x_P = x$ как одно звено.

При зацеплении Σ_F с Σ_1 , а Σ_P с Σ_2 мгновенная ось Oz вращения в относительном движении будет одна и та же при соблюдении следующих условий: а) при нарезании колес 1 и 2 их оси вращения OO_1 и OO_2 расположатся

в плоскости $y = 0$ (рис. 310), а точка пересечения осей OO_1 и OO_2 совпадет с O ; б) передаточные отношения при нарезании колес должны удовлетворять таким соотношениям:

$$i_{F1} = \frac{d\psi_F}{dt} : \frac{d\varphi_1}{dt} = \sin \delta_1, \quad i_{P2} = \frac{d\psi_P}{dt} : \frac{d\varphi_2}{dt} = \sin \delta_2,$$

где δ_1 и δ_2 — углы начальных конусов.

Ось Oz будет являться также мгновенной осью вращения колес 1 и 2 в относительном движении.

Для соблюдения второго условия — касания поверхностей Σ_F и Σ_P по общей линии, через которую проходят линии контакта $D^{(F1)}$ и $D^{(P2)}$ производящих и нарезаемых поверхностей, — необходимо задать определенные соотношения между параметрами установки резцов и резцовых головок.

Выясним, каковы будут центроиды резцовых головок и производящих колес в относительном движении. Так как резцовые головки и производящие колеса совершают вращения вокруг параллельных осей с постоянным соотношением угловых скоростей, то центроидами будут являться окружности постоянных радиусов. Предполагая, что

Предполагая, что $\frac{d\psi_s^{(F)}}{dt} = \frac{d\psi_s^{(P)}}{dt} = \frac{d\psi_s}{dt}$, а $\frac{d\psi_F}{dt} = \frac{d\psi_P}{dt}$, получим (рис. 311)

$$\frac{d\psi_s}{dt} : \frac{d\psi_{F,P}}{dt} = \frac{R_{F,P}}{R_s^{(F)}} = \frac{R_P}{R_s^{(P)}}. \quad (132.8)$$

Поместим резцы головки 1 и головки 2 так, чтобы их режущие кромки прошли через точку M . Скорость относительного движения $v^{(12)}$ точки M резца (по отношению к производящему колесу) будет перпендикулярна мгновенному радиусу вращения $P_F M$ для головки 1 и мгновенному радиусу вращения $P_P M$ для головки 2. Единичный вектор a скорости $v^{(12)}$ будет равен орту оси z_i системы S_i , т. е.

$$a_i = k_i. \quad (132.9)$$

Для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ имел одно и то же направление для точки M обоих резцов, необходимо при установке резцов и резцовых головок добиться, чтобы мгновенные радиусы вращения $P_F M$ и $P_P M$ совпали по направлению.

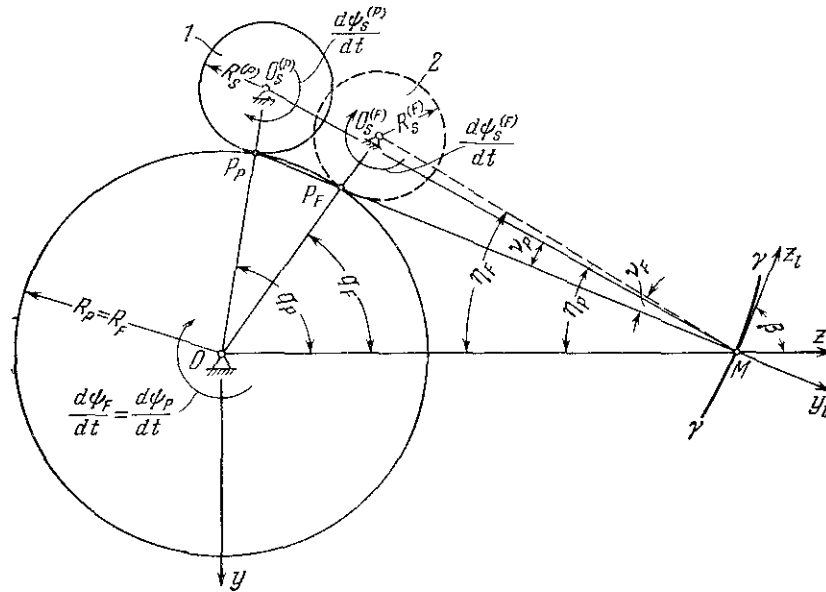


Рис. 314.

Чистовые резцы головок 1 и 2 установим так, чтобы их режущие кромки проектировались на прямую линию $P_P P_F M$. Единичный вектор $\mathbf{b}$ касательной к профилю резца согласно (132.4) определится так

$$\mathbf{b}_l = \cos \alpha_l \mathbf{i}_l + \sin \alpha_l \mathbf{j}_l. \quad (132.10)$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются единичными векторами касательных к координатным линиям на поверхностях Σ_F и Σ_P , образуемых режущей кромкой резца в системах S_F и S_P . Орт нормали к поверхностям Σ_P и Σ_F определится уравнением

$$\mathbf{e}_l = k (\mathbf{b}_l \times \mathbf{a}_l) = \sin \alpha_l \mathbf{i}_l - \cos \alpha_l \mathbf{j}_l. \quad (132.11)$$

Нормирующий множитель k в приведенном уравнении равен единице.

У производящих поверхностей Σ_F и Σ_P будет один и тот же орт нормали в точке M . Легко выяснить, что у производящих поверхностей будет один и тот же орт нормали во всех точках режущей кромки AB при указанных выше правилах установки резцов и резцовых головок. Из этого следует, что производящие поверхности F и P будут касаться друг друга по режущей кромке резца AB , располагающейся в плоскости $z_l = 0$ (рис. 309, 314); в начальном положении резцовой головки ($\psi_s = \psi_P = \psi_F = 0$) указанная плоскость параллельна оси x и проходит через прямую $P_P P_F M$ (рис. 311).

Касание производящих поверхностей F и P по общей линии является исходным условием для получения сопряженных зацеплений. Это требует, как мы видели, соблюдения определенных установок резцов и головок F и P . Насколько нам известно, требования, которые должны быть предъяв-

лены к установкам резцов и головок для обеспечения сопряженности и локализации контакта, были впервые сформулированы автором книги и К. И. Гуляевым.

Полезно отметить, что линия, перпендикулярная $P_F P_F M$, является касательной к продольному профилю $\gamma - \gamma$ зубца производящего колеса. Это следует из того, что $P_F (P_P)$ — мгновенный центр вращения в относительном движении системы $S_s^{(F)} = S_s^{(P)}$ по отношению к системе $S_F = S_P$ и $P_P P_F M$ — нормаль к траектории, описываемой точкой M в относительном движении. На этом основании (рис. 314)

$$\eta_F = 90^\circ - \beta + v_F, \quad \eta_P = 90^\circ - \beta + v_P. \quad (132.12)$$

В совпадении ортов нормалей производящих поверхностей Σ_F и Σ_P во всех точках их общей линии AB можно удостовериться и чисто аналитическим путем.

Нормаль n_F к производящей поверхности F определится так:

$$n_F = \frac{\partial r_F}{\partial u_F} \times \frac{\partial r_F}{\partial \psi_F}. \quad (132.13)$$

На основании уравнений (132.13) и (132.6) получим

$$\left. \begin{aligned} n_{xF} &= \sin \alpha [u \sin \alpha + r_F \cos v_F + R_s^{(F)} \sin (\beta - \psi_F i_{sF} - q_F)], \\ n_{yF} &= -\cos \alpha \{u \sin \alpha \cos [\beta - \psi_F (1 + i_{sF})] + \\ &\quad + r_F \cos [\beta - v_F - \psi_F (1 + i_{sF})] - R_s^{(F)} \sin (q_F - \psi_F)\}, \\ n_{zF} &= -\cos \alpha \{u \sin \alpha \sin [\beta - \psi_F (1 + i_{sF})] + \\ &\quad + r_F \sin [\beta - v_F - \psi_F (1 + i_{sF})] + R_s^{(F)} \cos (q_F - \psi_F)\}. \end{aligned} \right\} \quad (132.14)$$

При выводе этого уравнения были использованы следующие подстановки: $\eta_F - v_F = 90^\circ - \beta$, $b_F = R_s^{(F)} + R_F$, где $R_s^{(F)}$ и R_F — радиусы центроид резцовой головки и производящего колеса (рис. 314);

$$i_{sF} = \frac{d\psi_s^{(F)}}{dt} : \frac{d\psi_F}{dt}, \quad \psi_s^{(F)} = \psi_F i_{sF}.$$

Аналогичным образом для производящей поверхности Σ_P получим

$$\left. \begin{aligned} n_{xP} &= \sin \alpha [u \sin \alpha + r_P \cos v_P + R_s^{(P)} \sin (\beta - \psi_P i_{sP} - q_P)], \\ n_{yP} &= -\cos \alpha \{u \sin \alpha \cos [\beta - \psi_P (1 + i_{sP})] + \\ &\quad + r_P \cos [\beta - v_P - \psi_P (1 + i_{sP})] - R_s^{(P)} \sin (q_P - \psi_P)\}, \\ n_{zP} &= -\cos \alpha \{u \sin \alpha \sin [\beta - \psi_P (1 + i_{sP})] + \\ &\quad + r_P \sin [\beta - v_P - \psi_P (1 + i_{sP})] + R_s^{(P)} \cos (q_P - \psi_P)\}. \end{aligned} \right\} \quad (132.15)$$

Из уравнений (132.6) и (132.7) производящих поверхностей следует, что они будут иметь общую режущую линию (линию AB на рис. 309, 314), проходящую через точку M , при соблюдении следующих условий:

$$\eta_F - v_F = \eta_P - v_P = 90^\circ - \beta, \quad \psi_s^{(F)} = \psi_F = \psi_s^{(P)} = \psi_P = 0, \\ r_F \cos \eta_F + b_F \cos q_F = r_P \cos \eta_P + b_P \cos q_P = OM = L.$$

что

$$P_P N = u \sin \alpha + r_P \cos \nu_P + R_s^{(P)} \sin (\beta - \eta_P),$$

$$P_P Q = u \sin \alpha \cos \beta + r_P \sin \eta_P - R_s^{(P)} \sin q_P,$$

$$Q_N = u \sin \alpha \sin \beta + r_P \cos \eta_P + R_s^{(P)} \cos q_P,$$

где $r_P = O_s^{(P)} M$. С учетом этого

$$\left. \begin{aligned} n_x^{(P)} &= \sin \alpha P_P N, \\ n_y^{(P)} &= -\cos \alpha P_P Q = -\cos \alpha \cos \beta P_P N, \\ n_z^{(P)} &= -\cos \alpha Q_N = -\cos \alpha \sin \beta P_P N. \end{aligned} \right\} \quad (132.18)$$

Орт нормали в системе S

$$e^{(P)} = \sin \alpha i - \cos \alpha \cos \beta j - \cos \alpha \sin \beta k. \quad (132.19)$$

Аналогичным образом, рассмотрев треугольник $P_P G N$, получим, что

$$e^{(F)} = \sin \alpha i - \cos \alpha \cos \beta j - \cos \alpha \sin \beta k = e^{(P)}. \quad (132.20)$$

Это и является подтверждением, что в точках общей линии AB производящие поверхности F и P имеют общую нормаль.

§ 133. Расчет параметров установок резцовых головок и производящих поверхностей

1°. Будем исходить из того, что как у шестерни, так и у колеса обе стороны зубца — выпуклая и вогнутая — нарезаются одновременно,

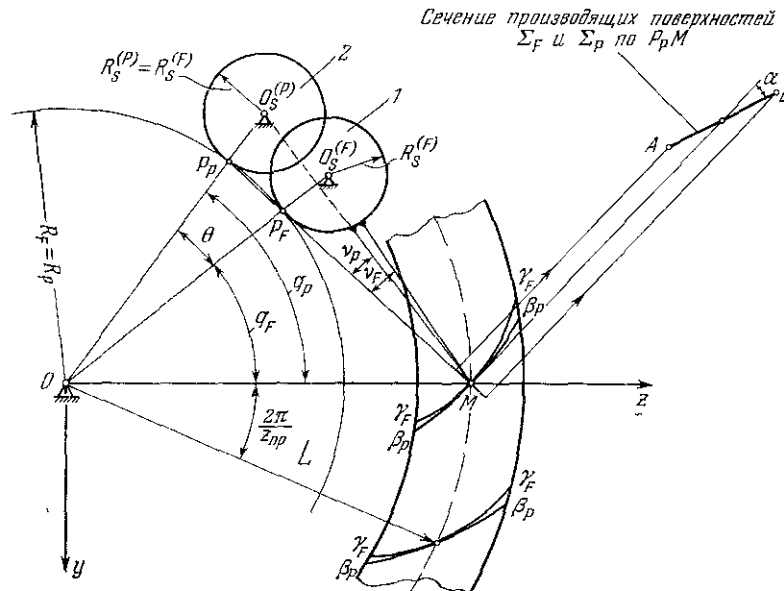


Рис. 313, а.

т. е. используется двойной двусторонний способ нарезания зубцов. Поверхности зубцов колес должны иметь локализованный контакт (теоретически такие поверхности находятся в каждое мгновение в точечном

касании); поэтому для нарезания применяются резцовые головки с различными радиусами установки резцов.

Для лучшего понимания излагаемых ниже расчетов представим себе следующий способ образования производящих поверхностей Σ_F и Σ_P , $\underline{\Sigma}_F$ и $\underline{\Sigma}_P$. Производящие поверхности Σ_F и Σ_P образуются соответственно резцовыми головками 1 и 2, установленными так, как это изображено

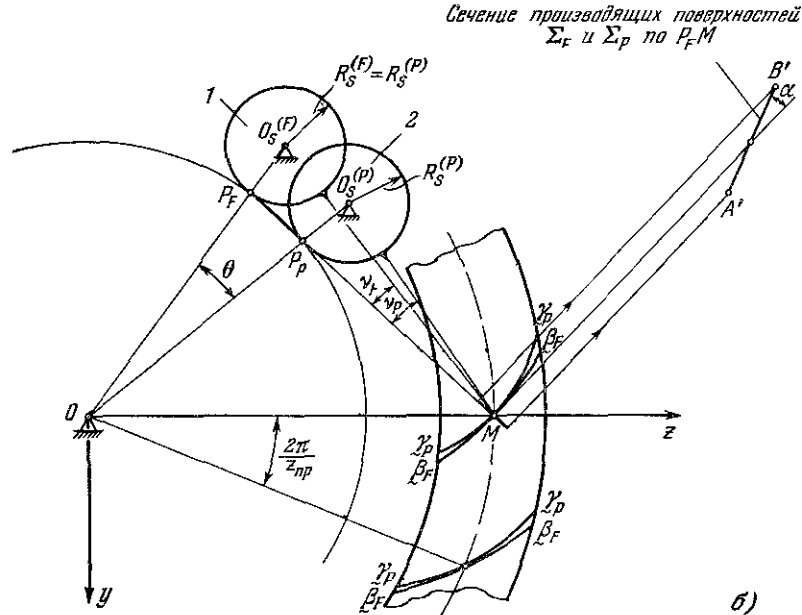


Рис. 313б.

на рис. 313а. В каждой группе резцов головки мы оставляем мысленно только один чистовой резец — внутренний на головке 1, наружный на головке 2. Эти резцы имеют общую режущую кромку AB ; параметрами установок резцов являются: радиусы резцов $O_s^{(F)} M = r_F$, $O_s^{(P)} M = r_P$; углы установки ν_F , ν_P . При повороте резцовых головок на угол $2\pi/n$ производящее колесо совершит поворот на угол $2\pi/z_{пр}$. При этом будут образованы производящие поверхности, отстоящие от прежних на угол $2\pi/z_{пр}$, измеряемый на окружности радиуса $L = OM$. На начальной плоскости (плоскости $x = 0$) производящего колеса будут образованы продольные профили $\gamma_F - \gamma_F$ и $\beta_P - \beta_P$, также отстоящие от прежних на угол $2\pi/z_{пр}$.

Для образования производящих поверхностей Σ_F и Σ_P нужно поменять местами резцовые головки 1 и 2 (рис. 313б). Предполагается, что на головках установлены чистовые резцы с режущей кромкой $A'B'$. На головке 1 нужно установить наружный резец, на головке 2 — внутренний резец. Параметры установок этих резцов $\underline{r}_F$ и $\underline{r}_P$, $\underline{\nu}_F$ и $\underline{\nu}_P$. Следует учесть, что

$$\underline{r}_F = r_P, \quad \underline{r}_P = r_F, \quad \underline{\nu}_F = \nu_P, \quad \underline{\nu}_P = \nu_F. \quad (133.1)$$

Продольные профили производящих поверхностей — сечения этих поверхностей начальной плоскостью $x = 0$ — будут очерчены кривыми $\underline{\beta}_F - \underline{\beta}_F$ и $\underline{\gamma}_P - \underline{\gamma}_P$.

2°. Найдем выражения для параметров установки r_F и v_F , r_P и v_P , q_F и q_P . Будем исходить из нормального модуля $m_n = m_{ср} \cos \beta$, где $m_{ср}$ — торцовый модуль на длине средней образующей L . Расстояние

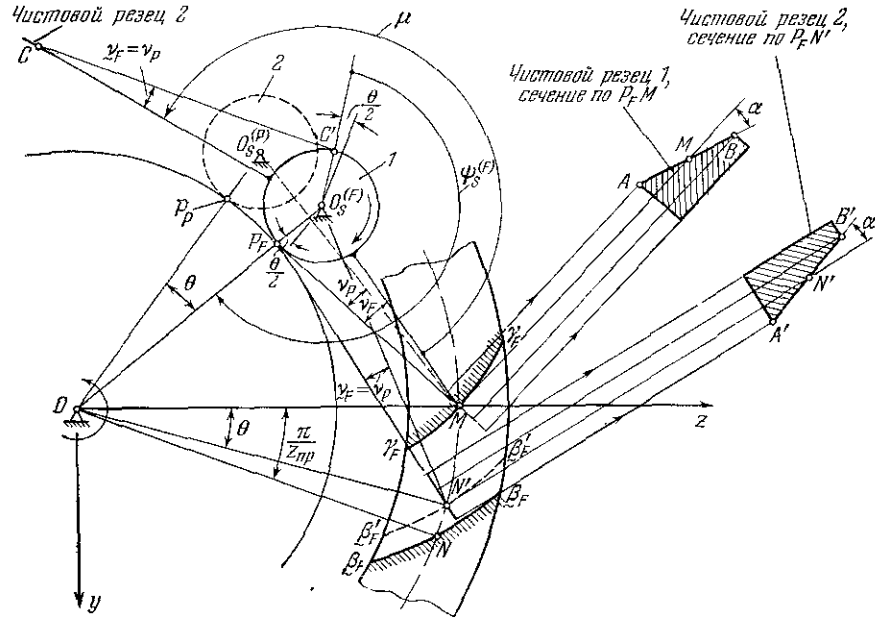


Рис. 314.

между центрами вращения резцовой головки и производящего колеса обозначим через A и примем, что $b_F = b_P = A$.

Обратимся к построениям рис. 314.

Из треугольника $O_s^{(P)}OM$ получим

$$r_P^2 = L^2 + A^2 - 2AL \cos \left(\beta + \frac{\theta}{2} \right), \quad (133.2)$$

где $L = OM = \frac{m_n z_{пр}}{2 \cos \beta}$, $\theta = q_P - q_F$ (см. рис. 312).

Значение угла θ сказывается на степени локализации контакта и зависит, как будет показано ниже, от угла μ установки чистовых резцов в группе.

Напомним, что число зубцов производящего колеса $z_{пр} = z_k / \sin \delta_k$ ($k = 1, 2$), где z_k и δ_k — число зубцов и угол начального конуса нарезаемого колеса (§ 109). Для ортогональной конической передачи $z_{пр} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$.

Преобразуем формулу (133.2), используя (рис. 312), что

$$OC = L \cos \beta = \frac{m_n z_{пр}}{2}, \quad (133.3)$$

$$\frac{DC}{OC} = \frac{O_s^{(P)}P_P}{OP_P} = \frac{O_s^{(F)}P_F}{OP_F} = \frac{R_s^{(F, P)}}{R_{F, P}} = \frac{n}{z_{пр}}, \quad (133.4)$$

где n — число групп резцов.

Радиусы центроид резцовых головок равны ($R_s^{(k)} = R_s^{(P)} = R_s$), так как $O_s^{(P)}O = O_s^{(P)}O$, а при нарезании соблюдается равенство передаточных отношений ($i_{Fs} = i_{Ps}$).

На основании формул (133.3) и (133.4) получим, что

$$A = \frac{DC + OC}{\cos \frac{\theta}{2}} = m_n \frac{n + z_{np}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (133.5)$$

После преобразований получим следующую формулу для определения радиуса вылета резца:

$$r_P = m_n \sqrt{\left(\frac{z_{np}}{2 \cos \beta}\right)^2 + \left(\frac{n - z_{np}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}\right)^2 - \frac{z_{np}(z_{np} + n)}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \beta\right)}. \quad (133.6)$$

Из треугольника $O_s^{(P)}K_P M$ (рис. 312) следует, что

$$\sin v_P = \frac{O_s^{(P)}K_P}{O_s^{(P)}M} = \frac{DC}{r_P} = \frac{m_n n}{2r_P}. \quad (133.7)$$

Параметр q_P определится из зависимости

$$\sin q_P = \frac{r_P \sin \eta_P}{A} = \frac{r_P \cos (\beta - v_P)}{A}, \quad (133.8)$$

так как $\eta_P = 90^\circ - \beta + v_P$. Для резцовой головки и производящего колеса Σ_F получим аналогичные выражения

$$r_F = m_n \sqrt{\left(\frac{z_{np}}{2 \cos \beta}\right)^2 + \left(\frac{n - z_{np}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}\right)^2 - \frac{z_{np}(z_{np} + n)}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \beta\right)}, \quad (133.9)$$

$$\sin v_F = \frac{m_n n}{2r_F}, \quad (133.10)$$

$$\sin q_F = \frac{r_F \sin \eta_F}{A} = \frac{r_F \cos (\beta - v_F)}{A}. \quad (133.11)$$

3°. Рассмотренная нами схема образования производящих поверхностей является, как уже было сказано, только воображаемой. В действительности обе стороны впадины шестерни и колеса обрабатываются одновременно. На резцовой головке в группе устанавливаются не один, а два чистовых резца: 1 — внутренний, 2 — наружный, каждый из которых обрабатывает отдельно свою сторону впадины. Это означает, что чистовыми резцами одной головки будут одновременно воспроизведены две производящие поверхности Σ_F и $\tilde{\Sigma}_F$. Соответственно резцовой головкой 2 с резцами 1 и 2 будут одновременно воспроизводиться производящие поверхности Σ_P и $\tilde{\Sigma}_P$.

Найдем угол μ , определяющий установку на одной головке чистовых резцов в одной группе. На рис. 314 изображены продольные профили $\gamma_F - \gamma_F$ и $\beta_F - \beta_F$, являющиеся отпечатками на начальной плоскости $x = 0$ линий впадин шестерни 1. Линии впадин шестерни 1 можно получить, если рассечь поверхности двух зубцов, образующих впадину, начальным конусом. Отметим, что профиль $\gamma_F - \gamma_F$ проходит через точку M оси z .

Точка C чистового резца 2 головки 1 вступит в зацепление с точкой N профиля $\beta_F - \beta_F$ после поворота производящего колеса на угол

$$\psi_F = \frac{\pi}{z_{np}} - \theta. \quad (133.12)$$

После такого поворота профиль $\beta_F - \beta_F$ займет положение $\beta'_F - \beta'_F$ и точка N перейдет в N' . Режущая кромка $A'B'$ проектируется на направление $N'P_F$ (рис. 314).

В справедливости выражения (133.12) можно убедиться, исходя из того, что для совмещения треугольника $OO_s^{(F)}N'$ с равным ему треугольником $OO_s^{(P)}M$, треугольник $OO_s^{(F)}N'$ нужно повернуть вокруг оси O на угол θ . Повороту производящего колеса на угол ψ_F , определяемый выражением (133.12), соответствует поворот резцовой головки на угол

$$\psi_s^{(F)} = \psi_F \frac{z_{np}}{n} = \frac{\pi - \theta z_{np}}{n}. \quad (133.13)$$

Из построений рис. 314 следует, что

$$\mu = \psi_s^{(F)} - 0 + v_F - v_P = \frac{\pi - \theta(z_{np} + n)}{n} + v_F - v_P. \quad (133.14)$$

4°. Перейдем теперь к определению параметров, определяющих установку чернового резца. Предполагается, что в группе имеется один черновой резец.

Полный цикл обработки одной впадины шестерни 1 совершается за поворот производящего колеса на угол $2\pi/z_{np}$. Схема работы резцов

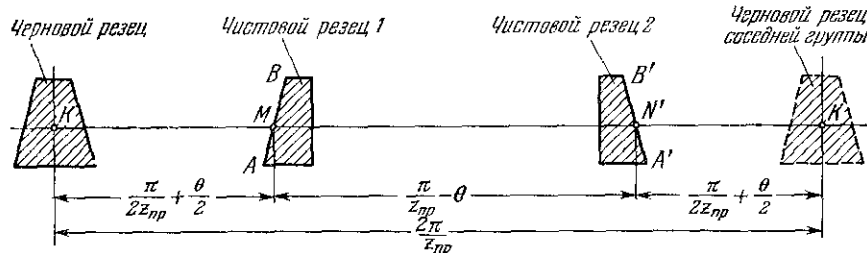


Рис. 315.

одной группы изображена на рис. 315. Переход от чистового резца 1 к чистовому резцу 2 совершается за поворот производящего колеса на угол $\frac{\pi}{z_{np}} - \theta$. Углы поворота, соответствующие переходу от чернового резца к чистовому резцу 1 и переходу от чистового резца 2 к черновому резцу соседней группы, целесообразно выбрать равными по величине.

На рис. 316 изображено положение профилей $\gamma_F - \gamma_F$ и $\beta'_F - \beta'_F$ в тот момент, когда черновой резец головки 1 обрабатывает впадину шестерни 1. Напомним, что шестерня 1 находится над начальной плоскостью производящего колеса (рис. 310). Продольные профили $\gamma_F - \gamma_F$ и $\beta_F - \beta_F$ являются отпечатками на начальной плоскости $x = 0$ линий впадин шестерни 1 на поверхности ее начального конуса. Эти отпечатки можно получить, перекаывая начальный конус шестерни по начальной плоскости $x = 0$. Контур $\gamma_F - \gamma_F$, $\beta_F - \beta_F$ занимает такое исходное положение (рис. 316), что после поворота вокруг O на угол $\frac{\pi}{2z_{np}} + \frac{\theta}{2}$ продольный

профиль $\gamma_F - \gamma_F$ перейдет в положение $\gamma'_F - \gamma'_F$. Это произойдет после поворота производящего колеса на угол $\frac{\pi}{2z_{\text{пр}}} + \frac{\theta}{2}$. Одновременно резцовая головка повернется на угол

$$\psi_s^{(F)} = \psi_F \frac{z_{\text{пр}}}{n} = \frac{\pi + \theta z_{\text{пр}}}{2n}. \quad (133.15)$$

Точка T чистового резца 1 после поворота резцовой головки на угол $\psi_s^{(F)}$ совпадет с точкой M продольного профиля $\gamma_F - \gamma_F$.

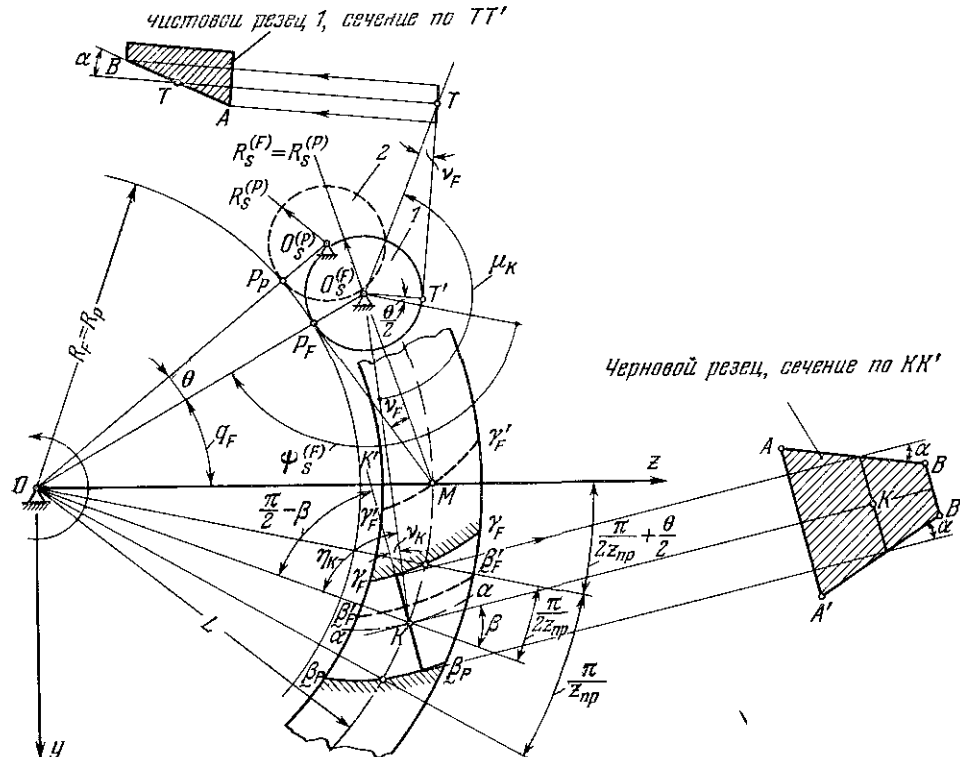


Рис. 316.

Черновой резец, обрабатывающий впадину шестерни 1, установлен так, что его режущие кромки проектируются на направление KK' . Эта линия является нормалью к среднему продольному профилю $\alpha - \alpha$ в точке K . Такая установка чернового резца способствует улучшению условий резания, так как направление линии KK' близко к направлению нормалей к продольным профилям $\gamma_F - \gamma_F$ и $\beta_F - \beta_F$ в точках, общих для этих профилей и чернового резца.

Для определения параметров установки чернового резца рассмотрим сначала косоугольный треугольник $O_s^{(F)}OK$

$$r_k = O_s^{(F)}K = \sqrt{A^2 + L^2 - 2AL \cos \left(q_F + \frac{\pi}{z_{\text{пр}}} + \frac{\theta}{2} \right)}, \quad (133.16)$$

$$\sin \eta_k = \frac{A}{r_k} \sin \left(q_F + \frac{\pi}{z_{\text{пр}}} + \frac{\theta}{2} \right), \quad (133.17)$$

$$\sin (\widehat{OO_s^{(F)}}K) = \frac{L}{r_k} \sin \left(q_F + \frac{\pi}{z_{\text{пр}}} + \frac{\theta}{2} \right). \quad (133.18)$$

Уравнения для определения параметров установки чернового резца представим в следующем виде:

$$\mu_k = q_s^{(F)} - (OO_s^{(F)}K) + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \nu_F =$$

$$= \frac{\pi(n+1) + \theta(n + z_{\text{пр}})}{2n} - \arcsin \left[\frac{L}{r_k} \sin \left(q_F + \frac{\pi}{z_{\text{пр}}} - \frac{\theta}{2} \right) \right] - \nu_F, \quad (133.19)$$

$$\nu_k = \eta_k - \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right). \quad (133.20)$$

Радиус r_k определяется уравнением (133.16).

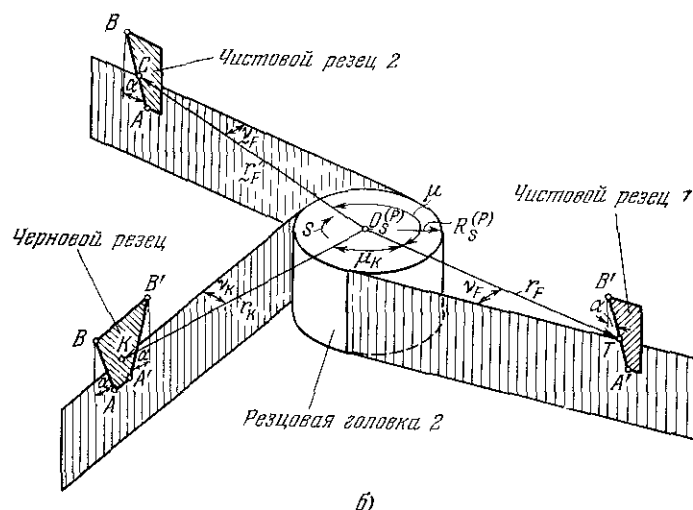
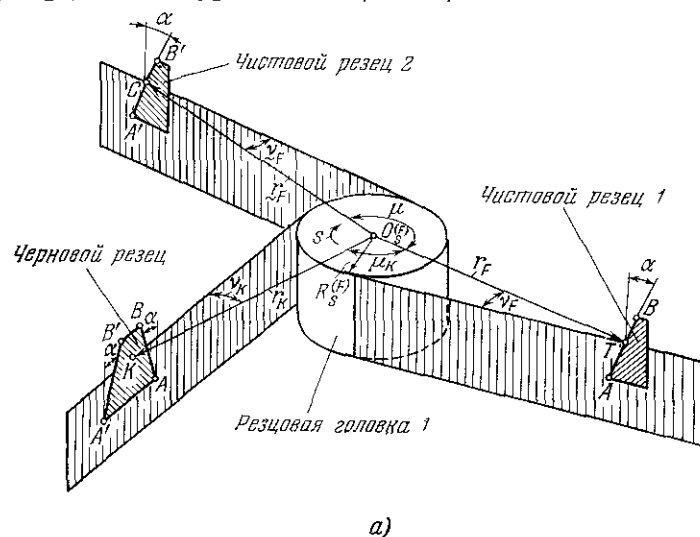


Рис. 317.

Суммируя полученные результаты, установку и чередование резцов на головке 1 можно изобразить схемой, изображенной на рис. 317, а. Стрелка s указывает направление вращения резцовой головки. Обход

резцов и отсчет углов μ_k и μ , начиная от чернового резца, совершается в направлении, противоположном направлению вращения резцовой головки. После чернового резца должен следовать чистовой резец 1 (внутренний), а затем чистовой резец 2 (наружный). На рис. 317, б изображена схема установки резцов на головке 2, посредством которой обрабатываются впадины колеса 2. Напомним, что колесо 2 находится под начальной плоскостью производящего колеса (рис. 310).

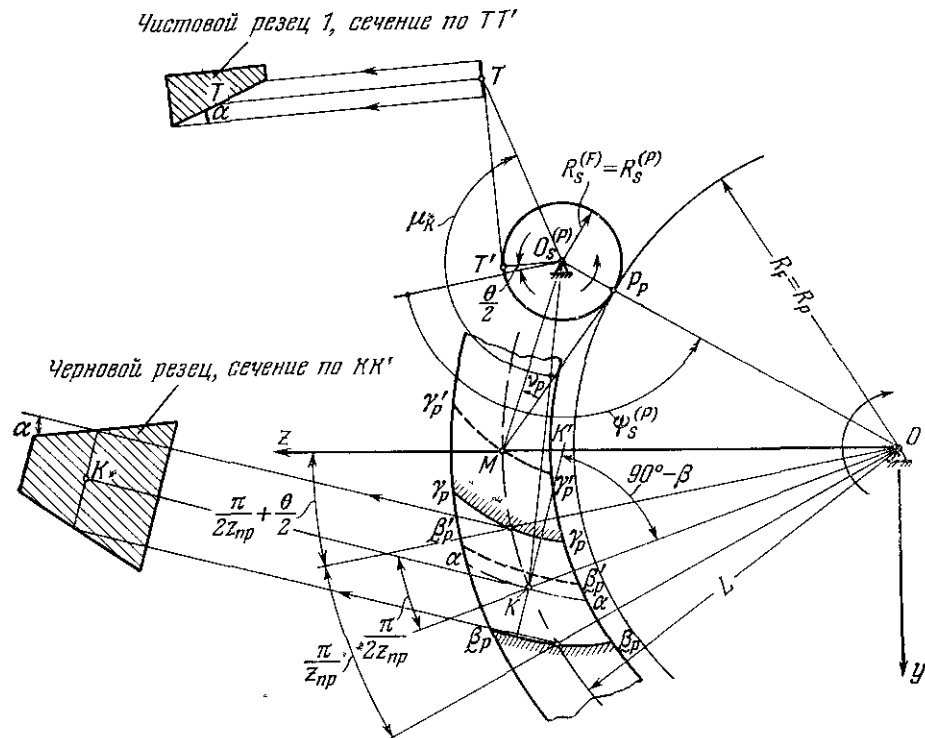


Рис. 318.

Радиусы установки резцов головки 2 соответственно те же, что и для головки 1. Однако у этих резцов иначе расположены режущие кромки: у резцов головки 2 режущие кромки AB и $A'B'$ поменялись местами (по отношению к резцам головки 1).

Не представляет труда получить уравнения для расчета параметров установок резцов для случаев, когда резание является не встречным, а попутным, когда направления винтовых линий шестерни 1 и колеса 2 противоположны принятым ранее.

Так, построения, изображенные на рис. 318, позволяют определить параметры резцов для нарезания колеса 2 с правым направлением винтовых линий (колесо 2 находится по-прежнему под начальной плоскостью $x = 0$). Построения, приведенные на рис. 316, соответствовали случаю, когда винтовые линии на колесе 2 были левого направления. Обход резцов на рис. 318 совершается по-прежнему в направлении, противоположном направлению вращения резцовой головки. Направления вращения резцовой головки и производящего колеса противоположны принятым на рис. 316.

5°. Выше уже было отмечено, что значение θ сказывается на степени локализации контакта. Для определения размеров пятна контакта поверхностей зубцов нужно воспользоваться материалами, изложенными в § 37.

Для ориентировочного выбора значения θ полезно исходить из разности радиусов кривизны продольных профилей производящих поверхностей.

Обратимся к построениям рис. 319. Продольный профиль $\gamma_F - \gamma_F$ представляет траекторию точки M , жестко связанной с центроидой I ,

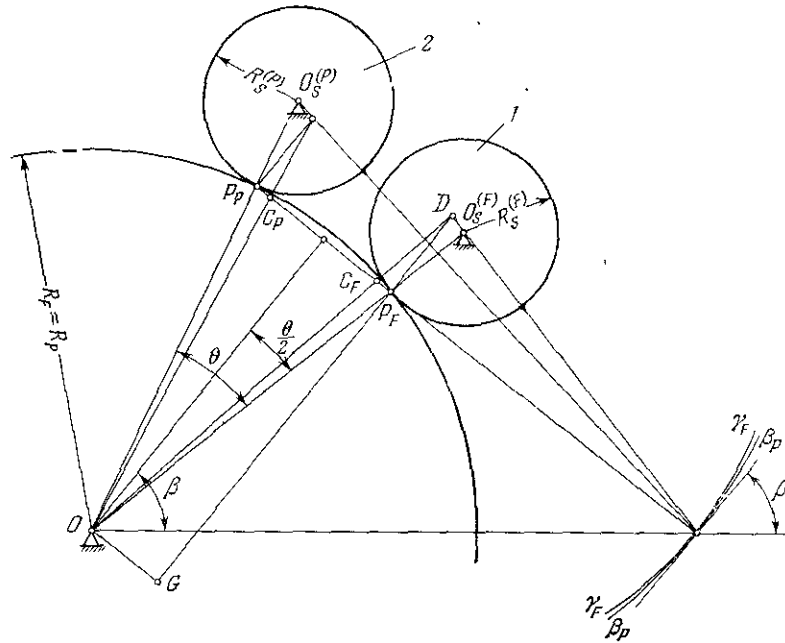


Рис. 319.

при перекатывании этой центроиды по центроиде радиуса $R_F = R_P$. Аналогично продольный профиль $\beta_P - \beta_P$ будет описан точкой M , жестко связанной с центроидой 2, при перекатывании этой центроиды по центроиде радиуса $R_F = R_P$.

Используя построение Бобиле (см. § 16), найдем центры кривизны C_F и C_P продольных профилей $\gamma_F - \gamma_F$ и $\beta_P - \beta_P$. Используя подобие треугольников OGD и $C_F P_F D$, получим, что

$$C_F P_F = \frac{R_F \sin \frac{\theta}{2} \left[R_s^{(F)} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \nu_F \right) \right]}{R_s^{(F)} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \nu_F \right) + R_F \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (133.21)$$

Аналогично

$$P_P C_P = \frac{R_P \sin \frac{\theta}{2} \left[R_s^{(P)} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \nu_P \right) \right]}{R_s^{(P)} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \nu_P \right) + R_P \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (133.22)$$

Разность $(\rho_P - \rho_F)$ радиусов кривизн продольных профилей определяется уравнением

$$\rho_P - \rho_F = 2L \cos \beta \sin \frac{\theta}{2} - (P_P C_P + C_F P_F). \quad (133.23)$$

Пренебрегая в уравнениях (133.21) и (133.22) произведениями $\sin \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \nu_F$ и $\sin \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \nu_P$, получим

$$\rho_P - \rho_F = 2 \left(L \cos \beta - \frac{R_s R_{F,P}}{A} \right) \sin \frac{\theta}{2}, \quad (133.24)$$

где $R_s = R_s^{(F)} = R_s^{(P)}$, $A = R_s^{(F)} + R_F = R_s^{(P)} + R_P$.

При определении параметров установки резцовых головок мы исходили из необходимости обеспечить локализованный контакт нарезанных поверхностей. Представляет интерес отметить, что при $r_P = r_F$ и $\theta = 0$ производящие поверхности F и P совпадают друг с другом, нарезанные поверхности колес находятся уже не в точечном, а в линейном касании. Углы ν_F и ν_P , определяющие установки чистовых резцов, должны быть выбраны равными по величине. В частности, можно выбрать $\nu_F = \nu_P = 0$. При линейном контакте поверхностей упрощается расчет параметров резцовых головок. Такой характер контакта является, однако, нежелательным из-за большей чувствительности колес к погрешностям изготовления.

§ 134. Определение условий зацепления

Исследование условий зацепления колес рассматриваемого вида может быть выполнено методами, приведенными в гл. III. Ограниченность объема вынуждает нас лишь кратко изложить пути решения для определения уравнения зацепления и рабочей линии.

1°. Уравнение зацепления производящей и нарезаемой поверхностей можно получить, используя условие, что нормаль к производящей и нарезаемой поверхностям должна пересекать ось зацепления Oz .

Ось Oz в системе S_F (или S_P) определяется уравнениями:

$$X_F = 0, \quad Y_F = -L \sin \varphi_{пр}, \quad Z_F = L \cos \varphi_{пр}, \quad (134.1)$$

где $\varphi_{пр}$ — угол поворота производящей поверхности F при зацеплении с нарезаемым колесом 1. Следует различать $\psi_F = \psi_P$ — угол поворота производящей поверхности при зацеплении с резцовой головкой и $\varphi_{пр}$ — угол поворота производящей поверхности при зацеплении с нарезаемой поверхностью, отсчитываемый в направлении, противоположном отсчету угла ψ_F (рис. 309).

Условие прохождения нормали к производящей поверхности F через ось зацепления (134.1) определится так:

$$\frac{X_F - x_F}{n_{xF}} = \frac{Y_F - y_F}{n_{yF}} = \frac{Z_F - z_F}{n_{zF}}, \quad (134.2)$$

где x_F , y_F и z_F — координаты точки производящей поверхности. Подставив в уравнения (134.2) выражения (134.1), (132.6) и (132.14), после преобразований получим уравнение зацепления — уравнение связи между параметрами такого вида:

$$f(u, \psi_F, \varphi_{пр}) = 0. \quad (134.3)$$

Уравнения (134.3) и (132.6), рассмотренные совместно, определяют при фиксированном значении $\varphi_{\text{пр}}$ линию контакта производящей и нарезаемой поверхностей в системе S_F .

2°. Рабочая линия на поверхности Σ_1 зубца колеса 1 представляет совокупность точек контакта поверхности Σ_1 с поверхностью Σ_2 колеса 2.

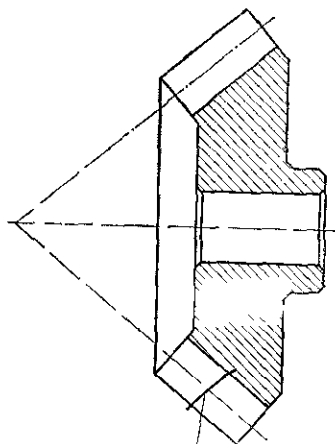


Рис. 320.

Рабочая линия на поверхности F является одновременно линией, по которой эта поверхность касается другой производящей поверхности (P). Напомним, что точкам этой линии отвечает значение $\psi_F = 0$. Для определения текущей точки рабочей линии в системе S_F в уравнении зацепления нужно принять $\psi_F = 0$. Тогда это уравнение примет такой вид:

$$f(u, \varphi_{\text{пр}}) = 0. \quad (134.4)$$

Рассмотрев совместно уравнения (134.4), (132.6) и матричное равенство

$$r_1 = M_{1F} r_F, \quad (134.5)$$

получим координаты точки рабочей линии в системе S_1 в виде функции от $\varphi_{\text{пр}}$. В уравнениях (132.6) производящей поверхности F нужно при этом принять $\psi_F = 0$. Характер проекции рабочей линии (рис. 320) свидетель-

ствует о том, что при зацеплении зубцов пятно контакта не имеет диагонального характера.

Для определения условий отсутствия подрезания зубцов, кривизн их поверхностей и т. д. нужно воспользоваться методами, изложенными в гл. III.

Литература

1. В. Д. Андожский, Расчет зубчатых передач, Машгиз, 1955.
2. Г. И. Апухтин, Исследование косозубых гипоидных передач, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 37, Изд-во АН СССР, 1950.
3. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, Главная редакция физ.-матем. литературы изд-ва «Наука», 1967.
4. Л. А. Архангельский, Контроль качества передач (в «Справочном руководстве по зубчатым передачам и редукторам», вып. 5), Машгиз, 1944.
5. Л. А. Архангельский, Прецизионная доводка червячных колес, ИТЭИН, 1948.
6. Л. А. Архангельский и Г. И. Ткачевский, Методы проверки кинематической точности зубофрезерных станков (в сборнике «Повышение долговечности машин и передовые методы их ремонта»), Машгиз, 1949.
7. Л. А. Архангельский, Точность изготовления зубчатых передач (лекция для заочных курсов усовершенствования инж.-конструкторов), ВНИИТОМАШ, Машгиз, 1952.
8. Л. А. Архангельский, Г. И. Ткачевский, Г. А. Лившиц, Повышение кинематической точности зубофрезерных станков, «Труды ЦНИИТМАШ», кн. 65, Машгиз, 1954.
9. Л. А. Архангельский, Г. А. Лившиц и Г. И. Ткачевский, Применение компенсирющих устройств к зубофрезерным станкам (в сборнике «Вопросы изготовления зубчатых передач», № 5), ЦБТИ НТО, Машпром, 1957.
10. Л. А. Архангельский, Г. А. Лившиц и Г. И. Ткачевский, Способы повышения кинематической точности винторезных и зуборезных станков (в «Справочнике механика машиностроительного завода», т. III), Машгиз, 1958.
11. Л. А. Архангельский, Г. А. Лившиц и Г. И. Ткачевский, Проверка кинематической точности станков (в «Справочнике механика машиностроительного завода», т. II), Машгиз, 1958.
12. Л. А. Архангельский, Точностные требования к зубчатым передачам, «Стандартизация», № 1, 1958.
13. Л. А. Архангельский, Основные направления в усовершенствовании технологии производства редукторов турбозубчатых агрегатов, «Энергомашиностроение», № 11, 1959.
14. Э. Бакингом, Цилиндрические зубчатые колеса, ОНТИ НКТП, 1935.
15. Г. Г. Баранов, Теория механизмов и машин, Машгиз, 1967.
16. И. П. Бернацкий, Исследование червячных передач с вогнутым профилем витков червяка, нарезаемых резцом, «Изв. вузов. Машиностроение», № 10, 1962.
17. И. П. Бернацкий, Нахождение точек подрезания при обработке винтовых поверхностей постоянного шага, «Изв. вузов. Машиностроение», № 10, 1963.
18. И. П. Бернацкий, Подрезание в ортогональных червячных передачах с цилиндрическими червяками в виде линейчатых геликоидов, «Изв. вузов. Машиностроение», № 3, 1964.
19. И. П. Бернацкий, Исследование червячной передачи повышенной грузоподъемности с конвольютным червяком новой разновидности, «Труды ЛПИ им. М. И. Калинина», № 254, «Машиностроение», 1965.
20. И. П. Бернацкий, Выбор радиуса профиля торондального инструмента, применяемого для обработки червяка вогнутого профиля, «Труды ЛПИ им. М. И. Калинина», № 254, «Машиностроение», 1965.
21. И. П. Бернацкий, Геометрия новых разновидностей шлифуемых цилиндрических червяков с вогнутым профилем витков (в сборнике «Теория механизмов и машин»), «Машиностроение», 1965.
22. Л. И. Блейшмидт, Аналитическое исследование червячной передачи с неполной глобоидальностью, «Труды ЛПИ им. М. И. Калинина», № 269, «Машиностроение», 1966.

23. Н. Н. Богданов, Некоторые вопросы проектирования одного из видов некруглых зубчатых колес, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 88, Изд-во АН СССР, 1961.
24. Т. П. Болотовская, И. А. Болотовский, Г. С. Бочаров, К. И. Гуляев, Б. А. Курлов, И. А. Меркурьев и В. Э. Смирнов, Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач, Машгиз, 1963.
25. Н. Г. Бруевич, Точность механизмов, Гостехиздат, 1946.
26. Л. Б. Быховский, Геометрия конволютных винтовых поверхностей, «Станки и инструмент», № 2, 1968.
27. В. М. Васильев, Об одной теореме из теории зацепления пространственных передач, «Изв. вузов, Машиностроение», № 5, 1963.
28. В. М. Васильев, Новый метод для определения кривизны взаимоогibaемых поверхностей (в сборнике «Теория машин и механизмов», вып. 103—104), Изд-во АН СССР, 1964.
29. В. М. Васильев, Аналитическое исследование спироидного зацепления, «Труды Новочеркасского политех. ин-та», т. 153, 1964.
30. В. М. Васильев, Аналитическое исследование подрезания зубцов в пространственных зацеплениях, «Труды Новочеркасского политех. ин-та», т. 149, 1963.
31. Э. Вильдгабер, Основы зацепления конических и гипоидных передач, Машгиз, 1948.
32. В. А. Гавриленко, Геометрическая теория эвольвентных зубчатых передач, Машгиз, 1949.
33. В. А. Гавриленко, Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача, Машгиз, 1956.
34. В. А. Гавриленко, Зубчатые передачи в машиностроении, Машгиз, 1962.
35. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1967.
36. А. К. Георгиев, Определение профиля витков червяка гипоидно-червячной передачи (в сборнике «Повышение надежности деталей и устройств»), изд. «Удмуртия», Ижевск, 1964.
37. А. К. Георгиев, Элементы геометрической теории спироидных передач, «Изв. вузов, Машиностроение», № 8, 1963.
38. А. К. Георгиев, Геометрический расчет двухколесных гипоидно-червячных передач и особенности их изготовления (в сборнике «Проектирование и производство механических передач»), Ижевск, изд. «Удмуртия», 1965.
39. Я. Л. Геронимус, Нахождение профиля кулачка по заданному движению толкателя, «Техника воздушного флота», № 3, 1933.
40. Б. А. Гессен, Аналитический метод исследования пространственных зацеплений, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 19, Изд-во АН СССР, 1948.
41. Б. А. Гессен, П. С. Зак, Глобoidное зацепление, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 21, Изд-во АН СССР, 1948.
42. Е. Г. Гинзбург, Нарезание конических колес с тангенциальными зубьями, «Станки и инструмент», № 10, 1955.
43. Е. Г. Гинзбург, К вопросу о кривизне сопряженных поверхностей, «Труды Ленингр. механ. ин-та», № 23, 1962.
44. Е. Г. Гинзбург, Конические зубчатые колеса с новым видом зацепления (в сборнике «Зубчатые и червячные передачи»), Машгиз, 1959.
45. Х. И. Гохман, Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа, Одесса, 1886.
46. М. Б. Громан, Подбор коррекции зубчатых передач, «Вестник машиностроения», № 2, 1955.
47. М. Б. Громан, Графики для подбора коррекции прямозубых зубчатых передач и указания к их применению, «Вестник машиностроения», № 7, 1957.
48. А. Н. Грубин, Червячное зацепление, Органсталь, 1936.
49. А. Н. Грубин, Гидродинамическая теория смазки архимедовых червячных передач в простейших предположениях (в сборнике «Труды Второй всесоюзной конференции по трению и износу в машинах»), Изд-во АН СССР, 1947.
50. А. Н. Грубин, М. Б. Лихцнер и М. С. Полоцкий, Зуборезный инструмент, ч. I, II, Машгиз, 1946—1947 гг.
51. А. Н. Грубин, Расчет установки шпинделя шлифовального камня на червячно-шлифовальном станке «Давид Браун», «Машиностроитель», № 2, 1933.
52. К. И. Гуляев, Методы получения сопряженного зацепления конических колес с циклоидальным продольным профилем зуба, «Изв. вузов, Машиностроение», № 12, 1964.

53. К. И. Гуляев, Выбор параметров резцовых головок при нарезании конических колес с циклоидальным продольным профилем зуба, «Изв. вузов, Машиностроение», № 1, 1965.
54. К. И. Гуляев, Исследование зацепления конических колес с циклоидальным продольным профилем зуба, работающих с локализованной зоной контакта (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
55. Я. С. Давыдов, Незвольвентное зацепление, Машгиз, 1950.
56. Я. С. Давыдов, Приближенная геометрия плоских колес, гипоидно-нарезанных косозубым долбяком, «Изв. вузов, Машиностроение», № 7, 1960.
57. Я. С. Давыдов, Новый метод построения диаграмм корригирования эвольвентных зубчатых передач, серия «Новые методы расчетов и конструирования машин», вып. 14, ГОСИНТИ, 1962.
58. Я. С. Давыдов, Образование сопряженных поверхностей в зубчатых передачах по принципу жесткой неконгруэнтной производящей пары, «Вестник машиностроения», № 2, 1963.
59. Я. С. Давыдов, Влияние переточек долбяка на зацепление нарезанных им неэвольвентных колес с эвольвентной цилиндрической шестерней, «Труды семинара по теории механизмов и машин», вып. 101—102, «Наука», 1964.
60. Я. С. Давыдов, Образование сопряженных поверхностей в зубчатых передачах с помощью двух кривых линий (в сборнике «Анализ и синтез механизмов и теория передач»), «Наука», 1965.
61. Я. С. Давыдов, Подрез зубьев реечным инструментом, «Изв. вузов, Машиностроение», № 6, 1963.
62. Я. С. Давыдов, Исследование поля корригирования эвольвентных зубчатых передач (в сборнике «Проблемы качества и прочности зубчатых передач»), ЦБТИ Госкомитета по автоматизации и машиностроению, 1961.
63. В. М. Денисов, Резцовые головки с криволинейными режущими кромками для нарезания конических зубчатых колес с круговыми зубьями, «Станки и инструмент», № 2, 1964.
64. В. М. Денисов, Нарезание конических колес производящим колесом со сферическими поверхностями зубьев, «Станки и инструмент», № 8, 1963.
65. Я. И. Дикер, Эвольвентное зацепление с прямыми зубцами, Оргаметалл, 1935.
66. Я. И. Дикер, Тороидные передачи (в сборнике «Теория и расчет зубчатых колес»), кн. 6, ЛОНИТОМАШ, 1948.
67. Я. И. Дикер, К вопросу о конструировании и изготовлении глобоидных червячных передач, «Вестник машиностроения», № 1, 1950.
68. Я. И. Дикер и Л. И. Сагин, Основы производства червячных глобоидных передач, ЦНИИТМАШ, 1960.
69. Ф. М. Диментберг, Определение положений пространственных механизмов, Изд-во АН СССР, 1950.
70. Ф. М. Диментберг, Винтовое исчисление, Главная редакция физ.-матем. лит-ры изд-ва «Наука», 1966.
71. И. И. Дусев, Подрезание зубьев зубчатых колес при нарезании, «Изв. вузов, Машиностроение», № 6, 1965.
72. И. И. Дусев, Аналитическое определение минимального числа зубьев шестерен, «Труды Новочеркасского политехн. ин-та», т. 126, 1961.
73. И. И. Дусев, Кривизна нормальных сечений сопряженных поверхностей зубьев зубчатых зацеплений, «Изв. вузов, Машиностроение», № 3, 1964.
74. И. И. Дусев, Исследование кривизны поверхностей зубьев зубчатых зацеплений (в сборнике «Прогрессивная технология производства конических передач»), Минск, 1964.
75. И. И. Дусев, Высотная коррекция зубьев гипоидных шестерен, «Изв. вузов, Машиностроение», № 11, 1966.
76. С. В. Елисеев, Некоторые принципиальные вопросы технологии глобоидных передач (в сборнике «Передачи в машиностроении»), Машгиз, 1951.
77. М. Л. Ерихов, Я. Е. Грабуст, Интерференция в зацеплениях с точечным касанием, образованных с помощью одной вспомогательной поверхности, «Изв. АН ЛатвССР, серия физических и технических наук», вып. 3, 1965.
78. М. Л. Ерихов, Я. Е. Грабуст, Ребро возврата огибающей двухпараметрического семейства поверхностей, «Изв. АН ЛатвССР, серия физических и технических наук», вып. 4, 1965.
79. М. Л. Ерихов, К вопросу о синтезе зацеплений с точечным касанием (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.

80. М. Л. Ерихов, Интерференция (подрезание) в передачах, образованных по методу огнбания с двумя параметрами, «Изв. вузов, Машиностроение», № 7, 1966.
81. М. Л. Ерихов, Определение нормальных кривизн поверхностей с точечным касанием, «Изв. вузов, Машиностроение», № 8, 1966.
82. М. Л. Ерихов, Определение главных кривизн и главных направлений огнбавшей двухпараметрического семейства поверхностей, «Изв. вузов, Машиностроение», № 9, 1966.
83. М. Л. Ерихов, Об относительном движении двух взаимоогнбаемых линейчатых поверхностей, «Изв. вузов, Машиностроение», № 10, 1966.
84. Б. Е. Житомирский, Аналитическое исследование торoidalного зацепления (в сборнике «Исследования деталей машин»), ОПИ, 1959.
85. А. Е. Жмудь, Винтовые насосы с циклопальным зацеплением, Машгиз, 1963.
86. В. И. Журавлев, К вопросу о точности глобоидных передач (в сборнике «Передачи в машиностроении»), Изд-во АН СССР, 1953.
87. П. С. Зак, Глобоидное зацепление и основные особенности его конструирования (в сборнике «Передачи в машиностроении»), Машгиз, 1951.
88. П. С. Зак, Б. Д. Федотов, Д. Э. Геллер, Я. И. Бочин, Г. Д. Федоров и С. М. Кочетков, Исследования червячных передач и редукторов, «Труды ВНИИПТ — УГЛЕМАШ», «Недра», 1965.
89. П. С. Зак, Глобоидная передача, Машгиз, 1962.
90. А. А. Заостровский, Определение размеров и формы пятна контакта на поверхностях зубьев обкатных конических колес, «Машиноведение», № 4, 1966.
91. Д. С. Зернов, Х. Ф. Кетов, С. В. Вяхирев и Н. И. Колчин, Прикладная механика, ч. I и II, ОНТИ НКТП, 1937.
92. Б. Д. Зильберман, Определение размеров и формы площади мгновенного контакта конических полуобкатных передач (в сборнике «Труды аспирантов»), ЛИТМО, 1966.
93. В. А. Зискиндович, Вопросы геометрии пространственного кулачка в механизме с поступательно движущимся толкателем, «Труды семинара по теории механизмов и машин», вып. 100, «Наука», 1964.
94. М. Д. Злотопольский, Основы винтовой теории пространственных зацеплений, «Труды Ленингр. технологического ин-та им. Ленсовета», вып. 25, 1953.
95. М. Д. Злотопольский, Основы теории и сопряженности и новые способы исследования и проектирования пространственных зубчатых зацеплений, «Труды Ленингр. технологического ин-та им. Ленсовета», вып. 32, 1955.
96. М. Д. Злотопольский, Геометрия зубообразования при нарезании конических колес червячной фрезой, «Труды Ленингр. технологического ин-та им. Ленсовета», вып. 28, 1954.
97. Н. Ф. Кабатов, О регулировании длины контакта в зацеплении конических колес с круговыми зубьями (в сборнике «Прогрессивная технология производства конических зубчатых колес»), ИНТИИП ГК СМ БССР по КНИР, Минск, 1964.
98. Н. Ф. Кабатов, Нарезание высококачественных конических зубчатых колес на станках мод. 5A27C3 и 5A27C4, «Станки и инструмент», № 4, 1962.
99. Н. Ф. Кабатов, Об особенностях геометрического расчета полуобкатных конических зацеплений (в сборнике «Прогрессивная технология производства конических зубчатых колес»), ИНТИИП ГК СМ БССР по КНИР, Минск, 1964.
100. Н. Ф. Кабатов, М. Г. Сегаль, Расчет наладок для нарезания полуобкатных конических пар на станках 5B232 и 5A27C4, Саратов, ЦБТИ, 1964 (руководящий материал СЗТЗС).
101. Н. Ф. Кабатов, Г. А. Лопатко, Конические колеса с круговыми зубьями, «Машиностроение», 1966.
102. Н. Ф. Кабатов, Полуобкатные конические зубчатые передачи и нарезание колес этих передач на станках, не имеющих наклона шпинделя резцовой головки (в сборнике «Прогрессивные методы производства зубчатых колес и их технологичность»), Машгиз, 1962.
103. Н. Ф. Кабатов, Нарезание конических зубчатых колес для полуобкатных передач, «Станки и инструмент», № 7, 1959.
104. Н. Ф. Кабатов, О точности конических шестерен, нарезанных с модификацией обкатки, «Станки и инструмент», № 10, 1955.
105. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей. т. I, II, Гостехиздат, 1947, 1948.
106. Н. А. Калашников, Исследование зубчатых передач, Машгиз, 1941.
107. Г. С. Калицин, О некоторых применениях матричного исчисления в теории механизмов (в сборнике «Анализ и синтез механизмов»), Машгиз, 1960.
108. А. К. Карцев, Производство глобоидных передач, Машгиз, 1954.

109. А. М. Кац, Расчет, конструкция и испытания воздухоулов типа «Рутс», Машгиз, 1954.
110. В. Н. Кедринский, К. М. Писманик, Станки для обработки конических зубчатых колес, «Машиностроение», 1967.
111. В. Н. Кедринский, Методы нарезания конических колес с круговыми зубьями (в сборнике «Новые методы обработки конических колес»), ч. 2, Машгиз, 1954.
112. Х. Ф. Кетов и Н. И. Колчин, Теория механизмов и машин, Машгиз, 1939.
113. Х. Ф. Кетов, Эвольвентное зацепление, ОНТИ НКТП, 1939.
114. С. Г. Кислицын, О приближенном решении функционального уравнения $\varphi(\varphi(x)) = f(x)$, «Ученые записки Ленинградского педагогического института», т. 90, 1955.
115. С. Г. Кислицын, Тензорный метод в теории пространственных механизмов, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 54, Изд-во АН СССР, 1954.
116. С. Н. Кожевников, Теория механизмов и машин. Укр. отд. Машгиза, 1954.
117. Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, Изд-во иностр. лит., 1953.
118. Н. И. Колчин и В. В. Болдырев, Аналитическая теория современных конических зацеплений, ОНТИ НКТП, 1937.
119. Н. И. Колчин, Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений, Машгиз, 1949.
120. Н. И. Колчин, Общие геометрические соотношения в зацеплении некруглых колес (в сборнике ЛОНИТОМАШ), кн. 13, Машгиз, 1949.
121. Н. И. Колчин и Ф. Л. Литвин, Методы расчета при изготовлении и контроле зубчатых изделий, Машгиз, 1952.
122. Н. И. Колчин, Кривизна сопряженных поверхностей в пространственных зацеплениях, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 49, Изд-во АН СССР, 1953.
123. Н. И. Колчин, Аналитические основы дифференциального метода исследования зубчатых зацеплений, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 64, Изд-во АН СССР, 1957.
124. Н. И. Колчин, Механика машин, т. I, Машгиз, 1962.
125. А. П. Котельников, Винтовое исчисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань, 1895.
126. Л. В. Коростелев, Кривизна взаимогнбаемых поверхностей в пространственных зацеплениях (в сборнике «Теория передач в машинах»), Машгиз, 1963.
127. Л. В. Коростелев, Кривизна взаимогнбаемых поверхностей в конических зацеплениях, «Изв. вузов, Машиностроение», № 14, 1963.
128. Л. В. Коростелев, Применение индикатрис Дюпена в контактной задаче теории упругости (в сборнике «Исследования в области металлорежущих станков» под ред. Н. С. Ачеркана), «Машиностроение», вып. 5, 1964.
129. Л. В. Коростелев, Кривизна поверхностей зубьев в пространственных зацеплениях, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 98—99, «Наука», 1964.
130. Л. В. Коростелев, Эвольвентная винтовая передача с линейным касанием зубьев, «Изв. вузов, Машиностроение», № 6, 1964.
131. Л. В. Коростелев, Кинематические показатели несущей способности пространственных зацеплений, «Изв. вузов, Машиностроение», № 10, 1964.
132. Л. В. Коростелев, Кривизна винтовых поверхностей, «Изв. вузов, Машиностроение», № 7, 1965.
133. Л. В. Коростелев, Особенности зацепления в полюсе червячной передачи, «Машиноведение», № 2, 1967.
134. Н. И. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1965.
135. М. А. Кренпес и М. С. Розовский, Зубчатые механизмы, Изд-во Московского университета, 1965.
136. И. С. Кривенко, Новые виды червячных передач на судах, «Судостроение», 1967.
137. Н. Н. Крылов, Кривизна поверхностей, имеющих линейный контакт, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 95, Изд-во АН СССР, 1963.
138. Н. Н. Крылов, Графический метод определения кривизны поверхностей, имеющих линейный контакт, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 100, «Наука», 1964.

139. Н. Н. Крылов, Поверхность приведенной кривизны, «Изв. вузов, Машиностроение», № 12, 1964.
140. Н. Н. Крылов, Теория зацепления огибающих двухпараметрического семейства поверхностей, «Изв. вузов, Машиностроение», № 12, 1963.
141. Н. Н. Крылов, Кинематика зубчатых передач с переменным углом между скрещивающимися осями, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 108, «Наука», 1965.
142. Н. Н. Крылов, Е. П. Солдаткин, Геометрия и кинематика контакта зубчатой передачи с двумя степенями свободы (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
143. Н. Н. Крылов, Глобoidное зацепление с вогнутым профилем червяка, «Труды МИИТ», вып. 195, 1964.
144. Н. Н. Крылов, Геометрия контакта сопряженных поверхностей, образованных двумя линиями (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
145. В. Н. Кудрявцев, Графоаналитический расчет передач с цилиндрическими зубчатыми колесами, Машгиз, 1949.
146. В. Н. Кудрявцев, Планетарные передачи с цевочным зацеплением, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 29, Изд-во АН СССР, 1949.
147. В. Н. Кудрявцев, Червячные передачи, ЛКВВИА, 1954.
148. В. Н. Кудрявцев, Зубчатые передачи, Машгиз, 1957.
149. В. Н. Кудрявцев, Планетарные передачи, «Машиностроение», 1966.
150. Аллан Х. Кэнди (США), Измерение цилиндрических косозубых колес с нечетным числом зубьев по двум роликам, «Станки и инструмент», № 2, 1966.
151. А. Л. Лащавер и Г. А. Лопато, Универсальный способ нарезания конических колес с круговыми зубьями и с постоянной по высоте пожкой зуба в условиях мелкосерийного производства, «Вестник технической информации МСС СССР», 1951.
152. А. Л. Лащавер, Универсальный двусторонний способ нарезания спиральнозубых конических колес (в сборнике «Передачи в машиностроении»), Машгиз, 1953.
153. А. Л. Лащавер, Г. А. Лопато, Мелкосерийное нарезание спиральнозубых конических колес «Станки и инструмент», № 3, 1955.
154. А. Л. Лащавер, Г. А. Лопато, Нарезание спиральнозубых конических колес мелкими сериями, «Станки и инструмент», № 5, 1961.
155. Л. Я. Лебедев, Технология глобoidных передач, Оборонгиз, 1957.
156. Л. Я. Либуркин, Контроль толщины зубьев плоского колеса цилиндрико-конической передачи с помощью шарика, «Ученые записки аспирантов и соискателей, Машиностроение», ЛПИ им. М. И. Калинина, 1963.
157. Л. Я. Либуркин, Основные вопросы геометрии ортогональной пегипоидной цилиндрико-конической передачи, «Изв. вузов, Приборостроение», № 2, 1964.
158. Л. Я. Либуркин, Условия зацепления и корригирования в ортогональной цилиндрико-конической передаче, «Изв. вузов, Приборостроение», № 4, 1964.
159. Л. Я. Либуркин, Геометрия зацепления конических колес, нарезанных долбяком (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
160. Г. А. Лившиц, Контроль кинематической точности прецизионных зубчатых колес (в межвузовском сборнике «Взаимозаменяемость и технические измерения в машиностроении»), Машгиз, 1960.
161. Г. А. Лившиц, Динамика зубчатой передачи в связи с точностью зацепления, ОНТИ, 1964.
162. Г. А. Лившиц, Г. Д. Швецова, Кинематическая погрешность зубчатых колес турбинных редукторов, ее контроль и проявление в динамике агрегата, ЦНИИТМАШ, 1955.
163. Г. А. Лившиц, Г. Д. Швецова, Циклическая погрешность зубофрезерования и выбор числа зубьев делительных колес прецизионных зубофрезерных станков, серия «Передовой научно-технический и производственный опыт», ЦИТЭИН, 1959.
164. Г. Н. Лист, Винтовые зубчатые колеса, «Станки и инструмент», №№ 16 и 17, 1957.
165. Ф. Л. Литвин, Цилиндрические винтовые колеса для передачи вращения между перекрещивающимися осями (в сборнике ЛОНИТОМАШ «Зубчатые зацепления», кн. 1), 1946.
166. Ф. Л. Литвин, Основные положения шевинг-процесса (в сборнике работ комитета по зуборезному делу, № 1, ЛОНИТОМАШ), 1939.
167. Ф. Л. Литвин, К вопросу о методике исследования пространственных зацеплений с линейным касанием поверхностей, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 49, Изд-во АН СССР, 1952.
168. Ф. Л. Литвин, С. Г. Прицентадь и Г. Ф. Шигорин, Производство многозаходных червячных передач с новой геометрией, Машгиз, 1953.

169. Ф. Л. Литвин, Аналитический метод исследования червячного зацепления с переменным передаточным числом и переменным межосевым расстоянием, «Труды ЛПИ им. М. И. Калинина», № 3, 1954.
170. Ф. Л. Литвин, Применение винтового исчисления и матриц к исследованию пространственных зацеплений, «Труды ЛПИ им. М. И. Калинина», № 182, 1955.
171. Ф. Л. Литвин и Н. С. Яблонский, О проектировании и нарезании зубьев многорядных некруглых колес, «Приборостроение», № 6, 1957.
172. Ф. Л. Литвин, Некруглые зубчатые колеса, Машгиз, 1956.
173. Ф. Л. Литвин, Аналитические методы исследования пространственных зацеплений, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 84, 1961.
174. Ф. Л. Литвин и Н. Б. Фирун, Зацепление конических колес с эпигипоидальным продольным профилем, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 84, 1961.
175. Ф. Л. Литвин, Способ нахождения линий контакта и предельных точек поверхностей зубцов пространственного зубчатого механизма, «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», № 6, 1962.
176. Ф. Л. Литвин, Геометрическое исследование разновидности зацепления М. Л. Новикова, «Труды Ленингр. механ. ин-та», № 24, 1962.
177. Ф. Л. Литвин и Чжан Цы-сянь, Матричный способ определения связи между кривизнами взаимногибасмых поверхностей, «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», № 3, 1963.
178. Ф. Л. Литвин, Подрезание зубцов плоских и пространственных зацеплений (в сборнике «Теория передач в машинах»), Машгиз, 1963.
179. Ф. Л. Литвин, Исследование условий зацепления в окрестности заданной точки контакта, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 100, «Наука», 1964.
180. Ф. Л. Литвин и Го Кай, Улучшение условий зацепления конических колес с дуговыми зубцами, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 98—99, «Наука», 1964.
181. Ф. Л. Литвин и Го Кай, Исследование зацепления конических зубчатых колес с нормально понижающимися зубцами, «Теория машин и механизмов», вып. 92—93, Изд-во АН СССР, 1962.
182. Ф. Л. Литвин, Новые виды цилиндрических червячных передач, Машгиз, 1962.
183. Ф. Л. Литвин, Г. Г. Павлов, И. Б. Шрайман, Н. С. Яблонский и В. А. Зискиндович, Зубонарезные станки для нарезания некруглых колес, Ленингр. Дом научно-технической пропаганды, 1964.
184. Ф. Л. Литвин и Ю. И. Шурьгин, Нарезание полуобкатных гипоидных колес на станках с наклоняющимся инструментальным шпинделем, «Станки и инструмент», № 10, 1964.
185. Ф. Л. Литвин, Применение кинематического метода для определения связи между кривизнами взаимногибасмых поверхностей, условий отсутствия подрезания зубцов, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 103, «Наука», 1964.
186. Ф. Л. Литвин, Синтез приближенных конических и гипоидных зацеплений с улучшенными параметрами (в сборнике «Анализ и синтез механизмов и теория передач»), «Наука», 1965.
187. Ф. Л. Литвин и А. А. Заостровский, Определение исходных параметров и корректур для них при нарезании конических колес с круговыми зубьями (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
188. Ф. Л. Литвин и В. В. Шульц, Цилиндрические винтовые колеса с новой геометрией, обеспечивающей повышенную нагрузочную способность (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
189. Ф. Л. Литвин и Ю. И. Шурьгин, Улучшение условий зацепления в полуобкатных гипоидных передачах (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
190. Ф. Л. Литвин, И. П. Бернацкий, Геометрические расчеты при изготовлении червяков вогнутого профиля, «Машиноведение», № 2, 1965.
191. Ф. Л. Литвин и Н. Г. Лидтрон, Определение погрешности делительной цепи зубофрезерных станков электромагнитным способом и влияние погрешности на точность паразасмых колес, «Труды технико-экономической конференции Невского завода им. Ленина», «Машиностроение», 1966.
192. Ф. Л. Литвин, Ю. А. Спичкин и В. С. Смирнов, Синтез приближенных зацеплений по локальным условиям, «Машиноведение», № 2, 1967.
193. Ф. Л. Литвин, Функция перемещения и передаточное число поводкового механизма (в сборнике «Анализ и синтез механизмов и теория передач»), «Наука», 1965.

194. Ф. Л. Литвин и Б. Д. Зильберман, Определение основных параметров колес полуобкатных конических передач с геликоидальной поверхностью зубьев колеса (в сборнике «Механика машин», вып. 1—2), «Наука», 1966.
195. Ф. Л. Литвин и М. Л. Ерихов, Применение кинематического метода для определения кривизны и условий отсутствия подрезания огибающей двухпараметрического семейства инструментальных поверхностей (в сборнике «Механика машин», вып. 3—4), «Наука», 1966.
196. Ф. Л. Литвин, В. Н. Кедринский, К. И. Гуляев и Н. Б. Фирун, Зацепление и нарезание конических колес с циклоидальными линиями зуба, «Станки и инструмент», № 2, 1967.
197. Г. А. Лопатю, Производительные методы нарезания конических пар с круговым равновысоким зубом, «Вестник машиностроения», № 10, 1955.
198. Г. А. Лопатю, Геометрический расчет гипоидных пар с круговыми равновысокими зубьями с большим передаточным отношением, «Труды Ленингр. механического ин-та», № 23, 1962.
199. Г. А. Лопатю, Н. С. Копысова, Двойной двусторонний метод нарезания конических пар, «Станки и инструмент», № 4, 1958.
200. Г. А. Лопатю, Расчет конических пар с круговым равновысоким зубом, «Вестник машиностроения», № 4, 1958.
201. Г. А. Лопатю, Конические колеса с равновысоким зубом, «Вестник машиностроения», № 9, 1952.
202. А. И. Лурье, Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1955.
203. А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1963.
204. В. С. Лютшин, Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов, «Машиностроение», 1968.
205. А. В. Мачитидзе, Влияние циклической погрешности зубошлифовального станка на точность профиля зубьев колеса, «Станки и инструмент», № 10, 1961.
206. А. В. Мачитидзе, Влияние циклической погрешности зубошлифовального станка на точность шага изделия, «Станки и инструмент», № 12, 1962.
207. Д. Р. Меркин, Алгебра свободных и скользящих векторов, Физматгиз, 1962.
208. Н. И. Мерцалов, Избранные труды, т. 2, Машгиз, 1950.
209. Ю. Ф. Морозкин, Основы аналитической теории механизмов, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 54, Изд-во АН СССР, 1954.
210. Н. И. Мусхелишвили, Курс аналитической геометрии, изд-во «Высшая школа», 1967.
211. А. Д. Мышкис, Лекции по высшей математике, «Наука», Москва, 1964.
212. Н. П. Нежурин, Расчет размера по роликам для косозубых эвольвентных колес с четным числом зубьев, «Вестник машиностроения», № 8, 1961.
213. Н. П. Нежурин, Упрощенный расчет размеров по роликам для косозубых эвольвентных колес с четным числом зубьев, «Вестник машиностроения», № 10, 1963.
214. А. Ф. Николов, Диаграмма винта и ее применение к определению сопряженных линейчатых поверхностей, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 37, Изд-во АН СССР, 1950.
215. А. М. Павлов, Определение кривизны взаимоогibaемых поверхностей в пространственных зацеплениях, «Труды ЛПИ им. М. И. Калинина», № 211, 1960.
216. А. М. Павлов, Кривизна взаимоогibaемых поверхностей, «Научно-техн. и информ. бюллетень ЛПИ им. М. И. Калинина», № 211, 1960.
217. А. И. Петрусович, Зубчатые и червячные передачи (в энциклопедическом справочнике «Машиностроение», т. 2), 1948.
218. А. И. Петрусович, Роль гидродинамической масляной пленки в стойкости и долговечности поверхностей контакта деталей машин, «Вестник машиностроения», № 1, 1963.
219. К. М. Писманик, Гипоидные передачи, «Машиностроение», 1964.
220. К. М. Писманик, Об оси зацепления червячных передач, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 39, Изд-во АН СССР, 1951.
221. К. М. Писманик и Г. А. Лопатю, Конические колеса с круговыми равновысокими зубьями (в сборнике «Новые методы обработки конических зубчатых колес»), Машгиз, 1954.
222. К. М. Писманик, М. Г. Сегаль, Использование наклона шпинделя резцовой головки при нарезании конических колес, «Станки и инструмент», № 2, 1961.
223. М. С. Полоцкий, Долбяки для нарезания зубчатых цилиндрических колес с эвольвентным профилем (в энциклопедическом справочнике «Машиностроение», т. 7), 1947.

224. С. Д. Пономарев и др., Расчеты на прочность в машиностроении, Машгиз, 1958.
225. О. А. Пыж, Червячные передачи, Сборник работ комитета по зуборезному делу, ЛОНИТОМАШ, № 1, 1939.
226. О. А. Пыж, Цевочное зацепление. «Вестник машиностроения», № 1, 1946.
227. П. К. Рашевский, Дифференциальная геометрия, ГОНТИ, 1939.
228. Л. Н. Решетов, Корригирование эвольвентных зацеплений, ОНТИ, 1935.
229. Л. Н. Решетов, Геометрия и кинематика зубчатых механизмов и пути их развития (в сборнике «Передачи в машиностроении»), Изд-во АН СССР, 1953.
230. Л. И. Сагин, Изготовление глобоидных передач и пути повышения их нагрузочной способности, ИТЭИН, 1966.
231. Л. И. Сагин, Улучшение методов производства и эксплуатационных качеств глобоидных передач (в сборнике «Труды ЦНИИТМАШ»), № 14, 1960.
232. И. А. Сакун, Винтовые компрессоры, Машгиз, 1960.
233. М. Г. Сегаль, Некоторые вопросы расчета наладочных данных для нарезания полуобкатных конических передач (в сборнике «Прогрессивная технология конических зубчатых колес»), ИНТИП РК СМ БССР по КНИР, Минск, 1964.
234. М. Г. Сегаль, Корректирование движения обкатки при нарезании зубчатых колес полуобкатных конических передач, «Изв. вузов, Машиностроение», № 9, 1963.
235. М. Г. Сегаль, Повышение качества зацепления полуобкатных конических передач, «Станки и инструмент», № 5, 1962.
236. М. Г. Сегаль, Руководство по расчету геометрических параметров и наладочных данных для нарезания гипоидных полуобкатных пар на станках мод. 5Б231, 5Б232 и 5А27С4П, Саратов, ЦБТИ, 1966.
237. М. Г. Сегаль, Особенности конических и гипоидных передач с геликоидальной поверхностью зубьев колеса, «Станки и инструмент», № 11, 1965.
238. И. И. Семенченко, Режущий инструмент, т. 4, Машгиз, 1944.
239. А. В. Слепак, Зубчатые колеса «Клиггельнберг», «Станки и инструмент», № 1, 1938.
240. В. С. Смирнов, Алгоритм решения обратной задачи зацепления (в сборнике «Труды аспирантов ЛИТМО»), 1966.
241. Б. А. Тайц, Анализ погрешностей различных методов зубообработки (в межвузовском сборнике «Взаимозаменяемость и технические измерения в машиностроении»), Машгиз, 1960.
242. Б. А. Тайц, Анализ некоторых методов контроля цилиндрических зубчатых колес (в межвузовском сборнике «Взаимозаменяемость и технические измерения»), Машгиз, 1961.
243. О. Ф. Тищенко, Зубчатые передачи часовых механизмов, Машгиз, 1963.
244. Р. В. Федякин и В. А. Чесноков, Зубчатые передачи с зацеплением Новикова, «Вестник машиностроения», № 4, 1958.
245. Р. В. Федякин и В. А. Чесноков, Расчет зубчатой передачи Новикова, «Вестник машиностроения», № 5, 1958.
246. Ж. Фавар, Курс локальной дифференциальной геометрии, Изд-во иностр. лит., 1960.
247. И. А. Фрайфельд, Инструменты, работающие методом обкатки, Машгиз, 1948.
248. И. А. Фрайфельд, Расчет и конструкция специального металлорежущего инструмента, Машгиз, 1957.
249. Р. Фрезер, В. Дунжан и А. Коллар, Теория матриц и ее приложения, Изд-во иностр. лит., 1950.
250. Н. Т. Халёбский, О расчете размера по роликам для косозубых колес с нечетным числом зубьев, «Вестник машиностроения», № 10, 1963.
251. С. Т. Цуккерман, Точные механизмы, Оборонгиз, 1941.
252. Л. Д. Часовников, Передачи зацеплением, Машгиз, 1961.
253. С. А. Черкудинов, О кривизне сопряженных профилей круглых колес, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 9, Изд-во АН СССР, 1947.
254. Чжан Цы-сянь, Кинематический анализ механизмов с низшими парами методом матриц 4-го порядка, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 92, Изд-во АН СССР, 1962.
255. В. М. Шапников, Планетарные редукторы с внецентроидным цевочным зацеплением, Машгиз, 1948.
256. Г. И. Шевелева, Зацепление приближенных конических колес (в сборнике «Теория передач в машинах»), «Машиностроение», 1966.
257. А. Шибель, Зубчатые колеса с непрямыми зубцами, ОНТИ, 1932.
258. В. А. Шишков, Образование поверхностей резанием по методу обкатки, Машгиз, 1951.

259. В. А. Ш и ш к о в, Теория образования и зацепления глобоидных передач (в сборнике «Передачи в машиностроении»), Машгиз, 1951.
260. В. А. Ш и ш к о в, Элементы кинематики образования и зацепления зубчатых передач (в сборнике «Теория и расчет зубчатых передач», ЛОНИТОМАШ), кн. 6, Машгиз, 1948.
261. В. А. Ш и ш к о в, Применение кинематического метода исследования зубчатых пар и способов их обработки, «Изв. вузов, Машиностроение», вып. 5, 1958.
262. В. А. Ш и ш к о в, Влияние погрешностей сборки червячной передачи на плавность зацепления, «Станки и инструмент», № 10, 1959.
263. И. Я. Ш т а е р м а н, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
264. Ю. И. Ш у р ы г и н, Геометрические соотношения начальных поверхностей гипоидной передачи, «Изв. вузов, Машиностроение», № 4, 1965.
265. В. А. Ю д и н, Основы теории планетарно-цевочного редуктора с внутренним вращением зацеплением, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 13, Изд-во АН СССР, 1948.
266. F. A l t m a n n, Bestimmung des Zahnflankeneingriffs bei allgemeinem Schraubengetrieben, «Forschung aus dem Gebiete des Ingenieurwesens», Spt.—Okt., 1937.
267. M. L. B a x t e r, Basic Geometry and Tooth Contact of Hypoid Gears, «Industrial Mathematics», № 2, 1961.
268. J. S. B e g g s, Advanced Mechanism, The Macmillan Company, New York, 1965.
269. R. B e y e r, Das Matrizenkalkül als Hilfsmittel zur Untersuchung räumlicher Gelenkgetriebe, «Feinwerktechnik», № 9, 1957.
270. G. B r a n d n e r, Fertigungsgeometrie kreisbogenverzahnten Kegelräder, «Maschinenbautechnik», № 10—11, 1962.
271. G. B r a n d n e r, Verzahnverfahren und neue Verzahnmaschinen für kegelige Verzahnungen, «Maschinenbautechnik», № 4, 1962.
272. E. B u c k i n g h a m, Analytical Mechanics of Gears, New York, 1949.
273. E. B u c k i n g h a m, H. R y f f e l, Design of Worm and Spiral Gears, New York, 1960.
274. P. C o r m a c, A Treatise on Screws and Worm Gear, their Mills and Hobs, London, 1936.
275. I. D e n a v i t, Displacement Analysis of Mechanisms Bases on 2×2 Matrices of Dual Numbers, «VDI-Berichte», т. 29, 1958.
276. A. D o r n i g, E. M a s s a, «Rivista Ingegneria», т. V, № 3, 4, 6, 7, 1955.
277. W. D u d l e y, «Gear Handbook», New York, 1962.
278. D. W. D u d l e y, H. P o r i t s k y, On Cutting and Hobbing Gears and Worms, «Journal of Applied Mechanics», № 3—4, 1943.
279. L. E u l e r, «Novi Comm. Acad. Sc.-Petersburg», 1781.
280. V. F r a n c i s, J. S i l v a g i, «Prod. Eng.», т. 21, № 7, 1950.
281. H e r t z, Über die Berührung fester elastischer Körper, Gesammelte Werke, Band I, Leipzig, 1895.
282. A. I s h i b a s h i, The Effect of Ciclic Errors on Geartoothprofile, «Bull. ISME», т. 5, № 20, 1962.
283. K ä m f, Kiesel, Berechnung und Herstellung von Zahnrädern, Leipzig, 1956.
284. W. K r u m m e, Klingelnberg-Paloid-Spiral-Kegelräder, Berlin, 1950.
285. D. M a n g e r o n, C. D r a g a n, Aplicarea unei noi metode tensoriale la studiul cinematic la mecanismului bielamanivela spatiale, «Bulet. Inst. Polit», Iasi, т. IV (VIII), 1—2, 1958.
286. G. N i e m a n n, E. H e y e r, Untersuchungen an Schneckengetrieben, VDI, № 6, 1953.
287. K. O c h e d u s z k o, Kola zebate, Wydawnictwa naukowo-techniczne, Warszawa.
288. T. O l i v i e r, Theorie geometrique des engrenages, Paris, 1842.
289. U. O l s o n, Non-Circular Cylindrical Gears, «Acta Politechnica», т. 2, № 10, 1953, 135.
290. U. O l s o n, Non-Circular Bevel Gears, «Acta Politechnica Scandinavica», Me. 5, № 5, (256/1959).
291. P e y r e b r u n c, Application und Design of Noncircular Gears, «Machine Design», № 12, 1953.
292. O. S a a r y, The Mathematical Background of Spiroid Gears, «Industr. Math.», № 7, 1956.
293. S c h r e i e r G., Stirnrad-Verzahnung, VEB Verlag «Technik», Berlin, 1961.
294. G. M. S p e a r, C. B. K i n g, M. L. B a x t e r, Helixform Bevel and Hypoid Gears, «Transaction of the ASME», ser. B, VIII, т. 82, № 3, 1960.
295. S t r i b e k, Versuche mit Schneckengetrieben, Z. VDI, 1897, стр. 936.
296. S t ü b l e r, «Z. für Math. und Physik», т. 11, 1911.
297. O. U f e r t, Dynamische Drehfehlermessungen an Walzerfräsmaschinen und ihr Einfluss auf die Genauigkeit gefräster Großgetrieberäder, VDI, № 103, 1961.
298. «Zahnräder», Lehrgang, приложение к журналу «Der Maschinenbau», 1956.

Предметный указатель

- Аксонд 99
— конических колес 482
Анализ зубчатого механизма 78, 210
- Бицептроида 28
- Высота головки зуба 483
— ножки зуба 483
- Геликоид 109, 333, 334
Гиперболоид вращения однополостный 99
Гипотрохоида 259
Гипоциклоида 259
Головка резцовая 497, 533, 548, 552, 560
- Дифференцирование матрицы 17
— произведения матриц 17
Долбяк 35, 232, 242
- Задача Герца 184
Замкнутость центроид 293
Зацепление внецентроидное цевочное гипоциклоидальное 277
— — — эпициклоидальное 276
— внешнее 29, 242
— внутреннее 29, 250
— гипоидное 499
— Глисона 485
Зацепление долбяка с нарезаемым колесом 243, 245
— Клингелльберга 485
— колес для передачи вращения между параллельными осями 333
— колес Рута 278
— колеса с рейкой 232, 338
— коническое 499
— Новикова 350
— октоидальное 491
— пары эвольвентных профилей 235
— плоское 10, 25
— приближенное 204, 499
— — гипоидное 11
— — коническое 11
— прямозубых конических колес 482
— роторов 282
— спироидное 9
— цевочное 258
- Зацепление цевочное внецентроидное 276, 278
— — внутреннее 273
— циклоидальное 258, 267, 271
— цилиндрических колес 333, 359
— червячное 385
— — с глобоидным червяком 385, 452, 462
— — — Кона 462
— — —, модификации 462
— — с цилиндрическим червяком 385
— эвольвентное 10, 225
— эвольвентных винтовых колес 365
Зацепления сопряженные 197, 557
— — с линейным касанием 193
— — с точечным касанием 196
Зона внеполюсных передач 254
— полюсных передач 254
Зубцы равновысокие 530
- Измерение толщины зубцов по общей нормали 255, 343
— — — роликами 345, 346
— — — шариками 256, 343
Индикатрисы нормальных кривизн 187
— — уклонений 187
Интерференция колес 238, 375
— — второго рода 250
— — первого рода 252
— — радиальная 247
Исправляющая функция 303
- Касание кромочное 282
— линейное 193
— линейчатое 541
— точечное 193
Клинья масляные 391, 393
Колеса винтовые 11, 336, 359
— зубчатые некруглые 9, 286
— — — с двукратными овалами 316
— конические косозубые 485
— — обкатные с круговыми зубцами 497
— — полуобкатные с геликоидальной поверхностью зубцов (helixform) 11, 533
— — прямозубые 482, 485
Колеса конические с циклоидальным профилем зуба производящего колеса 552
— — косозубые 336, 342
— — Новикова 350
— — скорректированные 233 367

Колеса Рута 258, 278
 — цилиндрические 333
 — — винтовые с новой геометрией 380
 — эвольвентные винтовые 364
 — —, обозначения параметров 378
 — — косозубые 336
 — — шевронные 441
 — эллиптические 299
 Колесо инструментальное 35
 — плоское производящее 484
 Компрессор винтовой 333
 Контакт линейный 367
 Контур блокирующий 240, 252
 — исходный 230
 Коэффициент масштабный некруглых колес 293
 — одновременности зацепления 237
 — перекрытия 237, 273, 278, 373
 — смещения 233, 244
 Конус начальный 102, 482
 Координаты однородные 18
 Корригирование высотное 239
 — угловое 239
 — червячной передачи 391
 Кривая дискриминантная семейства пространственных линий 169
 — переходная 74
 Кривизна главная 152
 — нормальная 154, 155
 — — приведенная 161
 — огибаемой поверхности 151
 — огибающей поверхности 151
 — семейства профилей 59, 62
 — поверхности зубцов 400, 492
 — полная (гауссова) 154
 Кривые взаимноогигаемые 266
 — циклические 259

Линии зацепления, рабочий участок 236, 373
 — —, граничная точка 70
 — контакта червяка и колеса 425, 451
 — координатные геликоида 110
 Линия зацепления винтовых колес 362, 369
 — — колеса и рейки 228
 — — профилей 40
 — — узловая 137
 — — — верхняя 137
 — — — нижняя 137
 — — центронт 28
 — — — червячной передачи с вогнутым профилем червяка 425, 430
 — контакта 115, 376, 381, 459, 463, 467
 — — в глобоидном червячном зацеплении 455, 457
 — координатная 106
 Линия рабочая 143, 184, 376
 Локализация контакта 390, 471, 476, 491

Матрица 13
 — единичная 14
 — квадратная 14

Матрица кососимметрическая 14
 — обратная 16, 22
 — симметрическая 14
 — столбцовая 14
 — транспонированная 14
 Метод винтов 13
 — Гохмана 10, 42, 115
 — кинематический 45, 51, 118
 — матричный 11, 13
 — обкатки 269
 — обращения движения 31
 — профильных нормалей 47, 329
 Множитель нормирующий 26, 107

Направления асимптотические 155
 Нарезание зубцов некруглых колес 321, 286
 — — конических колес 484, 498, 501, 530, 533, 546, 552
 — — реечным инструментом 34, 321
 — — конических колес двойное двустороннее 499
 — — — — одностороннее 498
 — — — — простое двустороннее 499
 — — долбяком 324
 — — эвольвентных колес 230
 — червяков 403, 408
 — червячных колес 390, 433
 Насос винтовой 333
 Начальные поверхности 100
 Нормали профильные 34
 Нормаль к поверхности 106, 107

Огибание двухпараметрическое 113, 123
 — — однопараметрическое 111, 118
 Окружность начальная 236
 — основная 227
 Оси сопряженные 126
 Ось винтовая 97, 99
 — зацепления 124, 333, 377
 — составляющих вращений 126
 Ошибка первичная 215
 — перемещения 214
 — положения 214

Параметры движения точки контакта 59, 140
 Передача вращения между параллельными осями 28, 125, 333
 — — — — перекрещивающимися осями 83, 125, 359
 — глобоидная червячная 452
 — —, модификации 462
 — — Кона 452
 — зубчатая 9
 — червячная 134, 179, 386, 421
 — — корригированная 391
 — — с локализованным контактом 391
 — цилиндрико-глобоидная ортогональная 465
 — цилиндрико-коническая неортогональная 465, 477
 — — ортогональная 465, 474
 Перемещение компенсирующее 215

- Площадка контакта мгновенная 184
 Поверхности взаимогнбаемые 111
 — начальные 100, 386
 — сопряженные 197, 360, 364, 390
 Поверхности сопряженные с линейным касанием 196
 — — с точечным касанием 196
 Поверхность винтовая архимедова 392, 408
 — — конвольютная 392, 403
 — — нелинейчатая 392, 416
 — — эвольвентная 336, 392, 409
 — зацепления 115, 120, 478, 489
 — — червячной передачи 413, 415, 458
 — зубцов колеса 460, 468, 474, 478, 491
 — производящая 164, 488, 500, 538, 553
 Погрешности циклические 219
 Подрезание зубцов 66, 75, 169, 182, 222, 398, 448, 494
 Поле зацепления 396
 — нормалей векторное 177
 Полюс зацепления 29
 Построение Бобилье 57, 260
 Преобразование вращательного движения в поступательное 30
 — координат 18, 19, 21, 83
 — эллиптических центроид 315
 Принцип нарезания зубцов 34
 Произведение матриц 15
 Производная матрицы 17
 — передаточного отношения 79
 Профили зубца сопряженные 34, 267
 Профиль зубца действительный 222
 — — приведенный 230
 Пятно контакта 184, 523
- Радиус кривизны профилей зубцов приведенный 57
 — — центроиды 326
 Расстояние междетровое 241
 Резец-летучка 433
 — черновой 564
 Рейка инструментальная 35, 232
 Роторы газовых счетчиков 282
 Ряд колес дифференциальный 301
 — — планетарный 301
 — — простой 301
- Сближение поверхностей 188, 189
 Снятие зацеплений 192, 204
 Сложение матриц 15
 Спираль архимедова 227
 Способы нарезания зубцов 202, 230, 433, 498
 — Оливье 194
- Теорема зацепления основная (теорема Виллиса) 32
 — Камуса 266
 — пространственных зацеплений 118
 Толщина зубцов 234, 240, 254
- Точка гиперболическая 155
 — граничная огнбаемого профиля 69
 — контакта 42
 — кривой особая 25, 67
 — поверхности обнкновенная 106
 — — особая 106
 — параболнческая 155
 — эллиптическая 154
 Точки контакта узловые 174
 — центроид соответственные 34
- Угол давления 332
 — зацепления 236
 — подъема винтовой линии 386
 — профиля 228
 Уклонение 187
 Уравнение гипотрохоиды 264
 — зацепления профилей 45, 130, 152, 177, 382, 395, 451, 463, 467, 477, 489, 502, 569
 — касательной к плоской кривой 26
 — — плоскости 107
 — линии зацепления 47, 354, 369
 — нормали 26, 108
 — оси зацепления 335, 377
 — плоской кривой 25
 — поверхности геликоида 109
 — удлиненной эвольвенты 226
 — укороченной эвольвенты 226
 — эволюты профилей 52, 326
 — Эйлера — Савари 55
 — эпитрохоиды 261
 Уравнения боковой поверхности зубцов 106
 — — — червяка 407
 — винтовой оси 98
 — поверхности витков червяка 429, 454
 — — червяка 419, 423
 — зацепления глобоидной червячной передачи 456
 — контактной линии 115, 122, 337, 354, 377, 413, 414, 420, 423, 455, 460, 474, 478
 — огнбающей семейства кривых 40
 — — — поверхностей 111, 113
 — переходной кривой 76
 — поверхности зацепления 120, 468
 — профиля зубцов колеса 220
 — — дисковой фрезы 446, 447, 448
 — — пальцевой фрезы 443, 444
 — — резца-летучки 434, 437, 439, 441
 — узловых линий зацепления 437
 — центроид колес при плоском зацеплении 29
 — — искруглых колес 320, 307
 — эвольвентной винтовой поверхности 336
 Условие выпуклости центроид 296
 — замкнутости центроид 293
 — отсутствия вогнутости центроид 297
 — — подрезания 71, 75, 182, 233, 469, 478, 526
 — сопряженности 118
 Условия зацепления 206

Фреза дисковая 444
 — Клингелльберга 124
 — пальцевая 444
 — червячная 232, 390
 Формула Родрига 152
 / Формулы Френэ 62
 Функция передаточного отношения 28, 78, 211
 — — — механизма некруглых колес 291
 — — — несимметричная 310
 — перемещения механизма 211, 299, 317
 — — оваловых колес
 — положения 298, 314
 — ошибок положения 218
 — $\text{inv } \alpha$ 227

Характеристика (линия контакта) 376

Цевка 271
 Центр вращения мгновенный 28
 Центроида 28
 — долбяка 35
 — некруглого колеса 30, 315
 — рейки 31
 Центроиды колес 28, 307
 Цилиндр направляющий конвольютного червяка 406

Цилиндр начальный 82
 — основной 337

Червяк архимедов 393, 408
 — — трехзаходный 409
 —, воспроизводимый коническим дисковым инструментом 392, 416
 —, — тороидальным инструментом 421, 427
 — конвольютный 393, 403, 433
 — — трехзаходный 407
 — эвольвентный 392, 410
 — — многозаходный 410

Шевингование 9, 380
 Шлифование 9
 — червяка 411, 421, 427

Эвольвента 49, 226
 — удлиненная 74, 226
 — укороченная 74, 226
 Эволюта 49
 — профилей зубцов некруглого колеса 327
 Эпитрохоида 259
 Эпициклоида 259
 — удлиненная 259
 — укороченная 259

Л 64
6П5.1
УДК 621.83

Файдор Львович Литвин
Теория зубчатых зацеплений
М., 1968 г., 584 стр. с илл.
Редактор *Л. В. Коростелев*

Техн. редактор *А. А. Благовецкая* Корректоры *Т. С. Вайсберг, С. П. Емельянова*

Сдано в набор 12/III 1968 г. Подписано к печати 27/IX 1968 г. Бумага 70 × 108/16.
Физ. печ. л. 36,5. Условн. печ. л. 51,10. Уч.-изд. л. 43,07. Тираж 7600 экз. Т-14815.
Цена книги 2 р. 89 к. Заказ № 152

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9